1760

De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda

Leonhard Euler

DE APTISSIMA FIGVRA ROTARVM DENTIBVS TRIBVENDA.

AVCTORE
L. EVLERO.

Quando in machinis vna rota ab alia ope dentium mouetur duae res requiri ſolent, quibus ſatisfieri oportet:

Primo, vt, dum vna rota motu vniformi gyratur, alterius rotae motus pariter fiat vniformis.

Ac deinde, vt in mutua dentium actione nullus attritus oriatur.

Quibus conditionibus vt ſatisfiat, ſint A et B centra rotarum, quarum altera alteram ad motum concitet, ſintque EM et FM dentes, qui nunc in ſe mutuo agunt, puncto contactus exiſtente M. Tab. III. Fig. 2.

Ductis ad apices vtriusque dentis rectis AE et BF vocetur $AB = a$, angulus $BAE = \phi$, et angulus $ABF = \psi$. Iam dum rota A vnam facit reuolutionem, altera rota B abſoluat n reuolutiones, et ob vtriusque motus vniformitatem debet eſſe $d\psi = n d\phi$.

Porro ex puncto contactus M ducantur ad axes ordinatae MP et MQ, itemque tangens communis SMRT, ac vocentur:

$$AP = x;\ PM = y;\ BQ = t;\ \text{et}\ QM = u.$$

tum demisso ex M ad AB perpendiculo MV erit

$$AV = x\,\text{cof.}\,\Phi - y\,\text{fin}\,\Phi\,;\quad MV = x\,\text{fin.}\,\Phi + y\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$BV = t\,\text{cof.}\,\psi + u\,\text{fin.}\,\Phi\,;\quad MV = t\,\text{fin.}\,\psi - u\,\text{cof.}\,\psi$$

vnde obtinemus:

$$t\,\text{cof.}\,\psi + u\,\text{fin.}\,\psi = a - x\,\text{cof.}\,\Phi + y\,\text{fin.}\,\Phi$$
$$t\,\text{fin.}\,\psi - u\,\text{cof.}\,\psi = \quad x\,\text{fin.}\,\Phi + y\,\text{cof.}\,\Phi$$

ex quibus aequationibus elicimus:

$$t = a\,\text{cof.}\,\psi - x\,\text{cof.}\,(\Phi+\psi) + y\,\text{fin.}\,(\Phi+\psi)$$
$$u = a\,\text{fin.}\,\psi - x\,\text{fin.}\,(\Phi+\psi) - y\,\text{cof.}\,(\Phi+\psi)$$

Deinde ob communem tangentem erit

$PR = \frac{-y\,dx}{dy}$ et $QS = \frac{-u\,dt}{du}$ indeque tang. $ARM = \frac{-dy}{dx}$ et tang. $BSM = \frac{-du}{dt}$

At cum sit $ATM = ARM - \Phi = BSM + \psi$, erit tang. $(ARM - BSM) =$ tang. $(\Phi + \psi)$ ideoque

$$\text{tang.}\,(\Phi+\psi) = \left(-\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dt}\right) : \left(1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{du}{dt}\right)$$

Denique ne vllus fiat attritus, necesse est vt sit arcuum summa $EM + FM =$ const. seu $\sqrt{(dx^2+dy^2)} + \sqrt{(dt^2+du^2)} = 0$, ideoque $dx^2 + dy^2 = dt^2 + du^2$. Hanc ob rem habebimus fin. $(\Phi+\psi) = \frac{dy\,dt - dx\,du}{dx^2+dy^2}$ et cof. $(\Phi+\psi) = \frac{-dx\,dt - dy\,du}{dx^2+dy^2}$

At vero est

$$dt = -n\,a\,d\Phi\,\text{fin.}\,\psi + (n+1)\,x\,d\Phi\,\text{fin.}\,(\Phi+\psi) + (n+1)\,y\,d\Phi\,\text{cof.}\,(\Phi+\psi) - dx\,\text{cof}\,(\Phi+\psi) + dy\,\text{fin.}\,(\Phi+\psi)$$
$$du = n\,a\,d\Phi\,\text{cof.}\,\psi - (n+1)\,x\,d\Phi\,\text{cof.}\,(\Phi+\psi) + (n+1)\,y\,d\Phi\,\text{fin.}\,(\Phi+\psi) - dx\,\text{fin.}\,(\Phi+\psi) - dy\,\text{cof.}\,(\Phi+\psi)$$

Ergo

Ergo illae aequationes praebent

$$(dx^2+dy^2)\sin.(\Phi+\psi) = -nad\Phi(dy\sin.\psi+dx\cos.\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdy-ydx)\sin.(\Phi+\psi)+(dx^2+dy^2)\sin.(\Phi+\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdx+ydx)\cos(\Phi+\psi)$$
$$(dx^2+dy^2)\cos.(\Phi+\psi) = nad\Phi(dx\sin.\psi-dy\cos.\psi)$$
$$-(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\sin.(\Phi+\psi)+(dx^2+dy^2)\cos.(\Phi+\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdy-ydx)\cos.(\Phi+\psi)$$

sicque per $d\Phi$ diuidendo obtinemus has duas aequationes

$$\tfrac{na}{n+1}(dy\sin.\psi+dx\cos.\psi) = (xdy-ydx)\sin.(\Phi+\psi)$$
$$+(xdx+ydy)\cos.(\Phi+\psi)$$
$$\tfrac{na}{n+1}(dy\cos.\psi-dx\sin.\psi) = (xdy-ydx)\cos.(\Phi+\psi)$$
$$-(xdx+ydy)\sin.(\Phi+\psi)$$

vnde porro elicimus istas:

$$xdy-ydx = \tfrac{na}{n+1}(dy\cos.\Phi+dx\sin.\Phi)$$
$$xdx+ydy = \tfrac{na}{n+1}(dx\cos.\Phi-dy\sin.\Phi)$$

