1760

De methodo Diophanteae analoga in analysi infinitorum

Leonhard Euler

DE METHODO DIOPHANTEAE ANALOGA IN ANALYSI INFINITORVM

AVCT. *L. EVLERO.*

Quanta affinitas inter analyſin finitorum et infinitorum intercedat, cum vtraque ex iisdem principiis ſit nata, atque ſimilibus operationibus contineatur, nemo ignorat, qui in vtroque calculi genere vel leuiter fuerit verſatus. Multo latius autem hanc affinitatem patere deprehendi, quam vulgo putari ſolet, et quemadmodum in analyſi finitorum ea methodus, quae Diophanto accepta refertur, inſignem occupat locum, ita etiam in analyſi infinitorum eiusmodi dari calculi genus obſeruaui, qui methodo Diophanteae penitus ſit ſimilis, ſimilibusque operationibus abſoluatur. Quanquam autem huius methodi in analyſi infinitorum nonnulla iam paſſim occurrunt ſpecimina, quorum deinceps mentionem ſum facturus, tamen in iis nulla certa ſolutionis via cernitur, ſed ſolutiones caſu potius ac diuinatione inuentae videntur, ita vt in hoc calculo certa ac tuta methodus adhuc deſideretur. Quamobrem mihi quidem nouum calculi genus in medium proferre videor, qui omnino dignus ſit, in quo vberius excolendo Geometrae vires ſuas exerceant. Mihi quidem tantum contigit prima eius fundamenta eruere, quae autem iam ad plurima ſatis illuſtria ac non parum recondita problemata ſoluenda da sufficiunt; eaque hic quantum potero, breuiter et dilucide exponam, quo aliorum, qui in hoc genere elaborare voluerint, opera promoueatur ac subleuetur.

Vt igitur primum indolem et naturam huius nouae methodi definiam, ea ex similitudine methodi diophanteae commodissime petetur. Quemadmodum enim methodus Diophantea ad problemata indeterminata est accommodata, atque ex infinita solutionum multitudine eas elicere docet, quae quantitatibus rationalibus contineantur: ita noua nostra methodus quoque nonnisi indeterminata problemata complectitur; et cum discrimini, quod in analysi finitorum inter quantitates rationales et surdas statui solet, in analysi infinitorum discrimen inter quantitates algebraicas ac transcendentes respondeat, nouae nostrae methodi vis in hoc erit posita, vt ex infinita cuiusque problematis solutionum copia, eae secernantur, quae quantitatibus algebraicis contineantur. Huiusmodi igitur problemata indeterminata methodo nostrae sunt propria, quorum solutio in genere concepta formulas transcendentes, seu integrales inuoluit, ex quibus deinceps eos casus elici oportet, quibus quantitates illae transcendentes in algebraicas abeunt, seu, quod eodem redit, formulae illae integrales integrationem admittant.

Per exemplum tam natura huius nouae methodi, quam eius affinitas cum methodo diophantea clarius elucescet. Vti enim in methodo diophantea quaeri solet, quomodo quantitates x et y inter se debeant esse comparatae, vt haec formula $\sqrt{(xx+yy)}$ fiat rationalis, ita in noua nostra methodo huic similis erit ista quaestio, qua inter quantitates variabiles x et y ea quae-

L 3 ritur

ritur conditio, vt formula ſpecie transcendens $\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ fiat algebraica, ſeu vt huius formulae valor algebraice exhiberi queat. Manifeſtum eſt, hoc problemate, quod inſtar exempli attulimus, quaeri curvas algebraicas, quae ſint rectificabiles; relatio enim inter x et y, quae coordinatas curuae denotabunt, requiritur algebraica, vnde quaeſtio circa curuas algebraicas verſatur, et cum huius curuae arcus indefinite per $\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exprimatur, quoties iſta formula algebraica reddetur, toties ipſa curua erit rectificabilis.

Simili modo ſi omnes eae curuae algebraicae deſiderentur, quae ſint quadrabiles, perſpicuum eſt, quaeſtionem huc redire, vt eae relationes inter quantitates variabiles x et y aſſignentur, quibus haec formula integralis $\int y\,dx$ integrationem admittat, atque ad valorem algebraicum perducatur.

