1761

De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis

Leonhard Euler

DE MOTV ET REACTIONE AQVAE PER TVBOS MOBILES TRANSFLVENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Tab. V. Fig. 1. Considero hic tubum figurae cuiuscunque ARF, qui circa axem fixum AC motu quocunque in gyrum agatur, eumque aqua plenum, quae ex eius orificio F erumpat. Quaeritur itaque primum motus, quo aqua sit effluxura, tum vero vis reactionis, quam tubus ab aqua transfluente quouis momento sustineat.

2. Binae hae quaestiones ita inter se sunt complicatae, vt altera sine altera resolui nequeat: si enim vim reactionis aquae in tubum definire velimus, motum aquae tanquam cognitum spectari oportet; motus autem determinatio reactionis cognitionem requirit.

3. Primum ergo motum aquae pro cognito assumam; atque vt ex eo cum motu tubi coniuncto vis reactionis determinari queat, duplices vires contemplari oportet: alteras, quibus aqua in tubo actu sollicitatur, vel ob grauitatem, vel ob alias impulsiones, quibus extrinsecus ad motum vrgetur: alteras vero, quae ad motus, quem inesse assumimus, conseruationem, secundum principia mechanica, requiruntur.

4. Si

4. Si enim vires, quibus aqua actu ad motum sollicitatur, littera P complectamur, vires autem ad eius conseruationem requisitas littera Q: vires autem reactionis littera R indicentur: quoniam tubus pari vi in aquam reagit; aqua hinc sollicitabitur vi $= -R$, sicque omnino ad motum, tam extrinsecus, quam ab ipso tubo impelletur vi $= P - R$.

5. Haec ergo vis $P - R$ aequalis sit necesse est ipsi vi Q, quae ad motus insiti conseruationem per principia mechanica requiritur. Vnde cum habeamus $P - R = Q$, obtinebimus $R = P - Q$, sicque vis reactionis aequabitur viribus aquam actu extrinsecus impellentibus, demtis inde viribus ad motus conseruationem requisitis.

6. Principio hoc, cui omnis reactionis vis innititur, stabilito, inuestigationem ordiri conueniet ab indagatione virium Q, quae ad conseruationem eius motus, quem in aqua inesse assumimus, secundum principia mechanica requiruntur: inde scilicet, quod omnis motus mutatio certam virium actionem exigit.

7. Quod igitur primo ad motum tubi attinet, ponamus, elapso iam a motus initio tempore $= t$, celeritatem orificii F, qua circa axem AC gyratur, debitam esse altitudini $= u$, ita vt u sit functio quaecunque temporis iam elapsi t: vnde si distantia orificii ab axe CF ponatur $= b$, exprimet $\frac{\sqrt{u}}{b}$ celeritatem gyratoriam tubi.

8. Deinde sit v altitudo debita celeritati, qua aqua nunc quidem ex orificio F effluit. Hic autem $\sqrt{v}$ non veram aquae celeritatem designat, sed eius

celeritatem relatiuam respectu tubi, qui ipse moueri assumitur; motus enim verus componetur ex motu hoc relatiuo et ipso tubi motu. Erit autem v etiam functio temporis t.

9. Si igitur amplitudo orificii F ponatur $= ff$, quoniam $\sqrt{v}$ est celeritas, qua aqua ex orificio effluit, temporis elemento dt aqua effluens ratione tubi conficiet spatiolum $= dt\sqrt{v}$; ideoque copia aquae hoc tempusculo ex tubo exeuntis erit $= ff\,dt\sqrt{v}$.

10. Consideretur nunc tubi punctum quodcunque R, in quo sit amplitudo tubi $= zz$, quae ergo non a tempore t, sed a loco puncti R in tubo pendebit: atque nunc quidem, vbi aqua ex orificio F $= ff$ effluere ponitur celeritate $= \sqrt{v}$, celeritas aquae in R, qua in tubo secundum Rr progreditur, erit $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$; quae cum motu gyratorio puncti R coniuncta, dabit veram celeritatem aquae in puncto R haerentis.

11. Concipiatur planum ad axem tubi AC normale per orificium F transiens, FCB, ad quod ex puncto R demittatur perpendicularis, seu axi motus AC parallela RQ, sitque curua CQF proiectio tubi ARF in hoc plano facta, cuius corda CQ ponatur $= y$, quae cum exprimat distantiam puncti R ab axe AC, erit huius puncti celeritas gyratoria circa axem $= \frac{y\sqrt{u}}{b}$.

12. Cum nunc elapso tempore $= t$, tubus situm ARF, eiusque proiectio situm CQF teneat, ponamus initio huius temporis proiectionem in situ CMB fuisse, indeque tempore t per angulum BCF $= \Phi$ circa axem AC esse promotam; orificium ergo F tempusculo dt

proue-

prouehetur per ſpatiolum $bd\Phi$ ob $CB = CF = b$; eritque igitur $bd\Phi = dt\sqrt{u}$: ita vt etiam angulus Φ ſit functio ipſius temporis t.

13. Referamus curuam CMB ad rectam CB tanquam axem, ſitque M punctum ipſi Q analogum, ideoque $CM = CQ = y$; ac ponatur angulus $MCL = QCP = \theta$, qui erit functio ipſius y, non a tempore t pendens; vnde ducta ML ad CB normali, habebitur $CL = y\,\text{coſ.}\,\theta$, et $LM = y\,\text{ſin.}\,\theta$

14. Initio ergo temporis t ſitus puncti R, quod tum puncto M imminebat, his formulis definitur, vnde ſi eius altitudo ſupra planum BCF, ſcilicet perpendiculum RQ, ponatur $= r$, quod perpetuo idem manet, etiam r tanquam functio ipſius y ſpectari debet, ſicque ex natura functionum θ et r figura tubi determinatur.

15. Cum autem elapſo tempore t, punctum M ob motum gyratorium translatum ſit in Q, erit angulus $MCQ = BCF = \Phi$, ideoque angulus $BCQ = \theta + \Phi$: vnde ſi ex Q ad rectam fixam CB ducatur penpendicularis QX, erit $CX = y\,\text{coſ}\,(\theta + \Phi)$ et $XQ = y\,\text{ſin.}\,(\theta + \Phi)$.

16. Situm ergo puncti R ternis coordinatis, rectis fixis CB, CD et CA inter ſe normalibus, parallelis definitum habemus, quae ſint: $CX = y\,\text{coſ.}\,(\theta + \Phi) = X$; $XQ = y\,\text{ſin.}\,(\theta + \Phi) = Y$ et $QR = r$, quarum illae duae tantum ab angulo Φ cum tempore variabili pendent; dum poſtrema a ſola variabili y pendet.

17. Progrediatur aquae particula nunc in R haerens tempuſculo dt per ſpatiolum Rr in tubo, dum

 tubus

tubus ipse quoque motu angulari circa axem AC gyratur: situs ergo sequens huius aquae particulae superioribus formulis indicabitur, si tam y, quam Φ, pro variabilibus assumantur, scilicet $X+dX$; $Y+dY$ et $r+dr$ erunt coordinatae pro hoc situ.

18. Denotet m massam particulae nunc in R haerentis, et cum eius motus a variabilitate coordinatarum X, Y et r pendeat, si tam y quam tempus t pro variabili capiatur; tribus opus erit viribus ad motum huius particulae moderandum, quae secundum ternos axes CB, CD et CA erunt directae.

19. Ac secundum principia mechanica quidem, si elementum temporis dt capiatur constans, tres istae vires ita se habebunt.

