1761

De frictione corporum rotantium

Leonhard Euler

DE FRICTIONE CORPORVM ROTANTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si corpus ſuper plano ita incedat, vt ſolo motu progreſſiuo ſeu repente feratur, quantam tum a frictione reſiſtentiam patiatur, a Phyſicis iam ſatis exploratum videtur. Per experimenta enim compertum eſt, in huiusmodi motibus reſiſtentiam ſemper eſſe eiusdem magnitudinis, ita vt nequaquam a celeritate corporis pendeat; proportionalis autem eſt inuenta preſſioni, qua corpus ad planum apprimitur, quippe cuius parti tertiae vel quartae frictio plerumque aequalis deprehenditur. Interim tamen, quo magis ſuperficies plani et corporis fuerit laeuigata, eo magis inde frictionis quantitas diminuitur; vnde fit, vt pro corporibus et planis admodum politis frictio multo minor parte quarta preſſionis, pro valde aſperis vero maior parte tertia, exiſtere poſſit. Praeterea vero neque figura corporis, neque baſis magnitudo, qua planum contingit, quicquam ad frictionem conferre obſeruantur.

2. Prouenit ſcilicet frictio ab attritu partium mutuo, dum corpus ſuper plano incedit, ex quo principio tam quantitas quam reliqua frictionis phaenomena

ſatis dilucide ſunt explicata. Quando autem corpus non motu repente, ſed rotatorio, ſuper plano incedit, multo difficilior videtur frictionis determinatio. Si enim rotatio corporis ita ad motum progreſſiuum fuerit attemperata, vt nulla partium attritio locum habeat, quemadmodum fit in rotis voluendo ſuper ſolo ingredientibus, tum ob attritus defectum etiam nulla frictio adeſſe cenſetur. Quodſi vero motus corporis rotatorius vel maior fuerit vel minor, quam iſte caſus exigit, difficillimum videtur veram frictionis quantitatem accurate aſſignare, niſi plurima experimenta circa caſus quosque ſumma cura inſtituta in ſubſidium vocentur.

3. Conſidero hic autem tantum corpora rotunda, quorum centrum grauitatis in ipſorum axe eſt ſitum, ita vt quomodocunque rotentur, eorum centrum grauitatis a plano, ſuper quo incedunt, perpetuo eandem ſervet diſtantiam. Quae conditio vt pro omni motu locum inueniat, corpus motum ſphaericam figuram habere oportet, in cuius centro ipſum grauitatis centrum ſit ſitum. Vtcunque autem hoc corpus moueatur, eius motum ſemper in binos motus reſoluere licet, alterum progreſſiuum, quo centrum grauitatis profertur, alterum vero rotatorium, quo corpus interea circa quempiam axem per centrum grauitatis transeuntem voluitur. Atque hic imprimis poſitio axis rotationis reſpectu motus progreſſiui eſt perpendenda, vt inde verus motus, quo planum a corpore teritur, cognoſci, frictioque inde oriunda aeſtimari poſſit.

Tab. III. Fig. 1. 4. Sit EF planum, ſuper quo corpus mouetur, ad quod certa quadam vi, quae ſit $=P$, apprimatur, quoniam

quoniam ab hac vi appressionis frictio praecipue pendet. Iam primum consideretur motus corporis progressiuus, seu promotio centri grauitatis O, corpore existente sphaerico ABCD, in cuius centro O centrum grauitatis versetur; eritque quouis momento directio huius motus plano EF, super quo fit motus, parallela. Sit igitur praesenti saltem temporis puncto recta OD huius motus directio, eiusque celeritas debita altitudini v, seu tanta, quantam graue, ex altitudine v delapsum acquirit. Sit hoc instanti A punctum contactus, et per centrum grauitatis O secundum directionem motus progressiui OD transire concipiatur planum AOD ad planum, super quo fit motus, normale, quod planum hic quidem ipso plano tabulae repraesentetur.

5. Cum hoc plano conferatur iam motus corporis rotatorius, seu axis per centrum grauitatis O transiens, circa quem hoc saltem momento corpus rotatur. Atque hic casus imprimis notatu dignus occurrit, si axis rotationis ad planum OAD fuerit normalis, quo quidem casu euidens est, axem istum plano, super quo fit motus, fore parallelum. Tum vero alii dantur casus, quibus quidem axis rotationis plano EF est parallelus, sed non ad planum AOD normalis, verum ad id vtcunque inclinatus. Denique habentur casus, quibus axis rotationis tam ad planum AOD, quam ad planum, super quo fit motus, positionem tenet obliquam, atque hae triplices axis rotationis positiones probe sunt notandae, quia ad eos omnes plane motus, quoscunque mente concipere licet, reducuntur.

6. Inter hanc autem infinitam varietatem tres positiones primariae prae reliquis sunt notatu dignae, quarum prima est eadem, quam modo primo loco exposuimus, quando scilicet axis rotationis ad planum AOD est normalis, qui casus in plerisque motibus mixtis locum habere solet. Secunda positio primaria est quando corpus circa axem OD cum directione motus progressiui conspirantem rotatur, quo casu vti in primo axis rotationis plano, super quo fit motus, est parallelus. Tertia positio axis principalis constituatur, quando corpus circa axem CA ad planum EF perpendicularem rotatur. Quanquam autem hae tres positiones inter infinitas sunt electae, tamen si frictionem pro iis tantum assignare potuerimus, nullum est dubium, quin inde pro qualibet axis positione obliqua veram frictionis quantitatem colligere valeamus. Ac prima quidem positio sola iam tantum inuestigationis campum complectitur, vt plurimum is praestitisse videatur, qui omnes casus in eo contentos rite euoluerit.

7. Positioni ergo primae inhaerens, qua globum circa axem ad planum AOD normalem rotari assumo, primum obseruo ad eam non solum globum, sed quaevis corpora rotunda, quae a plano ABCD in duas partes similes et aequales dirimantur, suumque grauitatis centrum in puncto O, quod simul est centrum figurae, habeant positum, esse accommodata, ita vt axis rotationis simul sit eorum axis, circa cuius conuersionem sint nata. Talia ergo corpora praeter globum sunt cylindri

Tab. III. recti, et quaeuis corpora sphaeroidica, quae oriuntur, si

Fig. 2. figura quaecunque GCH diametro OC praedita, circa

axem

axem GH ad CO normalem reuoluatur, dummodo centrum grauitatis in puncto O sit positum. In figura igitur prima circulus ABCD repraesentat huiusmodi corporis sectionem per punctum O ad axem GH normaliter factam. Tab. III. Fig. 1.

8. Si iam progressiuum corporis motum secundum directionem OD fieri concipiamus, celeritate debita altitudini v, corpusque interea circa axem GOH ad planum AOD normalem gyretur, duo casus principales considerandi occurrunt, prout corpus vel in plagam ABCD gyratur, vel in plagam contrariam ADCB. Ille motus cum progressiuo conspirare censetur, hic vero eidem aduersari; si enim corpus secundum directionem EF protruditur, quasi sponte sua in plagam ABCD prouoluitur, dum motus contrarius non nisi a vi peculiari gignitur. Hinc motus progressiuus cum rotatione in plagam ABCD coniunctus prouolutio vocari solet, eaque est perfecta, si celeritas gyratoria puncti A circa axem O ipsi celeritati progressiuae Vv est aequalis. Tum enim ob vtrumque motum aequalem et contrarium punctum A puncto saltem temporis in quiete versatur, et quia super plano EF nullus attritus locum habet, nulla quoque frictio adesse existimatur, ex quo hic casus singularem attentionem meretur.

9. Quo igitur clarius appareat, quomodo huiusmodi diuersas vtriusque motus combinationes tractari conueniat, ponamus praesenti saltem temporis momento motum corporis gyratorium circa axem O ad planum AOD normalem et in plagam ABCD ita fieri, vt

 puncti

puncti A celeritas debita sit altitudini u, quae quidem ad axem O quasi quiesceret, refertur, vnde posito circuli ABCD radio $OA = a$, prodit celeritas angularis $= \frac{\sqrt{u}}{a}$. Tum vero posita motus progressiui secundum AF celeritate $= \sqrt{v}$, erit puncti A celeritas, qua super plano EF secundum directionem AF incedit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; quae celeritate attritus corporis super plano EF fieri concipiendus est. Vnde manifestum est, si fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, hanc celeritatem puncti A, ideoque et attritum euanescere, nullamque propterea frictionem locum habere, qui est casus prouolutionis perfectae.

10. Sin autem sit $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, punctum A, quo fit corporis cum plano EF contactus, super hoc plano incedet celeritate $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$, atque ob attritum frictio orietur, qua punctum A in directionem oppositam AE retrahetur. Hac ergo vi motus corporis progressiuus imminuetur, gyratorius autem augebitur: ac si motus gyratorius fuerit nullus, seu $\sqrt{u} = 0$, ab eadem frictione etiam motus gyratorius in plagam ABCD generabitur. Sin autem $\sqrt{u}$ habeat valorem negatiuum, quo casu corpus habet motum gyratorium in plagam contrariam ADCB, multo adhuc maior existet attritus celeritate scilicet $\sqrt{v} + \sqrt{u}$, et a frictione inde oriunda vterque motus, tam progressiuus, quam gyratorius, debilitabitur. At si fuerit $\sqrt{u} > \sqrt{v}$, gyratione in plagam ABCD tendente, motus puncti A super plano EF in regionem AE erit directus, vnde frictio vim gignet in plagam AF directam, qua motus progressiuus accelerabitur, gyratorius vero retardabitur.

