



1763

Solutio problematis de investigatione trium  
numerorum, quorum tam summa quam  
productum nec non summa productorum ex binis  
sint numeri quadrati

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Solutio problematis de investigatione trium numerorum, quorum tam summa quam productum nec non summa productorum ex binis sint numeri quadrati" (1763). *Euler Archive - All Works*. 270.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/270>

SOLVTIO PROBLEMATIS  
DE INVESTIGATIONE TRIVM NVMERORVM,  
QVORVM TAM SVMMA, QVAM PRODVCTVM,  
NEC NON SVMMA PRODVCTORVM EX  
BINIS, SINT NVMERI QVADRATI.

Auctore

L. EVLERO.

I.

**E**tsi problemata huius generis, quae Diophantea appellari solent, parum utilitatis afferre videntur: tamen certum est, Analysin Mathematicam, atque adeo etiam eam partem, quae circa infinita versatur, ex methodo problemata Diophantea soluendi, maxima incrementa cepisse. Non solum autem huiusmodi problemata, si sint difficiliora, fines Analyseos plurimum amplificauerunt: sed etiam vim ingenii mirifice acuere solent, ut etiam in aliis problematibus, quomodo solutionem institui oporteat, facilius perspicere valeat. Quam ob rem huius generis problemata, praecipue si modus soluendi magis fuerit reconditus, minime contemnenda esse arbitror. Dum enim singularia artificia ad eorum solutionem requiruntur, ab iisdem quoque egregia subsidia ad vniuersam Analysin vberius excolendam expectare licebit.

2. Ad hoc autem genus potissimum referendum videtur problema propositum, quandoquidem id diu  
et

et multum per varia Methodi Diophantæ artificia frustra tractavi, ut fere etiam de eius solutione penitus desperaverim. Tandem vero, quasi inopinato, solutionem sum consecutus, quæ eo magis notatu digna videbatur, quod minimi numeri, quos quidem adhuc satisfaciens elicere potui, sunt ita prægrandes, ut mirum non sit, solutionem tantis difficultatibus fuisse involutam. Quare cum methodo singulari ad istam solutionem pertigerim, eius ampliorem explicationem vix non esse carituram arbitror, cum simili fortasse modo alia quæstiones multo adhuc difficiliores superari queant.

3. Quaeruntur ergo tres numeri, quibus tres sequentes conditiones conveniant:

I. Ut eorum summa sit numerus quadratus.

II. Ut summa productorum ex binis sit numerus quadratus.

III. Ut productum omnium trium sit numerus quadratus.

Quod problema etiam hoc modo enunciari potest, ut quaeratur æquatio cubica  $z^3 - pzz + qz - r = 0$ , omnes suas radices habens rationales, cuius singuli coefficientes  $p$ ,  $q$  et  $r$  sint numeri quadrati. Posset adhuc adiacere hæc conditio, ut isti numeri sint integri, verum per se est perspicuum, quomodo inuentis ternis numeris fractis satisfaciens, ex iis facile integri, qui etiam satisfaciens, formari queant. Quicumque enim terni numeri satisfaciens fuerint inuenti, iidem per numerum quadratum quemcumque multiplicati aequè satisfaciens, quo pacto fractiones facillime tollentur.

4. Sint igitur  $nx$ ,  $ny$ ,  $nz$  tres huiusmodi numeri quaesiti, ac satisfieri oportebit his conditionibus:

I. Vt sit  $n(x+y+z) = \text{Quadrato}$

II. Vt sit  $nn(xy+xz+yz)$  seu  $xy+xz+yz = \text{Quadrato}$

III. Vt sit  $n^2xyz$  seu  $xyz = \text{Quadrato}$ .

At primae et tertiae conditioni satisfiet, si reddatur,

$$xyz(x+y+z) = \text{Quadrato}.$$

Ponatur ergo:

$$xyz(x+y+z) = vv(x+y+z)^2$$

unde per  $x+y+z$  diuidendo erit

$$xyz = vv(x+y+z), \text{ hincque } z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}.$$

Cum igitur hinc fiat  $xyz = \frac{vvxy(x+y)}{xy-vv}$ ,

ut  $xyz$  prodeat, quadratum capi debet,

$$n = m^2 xy(x+y)(xy-vv)$$

Hisque valoribus pro  $z$  et  $n$  assumtis, satisfactum erit primae et tertiae conditioni.

