1760

De seriebus divergentibus

Leonhard Euler

DE
SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum ſeries conuergentes ita definiantur, vt conſtent terminis continuo decreſcentibus, qui tandem, ſi ſeries in infinitum proceſſerit penitus euaneſcant; facile intelligitur, quarum ſerierum termini infiniteſimi non in nihilum abeant, ſed vel finiti maneant, vel in infinitum excreſcant, eas, quia non ſunt conuergentes, ad claſſem ſerierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini ſeriei vltimi, ad quos progreſſione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur ſerierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas ſpecies ſubdiuiditur, prout vel omnes termini eodem ſint affecti ſigno, vel ſigna + et − alternatim ſe excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor ſerierum diuergentium ſpecies, ex quibus maioris perſpicuitatis gratia aliquot exempla ſubiungam.

I. . . .	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} +$ etc.
II. . . .	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} +$ etc.
III. . . .	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc.
	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +$ etc.
IV. . . .	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc.
	$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 +$ etc.

§. 2. De summis huiusmodi serierum diuergentium magnus est dissensus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmant, eas in vna summa comprehendi posse. Ac primo quidem perspicuum est, serierum, quas ad speciem primam retuli, summas reuera esse infinite magnas, cum terminis actu colligendis ad summam dato quouis numero maiorem perueniatur: vnde nullum quidem est dubium, quin harum serierum summae per huiusmodi expressiones $\frac{a}{o}$ exhiberi queant. Circa reliquas igitur species potissimum versatur controuersia inter Geometras; atque argumenta, quae vtrinque ad sententiam tuendam afferuntur, tanta vi ad persuadendum sunt praedita, vt neutra pars adhuc alteri assensum praebere cogi potuerit.

§. 3. Ex specie secunda Leibnitius primus hanc contemplatus est seriem:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{ etc.}$$

cuius summam valere $= \frac{1}{2}$ statuerat, his satis firmis rationibus innixus: Primum enim haec series prodit, si fractio haec $\frac{1}{1+a}$ per diuisionem continuam more solito in hanc seriem $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 +$ etc. resoluatur, et valor litterae a vnitati aequalis sumatur. Tum vero etiam ad hoc magis confirmandum, iisque, qui calculo non sunt assueti, persuadendum, sequenti vsus est ratiocinio: Si series alicubi terminetur, terminorumque numerus fuerit par, tum valor eius erit $= 0$, sin autem terminorum numerus sit impar, valor seriei erit $= 1$: quodsi ergo series in infinitum progrediatur, numerusque terminorum, neque par, neque impar, censeri queat, summam neque $= 0$, neque $= 1$, esse posse concludit, sed medium

medium quendam valorem, ab vtroque aeque diuersum, tenere debere, qui sit $= \frac{1}{2}$.

§. 4. Contra haec argumenta ab aduersariis obiici solet; primo fractionem $\frac{1}{1+a}$ non esse aequalem seriei infinitae:

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - \text{ etc.}$$

nisi a sit fractio vnitate minor. Si enim diuisio vspiam abrumpatur, et quoto ex residuo portio debita adiiciatur, fontem paralogismi fore manifestum; fieri namque

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots \ldots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$$

et quamuis numerus n statuatur infinitus, tamen fractionem adiectam $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ omitti non licere, nisi re vera euanescat, quod iis tantum casibus, quibus $a < 1$, vsu venit, seriesque euadit conuergens. Reliquis autem casibus semper huius mantissae $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ rationem haberi oportere, et quamuis signo dubio $\mp$, prout n fuerit numerus vel par, vel impar, sit affecta, tamen si n sit infinitus, ideo negligi non posse, quod numerus infinitus neque sit par, neque impar, nullaque propterea habeatur causa, vtrum signum potius sit adhibendum? absurdum enim esse putare, quemquam dari numerum integrum, ne infinitum quidem, qui neque par sit, neque impar.

§. 5. Verum in hac obiectione ab illis, qui seriebus diuergentibus determinatas summas tribuunt, iure reprehendi solet, quod numerus infinitus tanquam numerus determinatus concipiatur, atque adeo vel par, vel impar

impar ſtatuatur, cum tamen ſit indeterminatus. Statim enim atque ſeries dicatur in infinitum progredi, huic ideae contrarium eſſe, ſi eiusdem ſeriei terminus quidam vltimus etſi infiniteſimus concipiatur: ideoque obiectionem ante memoratam de mantiſſa vltimo termino addenda, vel ſubtrahenda, ſponte euaneſcere. Cum igitur in ſerie infinita nunquam ad finem perueniatur, nunquam etiam ad eiusmodi locum perueniri, vbi neceſſe eſſet mantiſſam illam adiungere; adeoque hanc ipſam mantiſſam nonſolum negligi poſſe, ſed etiam debere, quod nuſquam ei locus relinquitur. Atque haec argumenta, quae ad ſummas ſerierum diuergentium vel aſſerendas, vel refellendas, afferuntur, quoque ad quartam ſpeciem ſpectant, quae nullis praeterea dubiis ipſi propriis vexari ſolet.

§. 6. Sed ii, qui contra ſummas ſerierum diuergentium diſputant, in ſpecie tertia firmiſſimum praeſidium inuenire arbitrantur. Quanquam enim harum ſerierum termini continuo creſcunt, ideoque terminis actu colligendis ad ſummam quouis aſſignabili numero maiores perueniri poteſt, quae eſt definitio infiniti; tamen patroni ſummarum in hac ſpecie eiusmodi ſeries admittere coguntur, quarum ſummae ſint finitae, atque adeo negatiuae, ſeu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuiſionem in ſeriem euoluta det; $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 +$ etc. deberet eſſe:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \text{etc.}$$

quod aduerſariis non immerito abſurdiſſimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

nunquam ad ſummam negatiuam perueniri queat. Hincque eo magis neceſſitatem mantiſſae addendae ante memoratae vrgent, cum ea adiecta perſpicuum ſit, fore

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 \; \ldots\ldots\ldots + 2^n + \frac{2^{n+1}}{1-2}$$

etiamſi n ſit numerus infinitus.

