1762

Lettre de M. Euler à M. de la Grange

Leonhard Euler

LETTRE

DE M. EULER A M. DE LA GRANGE.

Depuis ma dernière lettre j'ai réussi à ramener au calcul la propagation du Son, en supposant à l'air toutes les trois dimensions, & quoique je ne doute pas que Vous n'y soyés parvenu plus heureusement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers Votre Illustre Société qu'en lui présentant mes Recherches sur ce même sujet.

Recherches sur la propagation des ébranlemens dans une milieu élastique.

En considérant le milieu dans l'état d'équilibre soit sa densité $= 1$, & son élasticité balancée par le poid d'une colomne du même fluide, dont la hauteur $= h$; Je commence par considérer un élément quelconque du fluide qui dans l'état d'équilibre se trouve au point Z (*fig.* 1.) déterminé par les trois coordonnées perpendiculaires entr'elles $AX = X$, $XY = Y$ & $YZ = Z$, & que par l'agitation ce même élément ait été transporté en z, dont les coordonnées soient $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$, qui seront certaines fonctions des premières X, Y, Z pour un instant donné. Soit donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ$$
$$dy = PdX + QdY + RdZ$$
$$dz = SdX + TdY + VdZ.$$

Ensuite je considére un volume infiniment petit de fluide, qui dans l'état d'équilibre ait la figure piramidale $Z\xi\eta\theta$ (*fig.* 2.) rectangulaire, qui par l'agitation soit transporté en $z\lambda\mu\nu$, dont la figure sera aussi piramidale, & posant pour l'état d'équilibre

du point	les coordonnées		
Z	$X,$	$Y,$	Z
ξ	$X+\alpha,$	$Y,$	Z
η	$X,$	$Y+\beta,$	Z
θ	$X,$	$Y,$	$Z+\gamma$

le volume de la piramide $Z\xi\eta\theta$ sera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$.

On aura ensuite pour l'état d'agitation

du point	les trois coordonnées		
ζ.	$Ax = x,$	$xy = y,$	$y\zeta = \zeta$
λ.	$AL = x + L\alpha,$	$Ll = y + P\alpha,$	$l\gamma = \zeta + S\alpha$
μ.	$AM = x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = \zeta + T\beta$
ν.	$AN = x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = \zeta + V\gamma$

Il s'agit maintenant de trouver le volume de la nouvelle piramide $\zeta\lambda\mu\nu$, qu'on voit être composée de ces prismes $ymn\zeta\mu\nu + yln\zeta\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylm\zeta\lambda\mu$. Prenant pour cela la solidité de chaque part, on trouvera cette solidité $=$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + n\nu)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(y\zeta + m\mu + n\nu)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(l\lambda + m\mu + n\nu)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + m\mu)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + V\gamma)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$-\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn - \frac{1}{3}T\beta\Delta yln + \frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm.$$

Ensuite

Ensuite on trouve les aires de ces triangles, à cause de $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il suit

$$\Delta ymn = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} MN(2y + Q\beta + R\gamma)$$
$$- \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) = \frac{1}{2} Q\beta \times xN - \frac{1}{2} R\gamma \times xM$$
$$= \frac{1}{2} \beta\gamma (NQ - MR).$$

$$\Delta yln = \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) + \frac{1}{2} LN(2y + P\alpha + R\gamma)$$
$$- \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} R\gamma \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xN$$
$$= \frac{1}{2} \alpha\gamma (LR - NP).$$

$$\Delta ylm = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} LM(2y + P\alpha + Q\beta)$$
$$- \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} Q\beta \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xM$$
$$= \frac{1}{2} \alpha\beta (LQ - MP).$$

De-là nous tirons la solidité de notre piramide $\zeta\lambda\mu\nu$ dans l'état d'agitation $= -\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ - MR) - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma T (LR - NP) + \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma V(LQ - MP)$, & partant la densité du milieu agité en ζ sera $= 1 : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, & posant Π pour la hauteur de la colomne qui y balance l'élasticité, nous aurons $\Pi = h : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z posons $d\Pi = EdX + FdY + GdZ$, de sorte que $E = (\frac{d\Pi}{dX})$, $F = (\frac{d\Pi}{dY})$, $G = (\frac{d\Pi}{dZ})$. Soit pour abréger