§. Hinc itaque nostri tres numeri erunt

primus  $nx = mmxxy(x+y)(xy-vv)$

secundus  $ny = mmxyy(x+y)(xy-vv)$

tertius  $nz = mmvvy(x+y)^2$

vbi per numerum arbitrium  $m$  fractiones, si quae forte occurrant, tolli poterunt. Verum contemplemur iam

secundam conditionem, quae ob  $z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}$  requirit,

ut sit:

$$xy + \frac{vv(x+y)^2}{xy-vv} = \text{Quadrato}.$$

Pona-

Ponamus in hunc finem:

$$xy - vv = uu; \text{ vt fit } y = \frac{vv + uu}{x} \text{ et } z = \frac{vv(x+y)}{uu}$$

$$\text{erit } xy = vv + uu \text{ et } x + y = \frac{xx + vv + uu}{x}$$

efficiendumque est, vt fit

$$vv + uu + \frac{vv(xx + vv + uu)^2}{uu xx} = \text{Quadrato.}$$

6 Ponatur  $x = tv$ ; vt fit  $y = \frac{vv + uu}{tv}$ , esseque debet

$$vv + uu + \frac{(vv(tt + 1) + uu)^2}{ttuu} = \text{Quadrato,}$$

seu multiplicando per  $ttuu$

$$ttuu vv + ttu^4 + v^4(tt + 1)^2 + 2uu vv(tt + 1) + u^4 = \text{Quadrato,}$$

$$\text{sive } v^4(tt + 1)^2 + uu vv(3tt + 2) + u^4(tt + 1) = \text{Quadrato.}$$

Statuatur huius quadrati radix  $= vv(tt + 1) + suu$ , erit

$$vv(3tt + 2) + uu(tt + 1) = 2svv(tt + 1) + ssuu;$$

unde elicitur

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt + 1 - ss}{2s(tt + 1) - s^2 tt - 2} = \text{Quadrato.}$$

Sit porro  $s = t - r$ , et habebitur:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{2rt - rr + 1}{2t^2 - (2r + 3)tt + 2t - 2(r + 1)}$$

Multiplicetur numerator et denominator per  $2rt - rr + 1$ , vt fiat

$$\frac{vv}{uu} = \frac{(2rt - rr + 1)^2}{4rt^2 - 2(3rr + 3r - 1)t^2 + (2r^2 + 3rr + 2r - 3)tt - 2(2r - 1)(r + 1)t + 2(r - 1)(r + 1)^2}$$

7. Tota ergo quaestio huc est perducta, vt huius fractionis denominator reddatur quadratum: posito enim

$$4rt^2 - 2(3rr + 3r - 1)t^2 + (2r^2 + 3rr + 2r - 3)tt - 2(2r - 1)(r + 1)t + 2(r - 1)(r + 1)^2 = QQ$$

I 2  
erit

erit definitis hinc  $t$  et  $r$

$$\frac{v}{u} = \frac{rt - rr + 1}{Q}, \text{ tum vero } x = tv \text{ et } y = \frac{uv + uv}{tv}$$

vnde numeri quaesiti definiuntur. Ante autem, quam ad istam aequationem pertigimus, solutionem iam limitauimus positione  $xy - uv = uu$ ; quae restrictio probe est notanda, quoniam nullum est dubium, quin eiusmodi extent solutiones, in quibus  $xy - uv$  non sit numerus quadratus, easque propterea hinc non reperiemus. Verum hanc limitationem ideo facere sum coactus, ut ad istam formulam quadrato aequandam peruenire licuerit, quippe quae ita est comparata, ut per cognita artificia resolui possit. Sicque tota solutionis vis in reductionibus §. praeced. est sita.

8. Pluribus autem casibus haec formula et quidem infinitis modis quadratum effici potest, quorum praecipui, et qui statim se offerunt sunt: 1°. Si coefficientis ipsius  $t^2$ , scilicet  $4r$ , seu  $r$ , fuerit numerus quadratus. 2°. Si terminus vltimus  $2(r-1)(r+1)^2$  seu  $2(r-1)$  fuerit numerus quadratus: viroque enim casu per regulas cognitae valores idonei pro  $t$  elici, tum vero porro ex quolibet alii noui inueniri possunt. Simul autem simul et  $r$  et  $2(r-1)$  fuerint quadrata, vna operatione plures valores idoneos pro  $t$  eruere licet, neque vero hic, ut plerumque fieri solet, solutio simplicior se offert; etsi enim si  $2(r-1) =$  quadrato, satisfacit valor  $t = 0$ , tamen inde prodit  $x = 0$  et  $y = \infty$ , qui valores pro natura quaestionis plane sunt incongrui. Excluduntur enim solutiones, quibus vnum trium numerorum quaesitorum euanesceret, quia tum  
quaestio

quaestio esset facillima et circa duos numeros versaretur, quorum tam summa, quam productum, esset quadratum.

Casus 1. quo ponitur  $r = 1$ .