11. Quae-

11. Quaecunque iam ſubſiſtat ratio inter ambas celeritates $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$; vim frictionis determinari oportet, vt inde, quantum vterque motus perturbetur, definiri queat. Ac primo quidem, ſi motus gyratorius fuerit nullus, ſeu $\sqrt{u} = o$, caſus redit ad cognita frictionis phaenomena, quia corpus ſolo motu progreſſiuo ſuper plano EF prorepit. Conſtat ſcilicet, frictionis vim fore conſtantem, atque ad vim, qua corpus ad planum apprimitur, certam tenere rationem, quae neque a figura corporis, neque ab eius celeritate, pendeat. Preſſione nimirum corporis ad planum exiſtente $= P$, frictio erit $= \nu P$, denotante ν certam quampiam fractionem, haecque vis motui corporis ita eſt contraria, vt ſi corpus promoueatur ſecundum directionem OP, ſeu AF, id a frictione retrahatur in directione AE, quae per ipſum contactum A ſit tranſitura.

12. Neque tamen hoc caſu frictio plane nequaquam a corporis motu pendere dici poteſt; primum enim directio frictionis vtique per motus directionem determinatur, cum ipſi ſit contraria. Poſita porro corporis celeritate ſecundum directionem AF celeritate $= \sqrt{v}$, etſi frictio νP, cuius directio eſt AE, non a quantitate celeritatis $\sqrt{v}$ pendet, tamen ſignum eius maxime frictionem afficit, ita vt ſi valor $\sqrt{v}$ fiat negatiuus, etiam frictionis quantitas ſubito euadat negatiua, ipſa eius quantitate eadem manente, quia tum frictio in plagam contrariam AF motui quippe oppoſitam dirigitur. Hic ſaltus eo magis fit notabilis, quod, celeritate $\sqrt{v}$ euaneſcente, ipſa quoque frictio euaneſcat, etiamſi alias ſemper certum eumque conſtantem valorem

rem obtineat: qui saltus tametsi legibus naturae aduersari videtur, tamen alio loco eum ita explicaui, vt cum principiis mechanicis, ideoque etiam cum legibus naturae, consistere possit. Non mediocrem ergo hinc illustrationem cum insigni limitatione adipiscitur regula vulgaris, qua nullus in mundo saltus statuitur.

13. Interim tamen haec ipsa lex frictionis etiam casu, quo nullus datur motus gyratorius, exceptioni cuipiam obnoxia videtur. Experimenta enim non obscure innuere videntur, frictionem in ipso motus initio aliquanto maiorem esse, quam in motus continuatione; siue maiorem vim requiri ad vim frictionis primam superandam, quam ad eandem corporis celeritatem conseruandam. Ita si vis primae motus productioni reluctans fuerit $= \nu P$, idem corpus, cum iam motum fuerit consequutum, minori vi ob frictionem retardari videtur. Dolendum autem est, nondum eiusmodi experimenta esse instituta, ex quibus hoc discrimen frictionis, si quod datur, in prima motus productione eiusque continuatione accurate definiri queat, cum tamen haec quaestio, per experimenta debita solertia facta, non difficulter dirimi posset.

14. Hoc ergo casu, quo $Vu = o$, expedito, quem quasi cognitum assumamus, contemplemur alterum casum praecipuum, quo $Vu = Vv$, et ob $Vv - Vu = o$ attritus plane euanescit. Hoc igitur casu, qui prouolutio perfecta dici solet, nulla prorsus frictio adesse censetur, propterea quod attritui nullus relinquitur locus. Quaestio autem hic occurrit maximi momenti: an isto casu nulla prorsus adsit vis, quae motui

tui corporis opponatur? Experientia enim manifesto indicat, etiamsi corpus prouolutione perfecta feratur, eius tamen motum sensim diminui, atque tandem prorsus ad quietem reduci. qui effectus nulli alii causae, nisi vi cuipiam motui contrariae, adscribi potest. Cum igitur etiam prouolutio perfecta resistentiae sit obnoxia, et quidem tali, qua motus mox penitus extinguatur, vnde haec resistentia oriatur, imprimis inuestigari oportet; tametsi enim ea fortasse a frictione proprie sic dicta sit seiungenda, tamen nullum est dubium, quin etiam in aliis casibus sentiatur, motuique reluctetur.

15. Primum quidem videri posset, hanc motus in prouolutione perfecta imminutionem a sola resistentia aeris proficisci, verum, praeter quam quod verisimile sit, huiusmodi retardationem etiam in vacuo locum esse habituram, dummodo calculum consulamus, mox deprehendemus, aeris resistentiam nimis esse paruam, quam vt ab ea motus tam cito consumi possit. Deinde etiam certum est, quamuis a resistentia aeris motus corporum imminuatur, tamen ab ea motum nunquam plane extingui posse. Cum enim resistentia cum celeritate et quidem in eius ratione duplicata decrescat, fieri omnino nequit, vt ab ea motus omnino deleatur: ex quo manifestum est, causam, cur motus in prouolutione perfecta diminuatur, et ad quietem redigatur, in aeris resistentia poni non posse.

16. Cum igitur tota causa huius retardationis non in aeris resistentia sit quaerenda, etiamsi ei pars quaepiam recte tribuatur, nihil aliud relinquitur, nisi ipsa superficies, super qua fit incessus, vnde haec re-

tardatio oriri sit statuenda. Ac si superficies sit panno obducta, obseruamus, globum eo citius motum suum amittere, quo pannus fuerit villosior, vnde recte concludimus, villositatem superficiei motui aduersari, et caussa quidem est manifesta, quod corpus hos villos continuo deprimere debet, id quod sine quadam motus iactura fieri nequit. Reagunt scilicet villi in globum, vti in α cernere licet, cuius vis directio, etsi per centrum globi O secundum αO transit, tamen eo magis motui resistit, quo maior fuerit angulus $AO\alpha$, hoc est, quo profundius globus his villis immergitur. Obiici quidem posset, globum ex altera parte posteriori pari vi vrgeri, quod vtique si corpus quiesceret, esset verum, sed dum corpus modica celeritate versus F promouetur, citius villos posteriores deserit, quam illi se erigere et in corpus cedens pressionem exerere queant; vnde dubitare non licet, quin a parte antica resistentia quaepiam a villositate superficiei oriatur.

17. Quaecunque autem fuerit haec resistentia, ea non solum ad hunc casum, quo $\sqrt{v} - \sqrt{u} = 0$, est adstricta, sed ad omnes plane casus prouolutionis ex motu progressiuo et gyratorio vtcunque mixtae aeque patet, propterea quod a solo motu progressiuo, quatenus a depressione villorum efficitur, prouenit; quam ob rem in istam resistentiam, quae a frictione probe est distinguenda, accuratius inquiri conueniet. Neque vero ea tantum a villositate superficiei oriri est censenda, sed cuiuscunque etiam fuerit naturae superficies, ob pressionem corporis quaepiam portio ei quasi immergitur, supremaeque superficiei partes aliquantillum com-

primun-

primuntur. Ab hac compressione similis redundat reactio in corpus motum atque a villositate, hincque motui resistentia opponitur, quae pro ratione tam superficiei, quam pressionis, vtcunque variare, nunquam autem plane in nihilum abire potest. Atque haec vera videtur esse causa, cur motus etiam volutorius tandem penitus extinguatur, quem effectum resistentiae aeris tribuere non licet.

18. Promoueatur ergo corpus super plano EF villis vtcunque obsito, cui ad profunditatem $\alpha\beta$ immergatur, ita vt, dum progreditur continuo, villos ad $\beta\gamma$ erectos in spatium $A\alpha\beta$ comprimat, cui compressioni cum villi reluctentur, eam efficient resistentiam, quam hic inuestigare animus est; siue autem ea a veris villis oriatur, siue a quapiam plani mollitie, qua impressionem quampiam patitur, perinde est. Sit igitur naturalis villorum erectio $\alpha\beta = f$; quae simul profunditatem impressionis in vero contactu A factae indicat; et in quolibet puncto M, dum progrediendo villum PM vlterius comprimit, existet quaedam vis reactionis in corporis superficiem normaliter nitens, cuius propterea directio erit MO per centrum grauitatis O transiens, et cuius quantitas aestimari potest proportionalis compressioni iam factae, seu differentiae $\alpha\beta - PM$. Posita ergo $PM = y$, magnitudo huius vis in directione MON agentis erit interuallo $f - y$ proportionalis. Tab. III. Fig. 3.

19. Ponamus rigorem villorum esse tantum, vt a basi $= cc$ vi, seu pondere, $= K$ appressa per spatium $= k$ comprimantur, sicque compressionis effectus cck vi pres-

 sionis

ſionis K tribui debeat. Primum autem corpus, quod mouetur, ſit diſcus, ſeu cylindrus, radii OA $= a$, et craſſitiei $= b$, et, poſito AP $= x$, compreſſio villorum ſpatiolo $Pp = dx$ reſpondentium valet $(f-y)bdx$, quae ergo requirit vim $= \frac{K}{cck}(f-y)bdx$, cuius directio eſt MON. Spatiolum enim PM prae radio diſci OA $= a$ tam paruum contemplor, vt angulus AOM ſit minimus, et ratio elementorum Pp ad Mm ad aequalitatem accedere cenſeri poſſit. Hinc erit $xx = 2ay$, et $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{2ay}}$, vnde tota vis ſurſum vrgens portionem AM erit $\frac{Kb\sqrt{2ay}}{3cck}(3f-y)$, et vis tota eleuans, a ſpatio AB nata, poſito $y = f$, erit $= \frac{2Kbf\sqrt{2af}}{3cck}$.

