



1762

Lettre de M. Euler à M. de la Grange

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Lettre de M. Euler à M. de la Grange" (1762). *Euler Archive - All Works*. 268.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/268>

This Letter is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

LETTRE

DE M. EULER A M. DE LA GRANGE.

*DE*puis ma dernière lettre j'ai réussi à ramener au calcul la propagation du Son, en supposant à l'air toutes les trois dimensions, & quoique je ne doute pas que Vous n'y soyés parvenu plus heureusement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers Votre Illustre Société qu'en lui présentant mes Recherches sur ce même sujet.

RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DES ÉBRANLEMENS DANS UNE MILIEU ÉLASTIQUE.

EN considérant le milieu dans l'état d'équilibre soit sa densité = 1, & son élasticité balancée par le poids d'une colonne du même fluide, dont la hauteur = h ; Je commence par considérer un élément quelconque du fluide qui dans l'état d'équilibre se trouve au point Z (*fig. 1.*) déterminé par les trois coordonnées perpendiculaires entr'elles $AX = X$, $XY = Y$ & $YZ = Z$, & que par l'agitation ce même élément ait été transporté en z , dont les coordonnées soient $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$, qui seront certaines fonctions des premières X , Y , Z pour un instant donné. Soit donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ$$

$$dy = PdX + QdY + RdZ$$

$$dz = SdX + TdY + VdZ.$$

Ensuite je considère un volume infiniment petit de fluide, qui dans l'état d'équilibre ait la figure pyramidale $Z\xi\eta\theta$ (*fig. 2.*) rectangulaire, qui par l'agitation soit transporté en $z\lambda\mu\nu$, dont la figure sera aussi pyramidale, & posant pour l'état d'équilibre

du point	les coordonnées
Z	X, Y, Z
ξ	X + α, Y, Z
η	X, Y + β, Z
θ	X, Y, Z + γ

le volume de la pyramide Zξηθ sera = $\frac{1}{6} \alpha \beta \gamma$.

On aura ensuite pour l'état d'agitation
du point les trois coordonnées

$$\begin{aligned} \zeta. Ax &= x, & xy &= y, & yz &= z \\ \lambda. AL &= x + L\alpha, & Ll &= y + P\alpha, & l\gamma &= z + S\alpha \\ \mu. AM &= x + M\beta, & Mm &= y + Q\beta, & m\mu &= z + T\beta \\ \nu. AN &= x + N\gamma, & Nn &= y + R\gamma, & n\nu &= z + V\gamma \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de trouver le volume de la nouvelle pyramide ζλμν, qu'on voit être composée de ces prismes $ymn\zeta\mu\nu + yln\zeta\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylm\zeta\lambda\mu$. Prenant pour cela la solidité de chaque part, on trouvera cette solidité =

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{3} (yz + l\lambda + n\nu) \Delta yln \\ &+ \frac{1}{3} (yz + m\mu + n\nu) \Delta ymn \\ &+ \frac{1}{3} (l\lambda + m\mu + n\nu) \Delta lmn \\ &- \frac{1}{3} (yz + l\lambda + m\mu) \Delta ylm \end{aligned} \right\} =$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{3} (3z + S\alpha + V\gamma) \Delta yln \\ &+ \frac{1}{3} (3z + T\beta + V\gamma) \Delta ymn \\ &+ \frac{1}{3} (3z + S\alpha + T\beta + V\gamma) \Delta lmn \\ &- \frac{1}{3} (3z + S\alpha + T\beta) \Delta ylm \end{aligned} \right\} =$$

$$- \frac{1}{3} S\alpha \Delta ymn - \frac{1}{3} T\beta \Delta yln + \frac{1}{3} V\gamma \Delta ylm .$$

Ensuite

Ensuite on trouve les aires de ces triangles, à cause³ de
 $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il suit

$$\begin{aligned} \Delta ymn &= \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} MN(2y + Q\beta + R\gamma) \\ &- \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) = \frac{1}{2} Q\beta \times xN - \frac{1}{2} R\gamma \times xM \\ &= \frac{1}{2} \beta\gamma (NQ - MR). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta yln &= \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) + \frac{1}{2} LN(2y + P\alpha + R\gamma) \\ &- \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} R\gamma \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xN \\ &= \frac{1}{2} \alpha\gamma (LR - NP). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta ylm &= \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} LM(2y + P\alpha + Q\beta) \\ &- \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} Q\beta \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xM \\ &= \frac{1}{2} \alpha\beta (LQ - MP). \end{aligned}$$