Hinc autem prodit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(n+1)y+na\sin.\Phi}{(n+1)x-na\cos.\Phi} = \frac{na\cos.\Phi-(n+1)x}{(n+1)y+na\sin.\Phi}$$

ideoque $((n+1)y+na\sin.\Phi)^2+((n+1)x-na\cos.\Phi)^2=0$, cui aequationi aliter satisfieri nequit, nisi ponendo

$$y = -\tfrac{na}{n+1}\sin.\Phi \quad \text{et} \quad x = \tfrac{na}{n+1}\cos.\Phi$$

vnde fit

$$u = \tfrac{a}{n+1}\sin\psi \quad \text{et} \quad t = \tfrac{a}{n+1}\cos.\psi$$

sicque prodirent duae rotae dentibus destitutae: ac propter ea fieri nequit, vt vtrique conditioni praescriptae satisfiat.

Quodſi ergo alteram conditionem attritus negligamus perueniemus ad hanc aequationem vnicam :

$$\left.\begin{array}{l} -nad\Phi(dy\,\text{ſin.}\,\psi+dx\,\text{coſ.}\,\psi)\,\text{coſ.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdy-ydx) \\ \text{ſin.}(\Phi+\psi)\,\text{coſ.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\,\text{coſ.}(\Phi+\psi)^2 \\ -nad\Phi(dx\,\text{ſin.}\,\psi-dy\,\text{coſ.}\,\psi)\,\text{ſin.}(\Phi+\psi)-(n+1)d\Phi(xdy-ydx) \\ \text{ſin.}(\Phi+\psi)\,\text{coſ}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\,\text{ſin.}(\Phi+\psi)^3 \end{array}\right\}=0$$

$$\text{ſeu}\ \frac{na}{n+1}(dx\,\text{coſ.}\,\Phi-dy\,\text{ſin.}\,\Phi)=xdx+ydy$$

Data ergo pro lubitu aequatione inter x et y, hinc tam x quam y per angulum Φ exprimi poterit, indeque determinabitur ſimul altera curua inter t et u.

Quoniam autem fieri nequit, vt motus vtriusque rotae reddatur vniformis, ſimulque attritus in contactu dentium mutuo euitetur, videndum eſt, vtri harum duarum conditionum potius ſatisfieri conueniat, altera neglecta. Ac primo quidem, quod ad attritum attinet, dubium eſt nullum, quin omnis generis machinae, quae rotis impelluntur, inſigne perfectionis augmentum eſſent accepturae, ſi dentes ita efformarentur, vt ſine vlla frictione ſe mutuo impellerent, ſicque motus hinc nullum impedimentum pateretur. Praeterea vero ipſi rotarum dentes attritu mutuo ſublato, multo diutius ſalui manerent, ſuamque figuram conſeruarent; cum contra ſi attritus adſit, continuo aliquantillum a dentibus abraditur, vnde eorum figura tandem immutabitur, ita vt ſi dentes initio ad alterum requiſitum fuerint accommodati, ii tandem ne huic quidem amplius ſint ſatisfacturi, ſicque machina omnibus commodis ex hac conditione oriundis priuetur.

Dein-

Deinde tamen eiusmodi dantur machinae, in quibus vniformitas motus multo maioris eſt momenti, quam frictionis ſublatio. Quae enim machinae ad inſigne quoddam opus perficiendum ſunt deſtinatae, plurimum intereſt, eas ita inſtruxiſſe, vt tota vis, qua impelluntur, ad hoc opus abſoluendum impendatur, nullaque eius vis portio in motu machinae conſeruando conſumatur. Quodſi autem omnes machinae partes, dum opus propoſitum exequitur, motu vniformi feruntur, huius motus conſeruatio nulla vi indiget, ſicque tota vis effectui propoſito integra relinquitur, quamobrem iſtius modi machinas ita inſtrui conueniet, vt omnes partes, quibus ſunt compoſitae, motu vniformi commoueantur.

Hinc quando rotae aliae ab aliis ope dentium ad motum impelluntur, neceſſe eſt, vt dum rotae primae motus eſt vniformis, cuiusque reliquarum, quae ab illa cientur, motus pariter vniformis euadat. Si enim qua rota modo celerius, modo tardius gyretur, ſemper vis quaedam ad hunc motum ſiue accelerandum, ſiue retardandum requiritur, cuius iactura effectus, ad quem machina eſt accommodata, diminuitur: atque haec diminutio plerumque multum ſuperare ſolet eam, quae forte ab attritu dentium oriri poſſet. Quare his caſibus, cum dentibus eiusmodi figura tribui nequeat, vt ſimul motus vniformitas obtineatur, et frictio tollatur, omnino expedit leuem dentium attritum admitti, dummodo omnium rotarum motus aequabilis efficiatur; ſiquidem illud incommodum hoc commodo largiter compenſatur.

