1763

Dilucidationes de resistentia fluidorum

Leonhard Euler

DILVCIDATIONES
DE RESISTENTIA FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Duplici modo quaestio de resistentia, quam corpora solida in fluidis mota patiuntur, tractari solet, altero negotium tantum vero proxime plerumque conficitur, dum quantitas resistentiae per regulam satis concinnam ad calculum reuocatur; altero vero resistentiae doctrinam ex ipsa fluidorum natura et pressione, quam in corpora exerunt, per profundissimas Hydrodynamicae inuestigationes constituere Geometrae sunt conati. Quo posteriori modo si negotium ad finem perducere liceret, omnia, quae ad mensuram resistentiae pertinent, inde accuratissime definiri possent, neque amplius coacti essemus, ad modum priorem confugere, quo prope tantum vera resistentiae magnitudo exhibetur. Verum etiam nunc tam longe ab ista perfecta resistentiae cognitione abesse videmur, vt priori modo, etiamsi eius defectum probe norimus, minime carere queamus, sed eo potius, quoties resistentia indaganda occurrit, vti debeamus.

II. Prior autem modus, quo Newtonus plurimum est vsus, etiamsi eius aberrationem a veritate non ignorasse videatur, hac regula ad calculum inprimis accommodata continetur, vt resistentia rationem compositam sequi censeatur, ex ratione duplicata celeritatis, qua fluidum impingit, et ratione pariter duplicata sinus anguli, quem directio impulsionis cum superficie percussa constituit. Hinc ergo si pro allisione fluidi perpendiculari, vbi angulus ille fit rectus, resistentiae quantitatem nouerimus, facile erit, eam pro quauis allisione obliqua assignare. At vero si fluidum perpendiculariter superficiem quampiam planam feriat, resistentia aequalis aestimatur ponderi columnae eiusdem fluidi, cuius basis sit ipsa superficies percussa, altitudo vero congruat cum ea, ex qua graue cadendo ipsam fluidi celeritatem esset impetraturum.

III. Haec regula cum ob facilem vsum in calculo, tum vero ideo potissimum commendari meretur, quod a veritate plerumque haud notabiliter abludere deprehendatur. Nam quod ad principia attinet, quibus innititur, nullum plane est dubium, quin ea nimis sint vaga, atque a vero statu, ad quem accommodantur, remota, quam vt conclusio inde deducta pro certa admitti queat. Maximam enim partem haec regula est petita ex collisione corporum, dum fluidum continuo in corpus data celeritate et secundum directionem motus sui impingere, conflictumque exerere concipitur. At vero certum est, fluidum neutiquam in corpus hoc modo impingere, sed antequam ad corpus perueniat, tam suam directionem, quam celeritatem, ita inflectere, vt cum ad corpus peruenerit, secundum ipsam eius superficiem praeterlabatur, nullamque aliam vim in corpus exerat, praeter pressionem, quae ipsi in

singulis

ſingulis contactus punctis conuenit. Quam ob rem concluſio, quae ex ratiocinio tam peruerſo deduci ſolet, minime pro vera haberi poteſt.

IV. Quo hoc clarius perſpiciamus, flumen concipiamus, quod data celeritate ſecundum directionem OV feratur; iam vero in hoc flumine corpus collocari AME, quod quantam vim a flumine ſit ſuſtentaturum, definiri oporteat. Atque per regulam vulgarem haec vis ita inueſtigatur, quaſi in ſingula corporis puncta M vena aquea IM ſecundum directionem fluminis, eaque celeritate, qua flumen progredi aſſumimus, incurreret, ac per conflictum verum corpori vim inferret. Interim tamen ſi actionem fluminis, prouti re vera ſe habet, perpendamus, mox percipiemus, tractus ſeu quaſi riuulos fluminis, qui ſupra corpus in notabili diſtantia celeritatem ſuam cum directione retinuerant, vti *f*, *f*, *f*, *g*, *g*, *g*, etc. cum propius ad corpus acceſſerint, curſum ſuum inflectere, atque tandem iuxta corporis latera defluere, quae deflexio in figura exhibetur. Ex quo manifeſtum eſt, nusquam eiusmodi conflictum fieri, qualis in conſtitutione regulae vulgaris concipi ſolet. Tab. II. Fig. 1.

V. Quin potius hinc manifeſtum eſt, iſtam aquae vim, quae ſub reſtiſtentiae nomine comprehenditur, a preſſione aquae iuxta corpus praeterlabentis proficiſci, quam idcirco preſſionem inueſtigari neceſſe eſt, ſi reſiſtentiam accurate aſſignare velimus. Quare vera ratio reſiſtentiam determinandi, qua alter modus ſupra memoratus continetur, huc redit, vt preſſionem quam

quam corpus in singulis punctis a fluido sustinet, definiamus; at vero haec quaestio altioris est indaginis, quam vt eius enodationem a profectibus, quos adhuc in hydrodynamicis fecimus, expectare queamus. Hic enim singuli riuuli, ex quibus fluuius constat, et quemadmodum cursum suum circa corpus inflectant, considerari, atque omnes illae lineae curuae *ff*, *gg*, *hh*, etc. quasi sub communem aequationem redigi debent; vnde deinceps aquae celeritas in singulis cuiusque riuuli punctis concludi queat. Hac autem demum celeritate cognita, ipsam pressionem, cui hoc negotium innititur, assignare licebit, a tam perfecta autem motus fluidorum cognitione adhuc longe absumus.

VI. Quae Celeb. *Alembertus* de resistentia fluidorum in peculiari Tractatu est commentatus, hanc summam difficultatem, veram resistentiam inuestigandi, magis demonstrant, quam leuant. Cum enim Vir acutissimus omni adhibita sagacitate hanc quaestionem adaequate explicare haud valuerit, vt inde resistentia, quam quaeuis corpora in aqua mota patiuntur, assignari possit; magno hoc nobis est argumento, quaestionem tantopere esse difficilem, vt vires humanas tantum non superare videatur. Quae ego etiam nuper in aliquot dissertationibus de motu fluidorum exposui, nullum subsidium huc afferunt. Etiamsi enim omnia, quae ad motum fluidorum pertinent, ad aequationes analyticas reduxi, tamen ipsa Analysis minime adhuc ita est exculta, vt illis aequationibus resoluendis sufficiat. Quae porro alii de hoc argumento sunt meditati, haud feliciori successu vires suas ingenii sunt experti.

VII. Etsi

VII. Etsi autem determinatio pressionis in genere, hoc est in omnibus punctis fluidi, tam a tractu singulorum riuulorum, quam ab aquae celeritate pendet, tamen inueni, si quaestio ad vnicum riuulum restringatur, tum pressionem in singulis eius locis per solam celeritatem definiri. Quare cum corpus AME ab vnico riuulo f, f, f contingatur, omnisque resistentia ab eius pressionibus solis oriatur, si modo pressionem huius riuuli in singulis eius punctis cognosceremus, inde facile resistentiam, quam corpus a fluuio sustinet, definire possemus. Tametsi autem ista celeritatis cognitio per riuulum corpori proximum non minoribus difficultatibus sit subiecta, quam determinatio pressionis generatim considerata, tamen hoc inde lucri nanciscimur, vt si nobis licuerit, siue per experientiam, siue vndecunque, celeritatem fluidi iuxta corpus praeterlabentis cognoscere, hoc solum nobis satis sit futurum ad veram resistentiam corporis accurate determinandam.

VIII. Si enim ponamus celeritatem, qua aqua circa elementum corporis M praeterlabitur, debitam esse altitudini v, atque assumamus, vt vulgo fieri solet, omnes riuulos in plano horizontali versari, ex iis, quae demonstraui de motu fluidorum in genere, colligitur, pressionem aquae in puncto M exprimi per altitudinem $k-v$, ita vt quantitas k pro toto riuulo f, f, f, f, eundem obtineat valorem, ideoque in praesenti negotio pro constanti haberi queat, etiamsi pro diuersis riuulis diuersos sortiatur valores. Hanc autem pressionem $k-v$ ita interpretari oportet, vt corpus in M a pondere columnae aqueae, cuius altitudo sit $=k-v$, sollicitari sit censendum. Pro basi scilicet huius columnae sumi debet elementum superficiei corporis in M, quod ab ista vi normaliter vrgebitur, vti in omnibus pressionibus euenit, hincque porro more solito quantitatem totius resistentiae colligere licebit.