De-là nous tirons la solidité de notre pyramide $\zeta\lambda\mu\nu$ dans
l'état d'agitation $= -\frac{1}{6} \alpha\beta\gamma S (NQ - MR) - \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma T$

$(LR - NP) + \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma V (LQ - MP)$, & partant la
densité du milieu agité en ζ fera $= 1 : (LQV - MPV +$
 $MRS - NQS + NPT - LRT)$, & posant Π pour la hauteur
de la colonne qui y balance l'élasticité, nous aurons $\Pi = h :$
 $(LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$,
laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z
posons $d\Pi = EdX + FdY + GdZ$, de sorte que E
 $= \left(\frac{d\Pi}{dX}\right)$, $F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right)$, $G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right)$. Soit pour abrégés

$$NQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT$$

$\equiv K$, de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$; si nous concevons dans l'état

d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z déterminé par ces coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, ce point se trouvera après l'agitation en ζ , dont les coordonnées seront

$$\begin{aligned} x &+ LdX + MdY + NdZ, \\ y &+ PdX + QdY + RdZ, \\ \zeta &+ SdX + TdY + VdZ, \end{aligned}$$

donc réciproquement la position du point ζ' infiniment proche de ζ dans l'état troublé étant donnée par les coordonnées $X + \alpha$, $Y + \beta$, $Z + \gamma$ son lieu dans l'état d'équilibre sera déterminé par les coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, de sorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}$$

De là l'élasticité en ζ étant $\Pi = \frac{h}{K}$, elle sera en $\zeta' = \Pi + EdX + FdY + GdZ$, ou bien si nous posons pour abréger

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$

$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$

$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$$

l'élasticité en ζ' sera exprimée par $\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

la densité γ étant $\frac{1}{K}$.

Considérons maintenant un parallélépipède rectangle infiniment petit $\zeta b c d \alpha \beta \gamma \delta$ (fig. 3.) dont les cotés parallèles à

nos coordonnées soient $z^b = a$, $z^c = \beta$, $z^d = \gamma$, son volume sera $= a\beta\gamma$ & sa masse $= \frac{a\beta\gamma}{K}$. Pour connoître les forces, dont ce parallélepède est sollicité, cherchons d'abord l'élasticité du milieu à chacun de ses angles de la manière suivante

du point	les coordonnées	l'élasticité
z	x, y, z	Π
b	$x + a, y, z$	$\Pi + \frac{Aa}{K}$
c	$x, y + \beta, z$	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x + a, y + \beta, z$	$\Pi + \frac{Aa + B\beta}{K}$
a	$x, y, z + \gamma$	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x + a, y, z + \gamma$	$\Pi + \frac{Aa + C\gamma}{K}$
γ	$x, y + \beta, z + \gamma$	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x + a, y + \beta, z + \gamma$	$\Pi + \frac{Aa + B\beta + C\gamma}{K}$

De-là il est clair, que considérant les faces opposées $z^c a \gamma$ & $b d \beta \delta$, les pressions sur celle-ci surpassent les pressions sur celle-là de la quantité $\frac{Aa}{K}$; donc l'aire de ces faces étant

$\beta\gamma$, il en résulte une force suivant la direction $Ax = -\frac{Aa\beta\gamma}{K}$; de la même manière le parallélepède sera poussé

suivant la direction xy par la force $= -\frac{Ba\beta\gamma}{K}$, & sui-

vant la direction yz par la force $= -\frac{Ca\beta\gamma}{K}$. Donc la

masse

6
 masse de ce parallépipède étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$ si nous introduisons la hauteur g , par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, en exprimant le tems écoulé t en secondes, nous aurons pour la connoissance du mouvement les trois équations suivantes.