Quae autem machinae ita ſunt comparatae, vt non ad onus quodpiam eleuandum, aliudue opus exequenquendum sint destinatae, sed potius sui motus aequabilitate scopo intento satisfaciant, cuiusmodi sunt omnis generis horologia, quae motus sui aequabilitate temporis mensuras continere solent, in his, quoniam nulla resistentia superanda proponitur, ratio modo memorata penitus cessat. Quin etiam motus aequabilis, si omnibus partibus conciliaretur, potius scopo proposito aduersaretur, quam faueret. Cum enim in his machinis nullum onus superandum adsit, in quo actio vis motricis consumatur, ab ea ipse machinae motus continuo augeretur, motusque iam impressus a continua vis impellentis sollicitatione perpetuo acceleraretur, siquidem singularum partium motus quouis momento esset aequabilis; cum nihil obstaret, quo minus is a noua potentiae impulsione celerior redderetur.

Hanc ob rem horologiorum structura data opera ita attemperari solet, vt quouis momento motus, quem quaeuis pars iam conceperat, iterum intereat, singulisque momentis machina, quasi de nouo, ad motum concitari debeat. Ita fit vt dummodo machinae singulis momentis par motus imprimitur, motus totalis, qui inde resultat, aequabilis videatur, siquidem illa momenta satis fuerint exigua, vt inaequalitas, quae in vnoquoque existit, percipi nequeat. Ita motus ad aequabilitatem totalem obtinendam moderatio, vel ope penduli, vel alius motus reciproci effici solet, dum quauis oscillatione vnus dens rotae dentatae propellitur; hocque pacto cum oscillationes sint isochronae, aequalibus temporibus aequalis dentium numerus propellitur, vnde in rotis lentioribus motus quasi vniformis exoritur; qui tamen re vera ita est

com-

comparatus, vt singulis oscillationibus ex statu quietis de nouo producatur. Cum igitur in horologiis nullius rotae motus sit continuus et vniformis, nulla quoque ratio viget, dentes rotarum ita efficere, vt motus angularis rotae impulsae ad motum angularem rotae impellentis, quouis instanti, datam teneat rationem, sed sufficit, dum vnusquisque dens rotae impellentis vnum dentem rotae impulsae promoueat. Quocirca his rotis omnis perfectionis gradus, cuius sunt capaces, conciliabitur, si dentes ita efformentur, vt eorum actio mutua nullam patiatur frictionem: sic enim dentes diutissime debitam figuram suam conseruabunt, in quo eximia horologiorum virtus continetur.

Hinc ergo duplicis generis rotas dentatas obtinemus: alterum, quo rotae se mutuo sine frictione ad motum impellunt, alterum vero, quo, si rotae impellentis motus fuerit vniformis, simul rotae impulsae motus efficitur vniformis. Quemadmodum ergo dentes in vtroque rotarum genere efformatos esse oporteat, ex formulis ante exhibitis indagabo.

I.

DE ROTIS, QVAE SE MVTVO SINE DENTIVM FRICTIONE IMPELLVNT.

1. Cum igitur in his rotis vniformitas motus locum non habeat, seu motus angularis vnius, ad motum angularem alterius, rationem non teneat constantem, quantitas $\frac{d\psi}{d\phi} = n$ non erit constans, seu n quantitatem variabilem denotabit. Hoc autem non obstante easdem,

quas supra, obtinebimus formulas, scilicet $y = \frac{-na}{n+1}$ sin Φ; et $x = \frac{na}{n+1}$ cos. Φ itemque $u = \frac{a}{n+1}$ sin. ψ et $t = \frac{a}{n+1}$ cos. ψ, hoc tantum discrimine, quod hic n non denotet numerum constantem, sed eius loco scribi debeat fractio variabilis $\frac{d\psi}{d\Phi}$, ita vt sit

pro curua dentis EM	pro curua dentis FM
$x = \frac{a\,d\psi}{d\Phi + d\psi}$ cos. Φ	$t = \frac{a\,d\Phi}{d\Phi + d\psi}$ cos. ψ
$y = \frac{-a\,d\psi}{d\Phi + d\psi}$ sin. Φ	$u = \frac{a\,d\Phi}{d\Phi + d\psi}$ sin. ψ

2. Cuiusmodi autem ex his formulis vtriusque dentis EM et FM debeat esse figura, sequenti modo colligo. Primo obseruo, ductis ad commune punctum contactus M rectis AM et BM, fore

$$AM = \frac{a\,d\psi}{d\Phi + d\psi} \text{ et } BM = \frac{a\,d\Phi}{d\Phi + d\psi}$$

Hinc ergo erit $AM + BM = a = AB$, vnde patet punctum contactus M semper in recta AB centra rotarum iungente reperiri, et ob hanc rationem angulos AMT et BMT esse deinceps positos. Praeterea ob incessum dentium sine frictione, quantum arcus EM crescit, tantum dens arcus FM decrescere debet.

