1761

Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum, quae vulgo nonnisi solutiones speciales admittere videntur

Leonhard Euler

SOLVTIO GENERALIS QVORVNDAM PROBLEMATVM DIOPHANTAEORVM QVAE VULGO NONNISI SOLVTIONES SPECIALES ADMITTERE VIDENTVR.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Analysis Diophantaea, quae in problematibus indeterminatis per numeros rationales vel etiam integros soluendis versatur, duplicis generis problemata tractare solet; quorum discrimen in ratione solutionis maxime est positum. Alia enim problemata ita sunt comparata, vt solutiones generales exhiberi queant, quae omnes plane numeros satisfacientes in se complectuntur: alia vero nonnisi solutiones particulares admittunt, vel saltem per methodos cognitas nonnisi tales solutiones eruere licet, ita vt praeter numeros, qui forte reperiuntur, infiniti alii problemati satisfacientes existant, qui in solutione inuenta non contineantur. Vbi quidem in genere notari conuenit, prioris ordinis problemata multo facilius resolui, quam ea, quae ad alterum ordinem referuntur, quippe quae plerumque singularem sagacitatem cum eximiis artificiis coniunctam requirunt, in quibus maxima vis huius Analysis cernitur. Quare

 ob

ob hanc causam problemata Diophantaea in has duas classes distribui debere videntur.

2. Diophantus quidem ipse omnium quaestionum, quas tractat, solutiones tantum specialissimas tradit, numerosque, quibus vnica solutio continetur, plerumque indicasse est contentus. Neque vero eius methodus ad has solutiones specialissimas adstricta est putanda; quia enim tunc temporis vsus litterarum, quibus numeri indefiniti designentur, nondum erat receptus, huiusmodi solutiones latius patentes, quales nunc quidem exhiberi solent, ab ipso expectari non poterant; interim tamen ipsae methodi, quibus ad quaelibet problemata soluenda vtitur, aeque late patent, quam eae, quae hodie sunt in vsu: quin etiam fateri cogimur, vix vllam in hoc analyseos genere adhuc esse inuentam, cuius vestigia satis luculenta non iam in ipso Diophanto deprehendantur. Non obstante igitur hac apparente particularitate solutionum Diophantaearum, disparitas problematum supra memorata, in ipso iam Diophanto manifesto cernitur, siquidem ad methodos eius respiciamus: quarum aliae ita sunt comparatae, vt omnes omnino solutiones, quae problemati satisfacere possunt, suppeditare queant, aliae vero nonnullas tantum solutiones praebeant, vel etiamsi earum numerus in infinitum augeri possit, tamen in iis innumerabiles aliae, quae aeque satisfaciunt, non contineantur.

3. Exemplum problematis, cuius solutio generalis exhiberi potest, praebet quaestio vulgata, qua quaeruntur duo numeri quadrati, quorum summa sit quadratum;

tum; siue sumtis x et y pro radicibus istorum quadratorum, vt $xx+yy$ sit numerus quadratus. Sumtis enim pro lubitu tribus numeris a, p et q, haec habebitur solutio generalis: $y = 2apq$, et $x = a(pp-qq)$, ex his namque valoribus prodit $\sqrt{(xx+yy)} = a(pp+qq)$. De qua solutione tenendum est, nullos plane dari numeros pro x et y substituendos, quorum quadratorum summa fiat quadratum, qui non simul in formulis datis contineantur. Atque haec generalitas non solum inde perspicitur, quod pro tribus litteris a, p, et q numeros quoscunque accipere liceat, vnde iam infinities infinita solutionum multitudo obtinetur; sed etiam ipsa harum formularum inuestigatio euincit, nullam plane dari solutionem, quae non in iis comprehendatur. At vero hoc posterius criterium longe certius est priori, cum saepe multae litterae indefinitae in solutionem ingredi queant, neque tamen solutio propterea reddatur generalis.

4. Inuestigationis autem ratio in hoc exemplo nobis solutionis vniuersalitatem plane ostendit: cum enim $\sqrt{(xx+yy)}$ debeat esse numerus rationalis, is certe erit maior quam x; statuatur ergo $= x+z$. Tum vero quaecunque sit ratio ipsius y ad z, poni poterit $z = \frac{q}{p}y$, neque hoc modo generalitas positionis limitatur. Posito autem $\sqrt{(xx+yy)} = x+\frac{q}{p}y$ sumtis quadratis habebimus: $xx+yy = xx+\frac{2q}{p}xy+\frac{qq}{pp}yy$. Deleto vtrinque termino xx, ac residuo per y diuiso, prodibit,

$$y = \frac{2q}{p}x+\frac{qq}{pp}y \text{ seu } (pp-qq)y = 2pqx.$$

 Erit

Erit ergo $\frac{x}{y} = \frac{pp-qq}{2pq}$, hincque x et y sunt vel aeque multipla, vel aeque submultipla, numerorum $pp-qq$ et $2pq$. Sumta ergo a pro indice generali siue multiplorum, siue submultiplorum, nanciscemur

$$y = 2apq \text{ et } x = a(pp-qq)$$

et ob $z = \frac{q}{p}y = 2aqq$ erit $x+z = \sqrt{(xx+yy)} = a(pp+qq)$.

5. Problematis autem, cuius solutio per methodos cognitas generalis exhiberi nequit, exemplum esto quaestio de inueniendis tribus cubis quorum summa sit cubus: siue quaerendi sint tres numeri x, y et z ita, vt sit $x^3+y^3+z^3 =$ cubo. Quod problema cum ab ipso Diophanto, tum a recentioribus, pluribus modis extat solutum, atque ita quidem, vt infinita multitudo solutionum sit exhibita; neque tamen vlla solutio tam late patet, vt omnes plane casus huic quaestioni satisfacientes in se complectatur. In hoc problemate etiam vel vnus cubus x^3, vel duo x^3+y^3, tanquam dati spectari possunt, vnde vel duos reliquos cubos, vel vnicum quaeri oportet, vt summa fiat cubus: quomodocunque autem solutio instituatur, tamen maxime particularis euadit.