IX. Quanquam autem circa celeritatem aquae apud singula puncta M nihil habemus exploratum ex Theoria, tamen si experientiam in subsidium vocemus, egregias resistentiae proprietates cognoscemus. Cum enim aucta celeritate in eodem riuulo pressio diminuatur, contra vero augeatur celeritate imminuta, certo affirmare poterimus, in quibus locis corporis AME aqua velocius praeterlabatur, ibi resistentiam esse minorem, quam iis locis, vbi tardius praeterfluit: quae veritas si probe perpendatur, plura alia insignia consectaria suppeditare poterit. Ac merito hoc ingens paradoxon videri debet, quod a maiori celeritate resistentia minor, a minori autem celeritate resistentia maior oriatur; quod primo intuitu regulae vulgari directe aduersari videtur. Sed omnis difficultas euanescet, si perpendamus, hic diuersas fluidi celeritates, quibus eodem tempore superficiem corporis stringit, inter se comparari. Neque minus certum manet, si vel fluuius velocius moueatur, vel corpus celerius aduersus aquam trudatur, resistentiam quoque maiorem esse futuram.

X. Viciſſim ergo vbi per experientiam resistentia maior deprehenditur, ibi celeritas fluidi praeterlabentis minor sit necesse est; cum igitur nouerimus, in

iis

iis superficiei corporis partibus, ad quas directio fluminis OV propius ad perpendicularem accedit, resistentiam esse maiorem, atque omnium maximam, vbi directio fluuii OV ad corporis superficiem sit normalis; in istis locis quoque celeritas fluidi praeterlabentis minor esse debet. Ad angulum scilicet AMI erit respiciendum, qui quo fuerit maior, seu recto propior, ibi celeritas aquae tanto minor sit necesse est, contra autem eo maior, vbi hic angulus diminuitur. In figura igitur exhibita celeritas aquae praeterlabentis circa A erit minima, circa E vero maxima: atque hoc etiam experientia manifesto declarat, qua constat aquam circa verticem A plerumque fere penitus stagnare, imprimis si angulus OAM fuerit rectus.

XI. Quoniam igitur nouimus per regulam vulgarem, quantumuis debili nitatur fundamento, resistentiam tamen parum a vero aberrantem obtineri, eius beneficio celeritatem aquae iuxta corpus praeterlabentem vero proxime assignare poterimus; et quoniam in eodem riuulo O in singulis locis $ffff$E amplitudo reciprocam tenet rationem celeritatis, hinc simul amplitudinem istius riuuli corpus contingentis in singulis locis definire licebit. Tum vero porro primo hoc riuulo constituto simili ratione riuulus sequens $fggf$, seu secundus, ex hocque tertius $ghhg$, indeque sequentes vero proxime designari poterunt. Quae determinationes etsi a veritate aliquantum recedere sunt censendae, tamen in tam ardua inuestigatione insigni vsu non carebunt. Quodsi enim iam vero proxime tractum singulorum riuulorum vna cum aquae celeritate cognouerimus,

mus, nullum est dubium, quin deinceps multo facilius summas difficultates, quibus haec quaestio est involuta, superare valeamus. Inde saltem colligere licebit, quemadmodum aequatio generalis figuram singulorum riuulorum complectens debeat esse comparata.

XII. Quodsi autem celeritatem fluuii, qua in notabili a corpore distantia circa O secundum directionem OV mouetur, vel, quod eodem redit, celeritatem, qua ipsum corpus AME in aqua stagnante secundum directionem AO fertur, debitam esse ponamus altitudini c, per regulam vulgarem nouimus, vbi corporis superficies ad directionem fluminis sit perpendicularis, ibi resistentiam exprimi per ipsam altitudinem c, sin autem in loco M angulus incidentiae AMI, ducta recta MI directioni AO parallela, ponatur $=\Phi$, per eandem regulam constat, fore resistentiam in $M = c \sin.\Phi^2$. Hinc ergo, comparatione instituta, si aquae iuxta corpus praeterfluentis celeritas in M debita statuatur altitudini v, hanc adipiscemur aequationem:

$$c \sin.\Phi^2 = k - v, \text{ ideoque } v = k - c \sin.\Phi^2.$$

Quocirca ex hac formula veram aquae celeritatem ad singula corporis puncta M assignare valebimus.

XIII. Tantum ergo superest, vt hinc constantem quantitatem k definiamus, quae quidem ex casu, vbi angulus Φ est rectus, facile colligetur. Experientia enim testatur, in his locis celeritatem aquae allabentis esse nullam, tum vero etiam nulla adest ratio, cur aqua, vbi directio fluminis ad superficiem corporis est perpendicularis, in hanc potius plagam, quam aliam, dilabelaberetur. Ex quo conficitur, si angulus Φ fuerit rectus, ideoque $\sin.\Phi = 1$, tum esse oportere $v = 0$; vnde manifesto fit $k = c$, seu ista constans k praecise est aequalis altitudini fluminis celeritati debitae. Posita autem $k = c$, habebimus $v = c - c\sin.\Phi^2$, seu $v = c\cos.\Phi^2$, hincque $\sqrt{v} = \cos.\Phi.\sqrt{c}$: vnde hanc insignem proprietatem deriuamus, quod celeritas aquae iuxta corpus ad M praeterlabentis sit ad veram celeritatem fluminis $\sqrt{c}$, vti cosinus anguli AMI ad sinum totum. Atque hinc in E, vbi tangens directioni OA est parallela, seu $\Phi = 0$, erit $v = c$, seu celeritas aquae ibi aequalis resultabit ipsi fluminis celeritati in O.

XIV. Hinc discimus, si celeritatem nauis, qua vehimur, ex velocitate aquae praeterlabentis aestimare velimus, atque nauis secundum directionem OA progrediatur, tum in naui eum locum E esse eligendum, vbi tangens horizontalis directioni AO sit parallela. Atque in hoc loco tuto concludere poterimus, celeritatem nauis aequalem esse velocitati aquae, quae hic praeterlabitur: sin autem in alio loco, vti in M, hoc iudicium instituere vellemus, eo magis erraremus, quo maior fuerit angulus AMI, nauem scilicet nimis paruam reputantes; quoniam celeritas aquae in M praeterlabentis minor est celeritate nauis, et quidem in ratione cosinus anguli AMI ad sinum totum. Interim tamen probe est recordandum, has determinationes non summo rigore esse veras, sed tantum idoneas ad veritatem appropinquationes.

Tab. II. Fig. 2. XV. Ac regula quidem haec certo fallit in corporis parte posteriori ENB; si enim ponamus, vt in parte anteriori, esse $v = c \operatorname{cos.} \Phi^2$, puppis nauis praecise tanta vi propelleretur, quanta prora repellitur; vnde a puncto E retrorsum formula $v = c \operatorname{cos.} \Phi^2$ eo magis a veritate discedet, quo propius ad B perueniamus; tantum ergo in parte anteriori AME, tanquam toleranter vera, admitti potest. Interim tamen hinc coniectando suspicari poterimus, quomodo motus aquae praeterlabentis circa puppim nauis ENB se sit habiturus. Si enim puppis nihil ad resistentiam conferat, certum est, aquam ab E ad B celeritate vniformi defluere, ea scilicet, quae debeatur altitudini c, et quam iam in E recuperauit. Sin autem in hac parte lentius decurrat, nauis hinc propulsionem accipiet, qua resistentia diminuetur. Fieri autem nequit, vt vsquam euadat $v > c$, quia tunc pressio prodiret negatiua. Hoc enim casu aqua post nauim vacuum relinqueret, et nauis quasi sulcum traheret; vnde ob deficientem pressionem a tergo resistentia vtique augeretur.

XVI. Si igitur puppi nauis ENB eiusmodi figura tribui posset, vt aqua ab E et B progrediendo retardaretur, atque circa N et B minorem habitura esset celeritatem, quam in E, talis figura constructioni nauium esset aptissima iudicanda, quia hoc modo aqua puppim adeo antrorsum propelleret, resistentiamque prorae diminueret. Verum si experientiam consulamus, talem figuram vix dari colligere licet, quin potius omnis cura eo conferri debere videtur, vt ne alterum incommodum vsu veniat, quo ob vacuum pene navem relictum resistentia adeo augetur. In eo imprimis ergo circa figuram puppis erit elaborandum, vt tale vacuum euitetur, ac puppis ita insensibiliter ad B vsque conuergat, vt aqua eam iugiter sequatur, neque riuulus E f eam vsquam deserat. In hoc etiam insignis illa nauium proprietas versatur, qua puppi talem figuram conciliare student, vt aqua libere ad gubernaculum decurrere queat, quo effectu frustraremur, si aqua circa puppim nauem desereret, neque in gubernaculum allideret.