Tab. III. Fig. 3. 3. Ponamus ergo rotae circa A mobilis dentium figuram esse CMm, rotae vero alterius circa B mobilis CNn, atque contactus iam erit in ipso puncto C. Capiantur vtrinque arcus aequales CM = CN = s, et cum motu angulari prioris rotae punctum M peruenit in rectam AB, simul alterius rotae punctum N peruenire debet in eandem rectam AB, ita vt dum illa rota motu suo conficit angulum CAM, haec rota moueatur per angulum CBN. Ponatur ergo angulus

CAM

$CAM = \Phi$ et angulus $CBN = \psi$, Tum vero, quia puncta M et N in contactum peruenient in recta AB, oportet, vt sit tam $AM + BN = AB = a$, quam summa angulorum $AMC + BNC =$ duobus rectis.

4. Ad hoc ponatur $AM = v$ et $BN = z$, eritque primo $v + z = a$: deinde ob aequalitatem arcuum $CM = CN$, erit $\int \surd (dv^2 + vvd\Phi^2) = \int \surd (dz^2 + zzd\psi^2)$, ideoque ob $dz = -dv$, fiet $vd\Phi = zd\psi = (a-v)d\psi$. Porro est tang. $AMC = \frac{vd\Phi}{dv}$, et tang. $BNC = \frac{zd\psi}{dz}$: vnde ob $AMC + BNC = 2$ rectis, necesse est, vt sit $\frac{vd\Phi}{dv} = -\frac{zd\psi}{dz}$, quae aequatio, ob $dz = -dv$, redit ad superiorem $vd\Phi = zd\psi$. Ita data curua CM per aequationem inter $CAM = \Phi$ et $AM = v$, pro altera curua CN haec habebitur aequatio inter $CBN = \psi$ et $BN = z$, vt sit $z = a - v$ et $d\psi = \frac{vd\Phi}{a-v}$ seu $\psi = \int \frac{vd\Phi}{a-v}$, vnde haud difficulter constructio idonea eruitur.

5. Verum hic ingens incommodum occurrit, quo huiusmodi dentes ad praxin plane inutiles redduntur, cum enim altera rota, puta A, ab altera B moueri debeat, manifestum est, hoc fieri non posse, nisi vbi angulus AMC est obtusus; tum enim contactu existente in MN, rotae A punctum M, â rotae puncto N deprimetur; sin autem angulus AMC esset vel rectus, vel adeo acutus, rota B nullam plane vim exereret in rotam A, illaque motum aliquantillum prosequi posset, cum tamen haec non sequatur. Cum igitur dentium natura non permittat, vt angulus AMC vbique sit obtusus, euidens est, fieri non posse, vt hoc modo rota alia ab alia ad motum incitetur. Quin etiam cum mutuus

tuus contactus necessario in recta AB contingere debeat, per nouum contactum, quo dentes alibi in se mutuo agere inciperent, motus rotae A conseruari nequit: quam ob causam huius generis dentes ad praxin plane sunt inepti. Cum igitur istius modi dentes ad horologia accommodati sint visi, manifestum est, ne hic quidem frictionem in dentium actione mutua tolli posse; ita vt et in huius generis machinis consultum sit dentes adhibere, quae altero commodo gaudeant, et motum rotae impulsae quoque vniformen reddant, siquidem motus rotae impellentis fuerit vniformis.

II.

DE ROTIS QVAE MOTV VNIFORMI SE MVTVO PROPELLVNT.

6. Pro hoc ergo casu cum $d\Phi$ ad $d\psi$ semper eandem rationem tenere debeat, si ponatur $d\psi = n\,d\Phi$, angulus Φ ita a figura dentis EM pendet, vt sit

$$\frac{na}{n+1}(dx\,\text{cos.}\,\Phi - dy\,\text{sin.}\,\Phi) = x\,dx + y\,dy$$

quo inuento, figura dentis alterius rotae ita definietur, vt sit:

$$t = a\,\text{cos.}\,\psi - x\,\text{cos.}(\Phi + \psi) + y\,\text{sin.}(\Phi + \psi)$$

$$u = a\,\text{sin.}\,\psi - x\,\text{sin.}(\Phi + \psi) - y\,\text{cos.}(\Phi + \psi)$$

vnde simili modo fit

$$\frac{a}{n+1}(dt\,\text{cos.}\,\psi + du\,\text{sin.}\,\psi) = t\,dt + u\,du$$

Data ergo figura dentium rotae A, inde angulus Φ per x et y definiri debet, tum posito $\psi = \alpha + n\Phi$, simul aequatio obtinebitur pro figura dentium alterius rotae B.

Quo-

7. Quoniam in dente FM rectam BF, ad quam, tanquam axem, figuram dentis referimus, pro lubitu accipere licet, vnde angulus ABF data quantitate vel augetur, vel diminuitur, hanc rectam BF ita ductam concipiamus, vt α euanescat, sitque perpetuo $\psi = n\Phi$. Deinde sit $\frac{na}{n+1} = b$ et $\frac{a}{n+1} = c$, vt habeatur $a = b + c$. His positis erit

$$b(dx \operatorname{cos}.\Phi - dy \operatorname{sin}.\Phi) = x\,dx + y\,dy$$

$$t = a \operatorname{cos}.n\Phi - x \operatorname{cos}.(n+1)\Phi + y \operatorname{sin}.(n+1)\Phi$$

$$u = a \operatorname{sin}.n\Phi - x \operatorname{sin}.(n+1)\Phi - y \operatorname{cos}.(n+1)\Phi$$

vnde conficitur

$$c(dt \operatorname{cos}.n\Phi + du \operatorname{sin}.n\Phi) = t\,dt + u\,du.$$

