1761

De problemativus indeterminatis, quae videntur plus quam determinata

Leonhard Euler

DE PROBLEMATIBVS INDETERMINATIS QVAE VIDENTVR PLVS QVAM DETERMINATA.

Auctore
L. EVLERO.

Omnia problemata, quae in Analysi Diophantaea proponi solent, esse indeterminata, vel ipsa rei natura declarat; etsi enim plures eiusmodi quaestiones occurrant, quae non nisi vnicam solutionem admittunt, veluti si quaeratur cubus, qui vnitate auctus faciat quadratum, cui quaestioni praeter cubum 8 alius nullus satisfacere reperitur; tamen ne tales quidem quaestiones ad problemata determinata referri conuenit, propterea quod methodus eas resoluendi tota ex ratione problematum indeterminatorum est petita, atque casui potissimum singulari tribuendum videtur, si vnica solutio tantum locum habeat. Quemadmodum etiam non desunt eiusmodi quaestiones, quae plane nullam solutionem admittunt, quae tamen nihilo minus quaestionibus indeterminatis recte annumerantur: ante enim quam certiores fuerimus facti, nullam dari solutionem, id quod operatio vsusque methodorum demum declarat, eas pro indeterminatis omnino habere debemus, nostramque inuestigationem perinde adornare, ac si infinita solutionum multitudo daretur. Ita si quaeri debeant tria quadrata,

drata, quorum ſumma faciat ſeptem, nemo dubitabit, quin haec quaeſtio indeterminatis ſit accenſenda, etiamſi deinceps inueſtigatione peracta impoſſibilitas ſolutionis manifeſto ſe prodat. Quando igitur hic de problematibus indeterminatis tractare conſtitui, quae plusquam determinata videantur; ne quis putet haec inuicem pugnare, fierique non poſſe, vt quod indeterminatum ſit, idem plus quam determinatum videri queat, inſtituti rationem clarius exponi oportere ſentio. Ac primo quidem nullum eſt dubium, quin cuilibet quaeſtioni Diophantaeae eiusmodi inſuper conditiones adiici queant, quibus ea non tam determinata, quam impoſſibilis reddatur. Veluti ſi quaeſtioni, qua duo quadrata petuntur, quorum ſumma ſit quadratum, inſuper haec conditio adiiciatur, vt eorundem quadratorum differentia quoque ſit quadratum, quaeſtio, quae primum erat maxime indeterminata, hac vnica conditione adiuncta fit impoſſibilis, ideoque merito pro plusquam determinata habetur. Simili modo tria quadrata quaerere in progreſſione arithmetica problema eſt indeterminatum et innumerabiles ſolutiones admittens, ſtatim vero ac quatuor quadrata in arithmetica progreſſione requiruntur, problema non determinatur, ſed prorſus fit impoſſibile et plus quam determinatum.

Ex his exemplis manifeſtum eſt quaeſtionem indeterminatam per additionem vnicae conditionis reddi poſſe plus quam determinatam, ideoque impoſſibilem. E contrario vero dantur eiusmodi quoque quaeſtiones, quae iam tot conditiones continent, vt vnica noua conditione ſuper addita, pari iure, ac commemoratae, plus-

quam

quam determinatae fieri debere videantur, quibus tamen nihilo minus non vna, ſed plures, ſaepe conditiones adiungi poſſunt, ita vt iis non obſtantibus infinitae adhuc ſolutiones exhiberi queant; cuiusmodi caſus ex hoc problemate clariſſime intelligetur.

Quaerantur tres numeri, vt binorum productum addito tertio fiat quadratum

Scilicet vocando hos tres numeros x, y, z, requiritur vt ſit:

$$xy + z = \text{Quadr.}\quad xz + y = \text{Qu.}\quad yz + x = \text{Qu.}$$

Haec quaeſtio tentanti, niſi ſingularia artificia adhibeantur, iam ſolutu tam difficilis apparebit, vt ſi noua conditio ſuper adderetur, de ſolutione plane ſit deſperaturus. Si enim ponat $xy + z = aa$, vt habeat $z = aa - xy$, ambae reliquae formulae quadratum efficiendae erunt:

$$aax - xxy + y \quad \text{et} \quad aay - xyy + x$$

quarum priorem ſi ponat $= bb$, habebit quidem $y = \frac{aax - bb}{xx - 1}$; at hoc valore in tertia ſubſtituto, quadratum reddi debebit haec expreſſio;

$$x^5 - 2x^3 + aabbxx - (a^4 + b^4 - 1)x + aabb$$

quae certe iam eſt tam complicata, vt omnem ſolutoris ſollertiam requirat, neque de nouis conditionibus inſuper adimplendis ſit cogitandum.

Interim tamen huic quaeſtioni has inſuper conditiones adiicere licet, vt binorum numerorum productum cum eorundem ſumma quoque faciat quadratum, ſeu vt ſit:

$$xy + x + y = \square;\quad xz + x + z = \square;\quad yz + y + z = \square$$

Quis

Quis igitur non putaret, his tribus conditionibus adiectis, problema propofitum iam per fe fatis difficile fieri plus quam determinatum? Interim tamen certum eft, et hoc cafu problema adhuc effe indeterminatum, atque adeo in numeris integris infinitas folutiones admittere.

Quin etiam infuper hae conditiones adiici poffunt, manente folutionum numero, et quidem in numeris integris, infinito: 1°. vt fumma productorum ex binis fit quadratum, 2°. vt eadem fumma productorum ex binis vna cum ipforum numerorum fumma fiat quadratum.