XVII. Ex celeritate autem aquae iuxta corpus defluentis figuram riuulorum illorum, per quos aqua motum suum inflectit, satis exacte colligere poterimus. Ac primo quidem pro riuulo corpori proximo fff eius amplitudo vbique celeritati reciproce debet esse proportionalis. Cum igitur, posito angulo $AMI = \Phi$, celeritas aquae in M sit $= c \cos \Phi$, in hoc loco amplitudo riuuli f erit vt $\frac{1}{c \cos. \Phi}$; quia autem hunc riuulum angustissimum concipimus, motusque aquae in M secundum curuae tangentem dirigitur, amplitudo Mq ad curuam statuenda est normalis. Quare in normali QM producta capiatur portio Mq, quae sit vbique vt $\frac{1}{c \cos. \Phi}$, seu vt sec. Φ, ob c constantem, et punctum q erit in curua proxima $fgqe$ riuulum exhibente. Verum hic Φ denotabit quoque angulum PMQ, posita applicata PM ad fluminis directionem OA perpendiculari: vnde erit Mq vt $\frac{MQ}{MP}$. Producatur ergo vbique applicata PM in p, vt pars producta Mp sit constantis magnitudinis, et ex p axi AO agatur parallela pq, normalem QM productum secans in q, eritque punctum q in curua quaesita. Tab. II. Fig. 3.

XVIII.

XVIII. Cum ergo curua *fgqe* hac praedita ſit proprietate, vt ſit interuallum M*p* conſtantis magnitudinis, in puncto E, vbi tangens curuae eſt axi AO parallela, ipſa riuuli amplitudo E*e*, quae eſt applicatae PM parallela, hanc amplitudinem habebit, ſeu viciſſim interuallum M*p* vbique iſti amplitudini E*e* aequale eſt capiendum, vnde patet, quemadmodum ab E per M ad A progrediendo amplitudo riuuli continuo augeatur. Hinc ergo pro vertice corporis A, ſi recta A*d* fuerit ad curuam normalis, puncti *d* ab axe AO diſtantia D*d* quoque interuallo E*e* erit aequalis, et quoniam hic riuuli amplitudo per ipſam rectam D*d* aeſtimari debet, in hoc loco D*d* aquae celeritas aequalis eſt cenſenda celeritati in E*e*, hoc eſt verae fluminis celeritati, ita vt hic fluuius adhuc vero ſuo motu feratur, neque vllam ob corpus oppoſitum mutationem ſubierit. Quin etiam, ſi corpus in A angulo terminetur, quaelibet alia recta A*g* ad axem AO magis inclinata pariter ad curuam in A normalis eſt cenſenda, vnde et hic diſtantia ab axe G*g* ipſi E*e* et D*d* eſt aequalis, ſicque vltra *d* riuulus includetur recta *dgf*, axi A O parallela.

XIX. En ergo figuram primi riuuli *fgdqe* corpori AME proximi et altera parte cum axe AO tum corpore AME terminati, per cuius partem anteriorem O*f*D*d* aqua motu ſuo naturali affluit. Cum autem vltra D*d* ad corpus appropinquauerit, ob creſcentem amplitudinem riuuli, eius motus partim retardabitur, partim directionem ita inflectet, vt ab *f* ad *q* vsque directionem quidem curuae *fq* ſequatur, ex altera

tera vero parte primum ſecundum axem DA, tum vero ſecundum ductum curuae AM progrediatur; atque ad A ob maximam amplitudinem motu minimo feratur. At vero ſingula interualla E*e*, M*q*, D*d*, G*g* infinite parua ſunt concipienda, quae ſi denuo in duos pluresue riuulos minores ſubdiuidentur, vti in figura biſectio per lineam $f'g'd'q'e'$ repraeſentatur, vnde motus aquae per ſingulos hos riuulos eiusque retardatio et inflexio multo clarius perſpicitur.

XX. Quanquam haec tantum proxime ad veritatem accedere ſunt cenſenda, atque adeo vltra A verſus O lex continuitatis in formula noſtra non amplius obſeruatur, cum vi formulae amplitudo riuuli in *d* non per rectam D*d* ſed A*d* eſſet aeſtimanda, tamen haec ita ad veritatem, quam experientia monſtrare ſolet, accedere videntur, vt ſi non per hanc ipſam conſtructionem, tamen per ſatis ſimilem vera figura ſingulorum riuulorum definiri ſit cenſenda. Per experientiam enim certum eſt, tantum in modica a corpore diſtantia motum demum fluminis perturbari incipere, ita vt, cum retardetur, tum circa corpus inflectatur, omnino vti delineatio riuulorum ſecundum formulam noſtram facta manifeſto declarat. Atque in parte corporis antica AME nullum eſt dubium, quin interualla lateralia M*p* ſint inter ſe proxime aequalia, pone corpus autem, vt vidimus, haec aequalitas ceſſabit, dum ibi ipſae amplitudines M*q* potius aequalitatis legem ſequi videntur.

XXI. Vt a ſimplicioribus incipiam, terminetur corporis pars antica duabus lineis rectis AE et EF, Tab. II. Fig. 4.

quarum haec ſit directioni fluminis parallela, illa vtcunque inclinata; haec ſcilicet figura quaſi ſemiſſis corporis eſt ſpectanda, iudiciumque partis vltra rectam AC ſitae pari modo abſoluetur, dummodo punctum A maxime promineat. Iam ad riuulos deſignandos ad rectam inclinatam AE ducantur normales Ad, Ee, tum in dato interuallo Dd = Ff, directioni fluminis OA parallelae agantur od, fe, iunganturque puncta d et e recta de; ac linea compoſita $odef$ repraeſentabit tractum riuuli proximi, ſimili vero modo ſi interualla $D'd'$, $F'f'$ maiora capiantur, figura riuuli ſequentis $o'd'e'f'$ prodibit. Sic quidem ſecundum regulam inuentam figura riuulorum exprimetur; reuera autem circa d et e anguli obtundentur, quia aqua non ſubito, ſed ſucceſſiue, directionem mutabit: vnde quo magis riuuli a corpore diſtabunt, eo magis eorum tractus ad vniformitatem accedet, quin etiam interualla Ff ratione Dd ita inſenſibiliter diminuentur, vt tandem riuuli ſatis remoti directioni OA plane paralleli reſtituantur.

XXII. In primo ergo riuulo aqua per totum tractum OodD celeritatem ſuam et directionem retinebit, ac mutatio demum in diſtantia AD a corpore incipiet, niſi quatenus ob incuruationem ad d hoc interuallum aliquantum augeri eſt cenſendum. Cum igitur ſit Dd: AD = AB : BE, erit iſta diſtantia ante corpus, in qua motus aquae perturbari incipit, $AD = \frac{BE}{AB} \cdot Dd = Dd \cdot \text{tang.}\, BAE$. Vnde ſi angulus BAE fuerit rectus, hoc ſpatium in infinitum augeri videtur; verum cum ipſa riuuli amplitudo Dd pro infinite parua

ſit

ſit habenda, hinc interuallum ad magnitudinem finitam redigetur. Verum ſi plures poſitiones lateris EA, vt Eα, inter ſe compararemus, quae omnes eadem latitudine AE ſint praeditae, ponamusque BE$=a$, BA$=x$, et amplitudinem riuuli D$d=$F$f=f$, locus D, vbi motus aquae primum perturbari incipit, a recta BE diſtabit interuallo BD$=x+\frac{af}{x}$, quod fit omnium minimum, ſi $x=\sqrt{af}$, ſeu B$\alpha=\sqrt{BE.Dd}$, quo caſu angulus BαE iam minime a recto diſtabit. Veriſimile autem eſt, ſi ſpatium Bα adhuc minus capiatur, atque adeo euaneſcat, interuallum BD non fieri magis, cum poſitio BE non in maiori diſtantia motum aquae perturbare valeat, quam poſitio αE, vnde et pro poſitione BE haec diſtantia erit cenſenda BD$=2\sqrt{af}$.

XXIII. Hinc ergo colligere poterimus, quomodo aqua ad ſuperficiem BE, quae ad directionem fluminis eſt normalis, alluat. Scilicet riuulus od, cuius ab axe OB diſtantia ſit Dd, motu inalterato affluet vsque ad d, vt ſit diſtantia BD$=2\sqrt{BE.Dd}$, hicque demum motum ſuum inflectet ad e progrediens, vnde ſecundum ef lateri EF parallele proferetur, vt ſit diſtantia F$f=$Dd. Simili modo riuulus remotior viam ſequetur $o'd'e'f'$, curſum ſuum iam in d' inflectens, vt ſit interuallum BD$'=2\sqrt{BE.D'd'}$. In ſpatiis autem Bd et dd', quia ibi amplitudo riuulorum eſt maxima, motus aquae erit tardiſſimus, et ad B penitus quieſcet, vnde hic reſiſtentia quoque erit maxima, ad E verſus F autem, ob riuuli primi amplitudinem decreſcentem, continuo diminuetur, neque tamen diminutio tanta eſſe poteſt, vt reſiſtentia inde orta a Fig. 5.

regula vulgari notabiliter abhorreat. Haud aliter resistentia comparata fore videtur, si latus EB retro fuerit inclinatum.