20. Huic ergo vi aequalis eſt tota vis, qua corpus ad planum apprimitur, quae cum ſupra poſita ſit $= P$, habebimus hanc aequationem $\frac{2Kbf\sqrt{2af}}{3cck} = P$; vnde colligimus:

$$f\sqrt{f} = \frac{3Pcck}{2Kb\sqrt{2a}} \text{ et } f = \sqrt[3]{\frac{9PPc^4kk}{8KKabb}}.$$

Hic ſcilicet eos tantum villos in computum duco, qui ante corpus ſunt ſiti, et quos, dum progreditur, comprimere cogitur, eos vero, qui pone corpus iam ſunt compreſſi, vel elateris expertes aſſumo, vel tales, vt ſua reſtitutione motum corporis non aſſequantur, neque idcirco in illud agere valeant. Dum igitur corpus quieſcit, quia tum etiam a parte poſteriori ſuſtinetur, minorem faciet impreſſionem, quatenus ea a preſſionis duratione non augetur. Dubitari enim nequit, quin continuata preſſione, ſaltem per aliquod tempus, corpus aliquanto profundius immergatur; at ob hanc ipſam

cauſam

caussam in motu actio villorum post corpus recte negligi potest.

21. Etsi autem in hoc calculo angulus AOM minimus est positus, tamen eius rationem haberi oportet, si vim motui resistentem inuestigare velimus. Cum enim huius vis directio MON per centrum grauitatis O transeat, multiplicetur ea per cosinum anguli NOB, seu sinum anguli AOM, qui est $= \frac{x}{a}$, et vis resultans secundum directionem OB motui contrariam erit $= \frac{K}{cck}(f-y)\frac{bxdx}{a}$, ideoque ob $xdx = ady$ erit ea $= \frac{Kb}{cck}(f-y)dy$, cuius integrale est $= \frac{Kb}{cck}(fy - \frac{1}{2}yy)$, vnde tota vis motui repugnans, sumendo $y = f$, prodit $= \frac{Kbff}{2cck}$. Cum igitur sit $ff = \frac{3Pc^2k}{4Kb}\sqrt[3]{\frac{3Pcck}{Kaab}}$, erit ista tota vis $= \frac{3}{8}P\sqrt[3]{\frac{3Pcck}{Kaab}}$, vbi pro eadem superficie quantitas $\frac{cck}{K}$ est constans: ergo si corporis grauitas specifica exprimatur per m, ob P vt $maab$, erit vis istius resistentiae vt $P\sqrt[3]{m}$, ita vt grauitate specifica eadem manente resistentia sit ponderi vel volumini corporis proportionalis.

22. Sin autem corpus sit sphaericum, considerari debet tota eius impressio a parte anteriori facta, quae erit semicirculus $\delta\alpha\delta$ centrum habens in A, cuius radius medius $A\alpha$ directionem motus repraesentabit. In perimetro ergo huius circuli altitudo villorum ponatur vt ante $= f$; in distantia autem a centro AP $= AS = x$, sit ea $= y$, eritque $xx = 2ay$, denotante a radium corporis sphaerici. Posito angulo quocunque $\alpha A\mu = \Phi$, erit arcus $PS = x\Phi$, eiusque differentiale $ET = xd\Phi$, vnde arcola $Psps = xdxd\Phi$, in qua compressio villorum tota valebit $(f-y)xdxd\Phi$. Hinc ergo cor- Tab. III. Fig. 4.

 pus

pus ſurſum vrgebitur vi $\frac{K}{cck}(f-y)x\,dx\,d\Phi = \frac{K}{cck}f-y)a\,dy\,d\Phi$ cuius integrale pro ſpatio PAS eſt $= \frac{K}{cck}(fy-\frac{1}{2}yy)a\,d\Phi$, ideoque pro ſpatio $\alpha A \mu = \frac{Kaff\,d\Phi}{2cck}$: vnde poſita diametri ad peripheriam ratione $= 1:\pi$, vis ſurſum pellens tota reperitur $= \frac{\pi K aff}{2cck}$, vi preſſionis P aequanda; ex quo fit $ff = \frac{2Pcck}{\pi K a}$; vbi f denotat profunditatem, ad quam globus immergitur.

23. Ex vi autem $\frac{K}{cck}(f-y)a\,dy\,d\Phi$, ſpatiolo $STst$ reſpondente, reſultat vis ſecundum directionem plani SA vrgens, ſi ea per $\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ multiplicetur, ita vt vis iſta ſit $= \frac{K\,d\Phi\sqrt{2a}}{cck}(f-y)dy\sqrt{y}$, quae per coſ. Φ multiplicata dabit vim motui contrariam, cuius ſcilicet directio per centrum grauitatis globi tranſit, vnde iſta vis ſit $= \frac{K\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{2a}}{cck}(f-y)dy\sqrt{y}$, qua integrata, et poſito $y=f$, reperitur: $\frac{4Kff\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{2af}}{15cck}$: Ac ſi altera integratio pro angulo Φ inſtituatur, fit reſiſtentia ex ſpatio $\alpha A \mu$ orta $= \frac{4Kff\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{2af}}{15cck}$, cuius duplum poſito $\Phi = 90°$ praebebit totam reſiſtentiam $= \frac{8Kff\sqrt{2af}}{15cck} = \frac{16P}{15\pi}\sqrt{\frac{2f}{a}}$, ob $ff = \frac{2Pcck}{\pi K a}$; indidem igitur iſta reſiſtentia erit $= \frac{16P}{15\pi}\sqrt[4]{\frac{8Pck}{\pi K a^3}}$, vnde pro eodem plano ea erit, vt $P\sqrt[4]{\frac{P}{a^3}}$. Huius vero vis directio motui eſt contraria, et per globi centrum tranſit.

24. Hanc itaque reſiſtentiam, quae a frictione probe eſt diſtinguenda, ſentiunt omnia corpora, ſiue ſolo motu progreſſiuo, ſiue inſuper cum rotatorio, ſuper plano quocunque ferantur, neque ea, vt vidimus, a motu rota-

torio

torio pendet, neque ab ipsa velocitate motus progressiui; quam ob causam ea etiam vulgo cum frictione confusa videtur. Maxime tamen a frictione proprie sic dicta discrepat, propterea quod frictionis directio per ipsum contactum transit, huius autem resistentiae directio per corporis centrum grauitatis, vnde haec vis motum rotatorium aliter non afficit, nisi quatenus motu progressiuo mutato etiam in rotatorium necessario mutatio redundat. Deinde vero frictio plurimum a ratione inter motum rotatorium et progressiuum pendet, quemadmodum vidimus, eam insignem existere, si $\sqrt{u} = 0$, penitus autem euanescere, si $\sqrt{u} - \sqrt{u} = 0$, dum altera resistentia ab hac diuersitate neutiquam afficitur, sed pro quacunque relatione inter ambas celeritates $\sqrt{v}$ et u eandem quantitatem constanter retinet.

25. Stabilita ergo hac noua resistentia ab impressione mutua corporis et plani orta, pergamus ad frictionem inuestigandam pro casibus, vbi neque $\sqrt{u} = 0$, neque $\sqrt{v} - \sqrt{u} = 0$, quorum illo vidimus frictionem tantam esse, quanta vulgo experimentis aestimari solet, siquidem simul illius resistentiae ratio habeatur, hoc vero omnino euanescere. Quaestio igitur hic statim se offert, vtrum frictio, quando est $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, minor sit quam casu $\sqrt{u} = 0$, an vero ei sit aequalis? Non desunt rationes, quae vtrumque suadere videntur; nam cum accedente motu rotatorio in plagam ABCD attritus minuatur, atque tandem euanescat, cum fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, attritum minorem etiam minor frictio sequi debere videtur, quoniam attritu euanescente frictio adeo in nihilum abire est inuenta. Deinde etiam nullum Tab. III. Fig. 1.

lum eſt dubium, quin frictio, ſi celeritas rotationis $\sqrt{u}$ excedat celeritatem progreſſiuam $\sqrt{v}$, fiat negatiua, ſeu corpus in plagam contrariam rapiat.

26. Super hac quaeſtione ingens cernitur diſſenſio in Comment. Acad. Petrop. Tomo XIII, vbi Celeb. Vir *Daniel Bernoulli* et ego idem argumentum de deſcenſu corporis rotundi ſuper plano inclinato pertractauimus. Aſſumſerat autem Vir Celeb. huiusmodi corpus ſuper plano inclinato deſcendens ſemper eandem pati frictionem, quamcunque rationem tenuerit motus progreſſiuus ad motum rotatorium, atque adeo in prouolutione perfecta, vbi ratio illa fit aequalitatis, eandem manere frictionis quantitatem, atque hinc concluſit, quamdiu plani eleuatio non certum quemdam gradum excedat, corpus rotundum prouolutione perfecta eſſe deſcenſurum. Quin etiam Celeb. *Krafft* experimentis inſtitutis euentum huic effato eximie reſpondere deprehendit. Ego vero contra, ſecundum ea, quae hic expoſui, aſſumſeram, in prouolutione perfecta nullam prorſus dari frictionem, eamque fore eo minorem, quo propius motus mixtus ad prouolutionem perfectam acceſſerit; vnde ſequebatur, nullo plane caſu globum ſuper plano inclinato prouolutione perfecta deſcendere poſſe, cui concluſioni experientiam contrariam agnoſcere cogor.

27. Quamuis autem Celeb. *Bernouilli* Theoria experientiae ſit conſentanea, tamen non patet, quomodo eius hypotheſis, quod etiam in prouolutione perfecta frictio tanta ſit, quanta in ſolo motu progreſſiuo eſſe ſolet, cum veritate conciliari poſſit. Contemplemur enim caſum, quo globus ſuper plano horizontali

per-

perfecte prouoluitur, atque nullum est dubium, si mentem, tam ab aëris resistentia, quam ab ea, quae ante est definita, abstrahamus, quin corpus sine vlla diminutione motum suum sit prosequuturum. Vbi autem nulla motus diminutio deprehenditur, ibi certe nulla frictio statui potest; ex quo etiam in descensu super plano inclinato, quamdiu corpus prouolutione perfecta fertur, nulla frictio admitti posse videtur, contra principium, cui Theoria *Bernoulliana* innitur. Verum si hoc casu, vti ego feci, frictio tollitur, tum prouolutioni perfectae nullus plane locus relinquitur, etiamsi plani inclinati eleuatio quam minima statuatur, quod tamen experientiae aduersari certum est.