Nec vero nunc quidem conditionum multitudo exhaufta eft cenfenda; nam poftulari infuper poteft, vt trium quaefitorum numerorum vel vnus, vel adeo duo, fint ipfi quadrati, et quidem integri. Quodfi autem omnes tres debeant effe quadrati, ne nunc quidem problema fit plus quam determinatum, fed infinitas adhuc folutiones, etfi non in numeris integris, admittit; ac fortaffe adhuc plures conditiones addi poffent, quibus quoque fatisfieri liceret.

En ergo problema, quod merito cuique plus quam determinatum videri debet.

Inuenire tres numeros integros x, y, z, *vt fequentes formulae omnes fiant quadrata*:

$xy + z = \square$; $xy + x + y = \square$; $xy + xz + yz = \square$
$xz + y = \square$; $xz + x + z = \square$; $xy + xz + yz + x + y + z = \square$.
$yz + x = \square$; $yz + y + z = \square$;

cuius fimpliciffima folutio fine dubio eft:

$x = 1$; $y = 4$, et $z = 12$

tum

tum vero etiam sequentes solutiones in promptu sunt:

$$\begin{array}{llllll} x=1; & x=4; & x=4; & x=1; & x=1; & x=4 \\ y=12; & y=9; & y=12; & y=24; & y=40; & y=33 \\ z=24; & z=28; & z=33; & z=40; & z=60; & z=64 \end{array}$$

Verum si haec conditio insuper sit adiecta, vt ipsi tres numeri quaesiti debeant esse quadrati, in fractis ecce has solutiones:

$$\begin{array}{llll} x=\frac{9}{64}; & x=\frac{49}{64}; & x=\frac{25}{9}; & x=\frac{9}{25} \\ y=\frac{25}{64}; & y=\frac{225}{64}; & y=\frac{64}{9}; & y=\frac{64}{25} \\ z=\frac{49}{16}; & z=\frac{169}{16}; & z=\frac{196}{9}; & z=\frac{196}{25} \end{array}$$

Huiusmodi autem quaestio, inquam, merito pro plusquam determinata habetur, has enim conditiones non pro arbitrio adiecimus, atque in ipsa indagatione huiusmodi conditionum, quas indoles problematis patitur, praecipua pars artificii continetur. Namque si quis ad arbitrium conditiones superaddere vellet, admodum probabile esset, problema, vel vnica adiecta, re vera fieri plus quam determinatum; quam ob rem talia problemata, tot conditionibus onerata, recte statim tanquam plus quam determinata spectantur, nisi aliunde constet, conditiones eas ab insigni artifice esse adiectas.

Talia problemata autem iam in ipso Diophanto occurrunt, quae commentatoribus non parum negotii fecerunt, cum quaedam tantum conditiones calculum tantopere occupent, vt reliquarum ratio neutiquam haberi posse videatur. Praemittuntur autem eiusmodi problematibus certae quaedam propositiones, quae ibi Porismata vocantur, in quibus tota solutionis vis continetur. Ostenditur scilicet, si quibusdam conditionibus certo quodam modo ſatisfiat, tum ſimul aliis quoque conditionibus quaſi ſponte ſatisfieri, ita vt non opus ſit calculum ſeorſim ad eas applicare. Ita pro quaeſtione exempli loco allegata, qua tres numeri x, y, et z quaeruntur, vt conditiones praeſcriptae impleantur, porisma praemittendum ita ſe habet:

Si quaerantur duo numeri x *et* y, *vt* $xy+x+y$ *fiat quadratum, puta* $=uu$, *atque tertius numerus* z *ita capiatur, vt ſit* $z=1+x+y\pm 2u$, *tum non ſolum hae formulae,*

$$xz+x+z \text{ et } yz+y+z \textit{ fient quadrata:}$$

ſed etiam hae,

$$xy+z;\ xz+y \text{ et } yz+x$$

vna cum iſtis

$$xy+xz+yz \text{ et } xy+xz+yz+x+y+z$$

ſponte fient quadrata.

Cum igitur huic vnicae conditioni, qua formula $xy+x+y$ quadratum reddi debet, facillime ſatisfiat, ope huius porismatis quaeſtio tam multis conditionibus circumſcripta, vt plus quam determinata videatur, nullo plane labore infinitis modis reſoluitur, et quidem in numeris integris.

Ponatur enim $xy+x+y=uu$, et cum ſit

$$xy+x+y+1=(x+1)(y+1)=uu+1$$

pro uu tale ſumatur quadratum, quod vnitate auctum habeat factores; ſit ſcilicet $uu+1=mn$, et numeri problemati ſatisfacientes erunt:

$$x=m-1;\ y=n-1;\ \text{et } z=m+n-1\pm 2u$$

In

In huiusmodi igitur problematibus totum negotium vertitur in inuentione idoneorum illorum porismatum, quibus tota ſolutio ita contineatur, vt ſtatim atque aliquibus conditionibus ſatisfecerimus, ſimul reliquas adimpleuerimus. Cum igitur ratio talium porismatum a nemine adhuc ſit explicata, ſi eam accuratius expoſuero, non exiguum incrementum vniuerſa Analyſis Diophantaea inde accepiſſe erit exiſtimanda. Tota autem horum porismatum ratio ſequenti lemmati per ſe perſpicuo inniti videtur.

Lemma.

I. Si inuenti fuerint valores litterarum z, y, x *etc. quibus aequationi* $W = 0$ *ſatisfiat, exiſtente* W *functione quacunque illarum litterarum* z, y, x *etc. atque* P, Q, R *etc. eiusmodi fuerint quantitates, vt* $P \pm W$, $Q \pm W$, $R \pm W$ *etc. fiant quadrata: tum iisdem valoribus pro* z, y, x *etc. aſſumtis, fient quoque quantitates* P, Q, R, *etc. quadrata.*

Ratio huius lemmatis eſt manifeſta, quia pro litteris z, y, x etc. tales valores aſſumi ponuntur, vt fiat $W = 0$, ideoque ſi $P \pm W$, $Q \pm W$, $R \pm W$ ſint quadrata, etiam quantitates P, Q, R, ipſae quadrata ſint neceſſe eſt.