Fig. 6. XXIV. Sit iam corporis figura AMF quadrans circuli, atque, ad tractum riuuli proximi inueniendum, ponatur radius circuli $CA = CM = a$, amplitudo riuuli in F, nempe $Ff = f$. Pro puncto quocunque circuli M ponatur abscissa $CP = x$, applicata $PM = y$, vt sit $xx + yy = aa$. Tum producto radio CM in m, vt sit applicata curuae quaesitae $pm = y + f$, erit abscissa $Cp = x + \frac{fx}{y}$. Statuantur ergo pro curua omf coordinatae $Cp = X$, $pm = Y$, vt sit $Y = y + f$ et $x = \frac{(y+f)x}{y} = \frac{Yx}{y}$; eritque $y = Y - f$ et $x = \frac{X(Y-f)}{Y}$ vnde ob $xx + yy = aa$ pro curua omf habebitur haec aequatio $(XX + YY)(Y-f)^2 = aaYY$: quae si f vt parameter variabilis spectetur, innumerabiles istiusmodi curuas omf exhibebit, quae omnes secundum axem AO in infinitum extendentur, ab eoque tandem interuallo $= f$ distabunt, vnico casu excepto, quo $f = o$ ipsum circulum AMF referente. Cum enim sit $XX = \frac{aaYY}{(Y-f)^2} - YY$, si X in infinitum abeat, fiet $Y = f$. Neque vero omnes hae curuae riuulos exhibebunt, propterea quod quaeque sequens non eodem modo ex praecedente definitur, vti prima ex ipso circulo est constructa.

XXV. Si curua AMF fuerit alia curua quaecunque, aequatione inter $CP = x$ et $PM = y$ contenta, et pro riuulo proximo omf ponatur $Cp = X$ et $pm = Y$, erit $Y = y + f$ et $X = x - \frac{fdy}{dx}$, siquidem interuallum f fuerit minimum. At quoniam figura se-

quen-

quentium riuulorum a praecedentibus simili modo definitur, si interuallum $Ff = f$ statuatur finitum, curuae omf figura expressione magis complicata definietur. Ac pro applicata quidem erit $Y = y + f$, verum abscissa X talis erit functio ipsarum x et f, vt sit $\frac{dy}{dx} + (\frac{dX}{dx})(\frac{dX}{df}) = 0$, vnde natura functionis X determinatur. Si enim ponatur per seriem $X = x - fP + ffQ - f^3R + f^4S -$ etc. existentibus P, Q, R, S etc. functionibus ipsius x, cuius quoque data est functio y, erit

$$dy = (dx - fdP + ffdQ - f^3dR + f^4dS \text{ etc.})(P - 2fQ + 3ffR - 4f^3S + \text{etc.})$$

vnde fit:

$$P = \frac{dy}{dx};\ Q = \frac{-PdP}{2dx};\ R = \frac{-PdQ - 2QdP}{3dx};\ S = \frac{-PdR - 2QdQ - 3RdP}{4dx} \text{ etc.}$$

sicque data curua AM omnes riuulorum curuae om assignabuntur, ac per seriem quidem infinitam.

XXVI. Quoniam hae formulae tantum vero proxime tractum singulorum riuulorum declarant, superfluum foret, in iis euoluendis operam consumere. Verae tamen formulae ab his non admodum erunt diversae, ac fortasse earum resolutio multo facilior euadet. Praeterea vero notari conuenit, formulas veras non omnino determinatas esse posse, nisi forte extensio fluuii in latitudinem sit infinita; nam vtcunque fluuius circa corpus cursum inflectat, ad ripam tamen eius directionem sequetur. Vnde aequatio inter X et Y ita debet esse comparata, vt posito $f = 0$, praebeat ipsam corporis figuram AM; sin autem ipsi f certus quidam valor tribuatur, vt tum figuram ripae exhibeat. Ita si ripa rectae AO ad distantiam $= b$ fuerit

 paral-

parallela, ac ponatur $CF = a$, aequatio inter X et Y has proprietates habere debet, vt posito $f = o$, inde ipsa curua AM resultet, seu fiat $X = x$ et $Y = y$, sin autem ponatur $f = b - a$, quo casu punctum f in ripam cadet, vt tum fiat $Y = b$ quicunque valor pro X sit proditurus.

XXVII. Hinc autem satis probabiliter resistentiam definire poterimus, qua corpus AMF in fluido canali $OCIH$ datae amplitudinis $CH = b$ motum patitur, ad quem casum regula vulgaris non est accommodata. Sit igitur celeritas, qua corpus secundum directionem AO promouetur, $= c$, et riuuli axi proximi amplitudo $Oo = e$; amplitudo autem corporis maxima $CF = a$; vt spatium in canali residuum sit $FH = b - a$, per quod cum fluidum omne defluere debeat, assumo enim, id neque supra corpus neque infra defluere posse, amplitudo riuuli in Ff erit $\frac{b-a}{b} e = f$, vbi celeritas debita sit altitudini k vt sit $kff = cee$, seu $k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$. Ponatur nunc pro corporis figura $CP = x$; $PM = y$; et pro riuulo $Cp = X$ et $pm = Y$, neque hic erit $Y - y = f$, neque $Y - y = e$, sed medium quendam tenebit valorem, vt sit $Y - y = \frac{b-y}{b} e$. At est $Y - y : Mm = dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, vnde fit $Mm = \frac{b-y}{b} \cdot \frac{e\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Si ergo celeritas aquae ad M defluentis debita sit altitudini v, erit $\frac{(b-y)^2 ee(dx^2+dy^2)}{bbdx^2} v = cee$, seu $v = \frac{cbbdx^2}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$.

XXVIII. Iam vero fluidi pressio in M est per resistentiae theoriam veram aequalis altitudini $C - v$. Sed quia in F pressio debet esse nulla, euidens est, fore $C = k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$, vnde pressio in M erit $= \frac{cbb}{(b-a)^2}$ —

$-\frac{cbbdx^2}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, quae cum ſit normalis ad corporis ſuperficiem, inde naſcetur reſiſtentia ex curuae elemento $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ oriunda $= -\frac{cbbdy}{(b-a)^2} + \frac{cbbdx^2dy}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, cuius integrale dabit totam reſiſtentiam. Si amplitudo fluidi b eſſet infinita, foret reſiſtentia $= -cy + c\int\frac{dx^2dy}{dx^2+dy^2}$. Si ergo AMF fuerit linea recta AF, ſitque $CA = b$, exiſtente $CF = a$; erit $a-y : x = a : b$, ſeu $a-y = \frac{ax}{b}$, et $dy = -\frac{adx}{b}$, hincque $dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2(aa+bb)}{bb}$. Vnde hoc caſu reſiſtentia erit $= C + \frac{acbbx}{b(b-a)^2} + \frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-y)}$ quae per totam rectam AF extenſa fiet:

$$\frac{acbb}{(b-a)^2} + \frac{bbcb}{aa+bb} - \frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-a)} = \frac{acbb}{(b-a)^2} - \frac{abbcb}{(aa+bb)(b-a)},$$

quae expreſſio abit in hanc: $\frac{aacb(ab+bb)}{(aa+bb)(b-a)^2}$. At ſi fluidum eſſet infinitum, reſiſtentia foret $= \frac{a^3c}{aa+bb}$; quae ſi ponatur $= R$, illa reſiſtentia erit $= \frac{b(ab+bb)}{a(b-a)^2}R$, ideoque maior, quam R.

XXIX. Experientia quoque hoc ipſum egregie confirmat, qua conſtat corpus in canali anguſtiori promotum, maiorem pati reſiſtentiam, quam in canali ampliori, atque adeo ſi amplitudo corporis CF amplitudini canalis fuerit aequalis, ita vt corpus canalem perfecte expleat, tum reſiſtentiam fieri infinitam. Quia enim fluidum non niſi per ſpatium FH defluere poſſe aſſumitur, hoc ſpatio euaneſcente corpus moueri non poſſet, quin fluidum in minus volumen compingeretur; at fluidum nullius compreſſionis capax aſſumitur. Quod ſi planum ad directionem motus fuerit normale, vti ſi ipſa linea $CF = a$ celeritate $\sqrt{c}$ in directione CO promoueatur, reſiſtentia in fluido infinito foret $= ac = R$,

in

in canali autem amplitudinis $CH = b$, eadem linea reſiſtentiam ſuſtinebit $= \frac{bb}{(b-a)^2} R$, quae ergo erit ad illam vt CH^2 ad FH^2. Niſi ergo amplitudo CH prae amplitudine corporis CF fuerit praegrandis, augmentum reſiſtentiae erit notabile. Sic ſi $CH = 2CF$ erit reſiſtentia $= 4R$, ſi $CH = 3CF$, erit ea $= \frac{9}{4}R$; ac ſi fuerit $CH = 10CF$, erit reſiſtentia $= \frac{100}{81}R = 1\frac{19}{81}R$.