I. Vis secundum directionem CA agens $= \frac{2m\,ddr}{dt^2}$

II. Vis secundum directionem CB agens $= \frac{2m\,ddX}{dt^2}$

III. Vis secundum directionem CD agens $= \frac{2m\,ddY}{dt^2}$

20. Motus etiam verus particulae istius aquae secundum easdem directiones resolutus, producet triplicem celeritatem:

I. Celeritatem secundum directionem CA $= \frac{dr}{dt}$

II. Celeritatem secundum directionem CB $= \frac{dX}{dt}$

III. Celeritatem secundum directionem CD $= \frac{dY}{dt}$

21. Ponamus autem elementum tubi $Rr = ds$, quod est spatiolum a particula aquae m tempusculo in tubo percursum; quia ergo celeritas huius particulae in tubo est $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, erit $ds = \frac{ff\,dt\,\sqrt{v}}{zz}$, seu $zz\,ds = ff\,dt\,\sqrt{v}$. Est vero etiam, vti vidimus, $b\,d\Phi = dt\,\sqrt{u}$.

At

At differentiale dr a figura tubi pendet, ideoque per relationem inter y, θ et r definitur.

22. Cum igitur sit $X = y\,\text{cof.}(\theta + \Phi)$ et $Y = y\,\text{fin.}(\theta + \Phi)$, erit differentiando:

$$dX = dy\,\text{cof.}(\theta + \Phi) - y(d\theta + d\Phi)\,\text{fin.}(\theta + \Phi)$$
$$dY = dy\,\text{fin.}(\theta + \Phi) + y(d\theta + d\Phi)\,\text{cof.}(\theta + \Phi);$$

ac denuo differentiando:

$$ddX = ddy\,\text{cof.}(\theta + \Phi) - 2\,dy(d\theta + d\Phi)\,\text{fin.}(\theta + \Phi)$$
$$- y(d\theta + d\Phi)^2\,\text{cof}(\theta + \Phi) - y(dd\theta + dd\Phi)\,\text{fin.}(\theta + \Phi)$$
$$ddY = ddy\,\text{fin.}(\theta + \Phi) + 2\,dy(d\theta + d\Phi)\,\text{cof.}(d\theta + \Phi)$$
$$- y(d\theta + d\Phi)^2\,\text{fin.}(\theta + \Phi) + y(dd\theta + dd\Phi)\,\text{cof.}(\theta + \Phi)$$

23. Quodfi ergo hi valores in formulis fuperioribus fubftituantur, habebuntur tam celeritates verae particulae aquae m, quam vires ad eius motum fecundum ternas directiones CA, CB, et CD requifitae. Quoniam autem hic motus rotatorius fpectatur, non tam iftas vires ipfas, quam earum momenta refpectu axis CA funt quaerenda, vt inde vis aquae, qua motus tubi gyratorius afficitur, definiatur.

24. Vis igitur fecundum directionem CA nullo modo rotationem afficit, ex vi fecundum CB autem puncto R applicata nafcitur momentum $= \frac{2 m\, d d X}{d t^2}$, $y\,\text{fin}(\theta + \Phi)$, at ex vi fecundum CD momentum $= \frac{2 m\, d d Y}{d t^2}\, y\,\text{cof.}(\theta + \Phi)$; quorum illud in plagam FD, hoc vero in plagam oppofitam BF tendit, ficque cum motus directione conueniet.

25. Momentum ergo ex his viribus coniunctim ortum, et in plagam BF tendens, erit $= \frac{2 m y}{d t^2}$ ($ddY\,\text{cof.}$

$(\theta + \Phi)$

$(\theta + \Phi) - ddX \sin.(\theta + \Phi)$, quod ſubſtitutis valoribus ſuperioribus abit in hanc formam:

$$\frac{2my}{dt^2}\left(2dy(d\theta + d\Phi) + y(dd\theta + dd\Phi)\right)$$

ſiue $\frac{2m}{dt^2} d.yy(d\theta + d\Phi) = \frac{2m}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$.

in qua poſtrema formula nullius differentialis pro conſtanti aſſumti ratio habetur.

26. Ponamus iam particulam aquae m totum tubi elementum Rr implere, cuius capacitas eſt $= zz\,ds$; quo valore pro m ſubſtituto, ad elementi Rr motum requiritur vis, cuius momentum in plagam BF tendens ſit $= \frac{2zzds}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$; cum autem ſit $zzds = ffdt\sqrt{v}$ et $bd\Phi = dt\sqrt{u}$, erit hoc momentum:

$2ff\sqrt{v}.d\left(\frac{ffyyd\theta}{zzds}\sqrt{v} + \frac{yy\sqrt{u}}{b}\right)$ et differentiatione abſoluta

$ffdv.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + 2ffv.d.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + \frac{ffyydu\sqrt{v}}{b\sqrt{u}} + \frac{4ffydy\sqrt{vu}}{b}$.

27. Hinc integrando colligi poterit, quantum momentum virium ad motum aquae in tubi portione AR contentae requiratur, quia autem haec integratio praeſens temporis punctum ſpectat, tempus t eiusque functiones tanquam quantitates conſtantes ſunt conſiderandae, ſolaeque eae, quae a variabilitate puncti R in tubo pendent, variabilium locum obtinebunt.

28. Quantitates ergo conſtantes in hac integratione primum erunt v et u, et quia functiones ſunt temporis t, eodem quoque pertinebunt earum differentiales $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$; quodſi ergo hoc modo has quantitates pro conſtantibus habendas a variabilibus ſeparemus, prodibit momentum illud ita expreſſum:

$$\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.yyd\theta + 2ffv.d.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + \frac{du}{dt\sqrt{u}}.\frac{yyzzds}{b} + \frac{4\sqrt{vu}}{b}.ffydy.$$

29. In-

29. Integratione ergo inſtituta, aqua AR vires requirit ad ſuum motum, quarum momentum in plagam BF tendens erit:

$$\text{Conſt.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{u}} \int yyd\theta + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \int yyzzds + 2f^4 v . \frac{yyd\theta}{zzds} + \frac{2\sqrt{vu}}{b} ffyy$$

vbi conſtans per integrationem ingreſſa ex termino aquae altero definiri debet, ita vt, ſi punctum R in tubo ibi capiatur, vbi aqua incipit, hoc momentum euaneſcat.

30. Extendatur hoc integrale per totum tubum, fiatque pro toto tubo: $\int yy\,d\theta = M$, et $\int yyzz\,ds = N$; et quia tum fit $y = b$; $zz = ff$; erit momentum pro omni aqua in tubo contenta requiſitum:

$$\text{Conſt.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} . M + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . N + 2ffv . \frac{bbd\theta}{ds} + 2bff\sqrt{vu}$$

vbi valor fractionis $\frac{bd\theta}{ds}$ ex directione orificii F, ſecundum quam aqua erumpit, reſpectu arcus BF definiri debet. Exprimit autem $\frac{bd\theta}{ds}$ coſinum anguli, quem vena aquae Ffe tubo exiens cum directione motus puncti F conſtituit.

31. In genere enim fractio $\frac{yd\theta}{ds}$ exprimit coſinum anguli, quem directio motus aquae in tubi puncto R, ſeu elemento Rr, cum directione motus ipſius puncti R, quo ob motum gyratorium mouetur, facit. Quare ſi hic angulus rRS, denotante RS directionem motus puncti R, ponatur $= \omega$, qui in orificio F abeat in α, erit $\frac{yd\theta}{ds} = \text{coſ.}\,\omega$, et pro orificio $\frac{bd\theta}{ds} = \text{coſ.}\,\alpha$.