Coroll. 1.

2. Formulae quoque P, Q, R etc. reddentur quadrata, ſi fuerint $P + \alpha W$; $Q + \beta W$; $R + \gamma W$ etc. quadrata, vel etiam generalius, ſi iſtae expreſſiones:

$$P + \alpha W + \zeta W^2;\quad Q + \beta W + \eta W^2;\quad R + \gamma W + \theta W^2$$

fuerint quadrata.

Coroll. 2.

3. Vicissim ergo etiam si litteris z, y, x etc. tales assignati fuerint valores, vt fiat $W = o$, tum etiam omnes huius generis formulae $PP + \alpha W$; $QQ + \beta W$; $RR + \gamma W$ etc. fient quadrata.

Coroll. 3.

4. Quodsi ergo aequationi $W = o$ infinitis diuersis modis satisfieri queat, tum iisdem modis omnes huius generis formulae $PP + \alpha W$; $QQ + \beta W$; $RR + \gamma W$ etc. quadrata efficientur.

Coroll. 4.

5. Cum igitur numerus huiusmodi formularum in infinitum augeri possit, manifestum est, quomodo etiam infinitae conditiones praescribi possint, quibus omnibus satisfiat, simul atque vnicae conditioni, scilicet aequationi $W = o$, fuerit satisfactum.

Coroll. 5.

6. Simili modo hoc lemma ad cubos aliasue potestates altiores quascunque extendetur. Si enim factum fuerit $W = o$, tum quoque omnes huiusmodi formulae $P^3 + \alpha W$ fient cubi, et hae $P^4 + \alpha W$ biquadrata et ita porro, quaecunque etiam quantitates pro P accipiantur.

Scholion. 1.

7. Ratio quidem huius lemmatis tam est obuia, vt id nihil in recessu habere videatur: si enim P, Q, R, etc.

etc. cum W fuerint functiones quaecunque litterarum z, y, x etc. harumque valores quaerantur, quibus sequentes formulae:

$$PP + \alpha W; \; QQ + \beta W; \; RR + \gamma W \text{ etc.}$$

fiant quadrata, statim vtique in oculos incurrit, his omnibus conditionibus satisfieri, dum modo haec vna $W = o$ adimpleatur: verum plerumque ratio talis compositionis in formulis propositis tam est occulta, vt difficillimum sit eam quantitatem W assignare, qua deleta partes residuae formularum sponte fiant quadrata. Quin etiam non adeo foret difficile hanc compositionem ita abscondere, vt eius inuestigatio iam per se arduum problema constitueret. Vicissim autem data aequatione $W = o$, operam haud inutiliter collocari arbitror, si formulae simpliciores inuestigentur, quae tum in quadrata abibunt; hoc enim modo plurima insignia et concinna reperientur problemata, quorum solutio erit in promtu, cuiusmodi est id, cuius supra mentio est facta. Hunc in finem aequationem $W = o$ talem assumi conueniet, vt litterae z, y, etc. in eam aequaliter ingrediantur, atque inter se permutari patiantur; tum enim si PP eiusmodi fuerit quadratum, vt sit $PP + \alpha W$ quadratum, permutandis litteris z, y, x etc in PP, vnde prodeant QQ, RR etc. etiam $QQ + \alpha W$, et $RR + \alpha W$ fient quadrata.

Scholion. 2.

8. Duplex ergo hinc nascitur tractationis nostrae partitio, primam scilicet constituet litterarum z, y, x etc.

 circa

circa quas quaestio versatur, numerus, prouti duo, vel tres, vel plures quaeruntur numeri, qui datis conditionibus sint praediti. Alteram partitionem suppeditabit dimensionum numerus, ad quem litterae z, y, x etc. in aequatione $W = 0$ assurgunt; quae aequatio cum ita debeat esse comparata, vt resolutionem admittat, nullius quantitatum altior potestas quam secunda occurrere debet, quia alioquin resolutio in numeris rationalibus absolui non posset. Quare generalis forma aequationis $W = 0$, quam hic tractabimus erit:

$$\begin{aligned} 0 = \alpha &+ \beta(z + y + x + \text{etc.}) + \gamma(zy + zx + yx + \text{etc.}) \\ &+ \delta(zz + yy + xx + \text{etc.}) + \varepsilon(zzy + zyy + zzx \\ &+ zxx + \text{etc.}) + \zeta(zyx + \text{etc.}) + \eta(zzyy + zzxx \\ &+ yyxx + \text{etc.}) + \theta(zzyx + zyyx + \text{etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quandoquidem numeri z, y, x, etc. in ea debent esse permutabiles. Secundum hanc duplicem ergo partitionem sequentia problemata contemplemur, ab iis inchoaturi, in quibus duo numeri z et y quaerendi proponuntur.

Problema I.

9. *Proposita hac aequatione resoluenda:*

$$\alpha = \beta(z + y)$$

inuenio formulas simpliciores, quae per eius resolutionem redduntur quadrata.

SOLV-

Solutio.

Cum huic aequationi $\alpha = \beta(z+y)$ fuerit satisfactum, manifestum est, simul hanc formam generalem

$$PP + M(-\alpha + \beta(y+z))$$

fieri quadratum, quaecunque quantitates pro P et M accipiantur. Quia β euanescere nequit, ponamus $\beta = 1$, vt inter y et z haec subsistat relatio $y+z=a$, sitque

$$PP + M(y+z-a) = \text{Quadrato}$$

vnde sequentes casus notatu dignos euoluamus.