XXX. Quanquam autem hinc riuulorum, per quos aqua circa quodque corpus defluit, deſignatio non adeo difficilis videtur, tamen eorum natura cum principio continuitatis vix conciliari poteſt. Cum enim riuulorum partem corporis anticam cingentium amplitudo ſit coſinui anguli, quem tangens corporis cum directione motus conſtituit, reciproce vero ſaltem proxime proportionalis, iuxta partem poſticam vero eorum amplitudo ſit quaſi conſtans, nulla huius anguli, quem Φ vocauimus, functio excogitari poſſe videtur, quae pro parte antica, vbi hic angulus eſt poſitiuus, eius coſinum proxime exhibeat, pro parte autem poſtica, vbi iſte angulus ſit negatiuus, quaſi non amplius ab hoc angulo pendeat, ſed conſtans euadat. Interim hoc certum eſt, amplitudinem riuuli exacte per $\frac{1}{\cos. \Phi}$ non exprimi, quia tum ſimilis mutatio circa partem poſticam locum habere deberet, quod veritati repugnat. Cauſam quidem ampliationis riuulorum in parte antica agnoſcimus, ſimulque in parte poſtica abſentiam huius cauſae concedere debemus, ſed quomodo haec cum principio continuitatis, cui calculus eſt ſuperſtruendus, cohaereant, nullo modo patet, ex quo ſumma difficultas,

cultas, qua Theoria motus fluidorum etiam nunc premitur, multo magis perſpicitur, quo propius ad eam pertingere videmur.

XXXI. Quae hactenus tradita ſunt, tantum ad reſiſtentiam plani proprie ſunt referenda, nihilo vero minus reſiſtentia nauis aliusue corporis in aqua moti inde colligi poteſt, dum eius partem ſubmerſam per ſectiones inter ſe parallelas in ſtrata minutiſſima ſectam concipimus. Ita ſi AMENB fuerit ſectio nauis quaecunque horizontalis, eius reſiſtentiam inde quoque aeſtimare licet, ſiquidem aqua reſiſtens in hoc plano permaneat, neque ſurſum vel deorſum iuxta nauem defluat. Quod igitur ad figuram puppis ENB attinet, in genere intelligimus, aquam iuxta eam defluere non poſſe, niſi lineae ENB curuatura ſit vbique valde exigua. Cum enim in Ef nulla detur preſſio, nulla inde vis adeſt, quae motum aquae ab E ſecundum directionem axi AB parallelam progreſſurae inflectat, atque hanc inflexionem a ſola grauitate aquae produci debere, quod quidem in ſectionibus profundioribus citius euenit, quam magis eleuatis. Tum vero, quo velocius nauis promouetur, eo difficilius aquae decurſus incuruatur, et niſi inflexio ENB ſit ſatis parua, aqua nauem deferet, et ob deficientem ibi preſſionem aquae, reſiſtentia prorae etiam a pondere aquae proram vrgente augebitur, quod ingens vitium nauium reputatur. Tab. II. Fig. 2.

XXXII. Etiamſi autem aqua iuxta puppem ENB bene defluat, neque iſtud incommodum ſit pertimeſcendum, tamen hoc ad facilem gubernaculi actionem, ad quam non minus nauem inſtructam eſſe oportet, non ſufficit. Cum enim aqua fere vsque ad B defluxerit, quia ab altera parte ſimili modo fertur, perinde motum continuare debet, quaſi ſecundum rectam BV obex ipſi obiiceretur, et quia prope B curſum inflectere cogitur, perinde vti in A eſt factum, eius motus eo magis retardabitur, quo maior fuerit angulus ABN, quod quidem in maioribus nauibus vſu venire poteſt, etiam ſi linea ENB ſit arcus circuli admodum magni; in aqua autem circa B fere ſtagnante gubernaculum vix vllam vim exerere valebit. Quocirca neceſſe eſt, vt figura ENB non ſolum lente incuruetur, ſed etiam in B cum axe AB angulum ſatis acutum conſtituat. Interim tamen, ob iſtam aquae retardationem circa B, nauis inde maiorem preſſionem ſuſtinebit, qua reſiſtentia prorae imminuetur, vnde, niſi gubernaculi ratio haberi deberet, angulus fere rectus ad B curſum nauis potius acceleraret, quam retardaret.

XXXIII. Hae autem conſiderationes ad commodiorem euolutionem formularum, quibus vniuerſa Theoria motus fluidorum continetur, viam aperire videntur. Cum enim iſtae formulae in genere pro quocunque loco tam motum fluidi, quam preſſionem, exhibeant, quae ſumma generalitas in cauſa erat, quod hae formulae minus tractabiles euaſerint, ea, quae hactenus ſunt allata, non exiguam ſpem facilioris calculi faciunt, ſi non ſolum riuulos, per quos ſingulae aquae particulae deferuntur, contemplemur, ſed etiam harum curvarum traiectorias orthogonales in calculum introducamus: quoniam enim hae traiectoriae cuiusque riuuli in quoque loco amplitudinem commodiſſime oſtendunt,

inde

inde celeritas aquae, quae in quolibet riuulo amplitudini reciproce eſt proportionalis, aptiſſime definitur, vnde deinceps preſſio per formulam conciuniorem exprimi poſſe videtur. Aſſumo autem, tam omnem aquam, quam eius motum, in eodem plano eſſe conſtitutum, eumque iam ita ad ſtatum permanentem eſſe perductum, vt riuulorum tractus ſint conſtantes, neque vlli amplius mutationi obnoxiae.

XXXIV. Quo autem haec facilius ad Theoriam reſiſtentiae accommodari queant, omnes determinationes ad figuram corporis AME aquae immiſſi referri conueniet. Hanc ergo figuram pro fixa habebo, quia in reſiſtentiae inueſtigatione perinde eſt, ſiue corpus contra aquam ſtagnantem, ſiue aqua contra corpus quieſcens pari celeritate feratur. Iuxta corpus ergo aqua, quicunque motus ei tribuatur, ſecundum eius figuram AME praeterfluet, et in maioribus diſtantiis motus aquae fiet per certas lineas curuas RYS, *rys*, quibus riuuli conſtituuntur. Talium riuulorum ſeries intra AME et RYS infinita multitudo concipi debet, quae omnes inter ſe tantum ratione parametri differant. Sit MY*y* traiectoria orthogonalis quaecunque, quae ex M egreſſa omnes riuulos normaliter traiiciat, vti etiam in M ad ipſam curuam datam AME eſt normalis. Hocque modo puncta riuulorum Y et *y* inprimis cum puncto M connectuntur, vt magis ad hoc punctum, quam ad aliud quoduis pertinere ſint cenſenda. Tab. III. Fig. 1.

XXXV. Ponamus ergo pro iſto puncto M abſciſſam AP $= s$, et applicata PM exprimetur per certam quandam functionem ipſius s: pro riuulo autem

RYS parameter ſit $=b$, qui pro ſequente rys abeat in $b+db$, pro ipſa autem curua AME euaneſcat. Iam ſitus puncti Y pendebit partim a puncto M, partim a parametro, vnde eius coordinatae, quae ſint $AX=x$, $XY=y$, erunt functiones iſtarum duarum quantitatum s et b; ponamus ergo:

$$dx=Pds+Qdb \text{ et } dy=Rds+Sdb,$$

quae relatio inter x et y ita debet eſſe comparata, vt, poſito $b=o$, ipſam curuam AME praebeat: at ſi ipſi b certus quidem et conſtans valor tribuatur, aequatio ſit proditura pro curua RYS; pro qua ergo erit $dx=Pds$ et $dy=Rds$. Sin autem punctum M fixum ſumatur, variabilitas ſolius parametri b dabit traiectoriam orthogonalem MYy, pro qua ergo ducta applicata proxima xy, et Yz, axi AX parallela, erit $Xx=Qdb$ et $yz=Sdb$; quia pro punctis in eadem traiectoria ſitis quantitas s non variatur.