32. Hinc pro aqua, portionem tubi AR occupante, habebitur momentum virium, in directionem BF, ſeu RS, tendens, hoc:

$$\text{Conſt.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \int yds\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . \int yyzzds + 2f^4 v . \frac{y\,\text{coſ.}\,\omega}{zz} + \frac{2\sqrt{vu}}{b} . ffyy$$

ac

ac poſito pro omni aqua in tubo contenta:

$$\int y\,ds\,\mathrm{cof.}\,\omega = M \quad \text{et} \quad \int yyzz\,ds = N$$

erit momentum virium omni aquae conueniens:

$$\mathrm{Conſt.} + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}.M + \frac{du}{b\,dt\sqrt{u}}.N + 2bff(v\,\mathrm{cof.}\,\alpha + \sqrt{vu})$$

33. Si ſuprema aqua in tubo haereat in E, ſitque huius puncti ab axe rotationis AC diſtantia $= c$, integralia $\int y\,ds\,\mathrm{cof.}\,\omega$ et $\int yyzz\,ds$ ita capi debent, vt euaneſcant puncto R in E translato. Ac ſi amplitudo tubi in E ſit $= ee$; ibique angulus ω abeat in ε, fiet conſtans illa $= -2f^4v.\frac{c\,\mathrm{cof.}\,\varepsilon}{ee} - \frac{2\sqrt{vu}}{b}.ccff = -2cff(\frac{ffv\,\mathrm{cof.}\,\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$ vnde momentum virium, toti aquae conueniens, erit

$$\frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}M + \frac{du}{b\,dt\sqrt{u}}.N + 2bff(v\,\mathrm{cof.}\,\alpha + \sqrt{vu}) - 2cff(\frac{ffv\,\mathrm{cof.}\,\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b}).$$

34. Cum igitur hoc momentum ex illis viribus, quas ſupra ſub littera Q ſumus complexi, oriatur, ſit S momentum ex viribus aquam actu extrinſecus ſollicitantibus P natum, et in eandem plagam BF vergens, atque ex reactione aquae reſultabit virium momentum, ad motum tubi rotatorium accelerandum tendens,

$$S - \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}M - \frac{du}{b\,dt\sqrt{u}}.N - 2bff(v\,\mathrm{cof.}\,\alpha + \sqrt{vu}) + 2cff(\frac{ffv\,\mathrm{cof.}\,\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$$

in quo effectus reactionis conſumitur.

35. Videmus ergo effectum reactionis non ſolum ab vtraque celeritate ipſa $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ pendere, ſed etiam ab vtriusque variabilitate, ſiue acceleratione, ſiue retardatione. Tum vero litterae M et N figuram et amplitudinem totius tubi inuoluunt, reliqui termini autem tantum a ſummitate aquae E et orificio F pendent, vnde ſi vterque motus fuerit vniformis figura

tubi

tubi nihil confert ad vim reactionis, tum enim, ob $dv=0$ et $du=0$, litterae M et N ex calculo euanefcunt.

36. Vi ergo reactionis aquae in tubum definita, progrediamur ad ipfum aquae motum per tubum inveftigandum: ac primo quidem vires, quibus quamuis aquae particulam in tubo ob motum, quem ineffe affumimus, follicitari debere inuenimus, accuratius euolui opus eft. Pofita autem particulae aquae in R haerentis maffa $=m$, ternae vires, quibus follicitatur, funt: I. Secundum $CB=\frac{2mddX}{dt^2}$; II fec. $CD=\frac{2mddY}{dt^2}$; III. fec. $CA=\frac{2mddr}{dt^2}$. Tab. V. Fig. 2.

37. Binas vires priores refoluamus fecundum directiones QS et QT, quarum illa in directum iacet cum CQ, haec vero ad QS eft normalis. Iam, ob angulum $BCQ=\theta+\Phi$, erit vis $QS=\frac{2m}{dt^2}(ddX\operatorname{cof}.(\theta+\Phi)+ddY\operatorname{fin}.(\theta+\Phi))$ et vis $QT=\frac{2m}{dt^2}(ddY\operatorname{cof}.\theta+\Phi)-ddX\operatorname{fin}.(\theta+\Phi))$; valoribus ergo pro ddX et ddY inuentis fubftitutis, hae vires prodibunt:

I. Vis $QS=\frac{2m}{dt^2}(ddy-y(d\theta+d\Phi)^2)$

II. Vis $QT=\frac{2m}{dt^2}(2dy(d\theta+d\Phi)+y(dd\theta+dd\Phi))$.

38. Particula igitur aquae m in R iam cum ab his duabus viribus, tum a tertia fecundum $CA=\frac{2mddr}{dt^2}$ follicitari debet: quas vires porro fecundum directionem tubi Rr, aliasque duas directiones ad tubum normales refolui conuenit. Ducta autem Cq, erit $tq=dy$ et $Qt=-yd\theta$, vnde fit $\operatorname{fin}.SQq=\frac{-yd\theta}{Qq}$ et $\operatorname{cof}.SQq=\frac{dy}{Qq}$. Ducatur recta QN in plano BCF ad elementum Qq normalis; erit

$$\text{Vis } Qq = \text{vis } QS.\cos.SQq - \text{vis } QT.\sin.SQq$$
$$\text{Vis } QN = \text{vis } QS.\sin.SQq + \text{vis } QT\cos.SQq$$

39. Vires ergo secundum has duas directiones Qq et QN ex viribus superioribus QS et QT ortae erunt :

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq.dt^2}\big(dyddy - ydy(d\theta + d\Phi)^2 + 2ydyd\theta(d\theta + d\Phi) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big)$$

$$\text{II. Vis } QN = \frac{2m}{Qq.dt^2}\big(-yd\theta ddy + yyd\theta(d\theta + d\Phi)^2 + 2dy^2(d\theta + d\Phi) + ydy(dd\theta + dd\Phi)\big)$$

ac prior quidem abit in hanc :

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq.dt^2}\big(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big)$$

40. Cum vis posterior QN iam sit ad directionem tubi quoque Rr normalis, ea relinquatur ; ac ducta Rs elemento proiectionis Qq parallela erit $rs = dr$, et particula aquae in R vlterius vrgetur a viribus Rs $=$ vi Qq et $sr = \frac{2mddr}{dt^2}$. Hinc ducta rv ad Rr in plano Rq normali obtinebitur :

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{ds\,dt^2}\big(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big) + \frac{2mdrddr}{ds\,dt^2}$$
$$\text{Vis } rv = \frac{2mdr}{Qq.ds\,dt^2}\big(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big) - \frac{2mQq.ddr}{ds\,dt^2}.$$

41. Est autem $Qq = \sqrt{(dy^2 + yyd\theta^2)}$ et $Rr = ds = \sqrt{(dy^2 + yyd\theta^2 + dr^2)}$; vnde fit $dr^2 = ds^2 - dy^2 - yyd\theta^2$ et

$$drddr = dsdds - dyddy - ydyd\theta^2 - yyd\theta dd\theta$$

quo valore substituto, habebitur vis secundum directionem tubi ;

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{ds\,dt^2}\big(dsdds - ydyd\Phi^2 + yyd\theta dd\Phi\big)$$

quae,

quae, vt a consideratione differentialis constantis dt liberetur, in hanc formam transit:

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{dt}\left(d.\frac{ds}{dt} - \frac{ydyd\Phi^2}{dsdt} + \frac{yyd\theta}{ds}d.\frac{d\Phi}{dt}\right)$$

42. Cum vis per massam, in quam agit, diuisa praebeat accelerationem, erit acceleratio aquae in R secundum directionem tubi tempusculo dt producta $= \frac{2}{dt}d.\frac{ds}{dt} - \frac{2ydyd\Phi^2}{dsdt^2} + \frac{2yyd\theta}{dsdt}d.\frac{d\Phi}{dt}$ Haec scilicet acceleratio requiritur ad motum aquae eum producendum, quem ei inesse assumimus, vna cum motu ipsius tubi.

