1763

Constructio aequationis differentio-differentialis $Ay\,du^2 + (B+Cu)du\,dy + (D+Eu+Fuu)ddy = 0$, sumto elemento *du* constante

Leonhard Euler

CONSTRVCTIO
AEQVATIONIS DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS

$$Aydu^2 + (B + Cu)dudy + (D + Eu + Fuu)ddy) = 0,$$

ſumto elemento *du* conſtante.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Aequationem hanc differentio-differentialem latiſſime patere, ex plurimis formis, in quas eam transmutare licet, facile intelligitur; plerumque autem eiusmodi complectitur caſus, qui, cum ſint aequationi *Riccatianae* ſimiles, ſolitis methodis neque ad integrationem, neque ad variabilium ſeparationem reduci poſſunt. Primo enim, ponendo $y = e^{\int z\,du}$, reuocatur ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$dz + \frac{(B - Cu)z\,du}{D + Eu + Fuu} + zz\,du + \frac{A\,du}{D + Eu + Fuu} = 0,$$

quae deinceps ad alias ſubſtitutiones ampliſſimum campum patefacit. Quam ob rem non parum Analyſi conſultum fore arbitror, ſi in genere iſtius aequationis conſtructionem docuero, id quod per ea, quae olim de aequatione *Riccatiana* propoſui, ſequentem in modum praeſtari poterit.

2. Concipio autem y determinari formula quapiam integrali praeter quantitatem u nouam variabilem x inuoluente, ita vt in hac integratione ſola x, vt variabilis,

riabilis, quantitas u vero vt conſtans, tractetur. Cum autem integratio, ſiue analytice, ſiue per conſtructionem quadraturarum, fuerit abſoluta, quantitati x valor quidam conſtans datus tribuitur, quo facto integrale repraeſentabit functionem quandam ipſius u, quae ſit ea ipſa, quam aequatio propoſita exigit. Totum ergo negotium huc redit, vt formula illa integralis quantitates u et x inuoluens inueniatur, quae hoc modo tractata verum valorem ipſius y exhibeat.

3. Ponamus ergo eſſe $y = \int P\,dx(u+x)^n$, in qua formula P denotet functionem quandam ipſius x ab u immunem, quam quidem demum definiri oportet. Quae cum fuerit cognita, integrale ſaltem per quadraturas concedetur, idque pro quocunque valore ipſius u, quae in integratione vt conſtans ſpectatur. Tum integrali ita ſumto, vt pro quopiam valore ipſi x tributo euaneſcat, ſtatuatur pro x alius quispiam valor definitus et conſtans, ab u ſcilicet non pendens; quo facto aequabitur y functioni cuipiam determinatae ipſius u, quae ſit ea ipſa, qua aequatio propoſita reſoluitur.

4. Etſi autem in integratione $\int P\,dx(u+x)^n$ quantitas u pro conſtante habetur, tamen eius incrementum aſſignari poteſt, quod capit, ſi pro u ſtatuatur $u+du$, et integratio ſimili modo abſoluatur. Ex principiis autem alibi expoſitis colligitur hoc incrementum $= n\,du \int P\,dx(u+x)^{n-1}$. Quare ſi haec formula eodem modo tractetur, ipſique x poſt integrationem valor determinatus tribuatur, cum fuerit $y = \int P\,dx(u+x)^n$ erit nunc, quatenus variato u ſimul y variationem ſubit, $dy = n\,du \int P\,dx(u+x)^{n-1}$. Ac ſi porro ſimili modo

modo differentiale ex variatione ipſius u ortum colligamus, ob du conſtans conſequemur:

$$ddy = n(n-1)du^2 \int P\,dx(u+x)^{n-2}.$$

5. Cum igitur his integralibus modo praeſcripto ita ſumtis, vt ipſi x valor quidam determinatus tribuatur, ſicque ea in meras functiones ipſius u abeant, habeamus hos valores:

$$y = \int P\,dx(u+x)^n;\quad \frac{dy}{du} = n\int P\,dx(u+x)^{n-1}$$
$$\text{et } \frac{ddy}{du^2} = n(n-1)\int P\,dx(u+x)^{n-2}$$

neceſſe eſt, vt vi aequationis propoſitae ſit

$$A\int P\,dx(u+x)^n + n(B+Cu)\int P\,dx(u+x)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)(D+Eu+Fuu)\int P\,dx(u+x)^{n-2} = 0$$

in quibus integralibus ſola x vt variabilis ſpectatur, u vero pro conſtante habetur. Haec autem aequatio tum ſolum locum habere debet, cum poſt ſingulas integrationes quantitati x valor ille determinatus ab u non pendens fuerit tributus.