§. 7. Defenſores igitur ſummarum ſerierum diuergentium ad hoc inſigne paradoxon conciliandum, ſubtile magis, quam verum, diſcrimen inter quantitates negatiuas ſtatuunt; dum alias nihilo minores, alias vero infinito maiores, ſeu plusquam infinitas eſſe arguunt. Alium ſcilicet valorem ipſius -1 agnoſci debere, quando ex ſubtractione numeri maioris $a+1$, a minori a oriri concipitur, alium vero, quando ſeriei illi $1+2+4+8+16+$ etc. aequalis reperitur, atque ex diuiſione numeri $+1$ per -1 naſcitur; illo quippe caſu eſſe numerum nihilo minorem, hoc vero infinito maiorem. Maioris confirmationis gratia afferunt hoc exemplum fractionum:

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{0},\ \tfrac{1}{-1},\ \tfrac{1}{-2},\ \tfrac{1}{-3}, \text{ etc.}$$

quae cum prioribus terminis creſcens perſpiciatur, etiam continuo creſcere ſit cenſenda; vnde concludunt fore $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ et $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$, ſicque porro: ideoque quatenus $\frac{1}{-1}$ per -1 et $\frac{1}{0}$ per infinitum ∞ exprimitur, eſſe $-1 > \infty$, multoque magis $\frac{-1}{2} > \infty$: quo pacto abſurditatem apparentem illam ſatis ingenioſe a ſe propellunt.

§. 8. Quamuis autem haec diſtinctio ingenioſe excogitata videatur, tamen aduerſariis parum ſatisfacit, atque adeo certitudini analyſeos vim afferre videtur. Si enim bini illi valores ipſius -1, quatenus eſt vel $= 1-2$, vel

vel $= \frac{1}{-1}$, inter ſe re vera diſcrepent, vt eos confundere non liceat, certitudo atque vſus regularum, quas in calculis ſequimur, penitus tolleretur, quod certe magis foret abſurdum, quam id, cuius gratia haec diſtinctio eſt excogitata; ſin autem ſit $1 - 2 = \frac{1}{-1}$, vti praecepta algebrae poſtulant, negotium minime conficitur, cum ea ipſa quantitas -1, quae ſeriei $1 + 2 + 4 + 8 +$ etc. aequalis ſtatuitur, ſit nihilo minor, ideoque eadem difficultas permaneat. Interim tamen veritati conſentaneum videtur, ſi dicamus easdem quantitates, quae ſint nihilo minores, ſimul infinito maiores cenſeri poſſe. Non ſolum enim ex algebra, ſed etiam ex geometria diſcimus, duplicem dari ſaltum a quantitatibus poſitiuis ad negatiuas, alterum per cyphram, ſeu nihilum, alterum per infinitum: atque adeo quantitates a cyphra, tam creſcendo, quam decreſcendo, in ſe redire, et ad eundem terminum o reuerti; ita vt quantitates infinito maiores eaedem perinde ſint nihilo minores, ac quantitates infinito minores conueniunt cum quantitatibus nihilo maioribus.

§. 9. Qui autem negant has ſummas ſerierum diuergentium, quae aſſignari ſolent, eſſe iuſtas, iidem non ſolum non alias proferunt, ſed etiam ſtatuunt omnino pugnare, ſummam ſerieri diuergentis tantum imaginari. Conuergentium enim ſerierum, veluti huius $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ etc. ideo tantum ſummam $= 2$ admitti poſſe, quod quo plures iſtius ſeriei terminos actu addamus, eo propius nos ad binarium peruenire: in ſeriebus vero diuergentibus rem longe ſecus ſe habere; quo plures enim terminos addamus, eo magis ſummas,

quae

quae prodeunt, inter ſe diſcrepare, neque ad certum ac determinatum quemdam valorem accedere. Vnde concludunt, ne ideam quidem ſummae ad ſeries diuergentes transferri poſſe, eorumque operam, quae in ſummis ſerierum diuergentium inueſtigandis conſumatur, plane eſſe inutilem, verisque analyſeos principiis contrariam.

§. 10. Quantumuis autem iſte diſſenſus realis videatur, tamen neutra pars ab altera vllius erroris argui poteſt, quoties in analyſi huiusmodi ſerierum vſus occurrit: quod graui argumento eſſe debet, neutram partem in errore verſari, ſed totum diſſidium in ſolis verbis eſſe poſitum. Si enim in calculo peruenio ad hanc ſeriem $1-1+1-1+1-1+$ etc. eiusque loco ſubſtituo $\frac{1}{2}$; nemo certe mihi iure errorem imputabit; qui tamen nemini non in oculos incurreret, ſi alium quemuis numerum eius ſeriei loco poſuiſſem; vnde nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin ſeries $1-1+1-1+1-1+$ etc. et fractio $\frac{1}{2}$ ſint quantitates aequiualentes, alteramque alterius loco ſemper ſine errore ſubſtitui licere. Tota igitur quaeſtio huc tantum redire videtur, an fractionem $\frac{1}{2}$ recte ſummam ſeriei $1-1+1-1+$ etc. vocemus? quod, qui pertinaciter negant, cum tamen aequiualentiam negare non audeant, vehementer verendum eſt, ne in logomachiam delabantur.