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K$, de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$; si nous concevons dans l'état d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z déterminé par ces coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, ce point se trouvera après l'agitation en z', dont les coordonnées seront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$z + SdX + TdY + VdZ,$$

donc réciproquement la position du point z' infiniment proche de z dans l'état troublé étant donnée par les coordonnées $X + \alpha$, $Y + \beta$, $Z + \gamma$ son lieu dans l'état d'équilibre sera déterminé par les coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, de sorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

Delà l'élasticité en z étant $\Pi = \frac{h}{K}$, elle sera en $z' = \Pi + EdX + FdY + GdZ$, ou bien si nous posons pour abréger

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$
$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$$

l'élasticité en z' sera exprimée par $\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$ la densité y étant $\frac{1}{K}$.

Considérons maintenant un parallélepipéde rectangle infiniment petit $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 3.) dont les cotés paralleles à

nos

nos coordonnées ſoient $zb = \alpha$, $zc = \beta$, $zd = \gamma$, ſon volume ſera $= \alpha\beta\gamma$ & ſa maſſe $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Pour connoître les forces, dont ce parallélepipéde eſt ſollicité, cherchons d' abord l' élaſticité du milieu à chacun de ſes angles de la manière ſuivante

du point	les coordonnées			l' élaſticité
z	x,	y,	z.	Π
b	$x + \alpha$,	y,	z.	$\Pi + \frac{A\alpha}{K}$
c	x,	$y + \beta$,	z,	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x + \alpha$,	$y + \beta$,	z,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K}$
α	x,	y,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x + \alpha$,	y,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K}$
γ	x,	$y + \beta$,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x + \alpha$,	$y + \beta$,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

De-là il eſt clair, que conſidérant les faces oppoſées $zc\alpha\gamma$ & $bd\beta\delta$, les preſſions ſur celle-ci ſurpaſſent les preſſions ſur celle-là de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$; donc l' aire de ces faces étant $\beta\gamma$, il en réſulte une force ſuivant la direction $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$; de la même manière le parallélepipéde ſera pouſſé ſuivant la direction xy par la force $= -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, & ſuivant la direction yz par la force $= -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$. Donc la

maſſe

maſſe de ce parallélepipéde étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$ ſi nous introduiſons la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde, en exprimant le tems écoulé t en ſecondes, nous aurons pour la connoiſſance du mouvement les trois équations ſuivantes.

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA,$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB,$$
$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations poſſibles, je ne conſidére ici que les cas où ces agitations ſont quaſi infiniment petites; pour cet effet je poſe $x = X + p$, $y = Y + q$, & $z = Z + r$, de ſorte que p, q, r ſont des quantités infiniment petites; delà nous aurons

$$dp = (L - 1)\, dX + M dY + N dZ;$$
$$dq = P dX + (Q - 1)\, dY + R dZ$$
$$dr = S dX + T dV + (V - 1)\, dZ,$$

& partant à peu-près $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$, & $K = 1$; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = -h\left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right)\right)$$
$$F = -h\left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right)\right)$$
$$G = -h\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)$$

Enſuite nous trouvons $A = E$, $B = F$, $C = G$. Pour nous débaraſſer encore des autres lettres, remarquons que $L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right)$, $Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right)$, $V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$ de ſorte qu'outre les coordonnées X, Y, Z, avec le tems t

il

il ne reſte dans le calcul que les lettres p, q, r, qui marquent le déplacement de chaque point. Car ſubſtituant ces valeurs, que nous venons de trouver, le mouvement cauſé par une agitation quelconque mais fort petite, ſera déterminé par les trois équations ſuivantes

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right).$$

ou bien poſant $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = u$ nous aurons

$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dX}\right)$, $\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dY}\right)$, &

$\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dZ}\right)$, d'où il eſt aiſé de conclure

$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right)$, d'où il faut déterminer la nature de la fonction u déterminée par les coordonnées X, Y, Z, & le tems t.

Delà il n'eſt pas difficile de trouver une infinité de ſolutions particuliéres, comme

$$p = \beta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$q = \gamma\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$r = \delta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

pourvû que $\alpha = \sqrt{2gh\,(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}$ où β, γ, δ ſont des quantités quelconques, & φ marque une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne on aura toujours le cas d'un certain ébranlement, dont on pourra déterminer la continuation. Mais pour notre deſſein il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement initial aura été renfermé dans un petit eſpace, d'où il s'eſt répandu enſuite en tout ſens.