6. In genere autem, antequam ipſi x iſte valor aſſignatur, iſta quantitas non euaneſcet, ſed potius cuipiam quantitati ex u et x compoſitae aequabitur, quae autem ita comparata eſſe debet, vt illo caſu, quo pro x valor ille determinatus ſcribatur, euaneſcat. Sit igitur $R(u+x)^{n-1}$ ea quantitas indefinita, cui ſuperior forma in genere aequetur, vbi R ſit eiusmodi functio ipſius x, quae tam pro eo valore ipſius x, quo integralia ſingula euaneſcentia redduntur, quam pro eo, qui ipſi poſt integrationes tribuitur, in nihilum abeat. Quos valores ex ipſa indole huius functiones R colligi

colligi conuenit, haecque etiam eſt cauſa, cur eos non ſtatim determinauerim.

7. Quamdiu ergo x adhuc erit variabilis, et u vt conſtans ſpectatur, neceſſe eſt, vt expreſſio $R(u+x)^{n-1}$ aequetur huic formulae integrali:

$$\int Pdx(u+x)^{n-2}\left(\begin{array}{lll} +Auu & +2Aux & +Axx \\ +nCuu & +nCux & +nBx \\ & +nBu & +n(n-1)D \\ +n(n-1)Euu & +n(n-1)Eu & \end{array}\right),$$

cuius propterea differentiale aequari oportet huic:

$$(u+x)^{n-2}\left(\begin{array}{l} udR+xdR \\ \quad +(n-1)Rdx \end{array}\right)$$

Quia autem R ab u pendere non debet, conditiones ſatisfacientes his aequationibus continentur:

$$A+nC+n(n-1)F=0$$

$$dR=(2A+nC)Pxdx+n(B+(n-1)E)Pdx$$

$$xdR+(n-1)Rdx=APxxdx+nBPxdx+n(n-1)DPdx.$$

8. Si valor ipſius dR ex ſecunda in tertia ſubſtituatur, habebitur:

$$(n-1)R=-(A+nC)Pxx-n(n-1)EPx+n(n-1)DP$$

et quia ex prima eſt $-A-nC=n(n-1)F$, prodit

$$R=nP(Fxx-Ex+D).$$

Deinde ob $2A+nC=-2n(n-1)F-nC$ ſecunda induit hanc formam:

$$dR=nPdx(-(C+2(n-1)F)x+B+(n-1)E)$$

quae per illam diuiſa dat:

$$\frac{dR}{R}=\frac{-(C+2(n-1)F)xdx+(B+(n-1)E)dx}{Fxx-Ex+D}$$

 vnde

vnde, cum R fuerit inuentum, erit

$$P\,dx = \frac{R\,dx}{(Fxx - Ex + D)},$$

exponens autem n per primam aequationem definitur vnde fit $n = \frac{F - C + \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F}$.

9. Hic plures casus perpendendi occurrunt, ac primo quidem ratione exponentis n, si is prodierit imaginarius, puta $n = \mu + \nu\sqrt{-1}$, notandum est, esse $r^{\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, lr + \sqrt{-1}.\ \text{sin.}\, lr$, ideoque $r^n = r^\mu(\text{cos.}\, \nu lr + \sqrt{-1}.\ \text{sin.}\, \nu lr)$, vnde imaginarium exponentis ope sinuum ad imaginaria simplicia reducitur, ex quibus deinceps eorum destructio mutua facilius perficietur. Deinde inuestigatio functionis R huc redigitur, vt sit

$$lR = -(n-1)\,l(Fxx - Ex + D) - \int \frac{Cx\,dx - B\,dx}{Fxx - Ex + D}$$

quae denuo ad hanc formam perducitur:

$$lR = -\left(n - 1 + \frac{C}{2F}\right) l(Fxx - Ex + D) + \left(B - \frac{CE}{2F}\right) \int \frac{dx}{Fxx - Ex + D}.$$

Nisi ergo sit $B - \frac{CE}{2F} = 0$, videndum est, an formulae integrandae denominator $Fxx - Ex + D$ habeat duos factores simplices reales et inaequales, an vero aequales? tum vero an in huiusmodi factores sit irresolubilis? praeterea casus, quo $F = 0$ peculiarem euolutionem postulat, quos diuersos casus seorsim pertractabo.