6. Quod quo clarius perspiciatur, solutiones dari solitas hic breuiter commemoremus. Sint igitur primo dati duo cubi a^3 et b^3, tertiumque x^3 inueniri oporteat, vt omnium trium summa $a^3+b^3+x^3$ denuo fiat cubus: Manifestum iam quidem est, radicem huius cubi maiorem fore quam x, sed etiamsi statuatur $= x+v$, tamen aequatio quadratica pro inueniendo x prodit, sicque

ſicque difficultas non diminuitur. Poni igitur ſolet $x=p-b$, vt ſumma trium cuborum fiat:

$$a^3+3bbp-3bpp+p^3=\text{Cubo}=v^3$$

atque hac quidem poſitione amplitudo ſolutionis non reſtringitur. Porro autem eiusmodi cubus aſſumi debet, vt incognita p per aequationem ſimplicem; ideoque rationaliter exhiberi queat. Manifeſtum autem eſt hoc duplici modo fieri poſſe: primo enim ſumto $v=a+p$, fiet

$$a^3+3bbp-3bpp+p^3=a^3+3aap+3app+p^3$$

vbi cum termini a^3 et p^3 ſe deſtruant, reliquum per $3p$ diuiſum dat:

$$bb-bp=aa+ap, \text{ ideoque } p=\frac{bb-aa}{a+b}=b-a$$

vnde fit $x=p-b=-a$, quo caſu vtique fit:

$$a^3+b^3+x^3=a^3+b^3-a^3=b^3=\text{cubo}$$

7. Hanc autem ſolutionem maxime particularem eſſe, ex aſſumtione valoris $v=a+p$ euidens eſt, cum vbique fieri poſſit, vt quantitas

$a^3+3bbp-3bpp+p^3$, ſit cubus, cuius radix non ſit $a+p$,

ita vt hac reſtrictione ſolutio maxime ſit limitata, vnde factum eſt, vt etiam vnicum valorem pro p ac proinde pro x exhibuerit, qui adeo ne ſolutionem quidem idoneam ſuppeditaſſe eſt cenſendus, propterea quod inuenimus $x=-a$, qui caſus tam eſt obuius ſua ſponte, vt ne pro ſolutione quidem admitti queat. Pro v igitur alius valor fingi ſolet, talis tamen, vt inventio

ventio ipsius p ad aequationem simplicem perducat, quod vsu venit ponendo $v = a + \frac{bb}{aa}p$; fiet enim:

$$a^3 + 3bbp - 3bpp + p^3 = a^3 + 3bbp + \frac{3b^4}{a^3}pp + \frac{b^6}{a^6}p^3$$

quae vtrinque deletis terminis $a^3 + 3bbp$ per pp divisa dat:

$$-3b + p = \frac{3b^4}{a^3} + \frac{b^6}{a^6}p \text{ seu } p = \frac{3a^6 + 3a^3b^4}{a^6 - b^6}.$$

8. Cum igitur hinc inuenerimus $p = \frac{3a^3b(a^3+b^3)}{a^6-b^6} = \frac{3a^3b}{a^3-b^3}$, erit $x = p - b = \frac{2a^3b+b^4}{a^3-b^3} = \frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}$, quae est radix tertii cubi ad duos datos $a^3 + b^3$ addendi, vt summa fiat cubus. Erit autem summae radix cubica per hypothesin $= v = a + \frac{bb}{aa}p = a + \frac{3ab^3}{a^3-b^3}$, siue $v = \frac{a^4+2ab^3}{a^3-b^3} = \frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}$. Quicunque ergo numeri pro a et b fuerint assumti, hinc habebuntur tres cubi, quorum summa est cubus. Hi scilicet erunt:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Verum et hanc solutionem maxime esse specialem ex ipsa inuestigatione perspicuum est, cum plane pro arbitrio nostro radicem trium cuborum finxerimus $v = a + \frac{bb}{aa}p$, cum sine dubio infinitos quoque alios valores recipere possit.

9. Porro autem datis duobus cubis vnicus reperitur tertius cubus, qui cum iis coniunctus producat cubum; manifestum autem est, infinitos huiusmodi dari cubos. Si enim sit $a = 4$ et $b = 3$, radix tertii cubi hinc prodit

$x = \frac{3(2.64+27)}{64-27} = \frac{465}{37}$, et $v = \frac{472}{37}$, ita vt sit

$$4^3 + 3^3 + \left(\frac{465}{37}\right)^3 = \left(\frac{472}{37}\right)^3.$$

Noui-

Nouimus autem cubum quinarii ad hos cubos $4^3 + 3^3$ additum quoque producere cubum ſcilicet ſenarii, ſeu eſſe $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, qui tamen caſus in hac ſolutione non continetur. Quare ſi ad hoc problema ſoluendum, vt ſit $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, quis dicat ſumi debere:

$$x = a;\ y = b;\ \text{et}\ z = \frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}$$

tumque fore $v = \frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}$, hae formulae quidem ſatisfaciunt, ſed etiamſi, ob duos numeros a et b, arbitrio noſtro relictos, infinities infiniti cuborum terniones hinc exhiberi poſſint, quorum ſumma faciat cubum, tamen infiniti alii exiſtunt cuborum terniones idem praeſtantes, qui in iſtis formulis non ſunt contenti; veluti hic caſus $x = 3$, $y = 4$ et $z = 5$, pro quo fit $v = 6$.

10. Latius quidem patens reperitur ſolutio, ſi vnicus tantum trium cuborum quaſi datus aſſumatur, ita vt fieri oporteat

$$a^3 + x^3 + y^3 = v^3.$$

Ponatur hunc in finem $x = pu + r$ et $y = qu - r$, qua quidem poſitione nulla reſtrictio inducitur, fietque

$$a^3 + 3rr(p+q)u + 3r(pp-qq)uu + (p^3 + q^3)u^3 = v^3.$$

Iam vt quantitas u hinc rationaliter definiri queat, fingatur $v = a + \frac{rr}{aa}(p+q)u$, qua poſitione vtique ſolutio iam vehementer limitatur: ex ea autem obtinebitur:

$$v^3 = a^3 + 3rr(p+q)u + \frac{3r^4}{a^3}(p+q)^2uu + \frac{r^6}{a^6}(p+q)^3u^3.$$

Deletis ergo vtrinque terminis $a^3 + 3rr(p+q)u$, et reſiduo $(p+q)uu$ diuiſo, emerget haec aequatio:

$$3r(p-q)+(pp-pq+qq)u=\frac{3r^4}{a^3}(p+q)+\frac{r^6}{a^6}(p+q)^2u$$

ex qua eruitur: $u=\frac{3a^3r^4(p+q)-3a^6r(p-q)}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$

11. Valore ergo hoc pro u inuento, erit

$$x=pu+r=\frac{3a^3pr^4(p+q)-a^6r(2pp-2pq-qq)-r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$$

$$y=qu-r=\frac{3a^3qr^4(p+q)-a^6r(pp+2pq-2qq)+r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$$

$$\text{et } v=a+\frac{rr}{aa}(p+q)u=\frac{a^7(pp-pq+qq)-3a^4r^3(pp-qq)+2ar^6(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}.$$

Cum igitur quatuor litterae a, p, q et r pro arbitrio assumi queant, haec solutio vtique infinities latius patet, quam praecedens, vbi duae tantum litterae arbitrio nostro relinquebantur. Verum tamen notandum est, rationem tantum litterarum p et q in computum ingredi, ita vt hinc litterae arbitrariae ad tres tantum reducantur: nihilo vero minus et haec solutio, ob limitationem circa radicem v adhibitam, pro particulari est habenda, ita vt terniones cuborum existant in his formulis non contenti. Solutio autem antecedens ex hac emergit, sumto $p=0$, ita vt haec infinities illa sit generalior.