XXXVI. Cum iam Yy ſit ad curuam RYS normalis, erit ex natura traiectoriarum orthogonalium $zy:Yz=dx:-dy=P:-R$ vnde fit $S:Q=P:-R$ ideoque $PQ+RS=o$. Vt huic conditioni ſatisfaciamus, ponamus ſtatim:

$$Q=RT \text{ et } S=-PT \text{ vt ſit}$$

$$dx=Pds+RTdb \text{ et } dy=Rds-PTdb.$$

Porro autem erit riuuli amplitudo $Yy=db\surd(QQ+SS)$ $=Tdb\surd(PP+RR)$, cui cum celeritas aquae in Y, quatenus aqua in eodem riuulo comparatur, ſit reciproce proportionalis, poſita celeritate in $Y=u$, ſtatuamus $u=\frac{B}{T\surd(PP+RR)}$, vbi B denotat functionem ipſius para-

parametri b tantum. Resoluatur haec celeritas secundum directiones coordinatarum x et y, sintque celeritates deriuatae secundum $AX = u$ et secundum $XY = v$; ac reperitur:

$$u = \frac{BP}{T(PP+RR)} \text{ et } v = \frac{BR}{T(PP+RR)}$$

vnde ob $uu + vv = \vartheta\vartheta$ erit $\vartheta\vartheta = \frac{BB}{TT(PP+RR)}$.

XXXVII. Quia igitur est $\frac{B}{T(PP+RR)} = \frac{T\vartheta\vartheta}{B}$, habebimus:

$$u = \frac{PT\vartheta\vartheta}{B} \quad \text{et } v = \frac{RT\vartheta\vartheta}{B}.$$

Conueniet autem potius ipsas has celeritates u et v in calculum introduci, quam quantitates P et R ibi relinqui; vnde colligetur:

$$P = \frac{Bu}{T\vartheta\vartheta};\ R = \frac{Bv}{T\vartheta\vartheta};\ Q = \frac{Bv}{\vartheta\vartheta};\ S = \frac{-Bu}{\vartheta\vartheta}$$

et $dx = \frac{B}{T\vartheta\vartheta}(uds + Tvdb)$ et $dy = \frac{B}{T\vartheta\vartheta}(vds - Tudb)$ quas ergo formulas integrabiles esse oportet. Quare quia $\vartheta\vartheta = uu + vv$ et B functio ipsius b tantum, facile colligitur, cuiusmodi functiones esse debeant u, v et T, vt his duobus requisitis satisfiat. Siquidem, quod regula vulgaris exigebat, celeritas in quouis riuulo proportionalis esset cosinui anguli, quem curua cum axe facit, seu $\vartheta = \frac{CP}{\sqrt{(PP+RR)}}$, haberemus $Cu = \vartheta\vartheta$, existente C functione ipsius b tantum, ideoque $v = \sqrt{(Cu-uu)}$ seu $u = \frac{\vartheta\vartheta}{C}$ et $v = \frac{\vartheta}{C}\sqrt{(CC-\vartheta\vartheta)}$, ita vt integrabiles esse deberent hae formulae:

$$dx = \frac{B}{CT}ds + \frac{Bdb}{C\vartheta}\sqrt{(CC-\vartheta\vartheta)};\ dy = \frac{Bds}{CT\vartheta}\sqrt{(CC-\vartheta\vartheta)} - \frac{B}{C}db.$$

XXXVIII. Verum iam perpendamus, quid Theoria motus fluidorum requirat. Ostendi autem, si pressio aquae in Y exponatur per altitudinem p, et ex viribus acceleratricibus nascatur efficacia $= V$, tum sumtis x et y vtcunque variabilibus, hanc aequationem locum habere debere:

$$p = V - \int \left(u\,dx \left(\frac{du}{dx}\right) + v\,dx \left(\frac{du}{dy}\right) + u\,dy \left(\frac{dv}{dx}\right) + v\,dy \left(\frac{dv}{dy}\right) \right)$$

Totum ergo negotium huc redit, vt ista formula integrationem actu admittat; nisi enim hoc eueniat, talis motus, qualis per quantitates u et v fingitur, omnino subsistere nequit. Si quaestio de pressione restringatur ad vnicum riuulum, ostendi hoc integrale eo reduci, vt fiat $p = V - \frac{1}{2}ss$, vbi $\frac{1}{2}ss$ referat altitudinem celeritati aquae debitam, vti iam supra inueni. Verum pro tota motus extensione necesse est, vt illud differentiale, cuius integrale occurrit, sit completum, vti quidem loquendi mos est.

XXXIX. Quodsi formulas hactenus inuentas huc transferre velimus, habemus quidem valores pro dx et dy; verum pro formulis $\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ notandum est in differentiatione ita solum x poni variabile, vt y maneat inuariatum; ergo ob $dy = o$ erit $Tu\,db = v\,ds$ seu $db = \frac{v\,ds}{Tu}$; vnde fit $dx = \frac{B\,ds}{Tu}$. Quare si ponamus

$$du = K\,ds + L\,db \text{ et } dv = M\,ds + N\,db$$

erit in hac hypothesi

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(K\,ds + \frac{Lv\,ds}{Tu}\right) : \frac{B\,ds}{Tu} = \frac{KTu + Lv}{B}$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(M\,ds + \frac{Nv\,ds}{Tu}\right) : \frac{B\,ds}{Tu} = \frac{MTu + Nv}{B}$$

Simili-

Similiter pro formulis $\left(\frac{du}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ aſſumitur x conſtans, vnde erit $db = \frac{-u\,ds}{Tv}$ et $dy = \frac{B\,ds}{Tv}$, ſicque prodibit:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(K\,ds - \frac{L\,u\,ds}{Tv}\right) : \frac{B\,ds}{Tv} = \frac{KTv - Lu}{B}$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(M\,ds - \frac{N\,u\,ds}{Tv}\right) : \frac{B\,ds}{Tv} = \frac{MTv - Nv}{B}.$$

XL. Ex his ergo differentiale ſuperius, cuius integrale in formulam pro p datam ingreditur, abibit in formam ſequentem:

$$+ \frac{u}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(u\,ds + Tv\,db)(KTu + Lv)$$

$$+ \frac{v}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(u\,ds + Tv\,db)(KTv - Lu)$$

$$+ \frac{u}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(v\,ds - Tu\,db)(MTu + Nv)$$

$$+ \frac{v}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(v\,ds - Tu\,db)(MTv - Nu)$$

quae quatuor formulae ſtatim ad has duas rediguntur:

$$K(u\,ds + Tv\,db) + M(v\,ds - Tu\,db).$$

Cum iam ſit $K = \left(\frac{du}{ds}\right)$ et $M = \left(\frac{dv}{ds}\right)$ preſſio quaeſita p ſequenti definietur aequatione:

$$p = V - \int\left((u\,ds + Tv\,db)\left(\frac{du}{ds}\right) + (v\,ds - Tu\,db)\left(\frac{dv}{ds}\right)\right)$$

ſeu ob $u\,du + v\,dv = \mathfrak{v}\,d\mathfrak{v}$ habebitur:

$$p = V - \int\left(ds\left(\frac{\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v}}{ds}\right) + T\,db\left(\frac{v\,du - u\,dv}{ds}\right)\right).$$

XLI. Haec formula adhuc concinnior reddi poteſt, introducendo praeter ipſam celeritatem $\mathfrak{v}$, eius quoque directionem. Sit ergo Φ angulus quem directio motus in Y cum axe Ao facit, et quia ſit $u = \mathfrak{v}\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $v = \mathfrak{v}\,\text{ſin.}\,\Phi$, conficitur hinc $v\,du - u\,dv = -\mathfrak{v}\mathfrak{v}\,d\Phi$, ſicque preſſio p definietur per hanc aequationem:

$$p = V - \int\left(ds\left(\frac{\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v}}{ds}\right) - T\mathfrak{v}\mathfrak{v}\,db\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\right)$$

quae

quae non amplius pendet a positione coordinatarum, vtpote arbitraria; et hic quantitates, $\text{ȣ}\text{ȣ}$ et Φ considerandae sunt tanquam functiones ipsarum s et b. Hic vero euidens est, si b sumatur constans, integrationem nullam habere difficultatem, cum prodeat

$$p = V - \tfrac{1}{2}\text{ȣ}\text{ȣ} + D$$

denotante D functionem parametri D; quare si et eius variabilitatis ratio habeatur, esse oportet

$$db\left(\frac{\text{ȣ}\,d\text{ȣ}}{db}\right) - dD = -T\text{ȣ}\text{ȣ}\,db\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

vnde hoc obtinemus requisitum, vt esse debeat

$\frac{dD}{db} = \left(\frac{\text{ȣ}\,d\text{ȣ}}{db}\right) + T\text{ȣ}\text{ȣ}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) =$ functioni ipsius b tantum.