8. Ponamus $dy = -dx \operatorname{tang}.\theta$, seu $\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sin}.\theta}{\operatorname{cos}.\theta}$, fietque $b(\operatorname{cos}.\theta \operatorname{cos}.\Phi + \operatorname{sin}.\theta \operatorname{sin}.\Phi) = x \operatorname{cos}.\theta - y \operatorname{sin}.\theta = b \operatorname{cos}.(\theta - \Phi)$ et differentiando aequationem $y = \frac{x \operatorname{cos}.\theta}{\operatorname{sin}.\theta} - \frac{b \operatorname{cos}.(\theta - \Phi)}{\operatorname{sin}.\theta} - \frac{dx \operatorname{sin}.\theta}{\operatorname{cos}.\theta}$ $= \frac{dx \operatorname{cos}.\theta}{\operatorname{sin}.\theta} - \frac{x\,d\theta}{\operatorname{sin}.\theta^2} + \frac{b(d\theta - d\Phi)\operatorname{sin}(\theta - \Phi)}{\operatorname{sin}.\theta} + \frac{b\,d\theta \operatorname{cos}.(\theta - \Phi) \operatorname{cos}.\theta}{\operatorname{sin}.\theta^2}$ quae reducitur ad hanc

$$0 = dx - \frac{x\,d\theta \operatorname{cos}.\theta}{\operatorname{sin}.\theta} + \frac{b\,d\theta \operatorname{cos}.\theta \operatorname{cos}.\Phi}{\operatorname{sin}.\theta} - b\,d\Phi \operatorname{cos}.\theta \operatorname{sin}.(\theta - \Phi)$$

Diuidatur per $\operatorname{sin}.\theta^2$, et integretur: sicque prodibit

$$0 = \frac{x}{\operatorname{sin}.\theta} + b\int \frac{d\theta \operatorname{cos}.\theta \operatorname{cos}.\Phi}{\operatorname{sin}.\theta^2} - b\int \frac{d\Phi \operatorname{cos}.\theta \operatorname{sin}.(\theta - \Phi)}{\operatorname{sin}.\theta} \text{ seu}$$

$$0 = \frac{x - b \operatorname{cos}.\Phi}{\operatorname{sin}.\theta} - b\int d\Phi \operatorname{cos}.(\theta - \Phi) \text{ ita vt sit}$$

$$x = b \operatorname{cos}.\Phi + b \operatorname{sin}.\theta \int d\Phi \operatorname{cos}.(\theta - \Phi) \text{: atque hinc oritur}$$

$$y = -b \operatorname{sin}.\Phi + b \operatorname{cos}.\theta \int d\Phi \operatorname{cos}.(\theta - \Phi)$$

Sumto ergo angulo θ pro lubitu ratione anguli Φ, innumerabiles figurae pro dente EM obtinebuntur.

9. Assumta autem quapiam figura pro dente EM, quae ex certa quadam relatione angulorum θ et Φ oritur,

tur, conueniens figura pro dente FM alterius rotae B ita definietur, vt sit

$$t = a\,\text{cos}.\,n\Phi - b\,\text{cos}.\,n\Phi + b\,\text{sin}.\,((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cos}.\,(\theta - \Phi)$$

$$u = a\,\text{sin}\,n\Phi - b\,\text{sin}.\,n\Phi - b\,\text{cos}.\,((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cos}.\,(\theta - \Phi)$$

siue ob $a = b + c$

$$t = c\,\text{cos}.\,n\Phi + b\,\text{sin}.\,((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cos}.\,(\theta - \Phi)$$

$$u = c\,\text{sin}.\,n\Phi - b\,\text{cos}.\,((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cos}.\,(\theta - \Phi)$$

Hinc ergo aliquot exempla percurramus.

EXEMPLVM. 1.

10. Sit angulus $\theta = 0$; erit $\text{sin}.\,\theta = 0$; $\text{cos}.\,\theta = 1$; et $\text{cos}.\,(\theta - \Phi) = \text{cos}.\,\Phi$; vnde fit $\int d\Phi\,\text{cos}.\,(\theta - \Phi) = \int d\Phi\,\text{cos}.\,\Phi = \text{sin}.\,\Phi + \mu$; denotante μ numerum quempiam constantem. Hinc pro figura dentis EM rotae A sequentes prodibunt formulae:

$$x = b\,\text{cos}.\,\Phi \quad \text{et} \quad y = \mu b$$

Pro alterius autem rotae B dente FM habebitur

$$t = c\,\text{cos}\,n\Phi + b\,\text{sin}.\,(n+1)\Phi\,\text{sin}.\,\Phi + \mu b\,\text{sin}.\,(n+1)\Phi$$

$$u = c\,\text{sin}.\,n\Phi - b\,\text{cos}.\,(n+1)\Phi\,\text{sin}.\,\Phi - \mu b\,\text{cos}.\,(n+1)\Phi$$

existente $b = \frac{na}{n+1}$ et $c = \frac{a}{n+1}$; ideoque $b = nc$.