28. Quo huius nodi solutionem reperiamus, hos duos casus prouolutionis perfectae super plano horizontali et inclinato accuratius inter se conferamus; et cum super plano horizontali nullam frictionem admittere liceat, super inclinato autem per experimenta frictionis existentia euincatur, manifestum est, hunc casum ad illum reduci, si grauitatis sollicitationem, qua corpus secundum directionem plani acceleratur, euanescere concipiamus. Ex quo hanc conclusionem adipiscimur; si in prouolutione perfecta super plano inclinato nulla adesset vis motum accelerans, tum etiam nullam frictionem esse adfuturam, contra vero cum vi motum accelerante necessario frictionem fore coniunctam. Hic igitur fontem erroris, quo meum ratiocinium premebatur, detego, qui in hoc consistit, quod frictionem ex solo statu motus, quo corpus actu cietur, definiri debere putaueram, cum tamen potius ex viribus accele-

ratricibus determinari debeat: atque hinc frictionis effectus maxime a resistentia fluidorum aliisque resistentiae generibus discrepat, quod hae resistentiae vnice a statu motus corporum pendeant.

29. Quod autem frictio a viribus sollicitantibus potissimum pendeat, ex ipso statu quietis luculenter perspicitur. Si enim corpus plano horizontali incumbat, nullisque viribus ad motum sollicitetur, nullus quoque frictionis cernitur effectus; sin autem hoc corpus protrahatur a vi, quae frictionem superare non valeat, corpus etiam nunc quiescet; vnde hoc casu frictio exerit vim, vi protrahenti aequalem et contrariam, vnde patet, vim a frictione exertam per se non esse determinatam, sed demum per vim protrahentem determinari, siquidem ea fuerit minor, quam tota frictio, quae se motui opponit; ex quo his casibus pars tantum frictionis effectum praestare est censenda. At si vis protrahens frictioni vel fuerit aequalis, vel ea maior, tota frictio se se eius actioni opponit, et illo quidem casu corpus etiam nunc quiescet, hoc vero promouebitur excessu vis sollicitantis supra frictionem totam. Quemadmodum igitur corpus frictione impeditum, a statu quietis ad motum concitetur a viribus quibuscunque sollicitantibus, ante accuratius erit inuestigandum, quam ad eius effectum in motu explorandum progrediamur.

30. Verum si corpus plano incumbens a viribus quibuscunque sollicitetur, quatuor casus existere possunt:

I. Vel enim primo corpus in quiete omnino perseuerat, dum vires sollicitantes neque corpori motum imprimere, neque frictionem superare valent.

II. Vel

II. Vel secundo corpus quidem ad motum incitabitur, sed ita vt punctum contactus, vel eius extremitas, primo saltem instanti immota maneat, sicque nullus oriatur attritus; hoc euenit scilicet si vires frictioni superandae sunt impares.

III. Vel tertio corpus super plano rependo progredietur, sine vllo motu gyratorio.

IV. Vel quarto denique corpus cum rependo, tum gyrando, simul promouebitur.

Corpore ergo quocunque proposito, quod plano incumbat, et a viribus quibuscunque sollicitetur, characteres primum inuestigemus, ex quibus dignosci possit, quisnam horum quatuor casuum locum sit habiturus.

31. Vt igitur hos characteres inueniamus, consideremus corpus quodcunque basi sua GH plano EF incumbens, cuius massa sit $= M$, centrum grauitatis O, et momentum inertiae respectu axis per O transeuntis, circa quem fiat motus, si quis detur, sit $= Mkk$. Hic scilicet axis concipiatur ad planum tabulae normalis, dum tabula refert sectionem ad planum EF normalem et per centrum grauitatis O factam. Sollicitetur hoc corpus a viribus quibuscunque, quae primum omnes directionibus sibi parallelis in centro grauitatis O applicatae concipiantur, eaeque resoluantur in duas vires secundum directiones OA et OD, illam ad planum EF normalem, quae sit $= P$, hanc vero plano EF parallelam, quae sit $= Q$. Tum ex iisdem viribus colligatur momentum respectu axis O, quod sit $KL.OK = Vb$, quod conetur corpus in plagam Tab. III. Fig. 5.

BCD gyrari; hac quippe duplici consideratione totus virium sollicitantium effectus exhaurietur.

32. Videamus iam, sub quibus conditionibus corpori eiusmodi motus inducatur, qui cum nullo attritu fuerit coniunctus; id quod eueniet, si basis HG extremitas G in quiete permaneat, corpusque gyrando circa G motum incipiat. Quoniam igitur ista basis extremitas G in censum venit, iuncta recta GO vocetur $= g$, atque angulus $HGO = \theta$, vnde fiet recta $OA = g$ sin. θ et $AG = g$ cos. θ. Nunc cum frictio agat secundum directionem GH, videamus quanta vi, quae sit $= Z$ corpus secundum directionem GH vrgeri debeat, vt punctum G immotum conseruetur; quod si enim haec vis Z reperiatur minor frictione tota, vel saltem ei aequalis, ob frictionem hic ipse motus, quem fingimus, efficietur, motusque corpori gyratorius circa punctum G immotum imprimetur; sin autem vis ista Z prodeat maior frictione tota, perspicuum est, a sola frictione punctum G non posse in quiete retineri; ex quo re vera abripietur, motusque ad casum tertium relatus nascetur: hisque rationibus characteres quaesiti innituntur.

33. Quia ergo supponimus, motum primo instanti fieri circa punctum G, centrum grauitatis O feretur per arculum $O o$ centro G radio $GO = g$ descriptum, interea vero corpus circa axem O per similem angulum in plagam BCD gyrabitur, ita vt celeritas gyratoria puncti G circa O ipsi celeritati puncti O per $O o$ aequalis sit futura. Dum autem hic motus producitur, totus nisus corporis in planum EF in

puncto

puncto G colligetur, vnde ad superiores vires corpus sollicitantes insuper vis accedit, corpus in puncto G a plano EF perpendiculariter sursum secundum GI vrgens, quae vis aequalis est pressioni corporis contra planum dum motus exoritur. Quae vis quia etiam nunc est incognita, tantisper indicetur littera Y, ita vt duas habeamus vires incognitas, Z secundum GH et Y secundum GI, quae ita sunt determinandae, vt punctum G in quiete conseruetur.

34. Viribus autem his cum datis, quasi essent cognitae assumtae, ex iis primum acceleratio centri grauitatis O definiatur, quod fiet, has vires secundum suas directiones centro grauitatis applicando. Quare a viribus datis centrum grauitatis O, in quo tota corporis massa M collecta est concipienda, sollicitabitur secundum OD vi $=Q$, et secundum OA vi $=P$, a viribus autem incognitis secundum OB vi $=Z$ et secundum OC vi $=Y$. Hinc massa M in O collecta ab vtrisque sollicitabitur secundum directionem OD vi $=Q-Z$, et secundum OC vi $=Y-P$; inde ergo nascetur acceleratio $=\frac{Q-Z}{M}$, hinc vero $=\frac{Y-P}{M}$. Quam ob rem si acceleratio secundum ipsam motus directionem Oo vocetur $=\vartheta$, per resolutionem ob angulum $COo=HGO=\theta$ obtinebitur acceleratio secundum $Ot=\vartheta$ sin. θ, et secundum $Ov=\vartheta$ cos. θ, ex quo obtinebimus has duas aequationes:

$$\vartheta \,\text{sin.}\, \theta = \frac{Q-Z}{M} \quad \text{et} \quad \vartheta \,\text{cos.}\, \theta = \frac{Y-P}{M}$$

vnde fit $(Q-Z)\,\text{cos.}\,\theta = (Y-P)\,\text{sin.}\,\theta$, hincque

$$Y = P + (Q-Z)\frac{\text{cos.}\,\theta}{\text{sin.}\,\theta}$$

 35. Iam

35. Iam ad accelerationem motus rotatorii corporis circa axem O obtinendam in plagam BCD, quam in distantia OG $= g$ per hypothesin aequalem esse oportet $\varkappa$, momenta virium sollicitantium sunt colligenda. Atque ex datis quidem viribus nasci ponitur momentum $= Vb$ in plagam BCD tendens: tum vero ex vi $GH = Z$ ob $OA = g \sin.\theta$ in eandem plagam oritur momentum $= Zg \sin.\theta$, ex vi $GI = Y$ vero in plagam contrariam ob $OI = g \cos.\theta$ nascitur momentum $= Yg \cos.\theta$, ita vt momentum totale motum gyratorium producens sit $= \gamma b + Zg \sin.\theta - Yg \cos.\theta$, quod per momentum inertiae Mkk diuisum, et per distantiam $OG = g$ multiplicatum suppeditabit accelerationem motus rotatorii in G, quae cum per hypothesin sit $= \varkappa$, habebimus hanc aequationem

$$\varkappa = \frac{Vgb + gg(Z \sin.\theta - Y \cos.\theta)}{Mkk}$$

36. Cum igitur sit $\varkappa \sin.\theta = \frac{Q-Z}{M}$ erit:

$$\frac{Q-Z}{M} = \frac{Vgb \sin.\theta + gg(Z \sin.\theta - Y \cos.\theta)\sin.\theta}{Mkk}$$

siue:

$$kk(Q-Z) = Vgb \sin.\theta + ggZ \sin.\theta^2 - ggY \sin.\theta \cos.\theta$$

Est vero $Y \sin.\theta = P \sin.\theta + (Q-Z) \cos.\theta$ quo valore substituto habebimus:

$$kk(Q-Z) = Vgb \sin.\theta + ggZ \sin.\theta^2 - ggP \sin.\theta \cos.\theta - gg(Q-Z)\cos.\theta^2$$

seu:

$$kkQ = kkZ + Vgb \sin.\theta + ggZ - ggP \sin.\theta \cos.\theta - ggQ \cos.\theta^2$$

vnde

vnde colligitur:

$$Z = \frac{gg P \sin.\theta \cos.\theta + (kk + gg \cos.\theta^2) Q - Vgh \sin.\theta}{kk + gg}$$

hincque:

$$Q - Z = \frac{gg Q \sin.\theta^2 - gg P \sin.\theta \cos.\theta + Vgh \sin.\theta}{kk + gg}$$

$$\text{et } Y = \frac{gg Q \sin.\theta \cos.\theta + (kk + gg \sin.\theta^2) P + Vgh \cos.\theta}{kk + gg}$$