Etſi autem hic potiſſimum quantitates algebraicae ſunt propoſitae, perinde atque in methodo Diophantea quantitates rationales ſpectari ſolent; tamen eo quoque referendae ſunt eiusmodi quaeſtiones, quibus formulae quaepiam integrales non algebraice exprimi, ſed propoſitam quandam tranſcendentium quantitatum ſpeciem implicare debent; veluti ſi quaerantur eiusmodi curuae algebraicae, quarum rectificatio non algebraice perfici queat, ſed a quadratura circuli pendeat. Variae enim transcendentium quantitatum ſpecies commodiſſime per quadraturas cognitarum curuarum deſignantur. Facile autem intelligitur, eandem methodum, quae curuas rectificabiles inuenire docet, quoque ad eas curuas, quarum rectifi-

rectificatio a data quadratura pendeat, inueniendas aptam fore, id quod ex sequentibus clarius perspicietur.

Huiusmodi problema iam ante complures annos a Celeb. *Hermanno* extat propositum, quo eiusmodi curuam algebraicam quaesiuerat, quae non esset rectificabilis, sed cuius rectificatio a quadratura datae curuae penderet, quae tamen nihilo minus tot, quot lubuerit, arcus absolute rectificabiles haberet. Propositione huius problematis tum temporis summus Analyseos promotor *Ioh. Bernoullius* b. m. adeo obstupuit, vt non solum hoc problema ab *Hermanno* solutum esse non crediderit, sed etiam sagacitatem humanam longe superare pronunciauerit; quod quidem nemini mirum videri debet, cum illo tempore nulla plane vllius methodi vestigia patuissent, cuius ope huiusmodi problemata tractari possent. *Hermannus* etiam eius solutionem per longas ambages ex quadam linearum curuarum contemplatione hauserat, vnde primo intuitu nihil plane emolumenti ad propositum expectare licuerat, ita vt inopinato ad solutionem ante peruenisset, quam de ipso problemate cogitasset. Visa autem ista *Hermanni* solutione, *Bernoullius* etiam aliam publicauit solutionem ex sola analysi petitam: sed cuius fundamentum tantopere est absconditum, vt diuinatione potius, quam vlla certa via, formulas suas solutionem continentes eruisse videatur.

Cum hoc problema non solum ob summam, qua implicabatur, difficultatem, sed etiam ob eximium vsum, qui inde in analysin redundare videbatur, omnium tum temporis Geometrarum admirationem excitasset, nemo tamen quantum constat, in certam atque ad hu-

ius

iusmodi problemata accommodatam methodum inquisiuit, qua nouus omnino analyſeos infinitorum quaſi campus aperiretur. Ego igitur longo poſt interuallo fortaſſe primus de principiis nouae huius methodi cogitare coepi, quorum beneficio memorati illius problematis ſolutio directe ſine ambagibus ac diuinatione obtineri poſſet. Detexi quoque regulas quasdam non contemnendas, quae ad nouae iſtius methodi fundamenta iacienda idonea ſunt viſa, earumque ope non ſolum plures problematis illius, quod erat agitatum, ſolutiones ſum adeptus, ſed etiam nonnulla alia eiusdem generis problemata dedi ſoluta, cuiusmodi eſt illud, cuius ſolutionem exhibui in Diſſertatione de duabus curuis algebraicis ad communem axem relatis inueniendis, quae non ſint rectificabiles, ſed quarum rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vt amborum arcuum eidem abſciſſae reſpondentium ſumma algebraice exprimi poſſit. Fontem ſolutionis, quam ibi dedi, de induſtria celaui, cum mihi eſſet propoſitum prima quaſi huius methodi elementa ſeorſim explicare, quo eorum vſus ampliſſimus clarius perſpiciatur, neque ea ad hoc vnicum problema adſtricta videantur. Fateri quidem ſtatim cogor, me leuem adhuc partem tantum huius nouae methodi, quam hic propono, enucleaſſe; verum his principiis ſtabilitis, non dubito, quin ea mox maiora incrementa ſit acceptura.

Diuiſio huius methodi in partes ſecundum naturam formularum integralium, quarum valores algebraici ſunt efficiendi, commodiſſime inſtituetur. Cum enim ſemper relatio inter duas quantitates variabiles x et y

quaeratur

quaeratur, vt vna pluresue formulae integrales, quae has variabiles vna cum ſuis differentialibus inuoluant, algebraicos obtineant valores, huiusmodi formulas in ſequentes ordines diſtribui conueniet:

Ordo primus continebit huiusmodi formulas $\int Z\,dx$, vbi Z eſt functio quaecunque algebraica ambarum quantitatum x et y.