11. Quoniam vero dum iidem dentes in se mutuo agunt, angulus Φ non multum variatur, ideoque minimus manet, erit pro dente EM; $x = b - \frac{1}{2}b\Phi\Phi$ et $y = \mu b$, pro dente autem FM habebimus:

$$t = c(1 + \mu n(n+1)\Phi + \tfrac{1}{2}n(n+2)\Phi\Phi)$$

$$u = c(-\mu n + \tfrac{1}{2}\mu n(n+1)^2\Phi\Phi + \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)\Phi^3)$$

$$\text{vel}\ u = -c(\mu n - \tfrac{1}{2}\mu n(n+1)^2\Phi\Phi - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)\Phi^3).$$

12. Vel

12. Vel ponatur latitudo $\mu b = \mu n c = e$, erit primo $x = b - \frac{1}{2} b \Phi \Phi$ et $y = e$ tum vero

$$t = c + (n+1) e \Phi + \tfrac{1}{2} n (n+2) c \Phi \Phi$$

$$u = -e + \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e \Phi \Phi + \tfrac{1}{3} n (n+1)(n+2) c \Phi^3.$$

vnde patet si $\Phi = 0$ fore $x = b$; $y = e$ et $t = e$, $u = -e$. Vbi cum valor ipsius u prodeat negatiuus, cognoscimus applicatam u super axe BF capi debere, quae proinde erit

$$u = e - \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e \Phi \Phi - \tfrac{1}{3} n (n+1)(n+2) c \Phi^3$$

13. Vt autem longitudo dentium in vtraque rota determinetur, maximus angulus Φ spectari debet, ad quem si radius AC ad rectam AB inclinetur, dentes EM et FM se adhuc contingant. Notandum vero est, rotas ita instructas esse debere, vt antequam bini dentes se mutuo deserant, sequentes se mutuo arripiant, cui requisito commodissime satisfit, si dum bini dentes in medio existente $\Phi = 0$ in se inuicem agunt, bini proximi sese arripere incipiant. Quodsi ergo in rota A distantia dentium angulo $= \alpha$ designetur, ita vt in rota B dentes angulo $= n\alpha$ distent, posito $\Phi = \alpha$, dentium magnitudo vtrinque determinabitur. Interim tamen iuuabit, incisiones aliquantum profundiores fieri, ne motus ex hac parte obstaculum offendat.

14. Capiatur ergo in recta $AB = a$ centra rotarum iungente $AC = b = \frac{na}{n+1}$ et $BC = c = \frac{a}{n+1}$; et ex vtroque centro describantur circuli CR et CS. Tum pro rota A ducatur mp ipsi AC parallela ad distantiam $Cm = Gp = e$, erit mp facies vnius dentis. Ad alteram vero rotam describatur curua af ex valoribus datis t et u, quae versus mp erit conuexa. Porro pro dentium distantia in vtraque peripheria CR et CS Tab. III. Fig. 4.

aequa-

aequales abſcindantur arcus $C\mu$, $\mu\nu$, etc. et $C\varsigma$, $\varsigma\gamma$ etc. $= b\alpha = nc\alpha$, ſimiliterque deſcribantur facies dentium nq et bg; or et cb etc. Quo facto altitudo dentium in rota B ita determinabitur, vt ſecundus dens bg tantum non dentem nq apprehendat, ſic dabitur magnitudo dentis bg, cui aequalis eſſe debet af, atque hinc in rota A profunditas dentis mp innoteſcet, quae aliquantillum ſuperare debet altitudinem af, ne in fundo f contactus fiat, ſicque motus impediatur.

15. Quo autem rotae ſe mutuo quoque in alteram partem impellere queant, alterae dentium facies ſimili modo efformari debebunt, quae pro rota A erunt CG, $\mu\Phi$, $\nu\varrho$ etc. pro rota vero B, αf, βg, γb etc. quarum iſtas pari curuatura praeditas eſſe oportet, atque alteras. Verum ne motus obſtaculum offendat, craſſitiem dentium rotae B ſcilicet $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, etc. aliquanto minorem eſſe oportet, quam amplitudinem interuallorum inter dentes alterius rotae Gp, Φq, ϱr etc. Denique euidens eſt, in rota B dentes quoque aliquanto profundius exſcindi oportere: tum vero quoque conueniet dentes alterius rotae A aliquanto longiores fieri, ne vnquam contactus in ipſo eorum angulo a eueniat.

EXEMPLVM 2.

16. Ponamus eſſe $\theta = \Phi$ erit cof. $(\theta - \Phi) = 1$ et $\int d\Phi \text{ cof.} (\theta - \Phi) = \Phi + \gamma$: ſicque erit

$$x = b \text{ cof. } \Phi + \gamma b \text{ fin. } \Phi + b\Phi \text{ fin. } \Phi$$
$$y = -b \text{ fin. } \Phi + \gamma b \text{ cof. } \Phi + b\Phi \text{ cof. } \Phi$$

tum vero porro ob $b = nc$

$$t = c \text{ cof. } n\Phi + n\gamma c \text{ fin. } n\Phi + nc\Phi \text{ fin. } n\Phi$$
$$u = c \text{ fin. } n\Phi - n\gamma c \text{ cof. } n\Phi - nc\Phi \text{ cof. } n\Phi$$

qui

qui casus ideo videtur notatu dignus; quia pro vtraque rota similis dentium prodit figura.