Soit

Soit donc A le centre de l'agitation primitive & posons $p = Xs$, $q = Ys$, $r = Zs$, & s sera une fonction du tems t, & de la quantité $\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = V$ qui marque la distance du point A. Donc puisque $ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + dV\left(\frac{ds}{dV}\right)$ nous aurons $ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + \left(\frac{XdX + YdY + ZdZ}{V}\right) \times \left(\frac{ds}{dV}\right)$, & puis $\left(\frac{dp}{dX}\right) = s + \frac{X^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, $\left(\frac{dq}{dY}\right) = s + \frac{Y^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$; $\left(\frac{dr}{dZ}\right) = s + \frac{Z^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, donc $u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right)$; maintenant aiant $\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$. $\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V}$, notre premiére équation deviendra $\frac{X}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$ ou $\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$, à laquelle se réduisent aussi les deux autres; & l'éloignement du point Z depuis le centre A sera $Vs = s\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = \sqrt{(pp + qq + rr)}$ qui en marque le déplacement par rapport à l'état d'équilibre, de sorte que le rayon d'une couche sphérique, qui dans l'état d'équilibre étoit $= V$, sera à présent $= V + Vs$. Donc si nous posons $Vs = u$, ou $s = \frac{u}{V}$ afin que u exprime le changement de cette couche, la particule u sera déterminée par cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Aprés plusieurs recherches j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas, où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension. Que

φz marque une fonction quelconque de z, & qu'on indique son différentiel de cette façon $d \cdot \varphi z = dz\, \varphi' z$. Cela posé, on verra qu'on satisfait à notre équation en supposant $u = \frac{A}{V^2}\varphi[V \pm t\sqrt{(2ggh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V \pm t\sqrt{(2gh)}]$. Donc pour le commencement de l'agitation nous aurons cette équation $u = \frac{A}{V^2}\varphi V - \frac{A}{V}\varphi' V$; d'où l'on voit que pour appliquer cette formule à la propagation du Son la fonction φz doit toujours être $= 0$ excepté le cas, où la quantité z est extrémement petite. Or il faut que la fonction $\varphi' z$ ait la même proprieté & encore celle-ci $\varphi'' z$, en supposant $d\varphi' z = dz\, \varphi'' z$, afin que non seulement la quantité u, mais aussi la vitesse $\left(\frac{du}{dt}\right)$ s'évanoüisse au commencement par tout, excepté dans le petit espace autour de A où s'est fait l'ébranlement primitif.

Que le caractère ψ marque des fonctions discontinues de la même nature, & nous aurons la solution générale qui suit

$$u = \frac{A}{V^2}\varphi[V + t\sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B}{V^2}\psi[V - t\sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$

& pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V^2}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V}\varphi''[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V^2}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V}\psi''[V - t\sqrt{(2gh)}].$$

Delà il est clair qu'une couche sphérique, dont le rayon $= V$ demeure en repos tant que la formule $V - t\sqrt{(2gh)}$

ne devient aſsès petite, ou moindre que le rayon de la petite ſpère ébranlée au commencement; & partant l'agitation primitive ſera répandue à la diſtance $= V$ après le tems t $= \frac{V}{\sqrt{(2gh)}}$ ſecondes, d'où il s'enſuit la même viteſſe du Son que Newton a trouvé, c'eſt-à-dire plus petite que ſelon les expériences. D'où je conclus qu'aïant ſuppoſé dans ce calcul les ébranlemens infiniment petits, leur grandeur cauſe une propagation plus prompte.

Enſuite ces formules nous apprennent que lorſque les diſtances V ſont fort grandes, en ſorte que les termes diviſés par V^2 s'évanoüiſſent à l'égard des autres diviſés par V, tant les petits eſpaces u, que les viteſſes $(\frac{du}{dt})$ diminuent en raiſon des diſtances; d'où l'on peut juſtement juger de l'affoibliſſement du Son par des grandes diſtances.

Voila mes Recherches que vous pourrés inſérer, MONSIEUR, *dans vôtre ſecond Volume ſi vous le jugés à propos, &c.*

Berlin ce 1.^r Janvier 1760.