I. Sit $M=2$ erit $PP+2y+2z-2a=$ Quadrato. Capiatur $P=y-1$ erit

1) $yy+2z+1-2a=\square$ et permutatione facta

2) $zz+2y+1-2a=\square$.

Capiatur $P=y+z-1$ erit

3) $(y+z)^2+1-2a=\square$.

Capiatur $P=y-z+1$ erit

4) $(y-z)^2+4y+1-2a=\square$.

5) $(y-z)^2+4z+1-2a=\square$.

II. Sit $M=-2$ vnde $PP-2y-2z+2a=$ Quadrato. Capiatur $P=y+1$ seu $P=z+1$ erit

6) $yy-2z+1+2a=\square$.

7) $zz-2y+1+2a=\square$.

Capiatur $P=y+z+1$ erit

8) $(y+z)^2+1+2a=\square$.

Capia

Capiatur $P = y - z + 1$ erit

9) $(y-z)^2 - 4z + 1 + 2a = \square$.

10) $(y-z)^2 - 4y + 1 + 2a = \square$.

III. Sit $M = 2n$, vnde $PP + 2ny + 2nz - 2na =$ Quadrato, atque non solum formulae praecedentes, sed infinitae aliae, orientur.

Capiatur $P = y - n$ et $P = z - n$ erit

11) $yy + 2nz + nn - 2na = \square$.

12) $zz + 2ny + nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y - 2n$ et $P = z - 2n$ erit

13) $yy - 2ny + 2nz + 4nn - 2na = \square$.

14) $zz - 2nz + 2ny + 4nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y + z - n$ erit

15) $(y+z)^2 + nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y + z - 2n$ erit

16) $(y+z)^2 - 2n(y+z) + 4nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y - z - n$ erit

17) $(y-z)^2 + 4nz + nn - 2na = \square$.

18) $(y-z)^2 + 4ny + nn - 2na = \square$.

IV. Sit $M = -y$ vnde $PP - yy - yz + ay =$ Quadrato.

Capiatur $P = y$ erit

19) $-yz + ay = \square$.

20) $-yz + az = \square$.

Capiatur $P = y - \frac{1}{2}a$ erit

21) $-yz + \frac{1}{4}aa = \square$.

Capia-

Capiatur $P = y + z$, erit

22) $zz + yz + ay = \square$

23) $yy + yz + az = \square$

Capiatur $P = y + z - \frac{1}{4}a$, erit

24) $zz + yz + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa = \square$

25) $yy + yz + \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{16}aa = \square$

V. Sit $M = -z - y$, vnde $PP - (y+z)^2 + a(y+z) =$ Quadrato.

Capiatur $P = y + z$, erit

26) $ay + az = \square$

Capiatur $P = y + z - a$, erit

27) $aa - ay - az = \square$

Capiatur $P = y - z$, erit

28) $-4yz + a(y+z) = \square$

Capiatur $P = y - z - \frac{1}{2}a$, erit

29) $-4yz + 2az + \frac{1}{4}aa = \square$

30) $-4yz + 2ay + \frac{1}{4}aa = \square$

Capiatur $P = y - \frac{1}{2}a$, erit

31) $-zz - 2yz + az + \frac{1}{4}aa = \square$

32) $-yy - 2yz + ay + \frac{1}{4}aa = \square$

VI. Sit $M = (y+z+a)$; vnde $PP + (y+z)^2 - aa =$ Quadrato.

Capiatur $P = yz - 1$, erit

33) $yyzz + yy + zz + 1 - aa = \square$

VII. Sit $M = n(y+z+a)$; vnde $PP + n(y+z)^2 - naa =$ Quadrato.

Capiatur $P = yz - n$, erit

34) $yyzz + nyy + nzz + nn - naa = \square$

VIII. Sit $M = (y + z + a)(y - z + a)(z - y + a)$, vnde fit
$PP - y^4 - z^4 - a^4 + 2yyzz + 2aayy + 2aazz =$ Quadrato.

Capiatur $P = yy - zz$, erit

35) $2yy + 2zz - aa = \square$

Capiatur $P = yy + zz + aa$, erit

36) $yyzz + aayy + aazz = \square$

IX. Sit $M = 3(y + z + a)(y - z + a)(z - y + a)$, vnde fit
$PP - 3y^4 - 3z^4 - 3a^4 + 6yyzz + 6aayy + 6aazz =$ Quadrato.

Capiatur $P = 2yy + 2zz + 2aa$, erit

37) $y^4 + z^4 + 14yyzz + 14aayy + 14aazz + a^4 = \square$

Capiatur $P = 2yy + 2zz - 2aa$, erit

38) $y^4 + z^4 + a^4 + 14yyzz - 2aayy - 2aazz = \square$

39) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz + 14aayy - 2aazz = \square$

40) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy + 14aazz = \square$

X. Sit generalius $M = (nn - 1)(y + z + a)(y - z + a)$
$(z - y + a)$, vnde fit

$PP - (nn - 1)(y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy - 2aazz) =$ Quadrato.

Capiatur $P = n(yy + zz + aa)$, erit

41) $y^4 + z^4 + a^4 + 2(2nn - 1)(yyzz + aayy + aazz) = \square$

Capiatur $P = n(yy + zz - aa)$, erit

42) $y^4 + z^4 + a^4 + 2(2nn - 1)yyzz - 2aayy - 2aazz = \square$

43) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz + 2(2nn - 1)aayy - 2aazz = \square$

44) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy + 2(2nn - 1)aazz = \square$.

COROL.

Coroll. 1.

10. Ex his satis intelligitur infinitas exhiberi posse formulas, quae omnes per eandem relationem aequatione $y + z = a$ contentam in numeros quadratos abeant. Quotcunque ergo formulae proponantur ad quadrata reducendae, dummodo illae in his erutis contineantur, omnibus simul satisfiet ponendo $y + z = a$.