Ad ordinem ſecundum refero eas formulas $\int Z\,dx$, in quibus poſito $dy = p\,dx$, littera Z eſt functio non ſolum ipſarum x et y, ſed etiam ipſius p. Vbi notandum eſt, non ſolum formulam $\int Z\,dx$, ſed etiam hanc $\int p\,dx = y$ algebraicos habere debere valores. Huc reducuntur eae formulae integrales, in quibus ambo differentialia dx et dy occurrunt, veluti $\int V(dx^2 + dy^2)$, quae poſito $dy = p\,dx$ ad hanc formam $\int dx\,V(1 + pp)$ reuocatur.

Ordo porro tertius eiusmodi comprehendet formulas integrales, in quibus etiam differentialia ſecundi gradus inſunt, quae autem, ponendo $dy = p\,dx$ et $dp = q\,dx$, ad hanc formam $\int Z\,dx$ perducentur, vbi littera Z erit functio quantitatum x, y, p, et q. His igitur caſibus non ſolum formulae $\int Z\,dx$, ſed etiam harum formularum $\int p\,dx$ et $\int q\,dx$ valores algebraici effici debebunt.

Ordo quartus complectetur eas formulas integrales, quae quantitatum x et y differentialia etiam tertii gradus inuoluunt; haeque ad formam $\int Z\,dx$ reducentur, ponendo $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$ et $dq = r\,dx$, vbi quantitas Z continebit praeter quantitates x et y etiam has

has p, q, et r. Hincque ſimul ratio ſequentium ordinum intelligitur.

Praeter hos ordines peculiarem claſſem conſtituunt eiusmodi formulae $\int Z\,dx$, inquibus Z non ſolum quantitates algebraicas x, y, p, q, etc. vti in his ordinibus, continet, ſed etiam formulas integrales complectitur, veluti ſi fuerit $Z = x\int \surd (dx^2 + dy^2)$, ſeu $Z = x\int dx \surd (1+pp)$, ita vt haec quantitas $\int x\,dx\int dx \surd (1+pp)$ efficienda ſit algebraica, pro quo relatio inter quantitates x et p definiri debeat. In hoc exemplo primum patet, cum ſit $dy = p\,dx$, valorem huius formulae $\int p\,dx$ eſſe debere algebraicum. Deinde etiam valorem huius $\int dx \surd (1+pp)$ eſſe oportebit algebraicum, qui ſi ponatur $= s$, tandem haec formula $\int x\,s\,dx$ ad valorem algebraicum erit perducenda, ita vt vnica haec formula $\int x\,dx\int \surd (dx^2 + dy^2)$ reductionem harum trium formularum

I. $\int p\,dx = y$; II $\int dx \surd (1+pp) = s$; III $\int x\,s\,dx$ ad valores algebraicos requirat. Ex quo intelligitur, etiam huiusmodi formulas ad ordines ante enumeratos reuocari poſſe.

Totum igitur negotium nouae huius methodi, quam examini Analyſtarum propono, in hoc conſiſtit, vt eiusmodi relatio inter binas variabiles x et y inueſtigetur, quae vnam pluresue formulas integrales, cuiusmodi in ordinibus ſupra deſcriptis ſum complexus, algebraicas reddat. Hic autem non ſolum problemata occurrunt difficillima, a quorum ſolutione equidem adhuc longe ſum remotus, ſed etiam fortaſſe eiusmodi excogitari

gitari possunt, quae nullam plane solutionem admittunt; omnino vti vsu venire solet in problematibus ad methodum Diophanteam pertinentibus. Vnde etiam sine dubio haec similitudo locum inueniet, vt alia problemata solutionem generalem, alia vero tantum solutiones speciales permittant.

Huiusmodi igitur problemata hic tantum proferam, quorum solutionem inueni, vt hoc modo specimen ac prima quasi elementa nouae methodi, quam vlterius excolendam propono, exhibeam, quae etsi exiguam tantum partem huius methodi constituere videntur, tamen viam, qua vlterius progredi liceat, patefacient. Certa autem inde earum operationum ratio perspicietur, quae directe nihilque diuinationi tribuendo ad solutiones eorum problematum, quae ante commemoraui, perducant.