§. 11. Puto autem, totam hanc litem facile compoſitum iri, ſi ad ſequentia ſedulo attendere velimus. Quoties in analyſi ad expreſſionem vel fractam, vel transcendentem, pertingimus; toties eam in idoneam ſeriem conuertere ſolemus, ad quam ſequens calculus commodius applicari queat. Eatenus ergo tantum ſeries infinitae in analyſi locum inueniunt, quatenus ex euolutione cuiuspiam expreſſionis finitae ſunt ortae; et hanc ob rem in calculo ſemper loco cuiusque ſeriei infinitae eam formulam, ex cuius evolutione eſt nata, ſubſtituere licet. Hinc quemadmodum ſummo cum fructu regulae tradi ſolent, expreſſiones finitas, ſed forma minus idonea praeditas, in ſeries infinitas conuertendi, ita viciſſim vtiliſſimae ſunt cenſendae regulae, quarum ope, ſi propoſita fuerit ſeries infinita quaecunque, ea expreſſio finita inueſtigari queat, ex qua ea reſultet; et cum haec expreſſio, ſemper ſine errore loco ſeriei infinitae ſubſtitui poſſit, neceſſe eſt, vt vtriusque idem ſit valor; ex quo efficitur, nullam dari ſeriem infinitam, quin ſimul expreſſio finita illi aequiualens concipi queat.

§. 12. Si igitur receptam ſummae notionem ita tantum immutemus, vt dicamus, cuiusque ſeriei ſummam eſſe expreſſionem finitam, ex cuius euolutione illa ipſa ſeries naſcatur; omnes difficultates, quae ab vtraque parte ſunt commotae, ſponte euaneſcent. Primo enim ea expreſſio, ex cuius euolutione naſcitur ſeries conuergens, eius ſimul ſummam, voce hac vulgari ſenſu accepta, exhibet, neque ſi ſeries fuerit diuergens, quaeſtio amplius abſurda reputari poterit, ſi eam indagemus expreſſionem finitam, quae ſecundum regulas analyticas euoluta, illam ipſam ſeriem producat. Et quoniam iſtam expreſſionem in calculo loco eius ſeriei ſubſtituere licet, quin eidem ſit aequalis, dubitare non poterimus. Quo euicto, ne a recepto quidem loquendi vſu recedimus, ſi eam expreſſionem, quae cuipiam ſeriei aequalis eſt, eius quoque ſummam vocemus: dummodo pro

ſeriebus

seriebus diuergentibus, non eam notionem cum idea summae coniungamus, quod, quo plures termini actu colligantur, eo propius ad valorem summae accedi debeat.

§. 13. His praemissis neminem fore arbitror, qui me reprehendendum putet, quod in summam sequentis seriei diligentius inquisiuerim:

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + 40320 - \text{etc.}$$

quae est series a Wallisio hypergeometrica dicta, signis alternantibus instructa. Haec series autem eo magis notatu digna videtur, quod plures summandi methodos, quae mihi alias in huiusmodi negotio ingentem vsum praestiterunt, hic frustra tentauerim. Primo quidem dubitare licet, vtrum haec series summam habeat finitam, nec ne? quia multo magis diuergit, quam vlla series geometrica; summam autem geometricarum esse finitam, extra dubium est positum. Veruntamen cum in geometricis diuergentia non obstet, quominus sint summabiles, ita verisimile videtur, et hanc seriem hypergeometricam summam habere finitam. Quaeritur ergo in numeris, proxime saltem, valor eius expressionis finitae, ex cuius euolutione ipsa series proposita nascitur.

§. 14. Primo autem vsus sum methodo, quae hoc nititur fundamento: si proposita sit huiusmodi series:

$$s = a - b + c - d + e - f + g - h + \text{etc.}$$

atque neglectis signis terminorum $a, b, c, d, e, f,$ etc. sumantur differentiae: $b-a$, $c-b$, $d-c$, $e-d$, etc. harumque porro differentiae: $c-2b+a$; $d-2c+b$;

$e-2d+c$; etc. quae dicuntur differentiae secundae; similique lege quaerantur differentiae tertiae, quartae, quintae, etc. tum si harum differentiarum primarum, secundarum, tertiarum, quartarum etc. termini primi sint α, β, γ, δ, etc. dico fore eiusdem seriei propositae summam

$$s = \tfrac{a}{2} - \tfrac{\alpha}{4} + \tfrac{\beta}{8} - \tfrac{\gamma}{16} + \tfrac{\delta}{32} - \text{etc.}$$

quae nisi iam sit conuergens, tamen certo multo magis conuerget, quam proposita; vnde si huic posteriori seriei demo eadem methodus applicetur, valor, seu summa quaesita s, expressa reperietur per seriem adhuc magis conuergentem.

§. 15. Methodus haec maximam habet vtilitatem in summandis seriebus diuergentibus secundae et quartae speciei, siue tandem ad differentias constantes perueniatur, siue secus, dummodo diuergentia non sit nimis magna. Sic si sit $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 -$ etc.

ob $a = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ etc. erit $s = \frac{1}{2}$.

Si sit $s = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc.

diff. 1 1, 1, 1, 1, 1. etc.

erit $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; vti aliunde satis constat:

si sit $s = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 +$ etc.

Diff. I . . 3 5 7 9 11

diff. II . . . 2, 2, 2 2

erit $s = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0$, vti quoque notum est:

sit sit $s = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 +$ etc.

Diff.

Diff. 1 . . . 2, 6, 18, 54, 162
diff. 2 . . . . 4, 12, 36, 108
diff. 3 . . . . . 8, 24, 72
diff. 4 . . . . 16, 48
etc.

eritque $s = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{4}{8} - \frac{8}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \text{etc.} = \frac{1}{4}$

§. 16. Adhibeatur iam haec methodus ad seriem propositnm

$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + 40320 - \text{etc.}$

quae ob $1 - 1 = 0$, si per 2 diuidatur, abit in hanc:

$\frac{A}{2} = 1 - 3 + 12 - 60 + 360 - 2520 + 20160 - 181440 + \text{etc.}$

2, 9, 48, 300, 2160, 17640, 161280
7, 39, 252, 1860, 15480, 143640
32, 213, 1608, 13620, 128160
181, 1395, 12012, 114540
1214, 10617, 102528
9407, 91911
82504.