I. Casus quo $B = \frac{CE}{2F}$.

10. Aequatio ergo resoluenda erit

$$Ay + \frac{C}{2F}(E + 2Fu)\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fuu)\frac{ddy}{du^2} = 0$$

pro qua si sumamus $y = \int P\,dx\,(u + x)^n$, habemus primo

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F},$$ tum vero

R =

$$R = (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}, \text{ hincque}$$

$$Pdx = \tfrac{1}{n}dx(D - Ex + Fxx)^{-n-\frac{C}{2F}}, \text{ ita vt fit}$$

$$y = \tfrac{1}{n}\int \frac{dx(u+x)^n}{(D - Ex + Fxx)^{+n+\frac{C}{2F}}}$$

quod integrale eiusmodi terminis ipsius x comprehendi debet, quibus quantitas $(u+x)^{n-1}(D-Ex+Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$ euanescat.

11. Quoties ergo formula $D - Ex + Fxx$ duos factores habet reales, ea duplici casu euanescit, vnde bini integrationis termini constitui possunt; ad hoc autem necesse est, vt eius exponens $-n+1-\frac{C}{2F}$, qui fit $= \frac{F \mp \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F}$, sit positiuus, quia alioquin quantitas illa, cui formula proposita aequalis statuitur, non in nihilum abiret. Hoc igitur casu constructio aequationis nullam habebit difficultatem, propterea quod ob signum ambiguum exponenti semper valor positiuus tribui potest. Sit enim exponens ille $= m$, et habebitur

$$4FFmm - 4FFm + 4AF + 2CF - CC = 0$$

quae aequatio si habet radices reales, ob terminum $-4FFm$ negatiuum, altera certe erit positiua. Quem casum diligenter prosequamur.

12. Sit $D = aa$, $E = 0$ et $F = -1$, ita vt haec aequatio sit resoluenda:

$$Ay + \frac{Cudy}{du} + (aa - uu)\frac{ddy}{du^2} = 0,$$

 eritque

eritque $n = \frac{1 + C \pm \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$, cuius valor semper est realis, nisi A sit quantitas negatiua maior quam $\frac{1}{4}(1 + C)^2$: hinc erit

$$m = -n + 1 + \tfrac{1}{2}C = \frac{1 \mp \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$$

cuius valore positiuo sumta, erit pro resolutione nostrae aequationis

$$y = \tfrac{1}{n}\int dx(u + x)^n (aa - xx)^{m-1}$$

quod integrale ita capiatur, vt posito $x = a$ euanescat; tum vero statuatur $x = -a$, et pro y prodibit functio ipsius u aequationi satisfaciens. Prout iam fuerit numerus realis, vel imaginarius, sequentia exempla subiungamus.

13. *Exemplum* 1. Sit $C = 2$, et $A = -2$, vt proposita sit haec aequatio:

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = 0.$$

erit $n = 1$, et $m = 1$, vnde fit $y = \int dx(u + x)$ et ob

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = aa - xx$$

integratio ipsius y ita absolui debet, vt pro terminis integralis $aa - xx$ euanescat, hoc est si fuerit $x = a$ et $x = -a$. Fiet ergo $y = ux + \frac{1}{2}xx - au - \frac{1}{2}aa$, et posito iam $x = -a$, erit $y = -2au$, qui valor aequationi vtique satisfacit, et generalius quidem $y = \alpha u$, ex quo porro integrale completum eruitur, ponendo $y = uz$, vnde fit

$$2aadudz + (aa - uu)uddz = 0, \text{ seu } \frac{ddz}{dz} + \frac{2aadu}{u(aa - uu)} = 0$$

vel $\frac{ddz}{dz} + \frac{2du}{u} + \frac{2udu}{aa - uu} = 0$, quae integrata dat

$$\frac{uudz}{aa - uu} = \beta du, \text{ porroque } z = \gamma - \beta u - \frac{\beta aa}{u}$$

consequenter $y = \gamma u - \beta uu - \beta aa$.

ANNO-