17. Ponatur $\gamma b = n\gamma c = e$, quae est quantitas arbitraria, et cum angulus Φ semper sit minimus, erit pro figura dentium rotae A:

$$x = b(1 + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi) + e\Phi(1 - \tfrac{1}{6}\Phi\Phi)$$
$$y = e(1 - \tfrac{1}{2}\Phi\Phi) - \tfrac{1}{3}b\Phi^3$$

Pro figura dentium autem rotae B habebitur:

$$t = c(1 + \tfrac{1}{2}nn\Phi\Phi) + ne\Phi(1 - \tfrac{1}{6}nn\Phi\Phi)$$
$$u = -e(1 - \tfrac{1}{2}nn\Phi\Phi) + \tfrac{1}{3}n^3c\Phi^3.$$

Quemadmodum ergo coordinatae x et y ab angulo Φ et radio b pendent, ita similiter coordinatae t et u ab angulo $n\Phi$ et radio c pendent.

18. Si constans e esset $= o$, vterque dens desineret in cuspidem inuersam, acumine scilicet centrum rotae vtriusque respiciente; quae figura cum sit inepta ad praxin, constans e nihilo aequalis statui nequit. Tantus ergo valor ipsi e tribui debet, vt vtraque curua a cuspide liberetur, ideoque quando angulus Φ maximum obtinet valorem α, vt e ad αb seu $n\alpha e$ certam quampiam teneat rationem. Ne autem, angulum Φ tam affirmatiue, quam negatiue capiendo, vnquam idem valor siue pro x, siue pro t recurrat, oportet, vt sit $e > \alpha b$. Si enim idem valor recurreret, tum eidem abscissae gemina applicata conueniet, ideoque dentis curua ibi duplicem haberet ramum, quod praxi aduersaretur.

19. Curuae autem his formulis contentae propius cognoscentur ex ea conditione quod $\theta = \Phi$: ideoque tang. $\Phi = \frac{-dy}{dx}$: vnde patet tangentem in puncto contactus SMT rectae AB esse parallelum, seu angulum ATS $= o$, ex quo fit BST $= -n\Phi$, ideoque tang. $n\Phi$
Tab. III. $= \frac{du}{dt}$. Hinc aequatio $b(dx \operatorname{cos.}\Phi - dy \operatorname{sin.}\Phi) = xdx + ydy$
Fig. 2. abit in $\frac{b(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = b\sqrt{(dx^2+dy^2)} = xdx + ydy$: quae indicat curuam EM ex euolutione circuli radio BE $= b$ descripti enasci, similique modo figura FM est curua ex euolutione circuli radio BF $= c$ descripti nata.

Fig. 5. 20. Quodsi ergo centris A et B describantur circuli CE et CF, ille radio AC $= b$, hic vero radio BC $= c$; sumtisque arcubus aequalibus CE $=$ CF, circulus CE euoluatur in EMe, circulus CF autem in FMf, hae duae quidem curuae se mutuo in M tangent, verum hoc punctum contactus simul erit punctum intersectionis, ita vt ambo dentes se mutuo penetrare deberent. Hoc autem incommodum potissimum obstat, cum ambae rotae fere sunt aquales: at si altera rota AC sit maxima, illa intersectio euanescit, puncto contactus M in ipsum punctum E abeunte.

Fig. 6. 21. Si ergo altera rota A praegrandis fuerit prae altera B, huius dentes CD, cd commode per euolutionem circuli Cc describi poterunt, dum dentes rotae magnae planae constituuntur, qui quidem ratione contactus ad minimum spatium Ml se extendent, recta Ml existente ad rotae peripheriam normali. Ex distantia porro dentium minoris rotae Cc, quae ex eorum

eorum numero determinatur, eorum magnitudo cm inde definietur, vt cum contactus dentium M eueniat in recta AB, dentes proximi cd tantum non dentes m arripiant, ne vnquam tres dentes simul agant. Tum vero magnitudine dentium CD et cd definita, tantae cauitates in maiori rota exſcindi debent, veluti MNOP, $mnop$, vt dentes rotae minoris capere valeant; atque etiam hos dentes profundius exſcindi oportebit, vt prominentiae dentium maioris rotae Ml excipi queant. Hinc denique craſſities dentium CE, ce determinabitur, vt in cauitatibus maioris rotae locum inueniant, alterisque faciebus ED, ed ſimilis figura tribuetur, vt rotarum motus pari modo in plagam oppoſitam conuerti queat.

22. Quando autem vſus poſtulat, vt ambae rotae non multum a ratione aequalitatis recedant, tum ob rationem allegatam figura dentium non per euolutionem circulorum deſcribere licet, ſed tum potius conueniet dentibus eiusmodi tribui figuras, quales in exemplo primo determinauimus, vbi facies dentium alterius rotae erant rectae. Simul autem hic notari conuenit, ſi rotae admodum fuerint inaequales, atque dentibus maioris rotae, ſecundum exemplum primum, tribuatur figura plana, tum quoque figuram dentium minoris rotae ita fore comparatam, vt earum euoluta ſit circulus radio $BC = e$ deſcriptus, ita vt hoc caſu ambo exempla exhibita conueniant.