9. Hic casus simplicissimus videtur, quia ultimus terminus nostrae formae evanescit, primusque fit quadratus. Habemus ergo

$$4t^4 - 10t^3 + 4tt - 8t = QQ \text{ et } \frac{v}{u} = \frac{2t}{Q}.$$

Ad hanc aequationem solvendam statuamus  $Q = 2tt - \frac{1}{2}t^2$  eritque

$$4tt - 8t = \frac{25}{4}tt; \frac{2}{4}t = -8; \text{ et } t = -\frac{32}{5}.$$

At hinc fiet  $\frac{v}{u} = \frac{4}{4t-5} = \frac{-36}{173}$ ; vnde habebimus

$$v = -36; u = 173; t = -\frac{32}{5} \text{ et } x = tv = 128$$

$$\text{indeque porro } y = \frac{36^2 + 173^2}{128} = \frac{31225}{128} = \frac{25 \cdot 1249}{128}.$$

$$\text{Erit ergo } x + y = \frac{47609}{128} \text{ et } z = \frac{36^2 \cdot 47609}{173^2 \cdot 128}$$

ac tres numeri quaesiti erunt, ob  $xy - uv = uu$ ,

$$\text{Primus} = \frac{128^2 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128 \cdot 128} \text{ m m}$$

$$\text{Secundus} = \frac{128 \cdot 25^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128^2 \cdot 128} \text{ m m}$$

$$\text{Tertius} = \frac{36^2 \cdot 128 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609^2}{128 \cdot 128^2} \text{ m m}.$$

10. Ad fractiones tollendas ponamus  $m = \frac{128}{5}$  eruntque terni nostri numeri

$$\begin{aligned} \text{Primus} &= 128^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \cdot 47609 = 128^2 \cdot 173^2 \\ \text{Secundus} &= 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 = 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \} \text{ in } 1249 \cdot 47609 \\ \text{Tertius} &= 36^2 \cdot 1249 \cdot 47609^2 = 36^2 \cdot 47609 \} \end{aligned}$$

quibus numeris euolutis erit

$$\text{Primus} = 490356736.59463641$$

$$\text{Secundus} = 934533025.59463641$$

$$\text{Tertius} = 61701264.59463641$$

quorum productum manifesto est quadratum 2 quippe

$$5^2.36^2.128^2.173^4.1249^4.47609^4.$$

Summa autem reperitur

$$25.59463641^2$$

et summa productorum ex binis :

$$173^2.59463641^2.18248924559376$$

cuius radix quadrata est 173.59463641.4271876

11. Pro eadem aequatione resoluenda poni potest

$Q = 2tt - \frac{1}{2}t - \frac{9}{16}$ , vt tres primores termini tollantur, ac prodibit

$$-8t = +\frac{15t}{16} + \frac{21}{32}, \text{ seu } 0 = 173t + \frac{21}{16}, \text{ ergo } t = \frac{-81}{16.173}.$$

$$\text{Hinc } Q = \frac{81^2}{128.173^2} + \frac{405}{32.173} - \frac{9}{16} = -\frac{9.207563}{128.173^2}$$

et  $\frac{v}{u} = +\frac{144.125}{207563}$ . Sumi enim potest valor ipsius  $Q$  tam negatiue quam positiue. Statuatur ergo

$$v = -144.173; u = 207563; \text{ erit } x = 9.81 = 729$$

et  $y = \frac{vv+uz}{729}$ ; vnde iam manifestum est, ad tam enormes perueniri numeros, vt solutio praecedens prae hac multo simplicior sit aestimanda. Superfluum autem foret, huiusmodi solutiones nimis complicatas vterius euoluere, quia in huius generis quaestionibus solutione simplicissima plerumque contenti esse solemus.

Casus



Casus 2. quo ponitur  $v = \frac{3}{2}$ .

12. Hac positione vltimus formulae nostrae terminus sit quadratum, eritque  $\frac{v}{u} = \frac{12t-3}{4Q}$ , existente

$$QQ = 6t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{27}{2}tt - \frac{35}{2}t + \frac{25}{2}.$$

Iam, ad tres terminos vltimos tollendos, statuatur

$$Q = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}t + \frac{1}{2}tt, \text{ eritque}$$

$$6t^4 - \frac{1}{2}t^3 = \frac{1}{2}t^4 - \frac{7}{2}t^3 \text{ et } t = \frac{60}{13}$$

hincque  $Q = \frac{4375}{722}$  et  $\frac{v}{u} = \frac{19}{14}$ , vnde  $v = 19$  et  $u = 14$ .

Nunc igitur erit  $x = tv = 60$ ; et  $y = \frac{vv+uu}{x} = \frac{557}{60}$

ideoque  $x+y = \frac{4157}{60}$  et tres numeri quaesiti:

$$\text{Primus} = \frac{60^2 \cdot 557 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60} mm = 14^2 \cdot 60^2 \cdot 557 \cdot 4157$$

$$\text{Secundus} = \frac{60 \cdot 557^2 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 14^2 \cdot 557^2 \cdot 4157$$

$$\text{Tertius} = \frac{361 \cdot 60 \cdot 557 \cdot 4157^2}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 19^2 \cdot 557 \cdot 4157^2$$

posito  $m = 60$ : hique numeri iam notabiliter sunt minores quam ii, qui casu primo sunt inuenti.