Hinc ergo sequitur fore:

$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{7}{8} - \frac{32}{16} + \frac{181}{32} - \frac{1214}{64} + \frac{9407}{128} - \frac{82504}{256} + \text{etc.}$

seu $A = \frac{7}{4} - \frac{32}{8} + \frac{181}{16} - \frac{1214}{32} + \frac{9407}{64} - \frac{82504}{128} + \text{etc.}$

$\frac{18}{8}$, $\frac{117}{16}$; $\frac{852}{32}$, $\frac{6979}{64}$, $\frac{63690}{128}$
$\frac{81}{16}$; $\frac{618}{32}$, $\frac{5275}{64}$, $\frac{49732}{128}$
$\frac{456}{32}$, $\frac{4039}{64}$, $\frac{39182}{128}$
$\frac{3127}{64}$, $\frac{31104}{128}$
$\frac{24850}{128}$

Ergo

Ergo $A = \frac{7}{8} - \frac{18}{32} + \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} +$ ect.

seu $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} +$ etc.

$$\frac{132}{512};\quad \frac{1303}{2048},\quad \frac{12342}{8192}$$

$$\frac{775}{2048};\quad \frac{7130}{8192}$$

$$\frac{4030}{8192}$$

Ergo $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{256} - \frac{132}{2048} + \frac{775}{16384} - \frac{4030}{131072}$

seu $A = \frac{5}{16} + \frac{516}{2048} + \frac{2170}{131072}$ etc. $= \frac{38077}{65536} = 0,581$.

Apparet ergo ſummam iſtius ſeriei propemodum eſſe $= 0,581$: ob terminos autem neglectos aliquanto erit maior: quod egregie conuenit cum infra demonſtrandis, vbi huius ſeriei ſumma oſtendetur eſſe $= 0,59634739$: ſimul vero patet, hanc methodum non ſatis eſſe aptam, ad ſummam tam exacte definiendam.

§. 17. Deinde alio modo rem ſic tentaui: ſit propoſita haec ſeries:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n & n+1 \\ B \ldots & 1, & 2, & 5, & 16, & 65, & 326, & 1957, & \ldots & P, & nP+1 \end{array}$$

differentiae 1, 3, 11, 49, 261, 1631

2, 8, 38, 212, 1370

6, 30, 174, 1158

24, 144, 984

120, 840

720

cuius differentiarum continuarum termini primi ſint 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. erit terminus exponenti n reſpondens

P =

$$P = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \text{etc.}$$

Hinc ſi fiat $n = 0$, erit terminus exponenti 0 reſpondens, ſeu primum praecedens $= 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.} = A$; ita vt ſi huius ſeriei terminus exponenti 0 reſpondens inueniri poſſet, idem ſimul futurus eſſet valor, ſeu ſumma ſeriei propoſitae

$$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

Quodſi ergo illa ſeries B inuertatur, vt habeatur ſeries

$$\begin{array}{llllllll} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ C \ldots & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{65}, & \frac{1}{326}, & \frac{1}{1957}, \ \text{etc.} \end{array}$$

erit huius ſeriei terminus exponenti 0 reſpondens $= \frac{1}{A}$, vnde ex eo quoque valor ipſius A cognoſci poterit. Inchoent huius ſeriei ſingulae differentiae terminis α, β, γ, δ, ε, etc. differentiis ſcilicet hic ita capiendis, vt quiuis terminus a praecedente ſubſtrahatur, erit terminus exponenti n reſpondens:

$$\frac{1}{P} = 1 - (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\beta - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\gamma + \text{etc.}$$

Ideoque poſito $n = 0$, erit per ſeriem certo conuergentem:

$$\frac{1}{A} = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

Est vero, has fractiones in decimales conuertendo:

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5
$1 = 1,0000000$					
$\frac{1}{2} = 0,5000000$	5000000	2000000			
$\frac{1}{5} = 0,2000000$	3000000	1625000	375000	−346154	
$\frac{1}{16} = 0,0625000$	1375000	903846	721154	+165291	−511445
$\frac{1}{65} = 0,0153846$	471154	347983	555863	+305486	−140195
$\frac{1}{326} = 0,0030675$	123171	97606	250377	+173956	+131530
$\frac{1}{1957} = 0,0005110$	25565	21185	76421	+ 58977	+114979
0,0000730	4380	3741	17444	+ 14261	+ 44716
0,0000091	639	558	3183	+ 2697	+ 11564
0,0000010	81	72	486	+ 422	+ 2275
0,0000001	9	8	64	+ 57	+ 365
	1	1	7	+ 6	+ 51
			1		

Ex his ergo differentiis foret $\frac{1}{A} = 1,6517401$, et $A = 0,6$; qui satis bene cum ante inuento conuenit; sed tamen ob differentias quartas, quintas, et aliquot sequentium negatiuas, haec methodus, non satis est certa.

§. 18. Sumamus seriei B singulorum terminorum logarithmos, vt habeatur haec noua series

$$\begin{array}{llllllllll} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ D & \ldots & l1, & l2, & l5, & l16, & l65, & l326, & l1957, & l13700, \text{ etc.} \end{array}$$

in cuius differentiis continuis more solito sumtis sint termini primi α, β, γ, δ, ε, etc. eritque huius seriei terminus exponenti o respondens $= o - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon +$ etc. qui igitur erit logarithmus summae quaesitae $= A$. Sunt vero hi logarithmi cum differentiis continuis sequentes:

diff.