43. Haec igitur acceleratio aequalis esse debet ei, quae aquae in R versanti actu inducitur; ac primo quidem haec aqua sollicitatur a pressione aquae. Ponamus ergo, aquam in R in pari statu compressionis versari, ac si ipsi incumberet columna aquea altitudinis $= p$. in r igitur status compressionis exprimitur altitudine $p + dp$, vnde acceleratio orietur $= \frac{-dp}{ds}$.

44 Praeterea autem aqua in R haerens a propria grauitate vrgetur. Quodsi ergo axem CA horizonti verticaliter insistentem assumamus, a grauitate orietur acceleratio secundum directionem tubi Rr, quae est $= \frac{-dr}{ds}$; vtraque scilicet haec acceleratio absoluitur tempusculo dt, quo elementum $Rr = ds$ confici assumimus.

45. Cum igitur acceleratio ante inuenta aequalis esse debeat accelerationi, quae aquae in R actu inducitur, et quae est $\frac{-dp}{ds} - \frac{dr}{ds}$, vtrinque per ds multiplicando habebimus hanc aequationem:

$$-dp - dr = \frac{2ds}{dt} d \frac{ds}{dt} - \frac{2y\,dy\,d\Phi^2}{dt^2} + \frac{2yy\,d\theta}{dt} d. \frac{d\Phi}{dt};$$

fiue:

$$-dp = dr + d. \frac{ds^2}{dt^2} - \frac{2y\,dy\,d\Phi^2}{dt^2} + \frac{2yy\,d\theta}{dt} d. \frac{d\Phi}{dt}.$$

46. Eſt autem $\frac{ds}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{u}}{b}$, vnde, ob $dt = \frac{zz\,ds}{ff\sqrt{v}}$, ſequentem obtinebimus aequationem, qua ſtatus compreſſionis aquae in ſingulis tubi punctis determinatur:

$$-dp = dr + d \frac{f^4 v}{z^4} - \frac{2uy\,dy}{bb} + \frac{2ffyy\,d\theta\sqrt{v}}{zz\,ds} d. \frac{\sqrt{u}}{b};$$

fiue:

$$dp = -dr - d. \frac{f^4 v}{z^4} + \frac{2uy\,dy}{bb} - \frac{ffyy\,d\theta\,du\sqrt{v}}{bzz\,ds\sqrt{u}}$$

atque differentiali ipſius $\frac{f^4 v}{z^4}$ euoluto, erit:

$$dp = -dr - \frac{f^4 dv}{z^4} + \frac{4f^4 v\,dz}{z^5} + \frac{2uy\,dy}{bb} - \frac{ffyy\,d\theta\,du\sqrt{v}}{bzz\,ds\sqrt{u}}.$$

47. Quodſi iam hinc ſtatum preſſionis, qui nunc in tubo locum habet, determinare velimus, tempus t et quantitates inde pendentes v, u, vna cum $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ pro conſtantibus habere debemus: vnde, quantitatibus variabilibus a conſtantibus ſeparatis, habebimus:

$$dp = -dr - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ds}{zz} + 4f^4 v \frac{dz}{z^5} + \frac{2u}{bb} y\,dy - \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \cdot yy\,d\theta.$$

48. Haec iam aequatio integrata dabit ſtatum preſſionis aquae in loco tubi R, qui nunc locum habet:

$$p = C - r - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ds}{zz} - \frac{f^4 v}{z^4} + \frac{uyy}{bb} - \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \int yy\,d\theta$$

Tab. V. Fig. 1. Ac ſi, vt ante, w denotet angulum, quem directio motus aquae in tubo R, cum directione motus ipſius puncti R facit, ſeu angulum rRS, ob $y\,d\theta = ds\,\text{coſ.}\,w$, habebimus:

$$p = C - r - \frac{f^4 v}{z^4} + \frac{uyy}{bb} - \frac{ffdv}{dt\sqrt{u}} \cdot \int \frac{ds}{zz} - \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \int y\,ds\,\text{coſ.}\,w.$$

49. Cum, integratione per totum tubum, qua aqua eſt repletus, peracta, iam ſupra poſuerimus $\int y\,ds\,\text{coſ.}\,w = M$, ſit

fit quoque nunc $\int \frac{ds}{zz} = L$, et quia puncto R in F translato fit $r = 0$ $zz = ff$ et $y = b$, erit status pressionis in ipso orificio $= C - v + u - \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} . L - \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M$; qui cum debeat esse nullus, habebimus valorem constantis

$$C = v - u + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} . L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M$$

50. Hinc ergo status compressionis in loco quocunque tubi R erit

$$p = v\left(1 - \frac{f^4}{z^4}\right) - u\left(1 - \frac{yy}{bb}\right) - r + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\left(L - \int \frac{ds}{zz}\right) + \frac{du}{bdt\sqrt{u}}\left(M - \int y\,ds \operatorname{cof.} w\right)$$

Hinc ergo in suprema aquae superficie E, vbi fit $y = c$; $zz = ee$ et integralia $\int \frac{ds}{zz} = 0$; $\int y\,ds \operatorname{cof.} w = 0$; si elevatio puncti E supra basin horizontalem BCF seu supra orificium F ponatur $= a$, erit status pressionis in summitate aquae E $=$

$$v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) - u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) - a + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} . L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M$$

51. Si igitur aqua in E a nulla vi vrgeatur, pressio ibi pariter in nihilum abire debet, vnde habebitur haec aequatio:

$$v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) - u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) - a + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} . L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M = 0$$

ex qua ipse aquae motus in tubo ad quoduis tempus definiri poterit, si quidem motus gyratorius tubi fuerit cognitus. Cum enim L et M sint quantitates constantes, duae tantum variabiles insunt in hac aequatione: v et t, quia u est functio ipsius t.

52. Assumimus autem hic tubum constanter ad idem punctum E vsque aqua repletum conseruari, quod continuo nouam aquam affundendo fieri concipiendum est. Verum, vt calculus subsistere possit, necesse est, vt

aqua affusa perpetuo eadem celeritate accedat, qua aqua in E quouis momento iam actu mouetur.

53. Ponamus ipsum tubum motu vniformi circa axem verticalem CA in gyrum agi, ita vt u sit quantitas constans, ac plerumque mox aqua e foramine F motu vniformi erumpet. Quod igitur cum euenit, habebitur haec aequatio:

$$v = \frac{a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}$$

ex qua, quanta celeritate tum aqua e tubo sit eruptura, patet.