13. Quoniam ergo hi numeri ob paruitatem attentione digni videntur, ii ita exhibeantur:

$$\text{Primus} = 705600. 2315449$$

$$\text{Secundus} = 109172. 2315449$$

$$\text{Tertius} = 1500677. 2315449.$$

Quorum numerorum summa est  $= 2315449^2$ , et productum  $= 14^4 \cdot 19^2 \cdot 60^2 \cdot 557^4 \cdot 4157^4$ , sicque vterque numerus quadratus.

At summa productorum ex binis erit

$$(14^2 \cdot 60^2 \cdot 14^2 \cdot 557 + 14^2 \cdot 60^2 \cdot 19^2 \cdot 4157 + 14^2 \cdot 557 \cdot 19^2$$

$$4157) \cdot 2315449^2$$

quae

quae reducitur ad hanc formam:

$$14^2 2315449^2.6631333489$$

cuius radix quadrata est

$$14.2315449.81433.$$

Sunt autem hi numeri circiter 15000 vicibus minores, quam primum inuenti.

Casus 3. quo ponitur  $r=3$ .

14. Posito  $r=3$ , fit  $\frac{v}{u} = \frac{6t-8}{Q}$ , et habebitur hæc æquatio resoluenda:

$$QQ = 12t^4 - 70t^3 + 84tt - 64t + 64.$$

Iam ad terros ultimos terminos tollendos statuatur

$$Q = 8 - 4t + \frac{1}{7}tt, \text{ eritque}$$

$$12t^4 - 70t^3 = \frac{289}{18}t^4 - 34t^3$$

vnde elicitur  $t = -\frac{576}{97}$ , et  $Q = \pm \frac{8.218608}{97.97}$

$$\text{Ergo } \frac{v}{u} = -\frac{97.529}{213608} = -\frac{97.23}{9287} = -\frac{23.97}{27.251}$$

ideoque  $v = -23.97$  et  $u = 37.251$ : tum  $x = v = 23.24^2$

et  $y = \frac{91225730}{23.24^2}$ . Verum facile perspicitur, hos numeros in immensum excrecere, vnde iis evoluendis supersedemus. Contemplemur ergo adhuc vnum casum, quo tam primus, quam ultimus terminus formulæ  $QQ$  sunt quadrati.

Casus 4. quo ponitur  $r=9$ .

15. Posito  $r=9$ , fit  $\frac{v}{u} = \frac{13t-20}{Q}$ , existente

$$QQ = 36t^4 - 538t^3 + 1716tt - 520t + 1600$$

Tollamus terminos primum et duos ultimos, ponendo

$$Q = 40 - \frac{13}{3}t + 6tt, \text{ et habebimus}$$

$$-538t^3 + 1716tt = +78t^3 + 480tt + \frac{169}{4}tt$$

vnde

vnde elicimus pro vtroque signo

$$\left. \begin{array}{l} \text{superiori } t = \frac{5 \cdot 191}{16 \cdot 23} \\ \text{inferiori } t = \frac{5 \cdot 1723}{32 \cdot 77} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{vtrunque autem prodeunt} \\ \text{numeri nimis magni.} \end{array}$$

Tollamus ergo tres terminos vltimos, ponendo

$$Q = 40 - \frac{13}{2}t + \frac{23 \cdot 29}{64}tt;$$

hinc autem numeri multo adhuc maiores resultant. Possit porro pro binis terminis primis cum vltimo tollendis poni  $Q = 6tt - \frac{269}{6}t + 40$ , verum hinc multo minus ad numeros simpliciores perueniemus.

16. Ex his satis tuto concludi posse videtur, minimos numeros problemati satisfaciētes esse eos, quos §. 13. elicuimus, qui ergo, si penitus per multiplicationem euoluantur, erunt:

$$\text{Primus} = 1633780814400.$$

$$\text{Secundus} = 252782198228.$$

$$\text{Tertius} = 3474741058973.$$

Sin autem in fractionibus numeri satisfaciētes simplicissimi desiderentur, ii indidem assignari poterunt, his per  $2315449^2$  diuidendis: ita vt hi numeri futuri sint:

$$\text{Primus} = \frac{705600}{2315449}$$

$$\text{Secundus} = \frac{196}{4157}$$

$$\text{Tertius} = \frac{261}{557}$$

quorum tam summa, quam summa productorum ex binis, et omnium trium productum, sunt numeri quadrati.