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = - 2gA,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = - 2gB,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = - 2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations possibles, je ne considère ici que les cas où ces agitations sont quasi infiniment petites; pour cet effet je pose $x = X + p$, $y = Y + q$, & $z = Z + r$, de sorte que p, q, r sont des quantités infiniment petites; delà nous aurons

$$dp = (L - 1) dX + MdY + NdZ;$$

$$dq = PdX + (Q - 1) dY + RdZ$$

$$dr = SdX + TdV + (V - 1) dZ,$$

& partant à peu-près $L = 1, M = 0, N = 0, P = 0, Q = 1, R = 0, S = 0, T = 0, V = 1, \& K = 1$; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = -h \left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right) \right)$$

$$F = -h \left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right) \right)$$

$$G = -h \left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right) \right)$$

Ensuite nous trouvons $A = E, B = F, C = G$. Pour nous débarasser encore des autres lettres, remarquons que

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right), Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right), V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$$

de sorte qu'outre les coordonnées X, Y, Z , avec le tems t

il ne reste dans le calcul que les lettres p, q, r , qui marquent le déplacement de chaque point. Car substituant ces valeurs, que nous venons de trouver, le mouvement causé par une agitation quelconque mais fort petite, sera déterminé par les trois équations suivantes

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 p}{dX^2} \right) + \left(\frac{d^2 q}{dXdY} \right) + \left(\frac{d^2 r}{dXdZ} \right),$$

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{d^2 q}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 p}{dXdY} \right) + \left(\frac{d^2 q}{dY^2} \right) + \left(\frac{d^2 r}{dYdZ} \right),$$

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 p}{dXdZ} \right) + \left(\frac{d^2 q}{dYdZ} \right) + \left(\frac{d^2 r}{dZ^2} \right).$$

ou bien posant $\left(\frac{dp}{dX} \right) + \left(\frac{dq}{dY} \right) + \left(\frac{dr}{dZ} \right) = u$ nous aurons

$$\left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right) = 2gh \left(\frac{du}{dX} \right), \quad \left(\frac{d^2 q}{dt^2} \right) = 2gh \left(\frac{du}{dY} \right), \quad \&$$

$$\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right) = 2gh \left(\frac{du}{dZ} \right), \quad \text{d'où il est aisé de conclure}$$

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{d^2 du}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 du}{dX^2} \right) + \left(\frac{d^2 du}{dY^2} \right) + \left(\frac{d^2 du}{dZ^2} \right), \quad \text{d'où il}$$

faut déterminer la nature de la fonction u déterminée par les coordonnées X, Y, Z , & le tems t .

Delà il n'est pas difficile de trouver une infinité de solutions particulières, comme

$$p = \beta \varphi (\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

$$q = \gamma \varphi (\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

$$r = \delta \varphi (\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

pourvû que $\alpha = \sqrt{2gh} (\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)$ où β, γ, δ sont des quantités quelconques, & φ marque une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne on aura toujours le cas d'un certain ébranlement, dont on pourra déterminer la continuation. Mais pour notre dessein il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement initial aura été renfermé dans un petit espace, d'où il s'est répandu ensuite en tout sens.

Soit

Soit donc A le centre de l'agrégation primitive & posons $p = Xs$, $q = Ys$, $r = Zs$, & s fera une fonction du tems t , & de la quantité $\sqrt{XX + YY + ZZ} = V$ qui marque la distance du point A . Donc puisque $ds = dt$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) + dV \left(\frac{ds}{dV}\right) \text{ nous aurons } ds = dt \left(\frac{ds}{dt}\right) + \left(\frac{XdX + YdY + ZdZ}{V}\right) \times \left(\frac{ds}{dV}\right), \text{ \& puis } \left(\frac{dp}{dX}\right) = s + \frac{X^2}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right), \left(\frac{dq}{dY}\right) = s + \frac{Y^2}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right), \left(\frac{dr}{dZ}\right) = s + \frac{Z^2}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right), \text{ donc } u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = 3s + V \left(\frac{ds}{dV}\right); \text{ maintenant aiant } \left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right).$$