Coroll. 2.

11. Ita si a sit $= 1$: sequentibus formulis omnibus: $yy + 4z = \square$; $yy - y + z = \square$; $y + z = \square$; $y - yz = \square$ $zz + 4y = \square$; $zz - z + y = \square$; $(y + z)^2 - 1 = \square$; $z - yz = \square$ $yyzz + yy + zz = \square$; $2yy + 2zz - 1 = \square$ satis fit ponendo $y + z = 1$ seu $y = 1 - z$.

Coroll. 3.

12. Imprimis hic notanda est forma $yyzz + yy + zz$, quae in quadratum transit, si capiatur $y = 1 - z$, vel magis generaliter $y = \pm 1 \pm z$. Solutio haec apud Diophantum frequentissime occurrit, cuius fundamentum in porismate quodam constituit, pluraque affert problemata, quae eius beneficio resoluuntur.

Coroll. 4.

13. Simili modo haec forma latius patens $yyzz + aayy + aazz$ redditur quadratum, ponendo $y = \pm a \pm z$. Atque haec eadem positio facit etiam hanc

hanc formam $yyzz+nyy+nzz+nn-naa$ quadratum, quicunque numerus pro n assumatur. Vnde si $a=1$, haec forma $yyzz+nyy+nzz+nn-n$ siue haec: $(yy+n)(zz+n)-n$, fit quadratum, ponendo $z=y\pm 1$. Quod etiam est insigne porisma Diophanti.

Scholion.

14. Omni attentione vtique dignum est, quod tam leui opera pluribus conditionibus simul satisfieri possit, cum quaelibet conditio peculiarem operationem exigere videatur. Quin etiam hic eiusmodi formulae occurrunt, quae si solae proponerentur, per methodos consuetas non nisi difficulter resolui possent, cuiusmodi est haec:

$y^4+z^4+a^4+14yyzz+14aayy+14aazz=$ Quadrato.

cuius solutio si more consueto tentetur, non exiguis difficultatibus implicata deprehenditur: ex quo si praeterea aliae conditiones praescribantur, quibus simul satisfieri oporteat, quaestio non immerito plus quam determinata, ac vires analyseos transcendens videri debet. Continetur ergo in euolutione huius problematis iam porisma amplissimum, quod in Analysi Diophantaea summum habet vsum, quod cum natum sit ex positione simplicissima $z+y=a$, ita formulae magis compositae nos ad profundiora ac magis recondita porismata manuducent.

Problema 2.

15. Proposita hac aequatione resoluenda:

$$yz-a(y+z)+b=0$$

inue-

inuenire formulas notabiliores, quae per eius resolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

Sumta relatione inter numeros y et z ex hac aequatione

$$yz - a(y+z) + b = 0$$

haec forma generalis $PP + M(yz - a(y+z) + b)$ euadet quadratum: cuius ergo species notabiliores euoluamus.

I. Sit $M = 2$, vt habeatur

$$PP + 2yz - 2a(y+z) + 2b = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = y - z$, eritque

$$1)\ yy + zz - 2a(y+z) + 2b = \square$$

Capiatur $P = y - z + a$, erit

$$2)\ yy + zz - 4az + 2b + aa = \square$$

$$3)\ yy + zz - 4ay + 2b + aa = \square$$

II. Sit $M = -2$, vt habeatur

$$PP - 2yz + 2a(y+z) - 2b = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = y + z$, erit

$$4)\ yy + zz + 2a(y+z) - 2b = \square$$

Capiatur $P = y + z - a$, erit

$$5)\ yy + zz + aa - 2b = \square$$

III. Sit $M = 2n$, vt habeatur

$$PP + 2nyz - 2na(y+z) + 2nb = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = yz - n$, erit

$$6)\ yyzz - 2n\,a(y+z) + 2nb + nn = \square$$

Capiatur $P = y + z + na$, erit

$$7)\ yy + zz + 2(n+1)yz + nnaa + 2nb = \square$$

IV. sit $M = yz + a(y+z) - b$, vt habeatur

$$PP + yyzz - aa(y+z)^2 + (b-b)y + a(b+b)(y+z) - bb = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = m(y+z) + n$, vt sit

$$\begin{aligned} yyzz + (mm-aa)(y+z)^2 + (b-b)yz + 2mn(y+z) + nn = \text{Quadrato.} \\ + a(b+b)(y+z) - bb \end{aligned}$$

Fiat $mn = -\frac{1}{2}a(b+b)$ et $2(mm-aa) + b - b = o$, siue

$n = \frac{a}{m}(aa - mm - b)$ et $b = b + 2(mm - aa)$, erit

$$\begin{aligned} 8)\ yyzz + (mm-aa)(yy+zz) + \tfrac{aa-mm}{mm}(bb + (aa-2b) \\ (aa-mm)) = \square. \end{aligned}$$

Coroll. I.

16. Hinc in aequatione canonica $yz - a(y+z) + b = o$ litterae a et b ita determinari possunt, vt haec forma

$$yyzz + cc(yy+zz)\ \text{fiat quadratum.}$$

Capiatur enim $mm = aa + cc$, et fiat $bb + 2bcc - aacc = o$ seu $b = -cc \pm c\sqrt{(aa+cc)}$. Quare pro a eiusmodi sumatur numerus, vt $aa + cc$ fiat quadratum, tumque erit

$$yz - a(y+z) - cc \pm c\sqrt{(aa+cc)} = o,\ \text{siue}$$

$$(y-a)(z-a) = aa + cc \pm c\sqrt{(aa+cc)}$$

At vero hinc conficietur:

$$\sqrt{(yyzz + ccyy + cczz)} = (y+z)\sqrt{(aa+cc)} - ac$$

COROL.