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff. 6	diff. 7	diff. 8
0,0000000	0,3010300							
0,3010300	0,3979400	969100						
0,6989700	0,5051500	1072100	103000					
1,2041200	0,6087934	1036434	− 35666	− 138666				
1,8129134	0,7003042	915108	− 121326	− 85660	+ 53006	+ 19562		
2,5132176	0,778373[illegible]	789690	− 134418	− 12092	+ 72568	− 38182	− 57744	+ 65446
3,2915908	0,8451298	667566	− 113124	+ 21294	+ 34386	− 30480	+ 7702	
4,1397206	0,9030940	579642	− 87924	+ 25200	+ 3906			
5,0398146								

ergo erit:

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff 6
$lA =$ − 0,3010300 +						
+ 0,0969100 +	+ 2041200					
− 0,0103000 +	+ 866100	+ 1175100				
− 0,0138666 −	+ 241666	+ 1624434	+ 550666			
− 0,0053006 +	− 191672	+ 433338	+ 191096	+ 359570		
+ 0,0019562 +	+ 33444	− 225116	+ 658454	− 467358	+ 826928	
+ 0,0057744 −	+ 77306	− 43862	− 181254	+ 839708	− 1307066	+ 2133994
+ 0,0065446 +	− 123190	+ 200496	− 244358	+ 631104	+ 776604	− 2083670

vnde per methodum ante expoſitam erit.

$$l\frac{1}{A} = \frac{0,3010300}{2} + \frac{2041200}{4} + \frac{1175100}{8} + \frac{550666}{16} + \frac{359570}{32} + \frac{826928}{64} + \text{etc.}$$

ſeu $l\frac{A}{1} = 0,\ 7779088$ hincque $A = 0,\ 59966$, quem numerum adhuc vero maiorem eſſe, facile colligere licet. Interim tamen et hoc modo neque ſatis tuto, neque ſatis commode, ad cognitionem valoris A perueniri poteſt, etſi haec methodus infinitas ſuppeditat vias hunc valorem inveſtigandi; quarum quidem aliae aliis ad hunc ſcopum multo aptiores videntur.

§. 19. Investigemus nunc etiam analytice huius seriei valorem, eam vero in latiori sensu accipiamus: sit igitur

$$s = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \text{etc.}$$

quae differentiata dabit:

$$\frac{ds}{dx} = 1 - 2x + 6xx - 24x^3 + 120x^4 - \text{etc.} = \frac{x-s}{xx}$$

vnde fit $ds + \frac{s\,dx}{xx} = \frac{dx}{x}$, cuius aequationis, si e sumatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, integrale erit $e^{-1:x}s = \int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$ et $s = e^{1:x}\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Casu ergo quo $x = 1$ erit $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.} = e\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Exprimit ergo haec series aream lineae curuae, cuius natura inter abscissam x et y hac continetur aequatione $y = \frac{e.e^{-1:x}}{x}$, si abscissa x ponatur $= 1$: seu erit $y = \frac{e}{e^{1:x}x}$. Haec autem curua ita est comparata, vt posito $x = 0$ fiat $y = 0$; sin autem fit $x = 1$, erit $y = 1$: medii vero applicatae valores ita se habebunt, vt

si sit

si sit	fiat	si sit	fiat
$x = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$x = \frac{5}{10}$	$y = \frac{10}{5e^{5:5}} = \frac{2}{e}$
$x = \frac{1}{10}$	$y = \frac{10}{e^{9:1}}$	$x = \frac{6}{10}$	$y = \frac{10}{6e^{4:6}}$
$x = \frac{2}{10}$	$y = \frac{10}{2e^{8:2}}$	$x = \frac{7}{10}$	$y = \frac{10}{7e^{3:7}}$
$x = \frac{3}{10}$	$y = \frac{10}{3e^{7:3}}$	$x = \frac{8}{10}$	$y = \frac{10}{8e^{2:8}}$
$x = \frac{4}{10}$	$y = \frac{10}{4e^{6:4}}$	$x = \frac{9}{10}$	$y = \frac{10}{9e^{1:9}}$

Hac igitur curva constructa, statim patebit, eius aream abscissae $x = 1$ respondentem, non solum esse finitam, sed etiam minorem esse quadrato lateris $= 1$, maiorem vero eius semissi $\frac{1}{2}$. Quodsi vero basis $x = 1$ in decem partes aequales diuidatur, et portiones areae tanquam trapezia spectentur, et areae inuestigentur, obtinebitur seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. $= A$ valor vero proximus:

$$A = 0 + \frac{1}{e^{9:1}} + \frac{1}{2e^{8:2}} + \frac{1}{3e^{7:3}} + \frac{1}{4e^{6:4}} + \frac{1}{5e^{5:5}} + \frac{1}{6e^{4:6}} + \frac{1}{7e^{3:7}} + \frac{1}{8e^{2:8}} + \frac{1}{9e^{1:9}} + \frac{1}{20}$$

Qui termini, cum sit $e = 2,718281828$, induent sequentes valores:

$$\frac{1}{e^{9:1}} = 0{,}00012340$$

$$\frac{1}{2e^{8:2}} = 0{,}00915782$$

$$\frac{1}{3e^{7:3}} = 0{,}03232324$$

$$\frac{1}{4e^{6:4}} = 0{,}05578253$$

$$\frac{1}{5e^{5:5}} = 0{,}07357587$$

$$\frac{1}{6e^{4:6}} = 0{,}08556950$$

$$\frac{1}{7e^{3:7}} = 0{,}09306270$$

$$\frac{1}{8e^{2:8}} = 0{,}09735002$$

$$\frac{1}{9e^{1:9}} = 0{,}09942656$$

$$\frac{1}{20} = 0{,}05000000$$

hinc $\quad A = 0{,}59637164$

qui valor a vero iam vix ſenſibiliter differt. Si autem abſciſſa in plures partes fuiſſet diuiſa, tum iſte valor accuratius eſſet inuentus.