23. Cum igitur exemplum primum ad omnes caſus ſit accommodatum, ne in eo quicquam incongrui

eueniat, conſtantem e ita definiri oportet, vt dum angulus Φ per omnes valores, tam affirmatiuos, quam negatiuos, variatur, quamdiu iidem dentes in ſe mutuo agunt, punctum contactus continuo immutetur; quod vt eueniat, ſi α denotet maximum angulum, qui pro Φ ſtatui queat, neceſſe eſt, vt ſit $e > \frac{n(n+2)c\alpha}{n+1}, = \frac{n+2}{n+1} b\alpha$;
Tab. III. Ita ſi ſit $AC = b$; $BC = c$, capiaturque $CD = e$,
Fig. 7. recta DH ipſi AC parallela exhibebit faciem dentis rotae A, quae vltra D non porrigitur ob $x = b \operatorname{coſ.} \Phi$ et $y = e$. Pro figura autem dentis FDG alterius rotae B, poſitis $BQ = t$ et $QN = u$, erit

$$t = c + (n+1)e\Phi + \tfrac{1}{2}n(n+2)c\Phi\Phi$$
$$u = e - \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e\Phi\Phi - \tfrac{1}{2}n(n+1)(n+2)c\Phi^3$$

vnde poſito $\Phi = \alpha$ terminus dentis F, poſito autem $\Phi = -\alpha$ alter terminus G reperitur; hincque quouis caſu figura dentium facile delineabitur.

PHY-

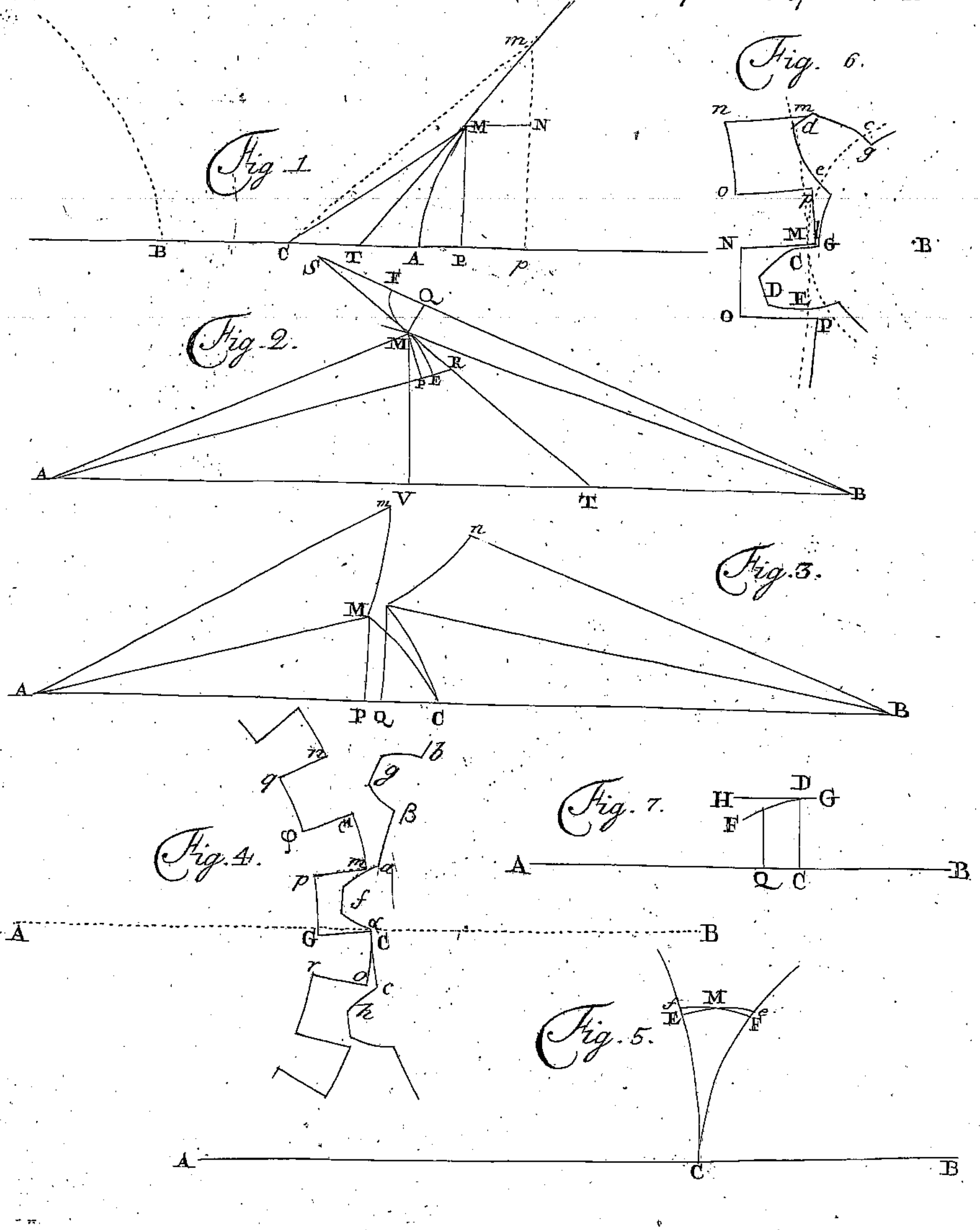
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.