Coroll. 2.

17. Ad formam ergo $yyzz+ccyy+cczz$ quadratum reddendam ſumatur primum numerus a, vt $\sqrt{(aa+cc)}$ fiat rationale, eritque tum

$$z=\frac{ay+cc\pm c\sqrt{(aa+cc)}}{y-a}$$

Haec autem ſolutio ſimul praecedentem eiusdem formae in ſe complectitur, caſu, quo a capitur infinitum, tum enim oritur $z=-y\pm c$, omnino vt ante, ideoque haec ſolutio latius patet quam illa.

Coroll. 3.

18. Si in forma (8) nulla limitatio fiat, ita vt aequatio propoſita $yz-a(y+z)+b=o$ generatim valeat, ea etiam hoc modo referri poteſt

$$(yy+mm-aa)(zz+mm-aa)-\frac{(mm-aa)}{mm}(mm-aa+b)^2=\text{Quadrato.}$$

Quare poſito $mm-aa=p$ et $b+p=m=\sqrt{(aa+p)}$, haec aequatio : $(yy+p)(zz+p)=VV+p$ reſoluetur hac determinatione $yz-a(y+z)-p+\sqrt{(aa+p}=o$ dummodo pro a talis accipiatur numerus, quo $aa+p$ fiat quadratum.

Coroll. 4.

19. Si ſtatuatur $\frac{b+p}{m}=q$ ſeu $b=-p+q\sqrt{(aa+p)}$, vt fit

$$yz-a(y+z)-p+q\sqrt{(aa+p)}=o$$

hac

hac determinatione, ſi modo $aa+p$ fuerit quadratum, ſatisfiet huic conditioni

$$(yy+p)(zz+p)=VV+pqq$$

erit autem $V=(y+z)\sqrt{(aa+p)}-aq$

Coroll. 5.

20. Hinc ſi dato numero p quaerantur numeri y et z vt fiat $(yy+p)(zz+p)=$ Quadrato, poſito $q=o$, huic conditioni ſatisfiet ſtatuendo $yz-a(y+z)-p=o$, exiſtente $aa+p$ numero quadrato. Seu ſumatur $(y-a)(z-a)=aa+p$, vnde ſi $aa+p$ in factores reſoluatur, commode ambo numeri y et z definiuntur.

Coroll. 6.

21. Si ſit $a=o$, forma (8) fiet:

$$yyzz+mm(yy+zz)-bb-2mmb=\square$$

quae conditio ergo adimplebitur hac aequatione $yz+b=o$. Facto ergo $b=-2mm$, iſta formula

$$yyzz+mmyy+mmzz \text{ reddetur quadratum,}$$

ſumendo $yz=2mm$, quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

Problema 3.

22. Propoſita aequatione reſoluenda

$$yy+zz-2nyz-a=o$$

Inuenire formulas notabiliores, quae per eam redduntur quadrata

SOLV-

Solutio.

Hinc ergo ista forma generalis erit quadratum

$PP + M(yy + zz - 2nyz - a) = $ Quadrato.

I. Sit $M = -1$ et $P = y \pm z$, erit

1) $2(n+1)yz + a = \square$

2) $2(n-1)yz + a = \square$

II. Sit $M = m$ et $P = yz + mn$, erit

3) $yyzz + myy + mzz - ma + mmnn = \square$

III. Sit $M = 2nyz$ et $P = 2nyz$, erit

4) $2nyz(yy + zz) - 2nayz = \square$

IV. Sit $M = -zz$ et $P = zz + nyz + \frac{1}{2}a$, erit

5) $(nn-1)yyzz + nayz + \frac{1}{4}aa = \square$

Coroll. 1.

23. Si ponamus $a = mnn$, peruenimus ad hanc formam:

$yyzz + myy + mzz$

quae ergo redditur quadratum, per hanc aequationem:

$yy + zz - 2nyz - mnn = 0$

vnde fit $z = ny \pm \sqrt{((nn-1)yy + mnn)}$

Quare pro y talis numerus assumi debet, vt $(nn-1)yy + mnn$ fiat quadratum.

Coroll. 2.

24. Quoniam hic numerus n arbitrio nostro relinquitur, sumatur talis, vt $nn-1$ prodeat quadratum,

sic enim commodissime forma $(nn-1)yy+mnn$ ad quadratum reducetur: capiatur scilicet $n=\frac{kk+1}{2k}$.

Scholion.

25. Hisce formulis, quae duas indeterminatas involuunt, fusius non immoror, quoniam ex allatis perspicuum est, quomodo huiusmodi formularum inuestigationem in infinitum extendere liceat. Pergo ergo ad tres indeterminatas, vbi plurima egregia porismata occurrunt, quorum praecipua hic explicabo.

Problema 4.

26. Proposita hac aequatione resoluenda:

$$a=x+y+z$$

definire formulas notabiliores, quae per eius resolutionem quadrata redduntur.

Solutio.

Quadratum ergo generatim erit haec forma:

$$PP+M(x+y+z-a)$$

Sit $M=2n$, vt fiat:

$$PP+2n(x+y+z)-2na=\square$$

Capiatur $P=x-n$, erit:

1) $xx+2n(y+z)+nn-2na=\square$

2) $yy+2n(x+z)+nn-2na=\square$

3) $zz+2n(x+y)+nn-2na=\square$

Capiatur $P=x+y-n$, erit:

4) $(x+y)^2+2nz+nn-2na=\square$

5) $(x+z)^2+2ny+nn-2na=\square$

6) $(y+z)^2+2nx+nn-2na=\square$

Sit

Sit $M = 2nxy$ et $P = xy - nx - ny$, erit

7) $xxyy + 2nxyz + nnxx + nnyy + 2nnxy - 2naxy = \square$

8) $xxzz + 2nxyz + nnxx + nnzz + 2n(n-a)xz = \square$

9) $yyzz + 2nxyz + nnyy + nnzz + 2n(n-a)yz = \square$

Sit $M = -(a + x + y + z)$ et $P = x + y - z$, erit

10) $aa - 4xz - 4yz = \square$

11) $aa - 4xy - 4yz = \square$

12) $aa - 4xy - 4xz = \square$

Sit $M = -n(a + x + y + z)$ et $P = xy + xz + yz + n$, erit

13) $(xy + xz + yz)^2 - n(xx + yy + zz) + nn + naa = \square$.