LEMMA.

1. *Formula $\int y\,dx$ erit algebraica, si haec $\int x\,dy$ fuerit talis, et generatim, a qua quadratura pendebit integratio alterius formulae $\int y\,dx$, ab eadem quoque alterius $\int x\,dy$ integratio pendebit.*

Demonstratio est manifesta, cum sit $\int y\,dx = xy - \int x\,dy$, vnde patet, si formula $\int x\,dy$ fuerit vel algebraica, vel datam quadraturam implicans, eandem quoque naturam habere alteram formulam $\int y\,dx$.

COROLLARIUM.

2. Simili modo integratio huius formulae $\int yx\,dx$, vel huius $\int y\,x^n\,dx$ pendebit ab integratione huius

 $\int xx\,dy$

$\int x x d y$, vel huius $\int x^{n+1} d y$, ob $\int y x d x = \frac{1}{2} y x x - \frac{1}{2} \int x x d y$, vel ob $\int y x^n d x = \frac{1}{n+1} y x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} d y$: vnde perſpicitur hoc lemma latiſſime patere, eiusque ope formulas omnis generis, quae integrabiles ſint reddendae, in alias transformari poſſe.

SCHOLION.

3. Lemma hoc, quantumuis leue ac triuiale videatur, tamen praecipuum continet fundamentum nouae illius methodi, quam ſum adumbraturus. Si enim propoſita formula integrali quacunque $\int Y d X$ alia detur $\int V d Z$, vt ſit $A \int Y d X + B \int V d Z$ quantitas algebraica, manifeſtum eſt, harum duarum formularum $\int Y d X$ et $\int V d Z$ rationem ita eſſe comparatam, vt ſi altera fuerit integrabilis, etiam alteram fore integrabilem, et a quanam quadratura alterius integratio pendeat, ab eadem quadratura etiam alterius integrationem pendere. Reſolutio autem praecipuorum problematum ad hanc methodum pertinentium abſoluetur ideonea formularum integralium, ad quas peruenitur, transformatione.

PROBLEMA I.

4. Inuenire omnes curuas algebraicas, quae ſint quadrabiles; ſeu eam inter variabiles x et y relationem in genere definire, vt formula $\int y d x$ fiat integrabilis.

SOLVTIO.

Si curuae abſciſſa ponatur $= x$ et applicata orthogonalis $= y$, erit huius curuae area $= \int y d x$, cuius valorem

valorem algebraicum esse oportet: quod quidem facillime impetratur. Denotet enim X functionem quamcunque algebraicam ipsius x, huicque functioni X aequalis ponatur area $\int y\,d\,x$, vt sit $\int y\,d\,x = X$, erit, differentialibus sumendis, $y\,d\,x = d\,X$, vnde fit $y = \frac{d\,X}{d\,x}$; sicque applicata y aequabitur functioni algebraicae ipsius x, ex quo curua erit algebraica, eiusque area $\int y\,d\,x$, cum sit $= X$, algebraice quoque exprimetur.

ALITER.

Cum sit area $\int y\,d\,x = y\,x - \int x\,d\,y$, ponatur $\int x\,d\,y$ functioni cuicunque ipsius y, quae sit $= Y$, aequalis, seu sit $\int x\,d\,y = Y$, vnde fit $x = \frac{d\,Y}{d\,y}$, ita vt iam abscissa x functioni algebraicae ipsius y aequetur, curuaque fiat algebraica. Posita autem $x = \frac{d\,Y}{d\,y}$, erit curuae aréa $\int y\,d\,x = y\,x - Y = \frac{y\,d\,Y}{d\,y} - Y$, ideoque etiam algebraica.

COROLL. 1.

5. Si X in priori solutione, vel Y in posteriori, non fuerit functio algebraica ipsius x, vel y, sed transscendens, ita tamen vt $\frac{dX}{d\,x}$, vel $\frac{d\,Y}{d\,y}$, fiat functio algebraica, curua quidem erit algebraica, sed eius quadratura quantitate transcendente exprimetur.

COROLL. 2.

6. Scilicet si in priori solutione sit $X = P + \int Q\,d\,x$, existentibus P et Q functionibus algebraicis ipsius x, ita tamen, vt $\int Q\,d\,x$ sit quantitas transscendens, aequatio pro curua $y = \frac{d\,P}{d\,x} + Q$ erit quidem algebraica,

 sed

fed eius area $\int y\,dx = P + \int Q\,dx$ a quantitate transcendente $\int Q\,dx$ pendebit.