12. Adhuc generaliorem autem obtinebimus, si nullum trium cuborum tanquam cognitum assumamus, seu in genere quaeramus x, y et z, vt sit $x^3+y^3+z^3=v^3$. In hunc finem ponatur

$$x=pt+u;\ y=-pt+qu,\ \text{et}\ z=t-qu$$

quibus positionibus nihil adhuc limitatur: facta autem substitutione, oritur

$$\begin{aligned} t^3+3ppttu&+3ptuu+u^3=v^3\\ +3ppqttu&-3pqqtuu\\ -3qttu&+3qqtuu. \end{aligned}$$

Iam

Iam fingatur $v = t + u$, vnde quidem maxima limitatio nafcitur, et aequatione per $3tu$ diuifa, reperietur

$$(pp + ppq - q)t + (p - pqq + qq)u = t + u, \text{ feu}$$
$$\frac{t}{u} = \frac{-1 + p + qq - pqq}{1 + q - pp - ppq} : \text{ capi ergo poterit :}$$

$$t = n(-pqq + qq + p - 1) \text{ et } u = n(-ppq - pp + q + 1)$$

vnde elicitur :

$$x = n(-ppqq + pqq - ppq - p + q + 1)$$
$$y = n(p + q - pp + qq - ppq - pqq)$$
$$z = n(+ppqq - pqq + ppq + p - q - 1)$$
$$av = n(-pqq - ppq - pp + qq + p + q).$$

Hinc autem fit $z = -x$ et $v = y$, qui eft cafus per fe obuius.

13. Sequenti autem modo folutio latius patens eruitur: Ponatur

$x = mt + pu$; $y = nt + qu$ et $z = -nt + ru$, eritque

$$x^3 + y^3 + z^3 = m^3t^3 + \left.\begin{matrix} +3mmp \\ +3nnq \\ +3nnr \end{matrix}\right\} ttu + \left.\begin{matrix} +3mpp \\ +3nqq \\ -3nrr \end{matrix}\right\} tuu + \left.\begin{matrix} +p^3 \\ +q^3 \\ +r^3 \end{matrix}\right\} u^3,$$

quae fumma cum debeat effe cubus $= v^3$ ponatur:

$u = mt + \frac{mmp + nn(q + r)}{mm} u$; eritque diuidendo per uu

$$3t(mpp + n(qq - rr)) + u(p^3 + q^3 + r^3) =$$
$$\frac{3t}{m^3}(mmp + nn(q + r))^2 + \frac{u}{m^6}(mnp + nn(q + r))^3,$$

ficque neglecto communi factore, qui ab arbitrio noftro pendet, erit

$$t = m^6(p^3 + q^3 + r^3) - (mmp + nn(q + r))^3$$
$$u = 3m^3(mmp + nn(q + r))^2 - 3m^6(mpp + n(qq - rr)$$

 quae

quae formae ſi denuo per communem factorem $q+r$ diuidantur, prodit

$$t = m^6(qq-qr+rr) - 3m^4nnpp - 3mmn^4p(q+r) - n^6(q+r)^2$$
$$u = -3m^6n(q-r) + 6m^5nnp + 3m^3n^4(q+r).$$

14. Hinc iam pro x, y, z, emergunt ſequentes expreſſiones:

$$x = m^7(qq-qr+rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5nnpp - mn^6(q+r)^2$$
$$y = -m^6n(2qq-2qr-rr) + 6m^5nnpq - 3m^4n^3pp + 3m^3n^4q(q+r) - 3mmn^5p(q+r) - n^7(q+r)$$
$$z = +m^6n(-qq-2qr+2rr) + 6m^5nnpr + 3m^4n^3pp + 3m^3n^4r(q+r) + 3mmn^5p(q+r) + n^7(q+r)^2$$

quorum cuborum ſumma iterum eſt cubus radicem habens v, vt ſit

$$v = m^7(qq-qr+rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5nnpp - 3m^4n^3(qq-rr) + 6m^3n^4p(q+r) + 2mn^6(q+r)^2$$

Hi vero numeri etiam ſequenti modo exhiberi poſſunt:

$$x = +3m^5n^2pp - 3m^6npq + 3m^6npr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ -mn^6 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -m^7 \\ -2mn^6 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ -mn^6 \end{matrix}\right\} rr$$

$$y = -3m^4n^3pp \left.\begin{matrix} +6m^5n^2 \\ -3m^2n^5 \end{matrix}\right\} pq - 3m^2n^5pr \left.\begin{matrix} -2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ -n^7 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} +2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ -2n^7 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^6n \\ -n^7 \end{matrix}\right\} rr$$

$$z = +3m^4n^3pp + 3m^2n^5pq \left.\begin{matrix} +6m^5n^2 \\ +3m^2n^5 \end{matrix}\right\} pr \left.\begin{matrix} -m^6n \\ +n^7 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ +2n^7 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ +n^7 \end{matrix}\right\} rr$$

$$v = 3m^5n^2pp \left.\begin{matrix} -3m^6n \\ +6m^3n^4 \end{matrix}\right\} pq \left.\begin{matrix} +3m^6n \\ +6m^3n^4 \end{matrix}\right\} pr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ -3m^4n^3 \\ +2mn^6 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -m^7 \\ +4mn^6 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ +3m^4n^3 \\ +2mn^6 \end{matrix}\right\} rr$$

Quibus valoribus ſubſtitutis actu fit $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$.

15. Si

15. Si singuli hi numeri insuper per coefficientem indefinitum multiplicentur, hae formulae continebunt 6 litteras ab arbitrio nostro pendentes, quae quidem ad quatuor reducentur, vnde eae latissime patere, omnesque omnino casus in se complecti, videntur, verum tamen ex ipsa solutione, qua ipsi v valorem a litteris x, y et z pendentem tribuimus, perspicitur has formulas non nisi pro particularibus haberi posse. Ceterum quoque per alias positiones aliae eruuntur solutiones, quae pro certis casibus magis sint futurae idoneae; tum etiam methodus habetur ex inuenta solutione quacunque particulari alias solutiones particulares eliciendi. His tamen omnibus artificiis, nisi in infinitum reiterentur, nulla solutio, quae pro generali haberi queat, obtineri potest. Quin etiam in vniuersum fere adhuc est creditum, huius generis problemata natura sua ita esse comparata, vt solutionem generalem prorsus non admittant, ex quo sequens istius problematis solutio, quae reuera est generalis, imprimis notatu digna et finibus Analyseos Diophantaeae promouendis apta videtur.

Problema.

16. *Inuenire generatim omnes cuborum terniones, quorum summa sit cubus.*

Solutio.