XLII. Verum insuper necesse est, vt formulae differentiales pro dx et dy inuentae fiant completae seu integrabiles; valoribus autem pro u et v substitutis habemus:

$$dx = \frac{B}{T\text{ȣ}}(ds\cos.\Phi + T\,db\sin.\Phi)$$

$$dy = \frac{B}{T\text{ȣ}}(ds\sin.\Phi - T\,db\cos.\Phi).$$

Quae formulae vt fiant integrabiles necesse est sit: si breuiatis gratia ponamus $\frac{1}{T\text{ȣ}} = \Theta$,

$$\Theta\cos.\Phi.\frac{dB}{db} - B\Theta\sin.\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right) + B\cos.\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\cos.\Phi}{\text{ȣ}}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{B\sin.\Phi}{\text{ȣ}\text{ȣ}}\left(\frac{d\text{ȣ}}{ds}\right)$$

$$\Theta\sin.\Phi.\frac{dB}{ab} + B\Theta\cos.\Phi\left(\frac{d\Phi}{ab}\right) + B\sin.\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\sin.\Phi}{\text{ȣ}}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) + \frac{B\cos.\Phi}{\text{ȣ}\text{ȣ}}\left(\frac{d\text{ȣ}}{ds}\right)$$

quae

quae formulae reducuntur ad has duas:

$$\Theta\, v\, v \left(\frac{d\Phi}{db}\right) = \left(\frac{dv}{ds}\right) \text{ et } \frac{dB}{B\,db} = \frac{1}{\Theta\, v}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{1}{\Theta}\left(\frac{d\Theta}{db}\right).$$

Ergo praeterquam quod fit $\left(\frac{dv}{ds}\right) = \Theta\, v\, v \left(\frac{d\Phi}{db}\right)$

necesse est, vt binae sequentes quantitates

$$-\frac{1}{\Theta\, v}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{1}{\Theta}\left(\frac{d\Theta}{db}\right) \text{ et } v\left(\frac{dv}{db}\right) + \frac{v}{\Theta}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

sint functiones solius parametri b.

XLIII. Ex his iam poterimus diiudicare, num eiusmodi fluidi status, cuius resistentia perfecte sequatur regulam vulgarem, sit possibilis, et sub quibus conditionibus? id quod inuestigauisse operae erit pretium. Regula autem vulgaris postulat, vt fit $\ddot{u} = \frac{vv}{C}$; cum igitur hic posuerimus $u = v \cos.\Phi$, fiet $v = C \cos.\Phi$, existente C functione ipsius b tantum: hinc erit

$$\left(\frac{dv}{ds}\right) = -C \sin.\Phi \left(\frac{d\Phi}{ds}\right) \text{ et } \left(\frac{dv}{db}\right) = \frac{dC}{db}\cos.\Phi - C \sin.\Phi \left(\frac{d\Phi}{db}\right).$$

Verum esse oportet $\Theta\, v\, v\left(\frac{d\Phi}{db}\right) = \left(\frac{dv}{ds}\right)$, vnde fit

$$C C \Theta \cos.\Phi^2 \left(\frac{d\Phi}{db}\right) = -C \sin.\Phi \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

ideoque $\Theta = \frac{-\sin.\Phi}{C \cos.\Phi^2} \cdot \frac{\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{db}\right)}$, et $T = \frac{-\cos.\Phi}{\sin.\Phi} \cdot \frac{\left(\frac{d\Phi}{db}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)}$

Cum autem porro esse debeat $\frac{dD}{db} = v\left(\frac{dv}{db}\right) + \frac{v}{\Theta}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$, erit

$$\frac{dD}{db} = \frac{C\,dC}{db}\cos.\Phi^2 - C C \sin.\Phi \cos.\Phi \left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{CC \cos.\Phi^3}{\sin.\Phi}\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$$

 siue

ſiue

$$\frac{dD}{db} = \frac{CdC}{db}\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - \frac{CC\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi}\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$$

XLIV. Hinc ſi tantum b pro variabili habeamus, s vero vt conſtantem ſpectemus, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$dD = CdC\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - \frac{CCd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi},$$

quam ſi more conſueto integremus, et loco conſtantis functionem ipſius s, quae ſit Σ, introducamus, dum E et F pro functionibus ipſius b tantum aſſumimus, obtinebimus:

$$\text{ſin.}\,\Phi = \sqrt{\frac{E}{F+\Sigma}} \text{ et coſ.}\,\Phi = \sqrt{\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}}$$

exiſtente $lC = \tfrac{1}{2}\int\frac{dF}{E}$ et $D = \tfrac{1}{2}CC - \tfrac{1}{2}\int\frac{CCdE}{E}$.

Hinc ergo eruitur:

$$d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE - Ea\Sigma}{2(F+\Sigma)\sqrt{E(F+\Sigma)}}$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE - Ed\Sigma}{2(F+\Sigma)\sqrt{E(F-E+\Sigma)}}$$

ita vt ſit:

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{-d\Sigma\sqrt{E}}{2(F+\Sigma)ds\sqrt{(F-E+\Sigma)}} \text{ et}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{db}\right) = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE}{2(F+\Sigma)db\sqrt{E(F-E+\Sigma)}};$$

XLV.

XLV. His valoribus ſubſtitutis obtinebimus:

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}} \quad \text{et}$$

$$\Theta = \frac{E\sqrt{E(F+\Sigma)}}{C(F-E+\Sigma)} \cdot \frac{db\,d\Sigma}{(F+\Sigma)dE\,ds - E\,dF\,ds}$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{dE}{db} = e$; $\frac{dF}{db} = f$; $\frac{d\Sigma}{ds} = \sigma$

eritque $dC = \frac{C\,dF}{2E} = \frac{Cf\,db}{2E}$; et

$$l\Theta = \tfrac{3}{2}lE + \tfrac{1}{2}l(F+\Sigma) - lC - l(F-E+\Sigma) + l\sigma - l(e(F+\Sigma) - fE).$$

Sit porro $de = \varepsilon\,db$ et $df = \zeta\,db$, eritque ſumto ſolo b variabili

$$\frac{d\Theta}{\Theta\,db} = \frac{3e}{2E} + \frac{f}{2(F+\Sigma)} - \frac{f}{2E} + \frac{e-f}{F-E+\Sigma} - \frac{\varepsilon(F+\Sigma)+E\zeta}{e(F+\Sigma)-fE}$$

At vero eſſe debet $\frac{dB}{B\,db} = \frac{1}{\Theta\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \left(\frac{d\Theta}{\Theta\,db}\right)$;

vnde ob

$$\frac{1}{\Theta\upsilon} = \frac{\sqrt{(F-E+\Sigma)}}{E\sqrt{E}} \cdot \frac{e(F+\Sigma)-fE}{\sigma} \quad \text{fiet}$$

$$\frac{dB}{B\,db} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon(F+\Sigma)-\zeta E}{e(F+\Sigma)-fE}$$

XLVI. Quia haec formula ab altera variabili s omnino immunis eſſe debet, transformetur in hanc ſpeciem:

$$\frac{dB}{B\,db} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon}{e} + \frac{efE - \zeta eE}{ee(F+\Sigma) - efE}$$

 vnde

vnde manifeſtum eſt, eſſe oportere:

$$ee(f-e)(F+\Sigma)-efE(f-e)+(\varepsilon fE-\zeta eE)(F+\Sigma)-EE(\varepsilon f-\zeta e)=0$$

ideoque $ee(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

et $ef(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

ſicque neceſſe eſt, vt ſit $f=e$, vnde ſit $\zeta=\varepsilon$; et $F=E$; atque hinc prodit $\frac{dB}{B\,db}=\frac{-3e}{2E}+\frac{\varepsilon}{e}$; ideoque integrando

$lB=le-\frac{3}{2}lE$, ſeu $B=\frac{e}{E\sqrt{E}}$. Porro vero erit

$$\text{ȣ}=C\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}} \quad \text{et} \quad \Theta=\frac{E\sigma\sqrt{E}(E+\Sigma)}{Ce\Sigma\Sigma}$$

ac denique $\sin.\Phi=\sqrt{\frac{E}{E+\Sigma}}$ et $\cos.\Phi=\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}}$.