§. 20. Cum inuenta ſit ſumma $A = \int \frac{e^{1-1:x} dx}{x}$, ponatur $v = e^{1-1:x}$, ita vt poſito $x = 0$ fiat et $v = 0$, ac ac posito $x = 1$, $v = 1$, erit $1 - \frac{1}{x} = lv$, et $x = \frac{1}{1 - lv}$, atque $lx = -l(1 - lv)$, vnde fit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(1 - lv)}$. Quia ergo est $A = \int \frac{v\,dx}{x}$ posito $x = 1$, vel $v = 1$, erit quoque $A = \int \frac{dv}{1 - lv}$ posito post integrationem $v = 1$. Erit autem integratione per seriem infinitam peracta $A = \int \frac{dv}{1 - lv}$ $= \frac{v}{1 - lv} - \frac{1\,v}{(1 - lv)^2} + \frac{1 \cdot 2\,v}{(1 - lv)^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3\,v}{(1 - lv)^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,v}{(1 - lv)^5} -$ etc. et posito $v = 1$ ob $lv = 0$, erit, vti assumsimus,

$$A = 1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5 + \text{etc.}$$

Erit ergo A iterum area curuae, cuius natura inter abscissam v et applicatam y hac exprimitur aequatione $y = \frac{1}{1 - lv}$, si quidem ponatur abscissa $v = 1$, quo casu quoque fit $y = 1$. Notari autem hic oportet lv denotare logarithmum hyperbolicum ipsius v. Abscissa ergo $v = 1$ denuo in decem partes diuisa, applicatae in singulis diuisionum punctis se habebunt hoc modo:

si sit	erit	si sit	erit
$v = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l5}$
$v = \frac{1}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l1}$	$v = \frac{6}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l6}$
$v = \frac{2}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l2}$	$v = \frac{7}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l7}$
$v = \frac{3}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l3}$	$v = \frac{8}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l8}$
$v = \frac{4}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l4}$	$v = \frac{9}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l9}$
$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l5}$	$v = \frac{10}{10}$	$y = 1$

Hincque iterum per appropinquationem areae valor litterae A satis accurate obtinebitur.

§. 21.

§. 21. Datur vero alius modus in summam huius seriei inquirendi ex natura fractionum continuarum petitus, qui multo facilius et promtius negotium conficit: sit enim formulam generalius exprimendo:

$$A = 1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} = \frac{1}{1+B}$$

$$\text{erit } B = \frac{1x - 2x^2 + 6x^3 - 24x^4 + 120x^5 - 720x^6 + 5040x^7 - \text{etc.}}{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+C}$$

$$\text{et } 1+C = \frac{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + 5040x^6 - \text{etc.}}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{x - 4x^2 + 18x^3 - 96x^4 + 600x^5 - 4320x^6 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+D}$$

$$\text{vnde } D = \frac{2x - 12x^2 + 72x^3 - 480x^4 + 3600x^5 - \text{etc.}}{1 - 4x + 18x^2 - 96x^3 + 600x^4 - \text{etc.}} = \frac{2x}{1+E}$$

$$\text{Porro } E = \frac{2x - 18x^2 + 144x^3 - 1200x^4 + \text{etc.}}{1 - 6x + 36x^2 - 240x^3 + \text{etc.}} = \frac{2x}{1+F}$$

$$\text{Atque } F = \frac{3x - 36x^2 + 360x^3 - \text{etc.}}{1 - 9x + 72x^2 - 600x^3 + \text{etc.}} = \frac{3x}{1+G}$$

$$\text{Erit } G = \frac{3x - 48x^2 + \text{etc.}}{1 - 12x + 120x^2} = \frac{3x}{1+H}$$

$$\text{Sic } H = \frac{4x - \text{etc.}}{1 - 16x} = \frac{4x}{1+I}$$

Sicque porro patebit fore $I = \frac{4x}{1+K}$, $K = \frac{1x}{5+L}$; $L = \frac{5x}{1+M}$ etc. in infinitum, ita vt harum formularum ordo facile perspiciatur. His autem valoribus successive substitutis, erit

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} =$$

A =

$$A = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cfrac{6x}{1 + \cfrac{6x}{1 + \cfrac{7x}{\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}$$

§. 22. Quemadmodum autem huiusmodi fractionum continuarum valor sit investigandus, alibi ostendi: Scilicet cum singulorum denominatorum partes integrae sint vnitates, soli numeratores in computum veniunt; sit ergo $x = 1$, atque investigatio summae A sequenti modo instituetur:

$$A = \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{8}{13},\ \frac{20}{34},\ \frac{44}{73},\ \frac{124}{209},\ \frac{300}{501},\ \text{etc.}$$

$$\text{num. } 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ \text{etc:}$$

Fractiones nimirum hic exhibitae continuo propius ad verum valorem ipsius A accedunt, et quidem alternatim eo sunt maiores et minores; ita vt sit:

$A > \frac{0}{1}$; $A > \frac{1}{2}$; $A > \frac{4}{7}$; $A > \frac{20}{34}$; $A > \frac{124}{209}$; etc.

$A < \frac{1}{1}$; $A < \frac{2}{3}$; $A < \frac{8}{13}$; $A < \frac{44}{73}$; $A < \frac{300}{051}$; etc.

Hinc in fractionibus decimalibus erunt ipſius A valores

nimis parui	nimis magni
0,0000000000	1,0000000000
0,5000000000	0,6666666666
0,5714285714	0,6153846153
0,5882352941	0,6027397290
0,5933014354	0,5988023952

Si iam inter terminos nimis magnos et nimis paruos proximos, capiantur media arithmetica, denuo prodibunt valores alternatim nimis magni et nimis parui, qui erunt ſequentes:

Valores nimis parui	nimis magni ipſius A
0,5000000000	0,7500000000
0,5833333333	0,6190476190
0,5934065933	0,6018099546
0,5954875100	0,5980205807
0,5960519153	

ſicque iam ſatis prope ad verum valorem ipſius A pertigimus.