Sint A, B, C radices ternorum cuborum, et D radix cubica summae eorum; ita vt sit $A^3+B^3+C^3=D^3$,

cui

cui aequationi haec forma tribuatur: $A^3 + B^3 = D^3 - C^3$. Ponatur iam:

$$A = p + q;\ B = p - q;\ C = r - s \text{ et } D = r + s$$

qua positione amplitudo solutionis neutiquam restringitur. Hinc autem fit:

$$A^3 + B^3 = 2p^3 + 6pqq \text{ et } D^3 - C^3 = 2s^3 + 6rrs$$

sicque erit:

$$p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$$

quae aequatio subsistere nequit, nisi $pp + 3qq$ et $ss + 3rr$ communem habeant diuisorem. Constat autem tales numeros alios non habere diuisores, nisi qui eiusdem sint formae: quod vt obtineatur, loco quatuor litterarum p, q, r et s, aliae sex nouae introducantur, hoc modo:

$$p = ax + 3by \qquad s = 3cy - dx$$
$$q = bx - ay \qquad r = dy + cx$$

vnde multo minus amplitudini solutionis vis infertur. Hinc autem erit:

$$pp + 3qq = (aa + 3bb)(xx + 3yy) \text{ et}$$
$$ss + 3rr = (dd + 3cc)(xx + 3yy)$$

ac nostra aequatio per $xx + 3yy$ diuisa induet sequentem formam:

$$(ax + 3by)(aa + 3bb) = (3cy - dx)(dd + 3cc)$$

qua id iam sumus consequuti, vt litterae x et y vnicam tantum obtineant dimensionem, ideoque rationaliter definiri queant. Cum enim sit:

$$\frac{x}{y} = \frac{-3b(aa + 3bb) + 3c(dd + 3cc)}{a(aa + 3bb) + d(dd + 3cc)},$$ ponatur

$$x = -3nb(aa + 3bb) + 3nc(dd + 3cc)$$
$$y = na(aa + 3bb) + nd(dd + 3cc)$$

Ex

Ex quibus valoribus litterae p, q, r, s ita definiuntur, vt sit:

$$p = 3n(ac + bd)(dd + 3cc)$$
$$q = n(3bc - ad)(dd + 3cc) - n(aa + 3bb)^2$$
$$r = n(dd + 3cc)^2 - n(3bc - ad)(aa + 3bb)$$
$$s = 3n(ac + bd)(aa + 3bb)$$

Atque hinc tandem radices cuborum quaesitorum A, B, C, D erunt:

$$A = n(3ac + 3bc - ad + 3bd)(dd + 3cc) - n(aa + 3bb)^2$$
$$B = n(3ac - 3bc + ad + 3bd)(dd + 3cc) + n(aa + 3bb)^2$$
$$C = n(dd + 3cc)^2 - n(3ac + 3bc - ad + 3bd)(aa + 3bb)$$
$$D = n(dd + 3cc)^2 + n(3ac - 3bc + ad + 3bd)(aa + 3bb)$$

quibus valoribus obtinetur, vt sit:

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$$

et cum solutio nulla restrictione sit limitata, vtique latissime patet omnesque cuborum terniones complectitur, quorum summa iterum est cubus.

Coroll. I.

17. Deriuemus hinc formulas magis speciales, ac primo quidem sit $d = o$; eritque

$$A = 9n(a + b)c^3 - n(aa + 3bb)^2$$
$$B = 9n(a - b)c^3 + n(aa + 3bb)^2$$
$$C = 9nc^4 - 3nc(a + b)(aa + 3bb)$$
$$D = 9nc^4 + 3nc(a - b)(aa + 3bb).$$

Si hic

Si hic vlterius ponatur $b=a$, fiet

$A=18nac^3-16na^4$; $B=16na^4$; $C=9nc^4-24na^3c$

et $D=9nc^4$;

ſin autem fiat $b=-a$, eruetur

$A=-16na^4$; $B=18nac^3+16na^4$; $C=9nc^4$;

et $D=9nc^4+24na^3c$.

Coroll. 2.

18. Ponamus nunc $c=o$, eritque

$$A=n(3b-a)d^3-n(aa+3bb)^2$$
$$B=n(3b+a)d^3+n(aa+3bb)^2$$
$$C=nd^4-nd(3b-a)(aa+3bb)$$
$$D=nd^4+nd(3b+a)(aa+3bb)$$

Si vlterius ponatur $b=a$, erit

$A=2nad^3-16na^4$; $B=4nad^3+16na^4$; $C=nd^4-8na^3d$;

$D=nd^4+16na^3d$

Sin autem fiat $a=-b$, erit

$A=4nbd^3-16nb^4$; $B=2nbd^3+16nb^4$; $C=nd^4-16nb^3d$;

$D=nd^4+8nb^3d$.

Coroll. 3.

19. Sit nunc $b=o$, formulaeque noſtrae fient:

$$A=na(3c-d)(dd+3cc)-na^4$$
$$B=na(3c+d)(dd+3cc)+na^4$$
$$C=n(dd+3cc)^2-na^3(3c-d)$$
$$D=n(dd+3cc)^2+na^3(3c+d)$$

Quod

Quod si iam praeterea statuatur $d=c$, erit

$A=8nac^2-na^4$; $B=16nac^3+na^4$; $C=16nc^4-2na^3c$;
$D=16nc^4+4na^3c$;

sin autem fiat $d=-c$, erit

$A=16nac^3-na^4$, $B=8nac^3+na^4$; $C=16nc^4-4na^3c^3$
$D=16nc^4+2na^3c$.

Coroll. 4.

20. Ponatur denique $a=0$, atque obtinebimus:

$$A=3nb(c+d)(dd+3cc)-9nb^4$$
$$B=3nb(d-c)(dd+3cc)+9nb^4$$
$$C=n(dd+3cc)^2-9nb^3(c+d)$$
$$D=n(dd+3cc)^2+9nb^3(d-c)$$

Si vlterius ponatur $d=c$, erit

$A=24nbc^3-9nb^4$; $B=9nb^4$; $C=16nc^4-18nb^3c$; $D=16nc^4$

sin autem sit $c=-d$, habebitur

$A=-9nb^4$; $B=24nbd^3+9nb^4$; $C=16nd^4$;
$D=16nd^4+18nb^3d$.

Coroll. 5.

21. Si numerorum A, B, C vnus fiat negatiuus, quod pro lubitu effici potest, veluti si fiat $A=-E$, erit $B^3+C^3=D^3+E^3$, sicque simul hoc problema generalissime dedimus solutum, quo bina cuborum paria quaeruntur, quorum summae sint inter se aequales. Sin autem duae radices prodeant negatiuae, veluti

$A = -E$ et $B = -F$, erit $C^2 = D^2 + E^2 + F^2$, sicque denuo nostri problematis solutio habebitur.

Scholion 1.