Coroll. 1.

27. Sit $n = 2a$; et $a = \frac{1}{4}$, atque his conditionibus:

$$xx + y + z = \square \quad (x + y)^2 + z = \square$$
$$yy + x + z = \square \quad (x + z)^2 + y = \square$$
$$zz + x + y = \square \quad (y + z)^2 + x = \square$$

satisfiet ponendo $x + y + z = \frac{1}{4}$.

Coroll. 2.

28. Sit $n = 1 = a$, atque his conditionibus:

$$xxyy + 2xyz + xx + yy = \square$$
$$xxzz + 2xyz + xx + zz = \square$$
$$yyzz + 2xyz + yy + zz = \square$$

satisfiet ponendo $x + y + z = 1$.

Coroll. 3.

29. Sit $a=2$, atque his conditionibus

$$1-xz-yz=\square$$
$$1-xy-yz=\square$$
$$1-xy-xz=\square$$

ſatisfiet ponendo $x+y+z=2$.

Problema 5.

30. Propoſita hac aequatione reſoluenda

$$xy+xz+yz=a(n+y+z)+b$$

definire formulas notabiliores, quae per eius reſolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

Erit ergo in genere haec formula:

$$PP+M(xy+xz+yz)-a(x+y+z)-b)=\text{Quadrato.}$$

Sit $M=2$, vt habeatur:

$$PP+2(xy+xz+yz)-2a(x+y+z)-2b=\text{Quadrato.}$$

Capiatur $P=x+y+z+a$, erit

1) $xx+yy+zz+4(xy+xz+yz)+aa-2b=$ Quadrato.

Capiatur $P=x+y-z+a$, erit

2) $xx+yy+zz+4xy-4az+aa-2b=\square$

3) $xx+yy+zz+4xz-4ay+aa-2b=\square$

4) $xx+yy+zz+4yz-4ax+aa-2b=\square$

Capiatur $P=x-y$, erit

5) $xx+yy+2(x+y)z-2a(x+y+z)-2b=\square$

6) $xx+zz+2(x+z)y-2a(x+y+z)-2b=\square$

7) $yy+zz+2(y+z)x-2a(x+y+z)-2b=\square$

Sit

Sit $M = -2$ et $P = x + y + z - a$, erit

8) $xx + yy + zz + aa + 2b = \square$.

Problema 6.

31. Proposita hac aequatione

$$xx + yy + zz = 2xy + 2xz + 2yz + a$$

definire formulas simpliciores, quae per eius resolutionem quadrata redduntur.

Solutio.

In genere ergo haec formula erit:

$$PP + M(xx + yy + zz - 2xy - 2xz - 2yz - a) = \text{Quadrato}.$$

Sit $M = -1$, ac ponatur $P = x + y + z$, erit

1) $4xy + 4xz + 4yz + a = \square$

Sit $M = -1$ et $P = x \mp y - z$, erit

2) $4xy + a = \square$

3) $4xz + a = \square$

4) $4yz + a = \square$

Sit $M = -1$ et $P = x - y$, erit

5) $a + 2(x + y)z - zz = \square$

6) $a + 2(x + z)y - yy = \square$

7) $a + 2(y + z)x - xx = \square$.

Coroll. 1.

32. Posito $a = 4n$, vt sit $xx + yy + zz = 2xy + 2xz + 2yz + 4n$, fient simul sequentes formulae quadrata.

$$\begin{array}{l} xy+n=\square \\ xz+n=\square \quad \text{et} \quad xy+xz+yz+n=\square \\ yz+n=\square \end{array}$$

Vnde haec elegans quaestio Diophantea resoluitur

Dato numero quocunque n, inuenire tres numeros, vt producta ex binis singula, illo numero aucta, fiant quadrata, quibus conditionibus adiungi potest haec, vt summa productorum ex binis eodem numero aucta quoque fiat quadratum.

Coroll. 2.

33. Cum enim ex aequatione sit:

$$z=x+y\pm 2\sqrt{(xy+n)}$$

sumantur pro x et y tales numeri, quibus $xy+n$ reddatur quadratum, puta $xy+n=uu$; indeque elicietur duplex valor pro numero z, scilicet $z=x+y\pm 2u$, quorum vterque cum x et y omnibus conditionibus aeque satisfacit,

Coroll. 3.

34. Cum autem sit $\sqrt{(xy+n)}=u$, erunt, sumto tertio numero $z=x+y+2u$, reliquae formulae

$$\sqrt{(xz+n)}=\frac{x+z-y}{2}=x+u$$

$$\sqrt{(yz+n)}=\frac{y+z-x}{2}=y+u$$

$$\sqrt{(xy+xz+yz+n)}=\frac{x+y+z}{2}=x+y+u.$$

Problema 7.