54. Hoc autem aquae statu, cum aqua a nullis aliis viribus praeter grauitatem extrinsecus sollicitetur, ex grauitate autem nullum momentum, respectu axis CA oriatur, erit $S = 0$, et momentum, ex reactione aquae, pro tubo in plagam BF conuertendo, natum, erit ob $dv = 0$ et $du = 0$ ex §. 54.

$$-2bff(v\cos.\alpha + \sqrt{vu}) + 2cff\left(\frac{ffv\cos.\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b}\right)$$

55. At hoc casu suprema aquae superficies in E horizontalis erit, eiusque prima motus directio verticalis, vnde ε fit angulus rectus; et designante α angulum, quem vena aquae erumpens Ff cum directione motus ipsius orificii F constituit, erit istud momentum reactionis

$$-2bff(v\cos\alpha + \sqrt{vu}) + \frac{2ccff\sqrt{vu}}{b} = 2bff\left(\left(\frac{cc}{bb} - 1\right)\sqrt{vu} - v\cos\alpha\right)$$

56. Hoc ergo momentum ad tubum in plagam BF circumagendum erit fortissimum, si angulus α fiat 180°, seu si vena aquae erumpentis Ff directe retrorsum

ſum vergat ſecundum tangentem circuli FB: hoc itaque caſu ob coſ. $\alpha = -1$, hoc momentum erit $= 2bff(v + (\frac{cc}{bb} - 1)\sqrt{vu})$. eſtque vti vidimus

$$v = \frac{a + u(1 - \frac{cc}{bb})}{1 - \frac{f^4}{e^4}}$$

57. Notandum autem eſt, eſſe debere $ff < ee$, ſeu orificium tubi in F minus eius amplitudine ſuprema in E; alioquin enim motus aquae effluentis nunquam ad vniformitatem redigeretur, ſed motu continuo accelerato exiret, ſi quidem, vti aſſumimus, iugiter ſupra in E ſufficiens aquae copia, et quidem motu conuenienti, affundatur.

58. Sit igitur $ff < ee$, et ponatur $1 - \frac{f^4}{e^4} = \mu$ atque $1 - \frac{cc}{bb} = \nu$, ita vt ſit μ numerus vnitate minor, eritque $v = \frac{a + \nu u}{\mu}$, et momentum ex reactione aquae natum

$$= 2bff(\frac{a + \nu u}{\mu} - \nu\sqrt{\frac{u(a + \nu u)}{\mu}})$$

Quodſi ergo ſummitas aquae E in ipſo axe AC reperiatur, vt ſit $c = 0$, erit $\nu = 1$, ac ſi amplitudo in E multis vicibus maior ſit, quam amplitudo foraminis ff, erit ſatis prope $\mu = 1$.

59. Quoniam aqua in E ſubſidit in tubo celeritate $= \frac{ff\sqrt{v}}{ee}$, ſimulque cum tubo circa axem AC in gyrum agitur celeritate $= \frac{c\sqrt{u}}{b}$; eius vera celeritas debita erit altitudini $= \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb} = (1 - \mu)v + (1 - \nu)u$ hoc eſt, pro v ſubſtituto valore $\frac{a + \nu u}{\mu}$, altitudini $= \frac{(1 - \mu)a}{\mu} + \frac{(\mu + \nu - 2\mu\nu)u}{\mu}$. Neceſſe ergo eſt, vt aqua in

in tubum continuo infundenda ex tanta altitudine sit delapsa.

60. Si g sit altitudo, ex qua graue vno minuto secundo delabitur, erit quantitas aquae, quae singulis minutis secundis per orificium F effluit, $= 2ff\sqrt{gv}$ $= 2ff\sqrt{\frac{g(a+\nu u)}{\mu}}$. Quae quantitas si dicatur $= D$, erit $2ff = \frac{D\sqrt{\mu}}{\sqrt{g(a+\nu u)}}$; ideoque momentum reactionis prodibit:
$$= \frac{Db}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{a+\nu u}{\mu}} - \nu\sqrt{u}\right).$$

61. Si ponamus tubum EF motu suo gyratorio absoluere circa axem CA, m reuolutiones singulis minutis secundis, quia punctum F vno minuto secundo conficit spatium $= 2\sqrt{gu}$, circulique ab eo descripti peripheria est $2\pi b$, erit $m = \frac{\sqrt{gu}}{\pi b}$, ideoque $mb = \frac{\sqrt{gu}}{\pi}$, quo valore loco b substituto, erit momentum ex reactione aquae ortum:
$$\frac{D}{\pi m}\left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u\right)$$

62. Hoc ergo momentum valebit resistentiam quandam, quae motui tubi reluctatur, superare. Ponamus ergo, momentum huius resistentiae esse $= Fk$, eamque ita cum tubo esse connexam, vt singulis minutis secundis circa suum peculiarem axem conficiat n reuolutiones, erit Fk per n multiplicatum aequale momento reactionis aquae per numerum m multiplicato: sicque habebitur
$$nFk = \frac{D}{\pi}\left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu n\right) \text{ siue}$$
$$2\pi nFk = 2D\left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u\right)$$

63. Quem-

63. Quemadmodum ex copia aquae fingulis minutis fecundis affluentis D, quantitas orificii F ita determinatur, vt fit:

$ff = \frac{D\sqrt{\mu}}{2\sqrt{g(a+\nu u)}}$; ita ob $\frac{f^4}{e^4} = 1 - \mu$, erit $ee = \frac{D\sqrt{\mu}}{2\sqrt{(1-\mu)g(a+\nu u)}}$.
Deinde quia eft $b = \frac{\sqrt{gu}}{\pi m}$, et $c = b\sqrt{(1-\nu)}$, erit $c = \frac{\sqrt{(1-\nu)gu}}{\pi m}$.

64. Cum deinde aqua, quae fupra iugiter in tubum affunditur, delapfa effe debeat ex altitudine $= \frac{a}{\mu} - a + (1-2\nu)u + \frac{\nu u}{\mu}$; fuprema aquae fuperficies, vnde aqua in tubum affluit, fupra orificium F eleuata erit ad altitudinem $= \frac{a}{\mu} + (1-2\nu)u + \frac{\nu u}{\mu}$: quae altitudo fi dicatur $= b$ erit $\frac{a}{\mu} = b - (1-2\nu)u - \frac{\nu u}{\mu}$, atque b exprimit lapfum totum aquae, quae ad hoc negotium adhiberi poteft.

65. Introducta igitur hac tota lapfus altitudine b habebimus inter refiftentiam Fk et reactionem aquae hanc aequationem:

$$2\pi n F k = 2D(\sqrt{u(b-(1-2\nu)u)} - \nu u);$$

vbi $2\pi n F k$ defignat effectum totum, qui a vi reactionis aquae produci poteft.

66. Patet ergo, hunc effectum a numero ν ita pendere, vt in certo cafu is fiat maximus, id quod eueniet, fi capiatur $\nu = 1 - \frac{b}{2u}$, vnde fit $b-(1-2\nu)u = a$; atque maximus effectus prodit:

$$2\pi n F k = 2D(1-\nu)u = Db,$$

ita vt maximus effectus ipfi producto Db fit aequalis, quod fcilicet oritur, fi difpendium aquae D per totam altitudinem b multiplicetur.

 67. Po-

67. Posito autem $\nu = 1 - \frac{b}{2u}$, fit $\frac{a}{\mu} = u - \frac{\nu u}{\mu} = u - \frac{u}{\mu} + \frac{b}{2\mu}$ ideoque $a = \frac{1}{2}b - (1-\mu)u$; ita vt hoc casu altitudo tubi a minor esse debeat semisse totius altitudinis lapsus b ob $\mu < 1$. Porro erit $\frac{cc}{bb} = \frac{b}{2u}$; et $b = \frac{\sqrt{gu}}{\pi m}$; atque $c = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}gb}}{\pi m}$. Ac denique $ff = \frac{D}{2\sqrt{gu}}$ et $ee = \frac{ff}{\sqrt{(1-\mu)}} = \frac{D}{2\sqrt{(1-\mu)gu}}$; quae sunt determinationes, vt vis reactionis maximum effectum consequatur.