22. Formulae specialissimae, in his corollariis exhibitae, ad binas has reducuntur, siquidem in Coroll. 3 pro a scribatur $2a$ et $n = \frac{n}{16}$, et in Coroll. 1, $\frac{1}{2}a$ pro a

$$\begin{array}{ll} A = nac^3 - na^4 & A = 9nac^3 - na^4 \\ B = 2nac^3 + na^4 & B = na^4 \\ C = nc^4 - na^3c & C = 9nc^4 - 3na^3c \\ D = nc^4 + 2na^3c & D = 9nc^4 \end{array}$$

quarum prior conuenit cum supra § 8. inuenta, altera autem praebet hunc casum simplicissimum $A = 8$, $B = 1$, $C = 6$ et $D = 9$, ita vt sit $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$.

Scholion 2.

23. Primo intuitu formulae generales in problemate erutae non latius patere videntur, quam formulae supra § 14. exhibitae, cum vtrinque quinque insint litterae arbitrariae, atque istae insuper coefficientem communem recipere queant, ita vt etiam magis generales videantur. Interim tamen ipsa solutionis ratio declarat, formulas in problemate inuentas esse amplissimas, dum superiores insigni restrictione sunt limitatae. Quae restrictio quo clarius perspiciatur, ex § 13. perpendatur positio $v = mt + \frac{mmp + nn(q+r)}{mm}u = mt + pu + \frac{nn}{mm}(q+r)u$. Iam vero est $mt + pu = x$ et $y + z = (q+r)u$, ita

ita vt positio sit $v = x + \frac{nn}{mm}(y + z)$. Quare, vt fiat $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, in illa solutione assumitur esse $\frac{v - x}{y + z} = \frac{nn}{mm} =$ quadrato; sicque illa ad alios casus non pateat, nisi in quibus sit $\frac{v - x}{y + z}$ seu $\frac{D - A}{B + C}$ numerus quadratus. Quoties igitur $\frac{D - A}{B + C}$ non sit quadratum, casus in superioribus formulis non continetur: huiusmodi autem casus dari, vel ex exemplo $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ liquet, in quo neque $\frac{9 - 1}{6 + 8}$, neque $\frac{9 - 6}{1 + 8}$, neque $\frac{9 - 8}{1 + 6}$ sit quadratum. Solutio autem problematis tali restrictione non limitatur; cum sit $\frac{D - C}{A + B} = \frac{s}{p} = \frac{pp + 3qq}{ss + 3rr} = \frac{aa + 3bb}{dd + 3cc}$; vnde ex solutione generali ii tantum casus, quibus $\frac{aa + 3bb}{dd + 3cc}$ est numerus quadratus in formulis superioribus §. 14. continentur; ex quo summa generalitas nostrae solutionis manifesto elucet.

Scholion 3.

24. Natura autem huius problematis numeros integros tantum postulat, et quidem tales, qui sint primi inter se; si enim fuerit $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$, tum problemati quoque satisfacient omnia tam aeque multipla, quam aeque submultipla numerorum A, B, C, D; ideoque sufficiet, eos tantum notasse casus, quibus numeri A, B, C, D fiunt inter se cum integri, tum primi inter se. Hunc in finem sumtis pro a, b, c, d numeris quibuscunque, siue affirmatiuis, siue negatiuis, inde primum formentur

$$x = 3n(c(dd + 3cc) - b(aa + 3bb))$$
$$y = n(d(dd + 3cc) + a(aa + 3bb))$$

ac pro u talis sumatur fractio, vt x et y fiant integri et primi inter se. Ex his porro formentur:

$p = ax + 3by$; $q = bx - ay$; $r = dy + cx$ et $s = 3cy - dx$, qui denuo per communem diuisorem, si quem habent, deprimantur. Hinc denique habebitur $A = p + q$; $B = p - q$; $C = r - s$ et $D = r + s$; sicque fiet $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$. Atque casus, quibus vnus horum numerorum fit negatiuus, simul omnes solutiones praebebunt, quibus summa duorum cuborum aequalis est summae duorum aliorum cuborum. In hoc calculo conueniet copiam numerorum formae $mm + 3nn$ in promtu habere, vnde deinceps formulae $aa + 3bb$ et $dd + 3cc$ desumi queant.

Tabula

Tabula numerorum formae $mm + 3nn$

numerus n

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300	363	432	507	588	675	768	867	972
1	1	4	13	28	49	76	109	148	193	244	301	364	433	508	589	676	769	868	973
2	4	7	16	31	52	79	112	151	196	247	304	367	436	511	592	679	772	871	976
3	9	12	21	36	57	84	117	156	201	252	309	372	441	516	597	684	777	876	981
4	16	19	28	43	64	91	124	163	208	259	316	379	448	523	604	691	784	883	988
5	25	26	37	52	73	100	133	172	217	268	325	388	457	532	613	700	791	892	997
6	36	39	48	63	84	111	144	183	228	279	336	399	468	543	624	711	802	903	
7	49	52	61	76	97	124	157	196	241	292	349	412	481	556	637	724	815	916	
8	64	67	76	91	112	139	172	211	256	307	364	427	496	571	652	739	830	931	
9	81	84	93	108	129	156	189	228	273	324	381	444	513	588	669	756	847	948	
10	100	103	112	127	148	175	208	247	292	343	400	463	553	607	688	775	866	967	
11	121	124	133	148	169	196	229	268	313	364	421	484	553	628	709	796	887	988	
12	144	147	156	171	192	219	252	291	336	387	444	507	576	651	732	819	910		
13	169	172	181	196	217	244	277	316	361	412	469	532	601	676	757	844	935		
14	196	199	208	223	244	271	304	343	388	439	496	559	628	703	784	871	962		
15	225	228	237	252	273	300	333	372	417	468	525	588	557	732	813	900	991		
16	256	259	268	283	304	331	364	403	448	499	556	619	688	763	844	931			
17	289	292	301	316	337	364	397	436	481	532	589	652	721	796	877	964			
18	324	327	336	351	372	399	432	471	516	567	624	687	756	831	912	999			
19	361	364	373	388	409	436	469	508	553	604	661	724	793	868	949				
20	400	403	412	427	448	475	508	547	592	643	700	763	832	907	988				
21	441	444	453	408	489	516	549	588	633	684	741	804	873	948					
22	484	487	496	511	532	559	592	631	676	727	784	847	916	991					
23	529	532	541	556	577	604	637	676	721	772	829	892	961						
24	576	579	588	603	524	651	684	723	768	819	876	939							
25	625	528	537	652	673	700	733	772	817	868	925	988							
26	676	679	688	703	724	751	784	823	868	919	976								
27	729	732	741	756	777	804	837	876	921	972									
28	784	787	796	811	832	859	892	931	976										
29	841	844	853	868	889	916	949	988											
30	900	903	912	927	948	975													
31	961	964	973	988															

Scholion 4.