$\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V}$, notre première équation deviendra $\frac{X}{2gb}$
 $\left(\frac{dds}{ds^2}\right) = \frac{3X}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right) + X \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$ ou $\frac{1}{2gb} \left(\frac{dds}{ds^2}\right) = \frac{4}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$, à laquelle se réduisent aussi les deux autres; & l'éloignement du point Z depuis le centre A fera $Vs = s\sqrt{XX + YY + ZZ} = \sqrt{pp + qq + rr}$ qui en marque le déplacement par rapport à l'état d'équilibre, de sorte que le rayon d'une couche sphérique, qui dans l'état d'équilibre étoit $= V$, fera à présent $= V + Vs$. Donc si nous posons $Vs = u$, ou $s = \frac{u}{V}$ afin

que u exprime le changement de cette couche, la particule u sera déterminée par cette équation

$$\frac{1}{2gb} \left(\frac{ddu}{ds^2}\right) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V} \left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Après plusieurs recherches j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas, où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension. Que

ϕz marque une fonction quelconque de z , & qu'on indique son différentiel de cette façon $d \cdot \phi z = dz \phi' z$. Cela posé, on verra qu'on satisfait à notre équation en supposant

$$u = \frac{A}{V^2} \phi [V \pm t \sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V} \phi' [V \pm t \sqrt{(2gh)}].$$

Donc pour le commencement de l'agitation nous aurons cette équation $u = \frac{A}{V^2} \phi V - \frac{A}{V} \phi' V$; d'où l'on voit que

pour appliquer cette formule à la propagation du Son la fonction ϕz doit toujours être = 0 excepté le cas, où la quantité z est extrêmement petite. Or il faut que la fonction $\phi' z$ ait la même propriété & encore celle-ci $\phi'' z$, en supposant $d\phi' z = dz \phi'' z$, afin que non seulement la quantité u , mais aussi la vitesse $(\frac{du}{dt})$ s'évanouisse au commencement par tout, excepté dans le petit espace autour de A où s'est fait l'ébranlement primitif.

Que le caractère ψ marque des fonctions discontinues de la même nature, & nous aurons la solution générale qui suit

$$u = \frac{A}{V^2} \phi [V + t \sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V} \phi' [V + t \sqrt{(2gh)}] + \frac{B}{V^2} \psi [V - t \sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V} \psi' [V - t \sqrt{(2gh)}]$$

& pour la vitesse

$$\begin{aligned} (\frac{du}{dt}) = & \frac{A \sqrt{(2gh)}}{V^2} \phi' [V + t \sqrt{(2gh)}] \\ & - \frac{A \sqrt{(2gh)}}{V} \phi'' [V + t \sqrt{(2gh)}] \\ & - \frac{B \sqrt{(2gh)}}{V^2} \psi' [V - t \sqrt{(2gh)}] \\ & + \frac{B \sqrt{(2gh)}}{V} \psi'' [V - t \sqrt{(2gh)}]. \end{aligned}$$

Delà il est clair qu'une couche sphérique, dont le rayon = V demeure en repos tant que la formule $V - t \sqrt{(2gh)}$

10
ne devient assés petite, ou moindre que le rayon de la petite
spère ébranlée au commencement; & partant l'agitation
primitive fera répandue à la distance = V après le tems t
= $\frac{V}{\sqrt{(2gb)}}$ secondes, d'où il s'ensuit la même vitesse du

Son que Newton a trouvé, c'est-à-dire plus petite que se-
lon les expériences. D'où je conclus qu'ayant supposé dans
ce calcul les ébranlemens infiniment petits, leur grandeur
cause une propagation plus prompte.

Ensuite ces formules nous apprennent que lorsque les di-
stances V sont fort grandes, en sorte que les termes divisés
par V^2 s'évanouissent à l'égard des autres divisés par V ,
tant les petits espaces u , que les vitesses $(\frac{du}{dt})$ diminuent
en raison des distances; d'où l'on peut justement juger de
l'affoiblissement du Son par des grandes distances.

*Voilà mes Recherches que vous pourrés insérer, MONSIEUR,
dans votre second Volume si vous le jugés à propos, &c.*

Berlin ce 1.^r Janvier 1760.