XLVII. Verum ob $F=E$, ſit $lC=\frac{1}{2}lE$ et $C=\sqrt{E}$, vnde ſumta pro E functione quacunque ipſius b, et pro Σ functione quacunque ipſius s, ſtatuaturque $dE=e\,db$ et $d\Sigma=\sigma\,ds$

erit $\text{ȣ}=c\sqrt{\frac{E\Sigma}{E+\Sigma}}$; et $\Theta=\frac{E\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{ce\Sigma\Sigma}$

item $D=\frac{1}{2}CC-\frac{1}{2}\int\frac{CC\,dE}{E}=\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E=0$ vel conſtans.

Tum vero erit $T=\frac{1}{\Theta\,\text{ȣ}}=\frac{e\Sigma\sqrt{\Sigma}}{E\sigma\sqrt{E}}$, ac denique

ob $\frac{B}{T\text{ȣ}}=B\Theta=\frac{\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{e\Sigma\Sigma\sqrt{E}}$, obtinebimus

$$dx=\frac{\sigma\,ds}{\Sigma\sqrt{E\Sigma}}+\frac{e\,db}{E\sqrt{E\Sigma}} \text{ hincque } x=\frac{-2}{\sqrt{E\Sigma}}$$

$$dy=\frac{\sigma\,ds}{\Sigma\Sigma}-\frac{e\,db}{EE} \text{ hincque } y=\frac{1}{E}-\frac{1}{\Sigma}$$

Quare

Quare cum sit $\frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{E} - y$, erit $x = -2\sqrt{\left(\frac{1}{EE} - \frac{y}{E}\right)}$
Sit $\frac{1}{E} = a$, et fiet $xx = 4aa - 4ay$. Pressio autem in quouis loco Y erit $p = V - \frac{E\,\Sigma}{2(E+\Sigma)} = V - \frac{2acc}{xx+4aa}$.

XLVIII. Iam ergo audacter pronunciare possumus, regulam resistentiae vulgarem exacte locum habere non posse, nisi quando figura corporis AEB fuerit parabolica, et singuli riuuli $a\,e\,b$, $a'e'b'$ quoque sint inflexi secundum parabolas, quae cum illa parabola AEB, tam axem EF, quam focum F, habeant communem, vnde et vasis extremam oram $\alpha\varepsilon\beta$ secundum similem parabolam formatam esse oportet. Cum igitur in reliquis casibus omnibus regula vulgaris a veritate aberret, resistentia quoque aliam sequetur legem, neque isti regulae erit consentanea. Quando ergo specie huius regulae nonnulli seducti putauerunt, fieri posse, vt corpus in fluido nullam resistentiam passurum moueatur, propterea quod actio fluidi in partem posticam destruat vim in partem anticam exertam, et in fluidis terrestribus haec destructio a tenacitate prohiberi censeatur; iam manifestum est, hanc conclusionem nullo modo admitti posse. Quia enim corpus parabolicum AEB non vtrinque terminatur, hic casus neutiquam ad resistentiae doctrinam traduci potest. Tab. III. Fig. 2.

Fig. 1.

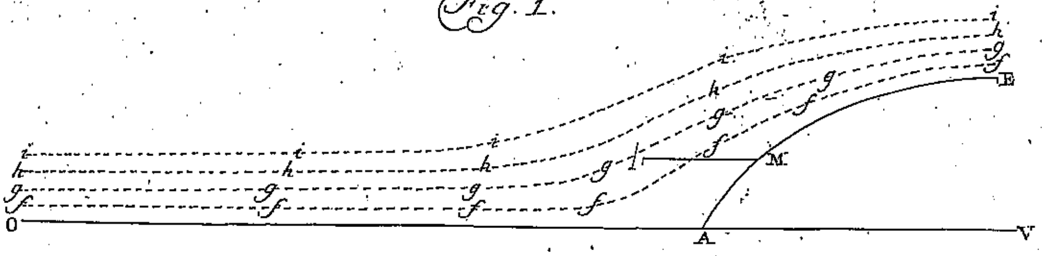

Fig. 2.

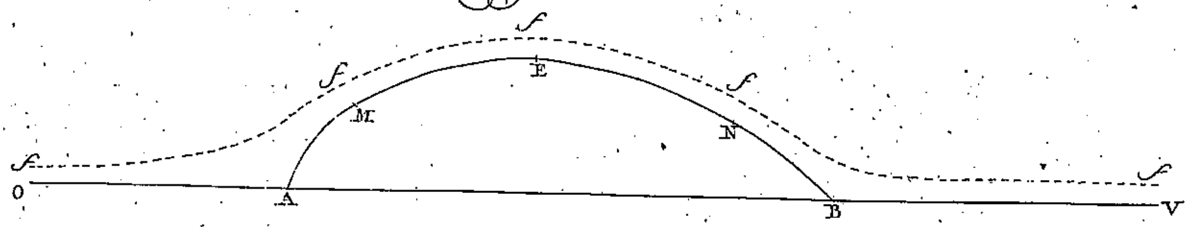

Fig. 3.

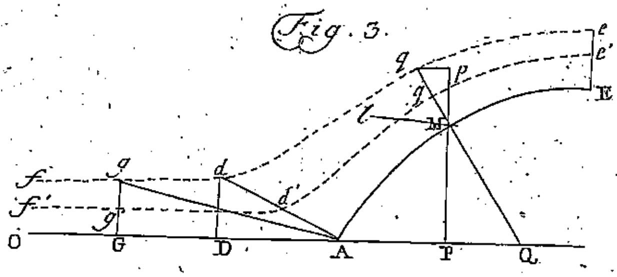

Fig. 4.

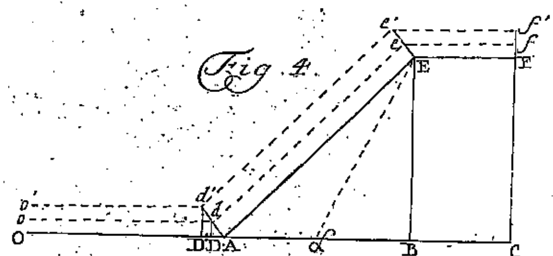

Fig. 5.

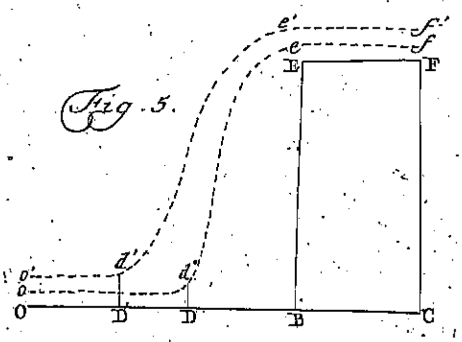

Fig. 6.

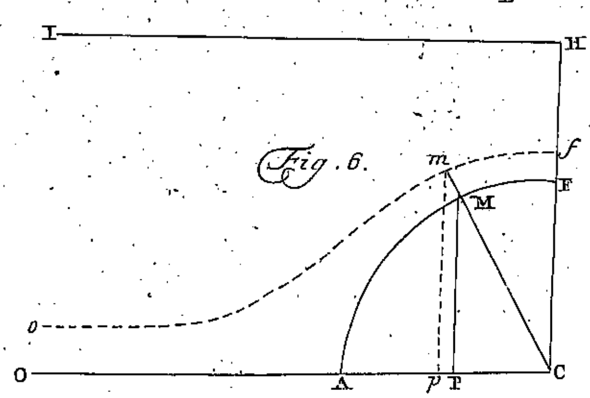

Fig. 1.

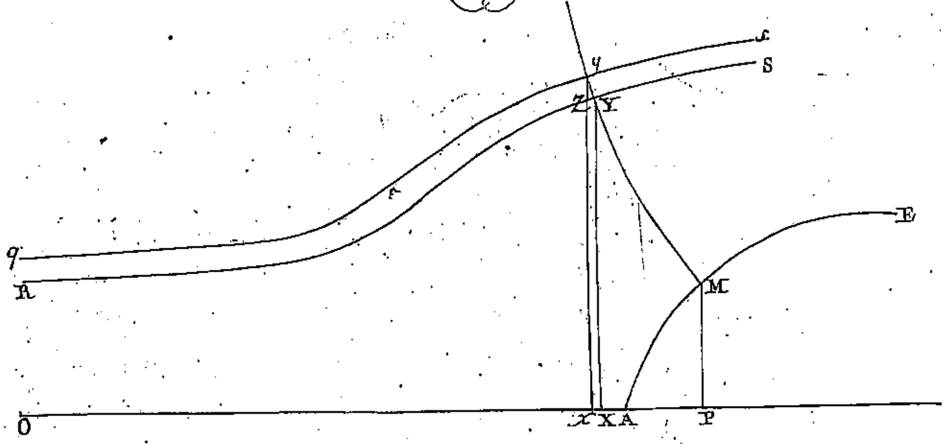

Fig. 2.