25. Ex hac tabula iam pro lubitu numeri pro $aa+3bb$ et $dd+3cc$ assumi poterunt, vnde valores litterarum a, b, c, d habebuntur, quos tam affirmatiue, quam negatiue accipere licet. Quodsi vero minores numeri pro A, B, C, D desiderentur, conueniet pro $aa+3bb$ et $3cc+dd$ eiusmodi valores capi, qui communem habeant diuisorem. Statuatur ergo

$$aa+3bb=mk \text{ et } dd+3cc=nk$$

Tum vero sit $ac+bd=f$ et $3bc-ad=g$, hincque fiet:

$$A=n(3f+g)-mmk$$
$$B=n(3f-g)+mmk$$
$$C=nnk-m(3f+g)$$
$$D=nnk+m(3f-g)$$

vbi notandum est, quicunque valores pro f et g fuerint inuenti, eos tam affirmatiue, quam negatiue, capi posse, ob numeros a, b, c, d ambiguos; vnde pro quouis casu sequentes habebuntur determinationes:

$$\text{vel } \begin{matrix} f=\pm(ac+bd) \\ g=\pm(3bc-ad) \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} f=\pm(ac-bd) \\ g=\pm(3bc+ad) \end{matrix}$$

Patet autem, si manente g capiatur f negatiue, eosdem numeros esse prodituros ordine tantum permutato, vnde sufficit pro f valores tantum affirmatiuos assumsisse. Praeterea manifestum est, si sit $m=n$, seu $aa+3bb=dd+3cc$, tum fore $A=-C$ et $D=B$, vnde et hos casus excludi oportebit. Denique si $f=o$, fit $A=-B$ et $C=-D$; qui propterea casus quoque

sunt

sunt omittendi. Saepe numero quoque euenit, vt vel pro a et b, vel pro c et d, vel pro vtrisque plures valores oriantur, ex quibus solutionum numerus eo maior euadit.

Exemplum I.

26. Capiatur $aa + 3bb = 19$, erit $a = 4$ et $b = 1$, tum vero $dd + 3ee = 76$, eritque

$$\text{vel } \begin{matrix} d = 1 \\ e = 5 \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} d = 7 \\ e = 3 \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} d = 8 \\ e = 2 \end{matrix}$$

Tum vero fit $m = 1$; $n = 4$; et $k = 19$. Pro f autem et g, sequentes prodibunt valores:

$$\text{I.} \begin{matrix} f = 21; \\ g = \pm 11; \end{matrix} \quad \text{II.} \begin{matrix} f = 19; \\ g = \pm 19; \end{matrix} \quad \text{III.} \begin{matrix} f = 19; \\ g = \pm 19; \end{matrix}$$

$$\text{IV.} \begin{matrix} f = 5; \\ g = \pm 37; \end{matrix} \quad \text{V.} \begin{matrix} f = 16; \\ g = \pm 26, \end{matrix} \quad \text{VI.} \begin{matrix} f = 0; \\ g = \pm 38; \end{matrix}$$

vnde tertius casus et sextus sunt excludendi. Atque hinc erit:

$$\begin{aligned} A &= 12f + 4g - 19 \\ B &= 12f - 4g + 19 \\ C &= 304 - 3f - g \\ D &= 304 + 3f - g. \end{aligned}$$

Hinc ergo reperietur pro valore primo $f = 21$ et $g = \pm 11$:

	pro signis sup.	pro signis inf.	
$A = 233 \pm 44$	$A = 277$	$A = 189$	$A = 3$
$B = 271 \mp 44$	$B = 227$	$B = 315$	seu $B = 5$
$C = 241 \mp 11$	$C = 230$	$C = 252$	$C = 4$
$D = 367 \mp 11$	$D = 356$	$D = 378$	$D = 6$

Casus

Casus autem 2 et 3 diuidendo formulas per 19, ob $f = 1\ 19$ et $g = \pm 1 . 19$, dabunt:

$$\begin{array}{l} A = 11 \pm 4 \\ B = 13 \mp 4 \\ C = 13 \mp 1 \\ \hline D = 19 \mp 1 \end{array} \text{ ergo } \begin{array}{l} A = 15 \\ B = 9 \\ C = 12 \\ \hline D = 18 \end{array} \text{ vel seu } \begin{array}{l|l} A = 5 & A = 7 \\ B = 3 & B = 17 \\ C = 4 & C = 14 \\ \hline D = 6 & D = 20 \end{array} \text{ vel}$$

Casus IV quo $f = 5$ et $g = \pm 37$ dat:

$$\begin{array}{l} A = 41 \pm 148 \\ B = 79 \mp 148 \\ C = 289 \mp 37 \\ \hline D = 319 \mp 37 \end{array} \text{ ergo } \begin{array}{l|l} A = 189 & A = -107 \\ B = -69 & B = 227 \\ C = 252 & C = 326 \\ \hline D = 282 & D = 256 \end{array} \text{ vel} \ \text{vel seu } \begin{array}{l} A = 63 \\ B = -23 \\ C = 84 \\ \hline D = 94 \end{array}$$

Casus V quo $f = 16$ et $g = \pm 26$ dat:

$$\begin{array}{l} A = 173 \pm 104 \\ B = 211 \mp 104 \\ C = 256 \mp 26 \\ \hline D = 352 \mp 26 \end{array} \text{ ergo } \begin{array}{l|l} A = 277 & A = 69 \\ B = 107 & B = 315 \\ C = 230 & C = 282 \\ \hline D = 326 & D = 378 \end{array} \text{ seu } \begin{array}{l} A = 23 \\ B = 105 \\ C = 94 \\ \hline D = 126 \end{array}$$

En ergo plures cuborum terniones ex vnica positione inuentos:

$$\begin{array}{l|l} 227^3 + 230^3 + 277^3 = 356^3 & 107^3 + 356^3 = 227^3 + 326^3 \\ 107^3 + 230^3 + 277^3 = 326^3 & 23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3 \\ 23^3 + 94^3 + 105^3 = 126^3 & \\ 7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3 & \\ 3^3 + 4 + 5^3 = 6^3 & \end{array}$$

vnde colligitur

$$356^3 - 227^3 = 230^3 + 277^3 = 326^3 - 107^3 \text{; item}$$
$$126^3 - 105^3 = 63^3 + 84^3 = 23^3 + 94^3$$

Exem-

Exemplum 2.