68. Cum tota altitudo lapsus sit $= b$, altitudo autem tubi $= a$, erit $b - a$ altitudo vasis, ex quo aqua continuo in tubum influit. Quia autem aqua ex hoc vase non perpendiculariter in tubum cadere debet, quaeri necesse est angulum obliquitatis, sub quo aqua in tubum est dirigenda.

Tab. V. Fig. 3. 69. Sit igitur ABCD vas, ex quo aqua per tubum inclinatum CE in tubum mobilem deriuatur; ac primo altitudo huius vasis AC cum altitudine tubi affixi CH, seu AH, aequari debet ipsi $b - a$. Tum quia celeritas aquae in E exeuntis verticalis est ad celeritatem horizontalem, vt CH ad HE, debet esse CH : HE $= \frac{ff\sqrt{v}}{ee} : \frac{c\sqrt{u}}{b} = \sqrt{(1-\mu)v} : \sqrt{(1-\nu)u}$, hoc est CH:HE $= \sqrt{\frac{(1-\mu)(a+\nu u)}{\mu}} : \sqrt{(1-\nu)u} = \sqrt{(1-\mu)(b-u+2\nu u)} : \sqrt{(1-\nu)u}$.

70. Vel si altitudo a pro cognita assumatur, ob $u = \frac{\mu b - a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$ erit $\frac{a + \nu u}{\mu} = \frac{\nu b + a - 2\nu a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$; ideoque ratio ista abibit in hanc: CH : HE $= \sqrt{(1-\mu)(\nu b + a - 2\nu a)} : \sqrt{(1-\nu)(\mu b - a)}$. Casu autem maximi effectus, quo

$\nu = 1$

$\nu = 1 - \frac{b}{2u}$ et $u = \frac{\frac{1}{2}b - a}{1 - \mu}$, erit $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$ et $1 - \nu = \frac{(1-\mu)b}{b - 2a}$.

vnde fit:

$$CH : HE = \sqrt{(1-\mu)(\mu b - a)} : \sqrt{\tfrac{(1-\mu)b}{b-2a}(\mu b - a)}$$

seu

$$CH : HE = \sqrt{(b - 2a)} : \sqrt{b} = \sqrt{(1 - \tfrac{2a}{b})} : 1.$$

71. Quantitas orificii C inde determinatur, quod tantum inde aquae effluere debet, quantum ex tubo mobili effunditur; vnde si amplitudo huius orificii ponatur $= ii$, erit $ii\sqrt{(b-a)} = ff\sqrt{v}$, seu

$$ii = ff\sqrt{\tfrac{a + \nu u}{\mu(b-a)}} = ff\sqrt{\tfrac{\nu b + a - 2\nu a}{(\mu + \nu - 2\mu\nu)(b-a)}} = ee\sqrt{\tfrac{(1-\mu)(\nu b + a - 2\nu a)}{(\mu + \nu - 2\mu\nu)(b-a)}} = \tfrac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$$

Casu autem maximi effectus, quo $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$, reperietur:

$$ii = ee\sqrt{\tfrac{b-2a}{2b-2a}};$$ ita vt sit $ii < ee$.

72. Quoniam autem tubus EF est mobilis, huic aquae influxui mox se subduceret; cui incommodo, vt medela afferatur, ingens tuborum EF numerus simul circa axem AC disponatur, vt superne in E superficiem aquae continuam constituant; supra quam vas immobile, seu aquae receptaculum, ita immineat, vt ex eo circum circa per tubos inclinatos aqua continuo infundatur. Ita enim tubi mobiles aquae copiam sufficientem jugiter accipient, idque sub debita inclinatione. Tab. V. Fig. 1.

73. Hinc ergo eiusmodi machina nascetur, qualem figura 4^{ta} repraesentat. OHAC est axis verticalis, circa quem vas conoidicum BBFF in gyrum agitur; hoc vas intra exteriorem superficiem cauitatem habet EEEE ad aquam recipiendam aptam, intus autem circa axem spatium vacuum relinquit. Circa oram autem Tab. V. Fig. 4.

tem inferiorem plures habet tubulos F, F, F, e quibus aqua emittitur perpendiculariter ad respectiua plana verticalia ACF.

74. Supra hoc vas circa axem disponitur vas immobile DDII locum receptaculi tenens, ex quo aqua continuo per tubos inclinatos Ii, Ii, in vas inferius influat, vt hoc modo vas inferius iugiter plenum conseruetur. GGG exhibet supremam aquae superficiem in hoc vase immobili, quod pariter circa axem OA spatium vacuum relinquit.

75. Statim ergo atque aqua ex vase inferiori per orificia f, f effluet, hoc vas ob vim reactionis in gyrum agetur, idque tanta vi, vt resistentiam quandam superare valeat. Quemadmodum igitur haec machina instructa esse debeat, vt maximum effectum praestet, ex ante allatis breuiter repetamus.

76. Sit igitur tota aquae GG supra orificia f, f, altitudo HC$=h$, altitudo vasis inferioris mobilis AC$=a$, eius basis infimae semidiameter CF$=b$, superioris AC$=c$, vel potius c exprimat distantiam mediam ab axe inter oram limbi EE aquam continentis, exteriorem et interiorem. Huius autem totius limbi amplitudo sit $=ee$, et summa omnium orificiorum inferiorum f, f aquam eiicientium $=ff$.

77. Praeterea sit D aquae copia, quae ex base superiori singulis minutis secundis in vas inferius effunditur, et g exprimat altitudinem, per quam graue vno minuto secundo delabitur. Tum vero hoc vas quoque minuto secundo circa axem absoluat m reuolutiones. Deinde sit Fk momentum resistentiae, cui machina

china ſuperandae par eſt, quae reſiſtentia circa peculiarem axem mobilis conficiat m reuolutiones, ſingulis minutis ſecundis.

78. Sit $\sqrt{v}$ celeritas, qua aqua ex orificiis f, f, erumpit, et $\sqrt{u}$ celeritas, qua haec ipſa orificia circa axem AC gyrantur. Deinde poſuimus breuitatis gratia $\mu = 1 - \frac{f^4}{e^4}$ et $\nu = 1 - \frac{cc}{bb}$: haeque ſunt quantitates, quae in calculum huius machinae ingrediuntur, quaeque, quemadmodum inter ſe determinentur, videamus.

79. Primum autem machinam in genere ſpectemus, ſepoſito effectu maximo: tunc igitur ſequentes determinationes locum habent:

$ff = ee\sqrt{(1-\mu)}$; $c = b\sqrt{(1-\nu)}$; $u = \frac{\mu b - a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$; $v = \frac{\nu b + a - 2\nu a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$

$b = \frac{\sqrt{g(\mu b - a)}}{\pi m\sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}$: $ff = \frac{D\sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}{2\sqrt{g(\nu b + a - 2\nu a)}}$; et effectus machinae per hanc aequationem indicabitur:

$$\pi n F k = D\left(\frac{\sqrt{(\mu b - a)(\nu b + 1 - 2\nu a)} - \nu(\mu b - a)}{\mu + \nu - 2\mu\nu}\right)$$

80. Denique ſi ſumma omnium orificiorum i, i, per quae aqua ex receptaculo in vas inferius mobile infunditur, ponatur $= ii$, debet eſſe $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$; et tubi Ii ita debent eſſe inclinati ad horizontem, vt anguli inclinationis huius tangens ſit $= \sqrt{\frac{(1-\mu)(\nu k + a - 2\nu a)}{(1-\nu)(\mu b - a)}}$. Quo plures autem fuerint huiusmodi tubi Ii, eo melius erit, quin etiam, ſi plane eſſent inter ſe contigui, optimum foret.