37. Inuenta iam vi Z, quae ad punctum G immotum conseruans dum requiritur, quoniam frictio hanc vim suppeditat, necesse est, vt vis Z totam frictionem non superet. Frictio autem pendet a vi, qua corpus ad planum apprimitur, ad eamque certam quandam tenet rationem, quae sit vt 1 ad ν. Cum igitur, dum corpus circa extremitatem basis G gyrari incipit, tota pressio in G colligatur, et aequalis sit inuenta Y, tota frictio erit $= \frac{1}{\nu} Y$. Quam ob rem vt corpus circa extremitatem basis G immotam gyretur, et quidem in plagam BCD, necesse est, primo, vt sit $Z < \frac{1}{\nu} Y$, hoc est, vt sit:

$$Pgg \sin.\theta \cos.\theta + Q(kk + gg \cos.\theta^2) - Vgh \sin.\theta < \frac{1}{\nu}(Qgg \sin.\theta \cos.\theta + P(kk + gg \sin.\theta^2) + Vgh \cos.\theta)$$

tum vero etiam necesse est, vt acceleratio υ habeat valorem affirmatiuum, vnde cum sit $\upsilon = \frac{Q - Z}{M \sin.\theta}$, siue

$$\upsilon = \frac{g(Qg \sin.\theta - Pg \cos.\theta + Vh)}{M(kk + gg)}$$

oportet, vt sit praeterea $Qg \sin.\theta + Vh > Pg \cos.\theta$.

38. Hinc

38. Hinc igitur pro motu caſus ſecundi hanc nanciſcimur concluſionem:

ſi fuerit

$$Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + Q(kk+gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{ſin.}\,\theta < \tfrac{\alpha}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + P(kk+gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{coſ.}\,\theta)$$

atque inſuper $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$
tum corpus circa extremitatem baſis G immotam in plagam BCD moueri incipere, foreque accelerationem huius motus gyratorii pro diſtantia g,

$$\text{ȣ} = \frac{g(Qg\,\text{ſin.}\,\theta - Pg\,\text{coſ.}\,\theta + Vb)}{M(kk+gg)}$$

Si eueniat vt ſit $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb < Pg\,\text{coſ.}\,\theta$, minime concludere licet, motum gyratorium fieri in plagam oppoſitam circa G; tali enim motui pars reliqua baſis GH plano innitens ſeſe opponit. Namque motus contrarius fuerit circa alteram baſis extremitatem H, pro quo caſu peculiari calculo reſpondentes vires Z et Y, quarum haec iam in H applicata eſſet concipienda, definiri oporteret, ſimili quidem modo quo hic ſumus vſi.

39. Si ergo ſit $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb = Pg\,\text{coſ.}\,\theta$ nullus dabitur motus gyratorius; vt autem ſimul punctum G quieſcat, requiri, vt ſit $Q < \tfrac{\alpha}{\nu}P$, hocque ergo caſu corpus plane quieſcet. At ſi ſit $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$, ſeu acceleratio ȣ poſitiuum obtineat valorem, tum corpus motum gyratorium circa G adipiſcetur; vt autem punctum G quieſcat, oportet ſit valore ipſius ȣ introducto:

$$Q < \tfrac{\alpha}{\nu}P + M\text{ȣ}(\text{ſin.}\,\theta + \tfrac{\alpha}{\nu}\,\text{coſ.}\,\theta)$$

Quando

Quando ergo $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$, corpus circa G rotari incipiet, punctumque G quieſcet, ſi non ſolum fuerit $Q < \frac{1}{\nu}P$, ſed etiam ſi ſit vel $Q = \frac{1}{\nu}P$, vel $Q > \frac{1}{\nu}P$, dummodo ſit

$$Q < \tfrac{1}{\nu}P + M\upsilon\,(\text{ſin.}\,\theta + \tfrac{1}{\nu}\,\text{coſ.}\,\theta)$$

exiſtente $\upsilon = \dfrac{g\,(Qg\,\text{ſin.}\,\theta - Pg\,\text{coſ.}\,\theta + Vb)}{M\,(gg + kk)}$.

At ſi fuerit $Q > {}^{1}P + M\upsilon\,(\text{ſin.}\,\theta + \frac{1}{\nu}\,\text{coſ.}\,\theta)$, durante motu gyratorio punctum G quoque verſus F abripietur, neque enim frictio ei retinendo par erit.

40. Pro quadruplici ergo corporis ſtatu criteria ſumus adepti, quibus ſtatus corporis vel ad caſum ſecundum, vel ad quartum pertinebit: ſcilicet pro caſu ſecundo hae requiruntur conditiones, vt ſit

$$Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{coſ.}\,\theta, \quad \text{et}$$

$$Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{ſin.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{coſ.}\,\theta)$$

Hoc nempe caſu corpus circa baſis extremitatem G in plagam BCD gyrari incipiet, ipſa baſis extremitate G immota manente.

Caſus autem quartus locum habebit ſub his conditionibus, ſi fuerit

$$Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{coſ.}\,\theta, \quad \text{et}$$

$$Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{ſin.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{coſ.}\,\theta)$$

Hoc videlicet caſu corpus quoque circa baſis extremitatem G in plagam BCD gyrari incipiet; ſed haec ipsa basis extremitas versus F promouebitur, et cum attritu super plano EF progredietur.

41. Hoc ergo casu quarto, corpus totam frictionem patietur, quae cum sit $= \frac{1}{v} Y$, erit $Z = \frac{1}{v} Y$; atque etiam accelerationem puncti G super plano EF assignare poterimus. Si enim ponamus hanc accelerationem $= \omega$, manente acceleratione motus gyratorii circa centrum grauitatis $O = \varepsilon$, erit pro motu centri grauitatis O acceleratio secundum $OD = \varepsilon \,\text{sin.}\, \theta + \omega$, et acceleratio secundum $OC = \varepsilon \,\text{cos.}\, \theta$, vnde habemus ob $Z = \frac{1}{v} Y$ has aequationes:

$$\varepsilon \,\text{sin.}\, \theta + \omega = \frac{Q - \frac{1}{v} Y}{M} : \varepsilon \,\text{cos.}\, \theta = \frac{Y - P}{M}$$

$$\text{et} \quad \varepsilon = \frac{Vgh + \frac{1}{v} Ygg \,\text{sin.}\, \theta - Ygg \,\text{cos.}\, \theta}{Mkk} = \frac{Y - P}{M \,\text{cos.}\, \theta}$$

hinc ergo fiet:

$$Vgh \,\text{cos}\, \theta + \tfrac{1}{v} Ygg \,\text{sin.}\, \theta \,\text{cos.}\, \theta - Ygg \,\text{cos.}\, \theta^2 = Ykk - Pkk.$$

$$\text{ideoque } Y = \frac{Pkk + Vgh \,\text{cos.}\, \theta}{kk + gg \,\text{cos.}\, \theta^2 - \frac{1}{v} gg \,\text{sin.}\, \theta \,\text{cos.}\, \theta}$$

42. Ex his colligimus:

$$Y - P = \frac{Vgh \,\text{cos.}\, \theta - Pgg \,\text{cos.}\, \theta (\text{cos.}\, \theta - \frac{1}{v} \,\text{sin.}\, \theta)}{kk + gg \,\text{cos.}\, \theta^2 - \frac{1}{v} gg \,\text{sin.}\, \theta \,\text{cos.}\, \theta}$$

vnde concluditur fore:

$$\varepsilon = \frac{g(Vh - Pg(\text{cos}\, \theta - \frac{1}{v} \,\text{sin.}\, \theta))}{M(kk + gg \,\text{cos.}\, \theta (\text{cos.}\, \theta - \frac{1}{v} \,\text{sin.}\, \theta))}$$

quae est acceleratio motus rotatorii; ex cuius valore eoque, qui pro Y est inuentus, obtinebimus accelerationem progressiui motus puncti G

$\omega = \frac{Q}{M}$

$$\omega = \frac{Q}{M} - \frac{\frac{1}{v}Pkk - \frac{1}{v}Vgh\,\mathrm{cos.}\,\theta - Vgh\,\mathrm{sin.}\,\theta + Pgg\,\mathrm{sin.}\,\theta(\mathrm{cos.}\,\theta - \frac{1}{v}\mathrm{sin.}\,\theta)}{M(kk + gg\,\mathrm{cos.}\,\theta(\mathrm{cos.}\,\theta - \frac{1}{v}\mathrm{sin.}\,\theta)}$$

siue:

$$\omega = \frac{Q(kk + gg\,\mathrm{cos.}\,\theta^2 - \frac{1}{v}gg\,\mathrm{sin.}\,\theta\,\mathrm{cos.}\,\theta) - P(\frac{1}{v}kk + \frac{1}{vv}gg\,\mathrm{sin.}\,\theta^2 - gg\,\mathrm{sin.}\,\theta\,\mathrm{cos.}\,\theta) - Vgh(\mathrm{sin}\,\theta + \frac{1}{v}\mathrm{cos.}\,\theta)}{M(kk + gg\,\mathrm{cos.}\,\theta^2 - \frac{1}{v}gg\,\mathrm{sin.}\,\theta.\,\mathrm{cos.}\,\theta)}$$

cuius numerator est vtique affirmatiuus, si fuerit, vt ante notaueramus,

$$Pgg\,\mathrm{sin.}\,\theta\,\mathrm{cos.}\,\theta + Q(kk + gg\,\mathrm{cos.}\,\theta^2) - Vgh\,\mathrm{sin.}\,\theta > \frac{1}{v}(Qgg\,\mathrm{sin.}\,\theta\,\mathrm{cos.}\,\theta + P(kk + gg\,\mathrm{sin.}\,\theta^2) + Vgh\,\mathrm{cos.}\,\theta)$$