27. Sit $aa+3bb=28$, erit vel $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ vel $\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$ vel $\begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}$ cum vero sit:

$dd+3cc=84$, erit vel $\begin{cases}d=3\\c=5\end{cases}$ vel $\begin{cases}d=6\\c=4\end{cases}$ vel $\begin{cases}d=9\\c=1\end{cases}$.

hincque $k=28$; $m=1$ et $n=3$; tum vero pro f et g sequentes prodibunt valores:

I. $f=14$; $g=\pm 42$; II. $f=4$; $g=\pm 48$; III. $f=22$; $g=\pm 30$;

IV. $f=14$; $g=\pm 42$; V. $f=28$; $g=\pm 0$; VI. $f=26$; $g=\pm 18$;

vbi notandum est, hos valores, quorum I et IV conueniunt, oriri ex sola positione $a=1$ et $b=3$, et reliquas duas eosdem producere. Hinc ergo habebimus:

$$\begin{aligned}A &= 9f+3g-28\\ B &= 9f-3g+28\\ C &= 252-3f-g\\ \hline D &= 252+3f-g\end{aligned}$$

vnde casus primus et quartus dabunt per 14 diuidendo

$$\begin{aligned}A &= 7\pm 9\\ B &= 11\mp 9\\ C &= 15\pm 3\\ \hline D &= 21\pm 3\end{aligned}\quad \text{ergo I.}\quad \begin{aligned}A &= 16=8\\ B &= 2=1\\ C &= 12=6\\ \hline D &= 18=9\end{aligned}\quad \text{II.}\quad \begin{aligned}A &= -2=1\\ B &= 20=10\\ C &= 18=9\\ \hline D &= 24=12\end{aligned}$$

Casus vero secundus per 4 diuidendo dat:

$$\begin{aligned}A &= 2\pm 36\\ B &= 16\mp 36\\ C &= 60\mp 12\\ \hline D &= 66\mp 12\end{aligned}\quad \text{ergo I.}\quad \begin{aligned}A &= 38=19\\ B &= -20=-10\\ C &= 48=24\\ \hline D &= 54=27\end{aligned}\quad \text{II.}\quad \begin{aligned}A &= -34=-17\\ B &= 52=26\\ C &= 72=36\\ \hline D &= 78=39\end{aligned}$$

Casus tertius per 2 diuisus dat:

$$\begin{array}{l} A = 85 \pm 45 \\ B = 113 \mp 45 \\ C = 93 \mp 15 \\ \hline D = 159 \mp 15 \end{array} \text{ ergo I. } \begin{array}{l} A = 130 = 65 \\ B = 68 = 34 \\ C = 78 = 39 \\ \hline D = 144 = 72 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = 40 = 20 \\ B = 158 = 79 \\ C = 108 = 54 \\ \hline D = 174 = 87 \end{array}$$

Casus quintus dat per 28 diuisus:

$$\begin{array}{l} A = 8 = 4 \\ B = 10 = 5 \\ C = 6 = 3 \\ \hline D = 12 = 6 \end{array}$$

Casus denique sextus per 2 diuisus, dat:

$$\begin{array}{l} A = 103 \pm 27 \\ B = 131 \mp 27 \\ C = 87 \mp 9 \\ \hline D = 165 \mp 9 \end{array} \text{ ergo vel } \begin{array}{l} A = 130 = 65 = 5 \\ B = 104 = 52 \underset{13}{=} 4 \\ C = 78 = 39 = 3 \\ \hline D = 156 = 78 = 6 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = 76 = 38 \\ B = 158 = 79 \\ C = 96 = 48 \\ \hline D = 174 = 87 \end{array}$$

Ex hoc ergo exemplo sequentes resultant formulae:

$$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$$

$$34^3 + 39^3 + 65^3 = 72^3 \qquad 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$20^3 + 54^3 + 79^3 = 87^3 \text{ et } 10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \qquad 17^3 + 39^3 = 26^3 + 36^3$$

$$38^3 + 48^3 + 79^3 = 87^3$$

hincque sequitur

$$87^3 - 79^3 = 20^3 + 54^3 = 38^3 + 48^3$$

Patet ergo, ex quouis exemplo assumto plures huiusmodi formulas obtineri, inter quas autem eaedem saepius recurrent; quemadmodum casus $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ in hoc exemplo et praecedente bis occurrit.

28. En

28. En ergo solutionem generalem problematis, quo quaeruntur quatuor numeri rationales A, B, C, D, ita vt sit $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$, seu quod eodem redit, quo quaeruntur quatuor numeri rationales, p, q, r et s, vt sit $p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$. Quae problemata cum methodis solitis non nisi particulariter resolui queant, manifestum est, has methodos solitas adhuc insigni defectu laborare, ideoque notabilem adhuc perfectionem desiderare. Tum vero, quod hic de vnico problemate ostendimus, nullum est dubium, quin id in infinitis aliis pari successu praestari possit. In genere quidem patet, simili modo huiusmodi aequationem $\alpha p(mpp + nqq) = \beta s(mss + nrr)$, vel etiam hanc latius patentem $(\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \varepsilon)(mpp + nqq) = (ap + bq + cr + ds + e)(mrr + nss)$ rationaliter generalissime resolui posse; ponendo:

$$p = nfx + gy \quad \text{et} \quad r = nhx + ky$$
$$q = mfy + gx \qquad\quad s = mhy - kx$$

fiet enim $mpp + nqq = (gg + mnff)(nxx + myy)$ etc.

$$mrr + nss = (kk + mnhh)(nxx + myy)$$

vnde aequatio diuisa per $nxx + myy$ continebit incognitas x et y vnius tantum dimensionis, ex qua propterea sine vlla restrictione earum valores rationaliter determinabuntur.

29. Non immerito igitur suspicari licet, et aliorum problematum Diophantaeorum, quorum adhuc non nisi solutiones particulares sunt repertae, solutiones quoque generales dari, neque discrimen supra memora-

 tum

tum ex ſolutionum generalitate et particularitate petitum eſſe eſſentiale; vnde patet quanta adhuc incrementa in Analyſi Diophantaea deſiderentur. Ad quae ſi vnquam penetrare contigerit, nullum eſt dubium, quin inde vniuerſa Analyſis, tam finitorum, quam infinitorum, haud contemnenda ſubſidia ſit acceptura. Cum enim in calculo integrali praecipuum artificium in hoc verſetur, vt formulae differentiales irrationales in rationales transformentur: hoc artificium ipſum, vti ex Analyſi Diophantaea in hunc calculum eſt translatum, ita etiam indidem maiora auxilia merito expectantur; ex quo ſtudium, quod in iſta Analyſi, vtcunque ſterilis alias in ſe ſpectata videatur, amplificanda impenditur, neutiquam inutiliter collocari eſt cenſendum.

30. Hic porro alia conditio non minus attentione digna notari meretur, quod ſaepius in Analyſi Diophantaea eiusmodi problemata occurrunt, quae per methodos conſuetas ſolutionem generalem admittere videntur, cum tamen haec ſolutio tantum ſit particularis; quibus caſibus peculiaria artificia adhiberi debent, vt reſtrictio, qua methodus conſueta eſt limitata, tollatur. Veluti ſi duo cubi in numeris integris quaerantur, quorum ſumma ſit numerus quadratus; ſolutio nullo modo reſtricta obtineri videtur, ſi iſta aequatio $x^3+y^3=zz$ ita reſoluatur, vt ponatur $x=\frac{pz}{r}$ et $y=\frac{qz}{r}$. Fiet enim $(p^3+q^3)z=r^3$, ideoque $z=\frac{r^3}{p^3+q^3}$, et $x=\frac{prr}{p^3+q^3}$; $y=\frac{qrr}{p^3+q^3}$. Vnde, vt x et y fiant numeri integri, ſtatuatur $r=n(p^3+q^3)$, vt habeatur:

$$x=nnp(p^3+q^3) \text{ et } y=nnq(p^3+q^3)$$

eritque $x^3+y^3=n^6(p^3+q^3)^4=$ quadrato.