81. Vt iam effectus prodeat maximus, ſtatui debet $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$, eritque effectus $2\pi n F k = Db$, Tum vero habebitur $ee = \frac{ff}{\sqrt{(1-\mu)}}$; $c = \frac{b\sqrt{(1-\mu)b}}{\sqrt{(b-2a)}}$; $u = \frac{b-2a}{2(1-\mu)}$;

$v = \frac{b-2a}{2(1-\mu)}$; $b = \frac{\sqrt{g(b-2a)}}{\pi m\sqrt{2(1-\mu)}}$; $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m\sqrt{2}}$; $ff = \frac{D\sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{2g(b-2a)}}$; $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$; $ee = \frac{D}{\sqrt{2g(b-2a)}}$, et tangens inclinationis ad horizontem tubulorum $Ii = \sqrt{(1-\frac{2a}{b})}$.

82. Cum altitudo vasis AC semissem totius altitudinis superare nequeat; tum etiam ipsi semissi aequalis esse nequit, nisi sit $\mu = 1$, et amplitudo EE quasi infinities maior, quam summa omnium orificiorum ff. Hoc autem casu $a = \frac{1}{2}b$, erit $u = v = \frac{bbb}{2cc}$; $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m\sqrt{2}}$; $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}} = \frac{D}{2\pi mb}$; $ii = \frac{D}{\sqrt{2gb}} = \frac{b}{c}ff$; et inclinatio tubulorum Ii ad horizontem euanescit. Quantitates ergo b et c arbitrio nostro relinqui videntur; sed quia ee prae ff est infinitum, etiam valor ipsius c infinitus sit necesse est, tum autem fit $m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c\sqrt{2}}$.

83. Quoniam supremi limbi EEE, qui omnia tuborum aquam deferentium orificia superiora continet, amplitudo prae c non admodum notabilis esse potest, propterea quod motus aquae in eo nimis esset inaequalis, quam vt cum motu affluentis aquae per tubos Ii conuenire posset, sit 2γ latitudo huius limbi, seu $c-\gamma$ radius interioris circuli, et $c+\gamma$ exterioris, ita vt γ prae c sit quantitas valde parua, et amplitudo huius limbi erit $\pi(c+\gamma)^2 - \pi(c-\gamma)^2 = 4\pi c\gamma = ee$.

84. Hoc posito, si machina ad effectum maximum sit accommodata, quia habemus:

$ee = \frac{D}{\sqrt{2g(b-2a)}} = 4\pi c\gamma$ et $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m\sqrt{2}}$ seu, $m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c\sqrt{2}}$ sumtis c et γ pro quantitatibus cognitis, erit:

$\sqrt{(b-2a)} = \frac{D}{4\pi c\gamma\sqrt{2g}}$, ideoque $\frac{b}{c} = \frac{D}{4\pi c\gamma\sqrt{2gb(1-\mu)}}$ et $u = v = \frac{DD}{64(1-\mu)\pi\pi cc\gamma\gamma g}$ et $ff = 4\pi c\gamma\sqrt{(1-\mu)}$:

tum

tum vero $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$, et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{D}{4\pi c\sqrt{2gb}}$, ac denique $n = \frac{Db}{2\pi Fk}$.

85. Si praeter c et γ etiam interuallum $CF = b$ pro cognito assumere velimus, quoniam plerumque circumstantiae id non arbitrio nostro reliquunt, habebimus:

$$\sqrt{(1-\mu)} = \frac{D}{4\pi b\gamma\sqrt{2gb}} \text{ et } u = v = \frac{bbb}{2cc}.$$

At c et γ non penitus nostro arbitratui relinquuntur, cum $\frac{D}{4\pi c\gamma\sqrt{2g}}$ debeat esse $< \sqrt{b}$, seu $4\pi c\gamma > \frac{D}{\sqrt{2gb}}$. Si igitur capiatur $\gamma = \frac{1}{8}c$, debet esse $\frac{1}{2}\pi cc > \frac{D}{\sqrt{2gb}}$, vnde sumto $\frac{1}{2}\pi cc = \frac{9D}{8\sqrt{2gb}}$, seu $cc = \frac{9D}{4\pi\sqrt{2gb}}$; erit $\sqrt{(b-2a)} = \frac{D}{\frac{1}{2}\pi cc\sqrt{2g}} = \frac{8}{9}\sqrt{b}$, seu $b - 2a = \frac{64}{81}b$, indeque $a = \frac{17}{162}b$.

86. Quoniam sic altitudo a pro circumstantiis prodit nimis parua, statuatur $\frac{1}{2}\pi cc = \frac{2D}{\sqrt{2gb}}$, eritque $\sqrt{(b-2a)} = \frac{1}{2}\sqrt{b}$, seu $a = \frac{3}{8}b$, qui valor iam ad omnes casus satis erit accommodatus. Hinc igitur fit:

$$c = 2\sqrt{\frac{D}{\pi\sqrt{2gb}}}; \text{ et } \gamma = \frac{1}{8}c = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D}{\pi\sqrt{2gb}}};$$

tum vero $\sqrt{(1-\mu)} = \frac{2D}{\pi bc\sqrt{2gb}} = \frac{c}{2\pi b}$, et

$$ff = \frac{c^3}{4b} = \frac{c}{2\pi b}.ee; \quad u = v = \frac{bbb}{2cc}; \quad m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c\sqrt{2}}$$

Porro $ii = \frac{D}{\sqrt{\frac{5}{2}gb}}$; et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{D}{\frac{1}{2}\pi cc\sqrt{2gb}} = \frac{1}{2}$, seu iste angulus $26°, 34'$; et $n = \frac{Db}{2\pi Fk}$.

87. Hinc igitur quouis casu tota machina non difficulter definitur. Sit exempli causa altitudo lapsus

$b = 10$

$b = 10$ pedum, et quantitas aquae ſingulis minutis ſecundis affluens $D = 1$ pes cubicus: erit $a = 3\frac{3}{4}$ ped. $c = 0,26837$ ped. $\gamma = 0,03355$ ped. $ff = \frac{0,01933}{4b}$. Sumatur $b = c$; erit $ff = 0,00483$ ped. quadr. et $u = v = 5$ ped. $m = 10,484$, ſicque motus machinae nimis foret velox.

88. Hoc ergo caſu praeſtat quantitatem c ex numero m definire; cum enim non conſultum ſit, vno minuto ſecundo vna plures reuolutiones admittere, ponatur $m = 1$, hincque habebitur $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi\sqrt{2}} = 2,8135$, $\gamma = 0,3517$ ped. Deinde ob $\pi\sqrt{2} = \frac{\sqrt{gb}}{c}$ erit in genere $\sqrt{(b-2a)} = \frac{D}{4\gamma g\sqrt{b}} =$ hocque caſu $b - 2a = 0,000206$ ped. ſeu $a = 4,999807$ ped. Tum vero eſt $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b(1-\mu)}}$, et $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}}$, quare ſi ſtatuatur $b = c = 2,8135$, vt ſit $u = v = 5$ ped. erit $ff = 0,0565$ ped. quadr. et $ii = 0,0565$ ped. quadr. et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b}} = 0,00455$, ſeu hic angulus $= 0°,16'$. ac numerus $n = \frac{10}{2\pi Fk}$.