§. 23. Poterimus autem valorem iſtius fractionis infinitae per partes inueſtigare hunc in modum:

ſit A

fit $A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$

et $p = \cfrac{11}{1+\cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\cfrac{15}{1+9}}}}}}}}}}$

et $q = \cfrac{16}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{20}{1+\cfrac{20}{1+r}}}}}}}}}}$

erit $r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\text{etc. in infinitum.}}}}}}}$

Quibus valoribus euolutis reperietur:

$$\text{primo } A = \frac{491459820 + 1399316 20 p}{824073141 + 234662231 p}$$

$$\text{Deinde } p = \frac{2381951 + 649286 q}{887640 + 1864 40 q}$$

$$\text{et } q = \frac{11437136 + 2924816 r}{3697925 + 643025 r}$$

Supereſt igitur, vt valor ipſius r definiatur, quod quidem aeque difficile, ac ipſius A: ſed ſufficit hic valorem ipſius r proxime tantum noſſe; error enim quidam in valore ipſius r commiſſus, multo minorem errorem in valore ipſius q efficit, hincque denuo longe minor error in valorem ipſius p irrepit: ex quo tandem error valorem ipſius A inquinans omnino erit imperceptibilis.

§. 24. Deinde quia numeratores 21, 21, 22, 22, 23, etc. qui in fractionem continuam ipſius r ingrediuntur, iam propius ad aequalitatis rationem accedunt, ſaltem ab initio: hinc ſubſidium peti poteſt, ad eius valorem propius cognoſcendum. Si enim hi numeratores omnes eſſent aequales, vt eſſet

$$r = \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \text{etc.}}}}$$

foret $r = \frac{21}{1+r}$ ideoque $rr + r = 21$, et $r = \frac{\sqrt{85} - 1}{2}$

Cum

Cum autem hi denominatores crescant, hic valor iusto erit minor: Interim tamen concludere licet, si tres sequentes fractiones continuae constituantur:

$$r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{25}{1+\text{etc.}}}}}}$$

valores quantitatum r, s, t, in arithmetica progressione esse processuros, foreque $r+t=2s$; vnde valor ipsius r satis accurate colligetur. Quo autem haec inuestigatio latius pateat, pro numeris 21, 22, 23, hos indefinitos accipiamus $a-1$, a et $a+1$, vt sit

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+3}{1+\text{etc.}}}}}}$$

eritque:

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+s}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+t}};$$ vnde efficitur:

$$r = \frac{(a-1)s+a-1}{s+a} \text{ et } s = \frac{at+a}{t+a+1} \text{ seu } t = \frac{(a+1)s-a}{a-s}$$

vnde fit $r+t = \frac{2ss+(2aa-2a+1)s-a}{aa-ss} = 2s$: ideoque erit $2s^3+2ss-(2a-1)3-a=0$, ex qua aequatione valorem ipſius s hincque porro valorem ipſius r determinare licet.

§. 25. Sit nunc $a=22$, atque habebimus hanc aequationem cubicam reſoluendam.

$$2s^3+2ss-43s-22=0$$

cuius radix ſtatim intra limites 4 et 5 conſtituta deprehenditur. Sit igitur $s=4+u$, eritque

$$34=69u+26uu+2u^3$$

Sit porro $u=0,4+v$ erit $u^2=0,16+0,8u+vv$ atque $u^3=0,064+0,48v+1,2v^2+v^3$, ideoque.

$$2,112=90,76v+28,4v^2+2v^3$$

vnde erit, proxime $v=0,023$, et $s=4,423$. Cum igitur fit

$$r = \frac{21s+21}{s+22} \text{ fiet } r = \frac{113,883}{26,423} = 4,31,$$

hincque porro

$$q = \frac{24043093}{6469363} = 3,71645446: \text{ vnde obtinetur}$$

$$p = \frac{4794992,85}{1584252,22} = 3,0266600163: \text{ hincque tandem}$$

$$A = \frac{914985259,24}{1534315932,90} = 0,5963473621237$$

qui

qui valor in fractionem continuam conuersus dat

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

vnde sequentes inueniuntur fractiones valorem ipsius A proxime exhibentes:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 1 & 2 & 10 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 7 \\ A = & \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{31}{52}, & \frac{34}{57}, & \frac{65}{109}, & \frac{294}{493}, & \frac{653}{1095}, & \frac{1600}{2683} \end{array}$$

Hae autem fractiones alternatim sunt maiores et minores quam valor ipsius A, ac vltima quidem $\frac{1600}{2683}$ nimis est magna, excessus tamen minor est quam $\frac{1}{2683 \cdot 19876}$; vnde cum sit

$\frac{1}{A} = \frac{2683}{1600}$ erit proxime $\frac{1}{A} = 1,675875$

§. 26. Methodus, qua supra in §. 21. sum vsus ad seriem hanc

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 770x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}$$

in

in fractionem continuam conuertendam, latius patet, atque simili modo ad hanc seriem multo generaliorem applicari potest

$$z = 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

reperietur enim iisdem operationibus institutis:

$$z = \cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\cfrac{(m+2n)x}{1+\cfrac{3nx}{1+\cfrac{(m+3n)x}{1+\cfrac{4nx}{1+\cfrac{(m+4n)x}{1+\cfrac{5nx}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

Eadem vero expressio, aliaeque similes facile erui possunt ope theorematum, quae in dissertationibus meis de fractionibus continuis in Comment. Acad. Petropol. demonstraui. Ostendi enim huic aequationi:

$$ax^{m-1}dx = dz + ex^{n-m-1}zdx + bx^{n-1}zdx$$

satis-

ſatisfacere hunc valorem

$$z = \cfrac{ax^m}{m + \cfrac{(ac+mb)x^n}{m+n + \cfrac{(ac-nb)x^n}{m+2n + \cfrac{(ac+(m+n)b)x^n}{m+3n + \cfrac{(ac-2nb)x^n}{m+4n + \cfrac{(ac+(m+2n)b)x^n}{m+5n + \cfrac{(ac-3nb)x^n}{m+6n + \text{etc.}}}}}}}}$$

Si igitur ſit $c=0$ erit $dz + bx^{n-1}zdx = ax^{m-1}dx$, et $e^{bx^n:n}z = a\int e^{bx^n:n}x^{m-1}dx$ et $z = ae^{-bx^n:n}\int e^{bx^n:n}x^{m-1}dx$, et per ſeriem

$$z = \frac{ax^m}{m} - \frac{abx^{m+n}}{m(m+n)} + \frac{ab^2x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)} - \frac{ab^3x^{m+3n}}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)} + \text{etc.}$$

In hac autem forma noſtra, quam tractamus, non continetur.