31. Etſi

31. Etsi autem ista solutio generalis videtur, tamen nulli alii numeri pro x et y inueniuntur, nisi qui communem habent factorem p^3+q^3, ita vt hinc concludendum videatur, nullos dari numeros inter se primos, qui, pro x et y substituti, quaestioni satisfaciant. Interim, tamen casu, quo $x=1$ et $y=2$, perspicuum est, fore $x^3+y^3=9=$ quadrato. Tametsi autem hic casus ex formulis nostris deriuari potest, ponendo $p=1$, $q=2$, et $n=\frac{1}{3}$, vnde vtique prodit $x=\frac{1}{9}.9=1$ et $y=\frac{2}{9}.9=2$; tamen vt hinc alii huius generis casus eliciantur, necesse est, vt pro p et q eiusmodi numeri accipiantur, quorum cuborum summa sit quadratum, puta $=ss$, vt deinceps poni possit $n=\frac{1}{s}$: vnde prodibit $x=p$ et $y=q$: quo pacto id ipsum, quod hic quaeritur, iam tanquam cognitum postulatur, vt scilicet duo cubi assignari queant, quorum summa sit quadratum. Quemadmodum ergo huic incommodo sit occurrendum, in sequenti problemate videamus.

Problema.

32. Inuenire duos numeros integros inter se primos, quorum cubi additi faciant quadratum.

Solutio.

Sint x et y numeri quaesiti, ita vt esse debeat $x^3+y^3=$ quadrato. Debet ergo $(x+y)(xx-xy+yy)$ $=$ quadratum. At de his duobus factoribus annoto, eos esse vel primos inter se, vel ternarium pro communi mensura admittere, vnde solutio fiet bipartita,

 qua

qua autem ita in vnam compingetur, vt vterque factor seorsim $x+y$ et $xx-xy+yy$ vel quadratum esse debeat, vel triplum quadratum.

I. Sit primum vterque factor quadratus; ac ponatur $xx-xy+yy=(pp-pq+qq)^2$, eritque vel $x=pp-2pq$ et $y=pp-qq$, vel $x=2pq-pp$ et $y=qq-pp$. Priori casu ergo oportet vt sit $x+y=2pp-2pq-qq$ quadratum. Quae forma cum sit $=3pp-(p+q)^2$, si ponatur $=rr$, oporteret esse $3pp=(p+q)^2+rr=$ summae duorum quadratorum, quod est impossibile. Relinquitur ergo alter casus, quo $x+y=qq+2pq-2pp=(q+p)^2-3pp$ $=$ quadratum, cui satisfit ponendo

$$p=2mn \text{ et } q=3mm-2mn+nn$$
$$x=2pq-pp=4mn(3mm-3mn+nn)$$
$$y=qq-pp=(3mm+nn)(3mm-4mn+nn)$$
$$=(m-n)(3m-n)(3mm+nn)$$

II. Tum vero ponatur $xx-xy+yy=$ triplo quadrato $=3(pp-pq+qq)^2$ eritque, cui triplici modo satisfit:

I. $x=2pp-2pq-qq$, $y=pp+2pq-2qq$ II. $x=2pp-2pq-qq$, $y=pp-4pq+qq$ III. $x=pp+2pq-2qq$, $y=-pp+4pq-qq$

Casu primo fit:

$x+y=3pp-3qq=$ 3plo quadrato, seu $pp-qq=$ quadrato: vnde fit $p=mm+nn$; et $q=2mn$, ideoque

$$x=2(m^4-2m^3n-2mn^3+n^4)$$
$$y=m^4+4m^3n-6mmnn+4mn^3+n^4$$

Casu

Casu secundo fit: $x+y=3pp-6pq=3$plo quadrato; ergo $pp-2pq=$ quadrato, cui satisfit ponendo $p=2mn$ et $q=mm-nn$; vnde oritur

$$x= 3m^4+6mmnn-n^4$$
$$y=-3m^4+6mmnn+n^4$$

Casu denique tertio fit $x+y=6pq-3qq=3\square$ et
$$2pq-qq=\square$$
vnde fit: $p=mm+nn$ et $q=2mm$; ideoque

$$x=-3m^4+6mmnn+n^4$$
$$y= 3m^4+6mmnn-n^4$$ quae cum illis congruunt.

En ergo ternas solutiones problematis propositi:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x= 4mn(3mm-3mn+nn) \\ y= (m-n)(3m-n)(3mn+nn) \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} x= 2(m^4-2m^3n-2mn^3+n^4) \\ y= m^4+4m^3n-6mmnn+4mn^3+n^4 \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} x= 3m^4+6mmnn-n^4 \\ y=-3m^4+6mmnn+n^4 \end{cases}$$

vbi quidem secunda forma in tertia, quae cum quarta conuenit, contenta deprehenditur, ita vt secunda, vti magis complicata, omitti possit.

Coroll. 1.

33. Si hae formulae, pro x et y inuentae, per numerum quadratum quemcunque multiplicentur, eae quaesito aeque satisfacient, ita scilicet summa cuborum x^3+y^3 fiat numerus quadratus; vnde numeri quotcunque non primi inter se obtinebuntur. Simili autem modo

modo si hae formulae communem habuerint diuisorem quadratum, per eum diuisae quaesito perinde satisfacient, vnde numeri inter se primi pro x et y inueniuntur, quales hic proprie quaeruntur. Geminas ergo pro hoc negotio habebimus formulas:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x = 4mn(3mm-3mn+nn) \\ y = (m-n)(3m-n)(3mm+nn) \end{cases} \quad \text{II.}\ \begin{cases} x = 3m^4+6mmnn-n^4 \\ y = -3m^4+6mmnn+n^4 \end{cases}$$

Coroll. 2.

34. Euidens est, dari infinitos casus, quibus altera harum formularum recipit valorem negatiuum: quod in prioribus euenit, si vel m sit negatiuum, vel n; vel n contineatur intra limites m et $3m$: in posterioribus autem, si vel $\frac{nn}{mm}$ sit maius, quam $3(1+\sqrt{2})$, vel $\frac{nn}{mm}$ minus, quam $3(\sqrt{2}-1)$. His ergo casibus duo reperiuntur cubi, quorum differentia est quadratum.

SPECI-