43. Hinc iam rectius conditiones agnoscimus, sub quibus quartus casus in motu corporis locum habebit: hae enim conditiones sunt

$$\frac{1}{v}Pg\,\mathrm{sin.}\,\theta + Vh > Pg\,\mathrm{cos.}\,\theta \quad \text{et}$$

$$Pgg\,\mathrm{sin.}\,\theta\,\mathrm{cos.}\,\theta + Q(kk + gg\,\mathrm{cos.}\,\theta^2) - Vgh\,\mathrm{sin.}\,\theta > \frac{1}{v}(Qgg\,\mathrm{sin.}\,\theta\,\mathrm{cos.}\,\theta + P(kk + gg\,\mathrm{sin.}\,\theta^2) + Vgh\,\mathrm{cos.}\,\theta)$$

vbi prior conditio aliquantum discrepat a superiori. Interim tamen nulla est repugnantia; cum enim ante viderimus casum quartum postulare $Q > \frac{1}{v}P + M.8(\mathrm{sin.}\,\theta + \frac{1}{v}\mathrm{cos.}\,\theta)$ erit vtique $\frac{1}{v}P < Q$, ideoque multo magis prima conditio ibi allata, vt sit

$$Qg\,\mathrm{sin.}\,\theta + Vh > Pg\,\mathrm{cos.}\,\theta$$

hic locum habebit. Videmus ergo has conditiones latius patere, quam praecedentes, casumque quartum euenire, dummodo sit

$$\frac{1}{v}Pg\,\mathrm{sin.}\,\theta + Vh > Pg\,\mathrm{cos.}\,\theta$$

adiuncta altera conditione, quae vtrinque est eadem.

44. Si fuerit $\frac{1}{v}Pg\,\mathrm{sin.}\,\theta + Vh = Pg\,\mathrm{cos.}\,\theta$ motus gyratorius euanescet, corpusque solo motu progressiuo

et reptorio super plano promouebitur, siquidem altera conditio locum obtineat, quae ob $Vb = Pg \cos\theta - \frac{1}{\nu} Pg \sin\theta$, abit in hanc:

$$Q(kk + gg \cos\theta^2) + \frac{1}{\nu} Pgg \sin\theta^2 > \frac{1}{\nu}(Qgg \sin\theta \cos\theta + P(kk+gg) - \frac{1}{\nu} Pgg \sin\theta \cos\theta$$

seu diuidendo per $kk - gg \cos\theta + \frac{1}{\nu} gg \sin\theta \cos\theta$ in hanc:

$$Q > \frac{1}{\nu} P$$

Sin autem fuerit $\frac{1}{\nu} Pg \sin\theta + Vb < Pg \cos\theta$, nihilo minus motus gyratorius manebit nullus; quia corpus in plagam contrariam gyrari nequit, eritque idcirco $\vartheta = 0$, vnde fit $Y = P$, et vt corpus simul prorepat, necesse est $Q > \frac{1}{2} Y$, hoc est, vt fit $Q > \frac{1}{\nu} P$. Pro casu ergo tertio haec habemus criteria:

$$Q > \frac{1}{\nu} P \text{ et}$$

$$\frac{1}{\nu} Pg \sin\theta + Vb > Pg \cos\theta;$$

ac si manente hac posteriori conditione fit $Q > {}^{1}P$, corpus plane quiescet, sicque habemus etiam conditiones casus primi.

45. His quatuor casibus adiungi potest quintus, quo extremitas basis G, dum corpus circa eam in plagam BCD gyratur, regreditur versus E, cuius casus conditiones ex quarto deriuantur, ponendo Z negatiuum, seu $Z = -\frac{1}{\nu} Y$ simulque accelerationem ω negatiuam. Positis ergo ν et ω negatiuis, habebimus pro hoc casu quinto has conditiones:

$$\vartheta = \frac{g(Vb - Pg(\cos\theta + \frac{1}{\nu}\sin\theta))}{M(kk + gg\cos\theta(\cos\theta + \frac{1}{\nu}\sin\theta))}$$

$\omega =$

$$\omega = \frac{Vgb(\sin.\theta - \frac{1}{\nu}\cos.\theta) - Q(kk + gg\cos.\theta^2 + \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta\cos.\theta) - P(\frac{1}{\nu}kk + \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta^2 + gg\sin.\theta\cos.\theta)}{M(kk + gg\cos.\theta(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta))}$$

Casus ergo quintus locum habet sub his conditionibus:

$$Vb - \frac{1}{\nu}Pg\sin.\theta > Pg\cos.\theta \text{ et}$$

$$Vgb\sin.\theta - Q(kk + gg\cos.\theta^2) - Pgg\sin.\theta\cos.\theta > \frac{1}{\nu}(Vgb\cos.\theta + kk + gg\sin.\theta^2) + Qgg\sin.\theta\cos.\theta)$$

46. Cum ergo pro hoc casu esse debeat $Vb > Pg(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta)$ si ponamus $Vb = Pg(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta) + Ig$, altera conditio requirit vt sit:

$$Q + \frac{1}{\nu}P < \frac{Igg(\sin.\theta - \frac{1}{\nu}\cos.\theta)}{kk + gg\cos.\theta(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta)}$$

seu $Q + \frac{1}{\nu}P < M\,\delta\,(\sin.\theta - \frac{1}{\nu}\cos.\theta)$.
Quia ergo $Q + \frac{1}{\nu}P$ semper est quantitas positiua per hypothesin, hic casus plane subsistere nequit sine motu gyratorio, ideoque necesse est, vt sit $\sin.\theta > \frac{1}{\nu}\cos.\theta$, praeterea vero oportet esse

$$Vb > Pg(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta)$$

nec non $Vb > Pg\cos.\theta + Q(kk + gg\cos.\theta^2) : g\sin.\theta$
Vnde perspicuum est hunc casum existere non posse, nisi adsit momentum Vb corpus circa centrum grauitatis gyrari tendens in plagam BCD. Hoc itaque pacto adepti sumus criteria, ex quibus dignosci potest, ad quemnam casum corporis cuiuscunque propositi status referri debeat; atque hinc simul prima acceleratio definietur.

47. Quae ergo hactenus inuenimus huc redeunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q < \tfrac{1}{\nu} P \text{ et}$$
$$Vh + Qg \sin.\theta < Pg \cos.\theta$$

CONDITIONES CASVS II.

$$Vh + Qg \sin.\theta > Pg \cos.\theta \text{ et}$$
$$Pgg \sin.\theta \cos.\theta + Q(kk + gg \cos.\theta^2) - Vgh \sin.\theta < \tfrac{1}{\nu}$$
$$(Qgg \sin.\theta \cos.\theta + P(kk + gg \sin.\theta^2) + Vgh \cos.\theta).$$

CONDITIONES CASVS III.

$$Q > \tfrac{1}{\nu} P \text{ et}$$
$$Vh + \tfrac{1}{\nu} Pg \sin.\theta < Pg \cos.\theta$$

CONDITIONES CASVS IV.

$$Vh + \tfrac{1}{\nu} Pg \sin.\theta > Pg \cos.\theta$$
$$Pgg \sin.\theta \cos.\theta + Q(kk + gg \cos.\theta^2) - Vgh \sin.\theta > \tfrac{1}{\nu}$$
$$(Qgg \sin.\theta \cos.\theta + P(kk + gg \sin.\theta^2) + Vgh \cos.\theta)$$

CONDITIONES CASVS V.

$$Vh - \tfrac{1}{\nu} Pg \sin.\theta > Pg \cos.\theta$$
$$Vgh \sin.\theta - Q(kk + gg \cos.\theta^2) - Pgg \sin.\theta \cos.\theta > \tfrac{1}{\nu}$$
$$(\gamma gh \cos.\theta + P(kk + gg \sin.\theta^2) + Qgg \sin.\theta \cos.\theta).$$

48. Quod si ergo, vti in solidis rotundis vsu venit, angulus θ fuerit rectus, conditiones horum quinque casuum erunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q > \tfrac{1}{\nu} P \text{ et } Vh + Qg < 0$$

CON-

CONDITIONES CASVS II.

$$Vh + Qg > o \text{ et } Qkk - Vgh < \tfrac{1}{\nu}P(kk + gg)$$

CONDITIONES CASVS III.

$$Q > \tfrac{1}{\nu}P \text{ et } Vh + \tfrac{1}{\nu}Pg < o$$

CONDITIONES CASVS IV.

$$Vk + \tfrac{1}{\nu}Pg > o \text{ et } Qkk - Vgh > \tfrac{1}{\nu}P(kk + gg)$$

CONDITIONES CASVS V.

$$Vh - \tfrac{1}{\nu}Pg > o \text{ et } Vgk - Qkk > \tfrac{1}{\nu}P(kk + gg).$$

49. In his formulis nullam habuimus rationem illius alterius resistentiae, quae ob plani villositatem ad frictionem accedit, neque vero in genere pro qualibet corporis figura eam commode in calculum inducere licet, propterea quod eius directio, dum ad corporis superficiem in singulis punctis contactus est normalis, non certam positionem ad centrum grauitatis tenet. In corporibus autem rotundis, qualia hic potissimum contemplamur, directionem huius resistentiae per centrum grauitatis transire, motuique contrariam esse vidimus. Cum igitur ea ad pressionem etiam constantem teneat rationem, pressio vero his casibus, quibus θ est angulus rectus, semper fit $= P$, si hanc resistentiam ponamus $= \frac{1}{\mu}P$, in formulis §. praeced. loco vis Q scribi oportet $Q - \frac{1}{\mu}P$. Vnde colligimus tale corpus ob istam resistentiam in quiete esse mansurum, si fit $Q < (\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu})P$ et $Vh + (Q - \frac{1}{\mu}P)g < o$.