§. 27. Inueni autem porro, ſi habeatur haec aequatio:

$$fx^{m+n}dx = x^{m+1}dz + ax^mzdx + bx^nzdx + czzdx$$

valorem ipſius z per huiusmodi fractionem infinitam exprimi:

$$z = \cfrac{fx^m}{b + \cfrac{(mb+ab+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(mb+nb+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(2mb-nb+ab+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(2mb-2nb+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(3mb-2nb+ab+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(3mb-3nb+cf)x^{m-n}}{b + \text{etc.}}}}}}}}$$

Quo igitur eundem valorem z commode per feriem ordinariam exprimere queamus, fit $a = o$, vt habeatur haec aequatio:

$$f x^{m+n} dx = x^{n+1} dz + a x^m z dx + b x^n z dx.$$

eritque per fractionem continuam:

$$z = \cfrac{f x^m}{b + \cfrac{b(m+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(m-n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-2n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-2n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-3n)x^{m-n}}{b + \text{etc.}}}}}}}}$$

Integrando vero erit $x^a e^{bx^{n-m}:(n-m)} z = f \int e^{bx^{n-m}:(m-n)} x^{a+n-1} dx$

feu fit $m-n = k$ erit $z = f e^{b:kx^k} x^{-a} \int e^{-b:kx^k} x^{a+n-1} dx$, fi quidem integratio ita inftituatur, vt z euanefcat, pofito $x = o$. Per feriem autem infinitam erit:

$$z = \frac{f}{b} x^m - \frac{(m+a)f}{b^2} x^{2m-n} + \frac{(m+a)(2m-n+a)f}{b^3} x^{3m-2n}$$

$$- \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)f}{b^4} x^{4m-3n}$$

$$+ \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)(4m-3n+a)f}{b^5} x^{5m-4n} - \text{etc.}$$

§. 28. Quo hae expreffiones fiant fimplices, neque tamen earum extenfioni vis inferatur, ponatur

$b = 1$;

$b = 1$; $f = 1$; $m + a = p$; $m - n = q$; vt fit $a = p - m$; et $n = m - q$; habebiturque haec aequatio differentialis:

$$x^m dx = x^{q+1} dz + (p-m) x^q z\, dx + z\, dx$$

cuius primo integrale eſt: $z = e^{1:qx^q} x^{m-p} \int e^{-1:qx^q} x^{p-q-1} dx$ Idem porro valor quantitatis z per ſequentem ſeriem infinitam exprimetur:

$$z = x^m - p x^{m+q} + p(p+q) x^{m+2q} - p(p+q)(p+2q) x^{m+2q} + \text{etc.}$$

Denique huic ſeriei aequiualebit iſta fractio continua:

$$z = \cfrac{x^m}{1 + \cfrac{p x^q}{1 + \cfrac{q x^q}{1 + \cfrac{(p+q) x^q}{1 + \cfrac{2 q x^q}{1 + \cfrac{(p+2q) x^q}{1 + \cfrac{3 q x^q}{1 + \cfrac{(p+3q) x^q}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

quae expreſſio plane congruit cum ea, quam ante §. 26 ſumus adepti, et quoniam de modo, quo illam eruimus, adhuc dubitari poſſet, vtrum numeratores ſecundum legem obſeruatam in infinitum progrediantur nec ne? hoc dubium iam penitus erit ſublatum. Suppeditat ergo haec conſideratio methodum certam innumerabiles ſeries divergentes ſummandi, ſeu valores ipſis aequiualentes inveniendi: inter quas ea, quam tractauimus eſt caſus particularis.

§. 29. Videtur autem porro casus memoratu dignus, quo est $p=1$, et $q=2$, atque $m=1$; erit enim $z=e^{1:2xx}\int e^{-1:2xx}dx:xx$

atque series infinita ita se habebit:

$$z=x-1x^3+1.3x^5-1.3.5x^7+1.3.5.7x^9-\text{etc.}$$

quae aequalis est huic fractioni continuae:

$$z=\cfrac{x}{1+\cfrac{1xx}{1+\cfrac{2xx}{1+\cfrac{3xx}{1+\cfrac{4xx}{1+\cfrac{5xx}{1+\cfrac{6xx}{1+\text{etc.}}}}}}}}$$

Si itaque ponatur $x=1$, vt fiat:

$$z=1-1+1.3-1.3.5+1.3.5.7-1.3.5.7.9+\text{etc.}$$

quae est series maxime diuergens: eius tamen valor exprimi potest per hanc fractionem continuam conuergentem:

$$z=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

quae

quae sequentes suppeditat fractiones, vero ipsius z valori proxime aequales:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ z = \frac{0}{1}; & \frac{1}{1}; & \frac{1}{2}; & \frac{3}{4}; & \frac{6}{10}; & \frac{18}{26}; & \frac{48}{76}; & \frac{156}{232}; & \frac{492}{764}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 10 & 11 & 12 \\ \frac{1740}{2620}; & \frac{6168}{9496}; & \frac{23568}{35696} \end{array}$$

si igitur sit $z = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}$

erit $z = \frac{23568 + 6168p}{35696 + 9496p}$

seu $z = \frac{2946 + 771p}{4462 + 1187p}$ et $p = \cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\text{etc.}}}}}}$

sit $p = \frac{11}{1+q}$ et $q = \frac{12}{1+r}$; erit $r = \frac{12-q}{q}$

atque cum p, q, r vniformiter crescant, erit $2q = \frac{12+22q-qq}{q+qq}$ et $2q^3+3qq-22q-12=0$, vbi proxime $q=3,06$; $p=2,709$; et $z = \frac{5034,630}{7677,683} = 0,655758$.