35. Proposita hac aequatione:

$$xx+yyzz=2xy+2yz+2xz+2a(x+y+z)+b$$

definire

definire formulas notabiliores, quae per eius resolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

In genere ergo quadratum erit haec forma:

$$PP + M(xx + yy + zz - 2xy - 2yz - 2xz - 2a(x+y+z) - b)$$

Sit $M = -1$ et capiatur $P = x + y + z + a$, erit

1) $4xy + 4xz + 4yz + 4a(x+y+z) + aa + b = \square$

Capiatur $P = x + y + z - a$, erit

2) $4xy + 4xz + 4yz + aa + b = \square$

Capiatur $P = x + y - z + a$, erit

3) $4xy + 4a(x+y) + aa + b = \square$

4) $4xz + 4a(x+z) + aa + b = \square$

5) $4yz + 4a(y+z) + aa + b = \square$

Capiatur $P = x + y - z - a$, erit

6) $4xy + 4az + aa + b = \square$

7) $4xz + 4ay + aa + b = \square$

8) $4yz + 4ax + aa + b = \square$.

Coroll. 1.

36. Ad formulas has facillime soluendas, ponatur tertia $4xy + 4a(x+y) + aa + b$, aequalis quadrato cuipiam uu et ob $4(x+a)(y+a) = uu - b + 3aa$,

seu $(x+a)(y+a) = \frac{1}{4}(uu - b + 3aa)$

Ex factoribus numeri $\frac{1}{4}(uu - b + 3aa)$ commodissime definiuntur numeri duo x et y; tertius autem z colligitur ex ex formae tertiae radice quadrata $x+y-z+a$, quae ergo eſt $=u$, vnde fit $z=x+y+a\pm u$.

Coroll. 2.

37) Si fit $b=-aa$, per reſolutionem huius aequationis

$$xx+yy+zz=2xy+2yz+2xz+2a(x+y+z)-aa$$

ſequentes formulae omnes in quadrata abibunt:

$$xy+a(x+y)=\square;\ xy+az=\square$$
$$xz+a(x+z)=\square;\ xz+ay=\square$$
$$yz+a(y+z)=\square;\ yz+ax=\square$$
$$xy+xz+yz=\square$$
$$xy+xz+yz+a(x+y+z)=\square$$

Satisfiet autem ſumendo:

$$z=x+y+a\pm 2\sqrt{(xy+a(x+y))}=x+y+a\pm 2u$$

poſito $(x+a)(y+a)=uu+aa$.

Coroll. 3.

38. In hoc Coroll. continetur illud ipſum Problema, cuius initio feci mentionem; ſi quidem ponatur $a=1$. Atque ex iisdem formulis ſolui quoque poteſt quaeſtio, in qua ipſi numeri x, y, z quadrati eſſe debent, cuius ſolutionem hic ſubiungam.

Quaeſtio.

39. *Inuenire tres numeros quadratos, vt ad productum binorum, ſiue eorumdem ſumma, ſiue reliquus addatur, quadratum prodeat, atque vt inſuper tam ſumma*

summa productorum ex binis ipsa, quam eadem, summa numerorum aucta, fiat quadratum.

Positis ergo xx, yy, zz quadratis, qui quaeruntur, sequentes formulas quadrata reddi oportet.

$$xxyy+xx+yy=\square;\quad xxyy+zz=\square$$
$$xxzz+xx+zz=\square;\quad xxzz+yy=\square$$
$$yyzz+yy+zz=\square;\quad yyzz+xx=\square$$
$$xxyy+xxzz+yyzz=\square$$
$$xxyy+xxzz+yyzz+xx+yy+zz=\square.$$

His autem omnibus satisfit, dummodo statuatur

$$zz=xx+yy+1\pm 2\sqrt{(xxyy+xx+yy)}.$$

Supra autem vidimus, formam $xxyy+xx+yy$ quadratum fieri, si ponatur $y=x+1$. Sit igitur $y=x+1$, eritque

$$zz=2xx+2x+2\pm 2\sqrt{(x^4+2x^3+3xx+2x+1)} \text{ seu}$$
$$zz=4(xx+x+1).$$

Tantum ergo superest, vt $xx+x+1$ reddatur quadratum, quod posita radice $-x+t$ praebet

$$x=\frac{tt-1}{2t+1};\ \text{et}\ \sqrt{(xx+x+1)}=\frac{tt+t+1}{2t+1}$$

vnde fit $z=2\sqrt{(xx+x+1)}=\frac{2(tt+t+1)}{2t+1}$.

Quadratorum ergo trium quaesitorum radices sunt:

$$x=\frac{tt-1}{2t+1},\ y=\frac{tt+2t}{2t+1};\ z=\frac{2tt+2t+2}{2t+1}$$

Vel quo facilius pro t fractiones capi queant, statuatur

$t=\frac{r-q}{2q}$, eruntque hae radices

$$x=\frac{3qq+2qr-rr}{4qr};\ y=\frac{rr+2qr-3qq}{4qr};\ z=\frac{rr+3qq}{2qr}$$

vnde ſumto $r = 2$ et $q = 1$, oriuntur hi valores

$$x = \tfrac{3}{8};\ y = \tfrac{5}{8},\ z = \tfrac{7}{4}$$

quibus ſolutio ſupra tradita continetur. Simplicior forſitaſſe ſolutio eſt:

$$x = \tfrac{3}{5},\ y = \tfrac{8}{5} \text{ et } z = \tfrac{14}{5}.$$

Scholion.

40. His praeceptis obſeruandis facile erit numerum talium formularum pro lubitu multiplicare, easque tam ad quatuor indeterminatas, quam ad formas magis compoſitas, extendere. Quin etiam ſimili modo plures formae exhiberi poterunt, quae per certam poſitionem cubi redduntur; ſed quoniam in iis non amplius tanta cernitur concinnitas, hanc meditationem finiendam eſſe cenſeo, cum id, quod mihi praecipue erat propoſitum, vt nouum Analyſeos Diophanteae ſupplementum producerem, abunde explicauerim.

DE