89. Cum in ſtatu maximi effectus ſit $u = v$, celeritas aquae infra ex tubis effluentis, aequalis erit ipſi celeritati, qua orificia circa axem reuoluuntur: ex quo celeritas vera aquae effluentis erit nulla, ideoque verticaliter delabetur motu vniformiter accelerato, quae inſignis proprietas effectus maximi imprimis notari meretur.

90. Quando ergo datur copia aquae D ſingulis minutis ſecundis affluens, vna cum altitudine lapſus b; conſtituatur primo numerus reuolutionum m, quas machina vno minuto ſecundo abſoluere debet; is autem

ita

ita capiatur, vt quantitas $\frac{gb\sqrt{2gb}}{4\pi mm}$ multis vicibus maior sit quam D. Sic enim proxime fiet $2a = b$, seu $a = \frac{1}{2}b$. Tum sumatur $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m\sqrt{2}}$, et interuallum b pro lubitu accipiatur; quo facto erit $u = v = \frac{bb}{cc}\cdot\frac{1}{2}b$: et $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}}$ et $ii = \frac{D}{\sqrt{2gb}}$, ita vt sit $ff : ii = c : b$. Denique tubi Ii aquam tantum non horizontaliter eiicere debebunt.

91. Cum autem aqua per tubos Ii secundum directionem horizontalem in vas inferius deriuare non licet, tubis his inclinationem quandam notabiliorem ad horizontem tribui oportet. Si igitur tangens huius inclinationis ponatur $= \theta$, posito $\gamma = \frac{1}{2}c$, statim reperitur $c = \sqrt{\frac{2D}{\pi\theta\sqrt{2gb}}}$; hincque $m = \frac{\sqrt{2gb}}{2\pi c}$. Tum vero, interuallo b pro lubitu assumto, erit $u = v = \frac{bbb}{2cc}$
Porro reperitur $a = \frac{1}{2}b(1 - \theta\theta)$, ac tandem:

$$ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}} = \frac{D}{2\pi mb}, \text{ et } ii = \frac{D}{\sqrt{2gb(1+\theta\theta)}} = \frac{D}{2\pi mc\sqrt{(1+\theta\theta)}}$$

His autem omnibus definitis habebitur:

$$2\pi n F k = D b,$$

vnde constructio totius machinae est petenda.

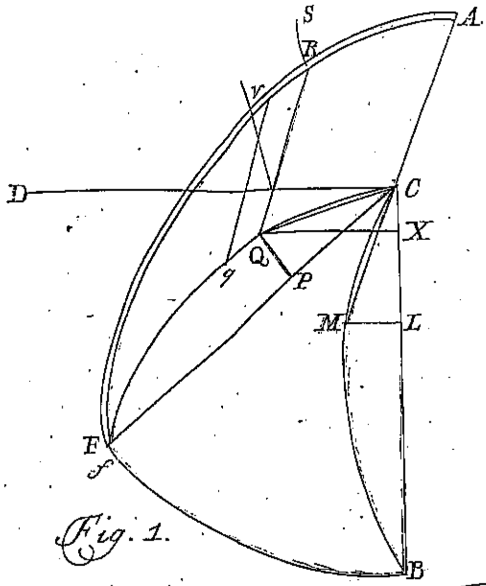

Fig. 1.

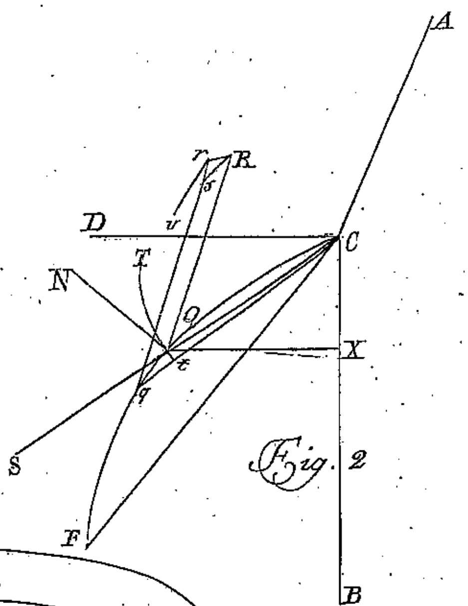

Fig. 2

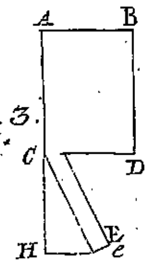

Fig. 3.

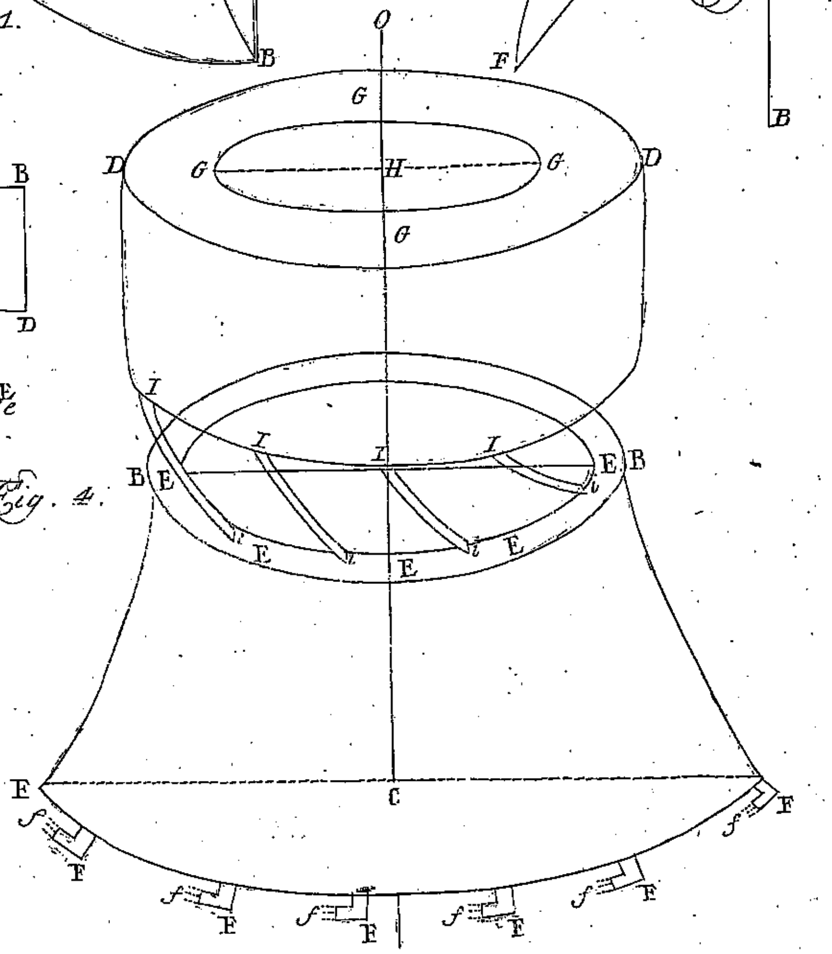

Fig. 4.