50. Cum igitur effectus huius resistentiae calculum non turbet, dum eam in ipsa vi sollicitante Q com-

comprehendere licet, ea neglecta videamus, quomodo corpus quodcunque graue plano inclinato incumbens, se habere debeat. Iaceat ergo corpus ABCD super plano inclinato EF, cuius ad horizontem MF inclinatio sit angulus $MFE = \eta$. Sit massa corporis $= M$, centrum grauitatis O, momentumque inertiae $= Mkk$; incumbat primum corpus basi sua GH, a cuius extremitate inferiori G recta ad O ducta, sit $GO = g$. Quia hoc corpus a sola grauitate sollicitari assumitur, momentum ad gyrationem tendens adest nullum, seu $Vh = 0$; ex vi autem grauitatis M secundum verticalem OP deorsum vrgente, orietur per resolutionem

Tab. III. Fig. 6.

vis normalis secundum OA seu $P = M \cos. \eta$

vis tangentialis secundum OD seu $Q = M \sin. \eta$

Praeterea notasse iuuabit esse angulum $GON = 90^\circ - \theta - \eta$, vnde si summa angulorum $\theta + \eta$ fuerit recto minor, perpendiculum OP supra basis extremitatem G cadet, contra vero infra.

51. Quoniam ob $V = 0$ casus quintus locum habere nequit, nisi sit angulus θ obtusus, status huius corporis ad vnum horum quatuor casuum referetur.

Primo corpus in quiete permanebit, si fuerit

$\sin. \eta < \frac{1}{\nu} \cos. \eta$ et $\sin. \eta \sin. \theta < \cos. \eta \cos \theta$ seu $\eta + \theta < 90^\circ$

vbi quantitas frictionis ad pressionem rationem habere sumitur, vt 1 ad ν, ita vt per experimenta valor ipsius ν sit quasi 3 vel quatuor. Quare vt corpus plani inclinatione non obstante in quiete perseueret, duae conditiones requiruntur; altera vt rectae verticalis OP cum plano inclinato EF intersectio N supra G cadat: altera vero vt sit $\tan g. \eta < \frac{1}{\nu}$. Si ergo $\nu = 3$ vi huius conditioditionis angulus MFE minor esse debet, quam $18^\circ, 26'$; in hypothesi autem $\nu = 4$ minor quam $14^\circ, 2'$. Ac nisi hae duae conditiones simul habeant locum, corpus immotum manere nequit.

52. *Secundus casus vero existet, seu corpus circa punctum G volui incipiet, ita vt primo saltem instanti punctum G in quiete perseueret; si fuerit:*

$$\sin.\eta \sin.\theta > \cos.\eta \cos.\theta, \text{ seu } \eta + \theta > 90^\circ, \text{ et}$$

$$gg \cos.\eta \sin.\theta \cos.\theta + \sin.\eta(kk + gg \cos.\theta^2) < \tfrac{1}{\nu}(gg \sin.\eta \sin.\theta \cos.\theta + \cos.\eta(kk + gg \sin.\theta^2))$$

ex qua posteriori conditione angulus inclinationis η ita limitatur, vt esse debeat:

$$\text{tang.}\eta < \frac{kk + gg \sin.\theta^2 - \nu gg \sin.\theta \cos.\theta}{\nu(kk + gg \cos.\theta^2) - gg \sin.\theta \cos.\theta}$$

Primo ergo punctum N necessario infra G cadere debet; haec vero sola conditio non sufficit, sed necesse est, vt insuper plani inclinatio minor sit limite assignato. Vnde sequitur, quia per conditionem priorem $\text{tang.}\eta > \frac{\nu \cos.\theta}{\sin.\theta}$, illum limitem hoc esse debere maiorem, quod fieri nequit, nisi sit $\sin.\theta > \nu \cos.\theta$

53. *Tertius vero casus existet, seu corpus rependo super plano inclinato descendet sine vllo motu gyratorio, si fuerit:*

$$\sin.\eta > \tfrac{1}{\nu} \cos.\eta \text{ et } \tfrac{1}{\nu} \sin.\theta < \cos.\theta, \text{ seu } \cos.\theta > \tfrac{1}{\nu} \sin.\theta$$

quae conditiones eo redeunt, vt sit:

$$\text{tang}\,\eta > \tfrac{1}{\nu} \text{ et } \cot.\theta > \tfrac{1}{\nu}, \text{ seu } \text{tang.}(90^\circ - \theta) > \tfrac{1}{\nu}$$

Si igitur $\nu = 3$, necesse est, vt sit angulus MFE maior, quam $18^\circ, 26'$, et angulus AGO minor, quam $71^\circ, 34$.

Sin autem ſit $\nu = 4$, hic caſus locum habet, ſi fuerit angulus MFE maior, quam $14^\circ, 2'$ et angulus AGO minor, quam $75^\circ, 58'$. Neque vero hinc concludere licet, ſi planum EF ſit verticale, ſtatum corporis vel non ad hunc caſum pertinere, etiamſi ſit $\text{coſ.}\,\theta < \frac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta$, vel ad caſum ſecundum eſſe referendum: Cum enim preſſio P euaneſcat, ob $V = 0$ ſemper ſit $\text{ȣ} = 0$, ideoque nullus aderit motus gyratorius, qui caſus probe eſt notandus, dum altera conditio illa $\text{coſ.}\,\theta > \frac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta$ eatenus tantum valet, quatenus P non eſt $= 0$; proprie enim requiritur, vt $P(\frac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\theta)$ non ſit nihilo maius.

54. *Quartus denique caſus exiſtet, ſeu corpus tam rependo, quam voluendo ſimul, ſuper plano inclinato deſcendet, ſi fuerit:*

$$P(\tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\theta) > 0, \text{ ſeu } \text{coſ.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta \text{ niſi } P = 0 \text{ et}$$

$$gg\,\text{coſ}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\eta(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) > \tfrac{1}{\nu}(gg\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{coſ.}\,\eta(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2))$$

$$\text{ſeu tang.}\,\eta > \frac{kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2 - \nu gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}{\nu(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}$$

Hoc ergo caſu dabitur et motus progreſſiuus puncti G cum acceleratione ω, et motus gyratorius cum acceleratione ȣ, atque vtraque acceleratio erit:

$$\text{ȣ} = \frac{gg(\frac{1}{\nu}\,\text{ſin}\,\theta - \text{coſ.}\,\theta)\,\text{coſ.}\,\eta}{kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta(\text{coſ.}\,\theta - \frac{1}{\nu}\,\text{ſin}\,\theta)}$$

$$\omega = \frac{\text{ſin.}\,\eta(kk + gg\,\text{coſ}\,\theta^2 - \frac{1}{\nu}gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta) - \text{coſ.}\,\eta(\frac{1}{\nu}kk + \frac{1}{\nu}gg\,\text{ſin.}\,\theta^2 - gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta)}{kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2 - \frac{1}{\nu}gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}$$

Statim vero atque motus gyratorius incipit, angulus θ augetur, ideoque hae accelerationes mutantur.

55. Quia

55. Quia igitur pro casu quarto exploratum habemus, quomodo motus sit incepturus, idem pro reliquis casibus videamus. Ac pro primo quidem casu, vbi corpus in quiete permanet, haec quaestio cessat, pro casu autem secundo, vbi solus datur motus gyratorius sine reptorio, eius acceleratio initialis est

$$\varkappa = \frac{gg(\sin.\eta\sin.\theta - \cos.\eta\cos.\theta)}{kk+gg} = \frac{-gg\cos.(\eta+\theta)}{kk+gg}$$

Pro casu autem tertio, vbi solus motus reptorius adest, sine vllo gyratorio, eius acceleratio erit super plano inclinato:

$$\omega = \frac{Q-\frac{g}{\nu}P}{M} = \sin.\eta - \frac{g}{\nu}\cos.\eta$$

Neque vero sufficit, vt hae accelerationes sint positiuae, sed insuper opus est, vt sit

pro casu secundo:

$$gg\cos.\eta\sin.\theta\cos.\theta + \sin.\eta(kk+gg\cos.\theta^2) < \frac{1}{\nu}(gg\sin.\eta\sin.\theta\cos.\theta + \cos.\eta(kk+gg\sin.\theta^2))$$

et pro casu tertio:

$$\frac{g}{\nu}\sin.\theta < \cos.\theta,\ \text{seu}\ \tang.\theta < \nu.$$

56. Hinc ergo, si detur corpus quodcunque plano inclinato incumbens, statim definiri potest casus, ad quem status corporis sit referendus, simulque prima acceleratio, siquidem detur motus. Quae quo clarius perspiciantur, ponamus, primum planum esse horizontale, seu angulum $\eta=0$, atque corpus in quiete permanebit, dummodo fuerit angulus $AGO=\theta$ recto minor, qui est casus primus. Sin autem hic angulus θ

 fuerit

fuerit obtusus, eiusque cosinus negatiuus, status corporis ad casum secundum pertinebit, quippe pro quo ob $\eta = 0$ conditiones sunt:

$$\theta > 90^\circ \text{ et } gg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}(kk + gg\,\text{sin.}\,\theta^2)$$

quae ambae ob cos. θ negatiuum locum habent. Dabitur ergo motus gyratorius circa punctum G, cuius, in distantia $= g$, acceleratio erit $\upsilon = -\frac{gg\,\text{cos.}\,\theta}{kk+gg}$. Tertius autem casus, qui postulat sin. $\eta > \frac{1}{\nu}$ cos. η, hic nunquam existere potest, neque etiam quartus; quia enim hic postulat, vt sit:

$$\text{cos.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}\,\text{sin.}\,\theta \text{ et } gg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}(kk + gg\,\text{sin.}\,\theta^2)$$

hae duae conditiones inter se manifesto pugnant.

57. Si planum sit verticale, ideoque sin. $\eta = 1$ et cos. $\eta = 0$, casus primus nunquam locum habere potest, quia conditio prior sin. $\eta < \frac{1}{\nu}$ cos. η palam aduersatur. Pro casu autem secundo requiruntur hae conditiones: $\theta > 0$ et $kk + gg\,\text{cos.}\,\theta^2 < \frac{1}{\nu}\,gg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta$, qui ergo locum habere poterit, si fuerit $kk < gg\,\text{cos.}\,\theta(\frac{1}{\nu}\,\text{sin}\,\theta - \text{cos.}\,\theta)$. Necesse ergo est, vt sit tang. $\theta > \nu$, et acceleratio motus gyratorii in distantia g erit $\upsilon = \frac{gg\,\text{sin.}\,\theta}{kk+gg}$.

Sin autem fuerit tang. $\theta < \nu$, casus tertius locum habebit, corpusque solo motu reptorio descendet acceleratione $\omega = 1$, corpus scilicet libere descendet; ad quem casum etiam quartus redibit, cum fiat $\upsilon = 0$ et $\omega = 1$. Qui cum nunquam non locum inueniat, casum secundum plane excludere videtur: verum notandum est, ad casum secundum opus esse, vt punctum G primo saltem instanti detineatur; statim enim ac punctum O motum gyratorium concipit, in G dabitur pressio, vnde frictio motui reptorio impediendo sufficiens nascetur, si quidem fuerit $kk+gg\cos.\theta^2 < \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta\cos.\theta$, ita vt hoc casu duplex motus sit possibilis.

58. Tribuamus nunc iterum plano EF inclinationem quamcunque η, corpus autem ei incumbens sit rotundum, seu angulus θ rectus; atque manifestum est, casum primum locum habere non posse, nisi quatenus resistentia a villositate plani orta, motui se opponit, cuius autem in superioribus formulis nullam habuimus rationem. Secundus autem casus locum inueniet, corpusque sine attritu prouolutione perfecta descendet, dum sit: $\eta < o$ et $kk\sin.\eta < \frac{1}{\nu}(kk+gg)\cos.\eta$, seu $\tang.\eta < \frac{kk+gg}{\nu kk}$; atque acceleratio motus gyratorii circa centrum grauitatis in distantia $OG=g$, cui acceleratio motus progressiui centri grauitatis est aequalis; erit $\vartheta = \frac{gg\sin.\eta}{gg+kk}$. Casus tertius nunquam vsu venire potest: quartus vero, si sit $\tang.\eta > \frac{kk+gg}{\nu kk}$; tum vero erit pro vtraque acceleratione:

$$\vartheta = \frac{gg\cos.\eta}{\nu kk} \text{ et } \omega = \sin.\eta - \frac{(kk+gg)\cos.\eta}{\nu kk}.$$

Quodsi $\tang.\eta = \frac{kk+gg}{\nu kk}$, status intermedius resultat, qui autem ob $\omega = o$ ad secundum adhuc est referendus.

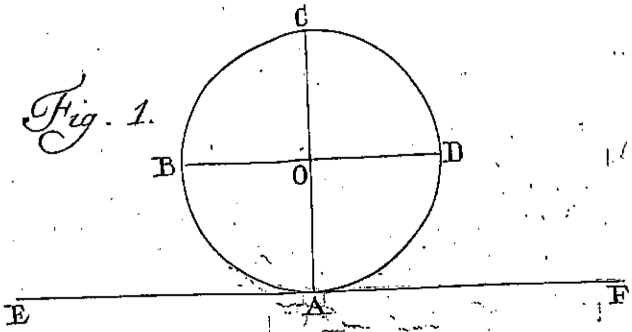
59. Ex his ergo, quae exposuimus, intelligitur, quid vires quaecunque valeant, quae corpus quiescens, et plano cuicunque incumbens sollicitent; simulque motus, qui ab iis efficitur, prima acceleratio definiri potest. Quodsi vero corpus iam est in motu, duplex eius status est perpendendus, prouti motus sit sine attritu, vel cum attritu est coniunctus. Si nullus adest

attritus, seu corpus prouolutione perfecta mouetur, vires eundem praestabunt effectum, ac si corpus quiesceret; indeque ergo patebit, an attritus generetur, nec ne? sin autem iam attritus adsit, tum vires sollicitantes plenum exerent effectum, iis autem adiungi oportet totam frictionem ex attritu natam: vbi notandum est, frictionem semper eiusdem fore magnitudinis, siue attritus fuerit maior, siue minor, secus ac putaueram in dissertatione supra memorata.

60. Sic igitur vera principia, secundum quae effectus frictionis in motu corporum plano incumbentium diiudicari debet, mihi equidem tradidisse videor; vbi hoc inprimis notatu dignum, et quasi paradoxum, occurrit, quod, nisi iam detur attritus, effectus virium sollicitantium non ex ipsa earum quantitate aestimari debeat, vti in omnibus reliquis motuum generibus fieri oportet, sed quod ipsa frictio effectum virium moderetur: vel quod eodem redit, etiamsi ob deficientem attritum nulla adsit frictio, tamen effectus virium sollicitantium ab ea afficitur, atque eo quidem modo, quem in applicatione frictionis ad quaternos casus ante stabilitos ostendi. Deinde non minus est paradoxon, quod dummodo adfuerit attritus, siue is fuerit maior, siue minor, frictio eundem semper effectum exerat; atque ex his principiis omnia phaenomena motus corporum a frictione oriunda expedire licet.

PRIN-

Fig. 1.



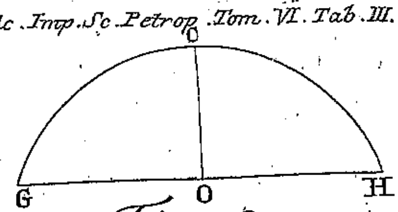


Fig. 2.

Fig. 4

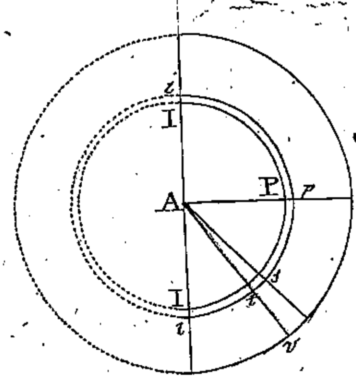


Fig. 3.

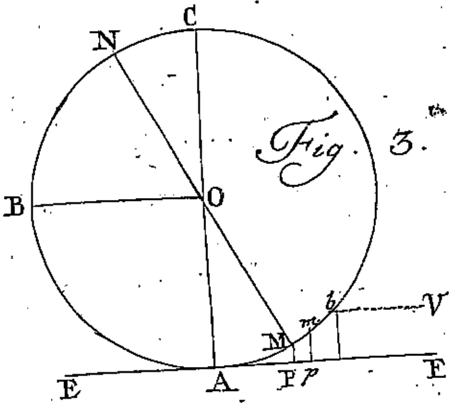


Fig. 5.

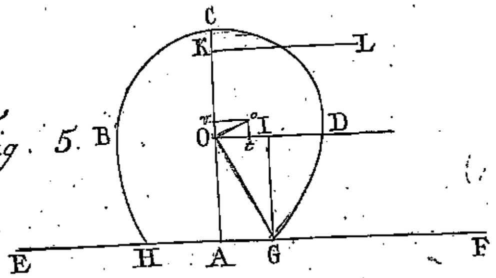


Fig. 6.

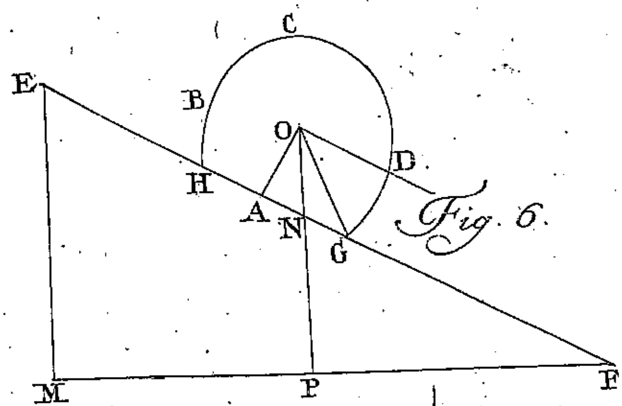


Fig.

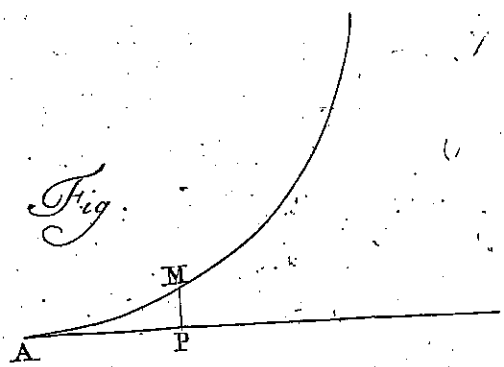


Fig.