COROLL. 3.

7. Simili modo in altera folutione fi ponatur $Y = P + \int Q\,dy$, exiftentibus P et Q functionibus algebraicis ipfius y, ita tamen vt $\int Q\,dy$ fit quantitas transcendens, aequatio pro curua $x = \frac{dP}{dy} + Q$ erit algebraica, fed area, quae erit $\int y\,dx = \frac{y\,dP}{dy} + yQ - P - \int Q\,dy$ a quantitate transcendente $\int Q\,dy$ pendebit.

SCHOLION.

8. Vti huius problematis folutio eft facillima nulloque artificio indiget, fequens problema, quod quidem alius eft naturae, adiungam, cuius vero folutio in aliis problematibus, quae ad hanc methodum referri folent, infignem vfum praeftabit. Veluti fi quaerantur curuae algebraicae generatim non rectificabiles, quae tamen, quot lubuerit, habeant arcus rectificabiles; aliaeue huius generis quaeftiones proponantur, principium folutionis ex fequente problemate erit petendum.

PROBLEMA. 2.

9. Inuenire curuas algebraicas in genere non quadrabiles, fed quarum quadratura generalis datam quantitatem transcendentem inuoluat, in quibus tamen, quot lubuerit, areas abfolute quadrabiles affignare liceat.

SOLVTIO.

Ex folutione praecedentis problematis liquet, hanc quaeftionem huc redire, vt eiusmodi formula transcendens

dens $\int Q\,dx$ inueſtigetur, cuius valor certis caſibus, veluti ſi ponatur $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. euaneſcat, his enim caſibus quantitas $X = P + \int Q\,dx$, quae in genere eſt transcendens, quippe formulam $\int Q\,dx$ inuoluens, fiet algebraica, nempe $= P$. Hoc vt efficiatur, ſtatuatur, $\int Q\,dx = \int u\,dx - \int v\,dz$, vbi v talis ſit functio ipſius z, qualis u eſt ipſius x, ita vt formulae $\int u\,dx$ et $\int v\,dz$ ſimilem quantitatem transcendentem exhibeant, qua $\int Q\,dx$ contineri debet. Sit autem z eiusmodi functio ipſius x, ita vt caſibus propoſitis $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. quot lubuerit, fiat $z = x$, ideoque et $v = u$, atque perſpicuum eſt, his iisdem caſibus fore $\int v\,dz = \int u\,dx$, hincque $\int Q\,dx = o$. Hunc in finem formetur iſta functio ipſius x.

$$x^n - (a+b+c+\text{etc.})x^{n-1} + (ab+ac+bc+\text{etc.})x^{n-2} - (abc+\text{etc.})x^{n-3} + \text{etc.}$$

quae breuitatis gratia vocetur $= S$, ita vt aequatio $S = o$ praebeat radices $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. eos ſcilicet ipſos valores abſciſſae x, quibus area abſolute quadrabilis reſpondere debet. Tum vero ſtatuatur $z - x = S$, atque manifeſtum eſt, iisdem caſibus $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. fieri $z = x$, omnino vti requiri ad noſtrum propoſitum oſtendimus. Huic autem requiſito generalius ſatisfiet, ſi ponamus $z - x = ST$, dummodo $ST = o$ alias non praebeat radices reales, niſi quae ſunt propoſitae, ſcilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. Hanc ob rem ſi S denotet eiusmodi functionem ipſius x, vt aequatio $S = o$ alias non habeat radices reales, niſi quae ſunt propoſitae, ſcilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. quod ſemper infinitis modis fieri poteſt, tum ſumatur $z - x = S$, ſeu $z = x + S$.

Quo

Quo facto, si $\int u\,dx$ eam quantitatem transcendentem exprimat, a qua curuae quadratura in genere pendere debet, pro v substituatur talis functio ipsius z, qualis u est ipsius x; atque in formulis superioribus loco $\int Q\,dx$ scribatur $\int u\,dx - \int v\,dz$, ita vt sit $Q = u - \frac{v\,dz}{dx}$. Tum enim si construatur curua algebraica, cuius abscissae $= x$ respondeat applicata $y = \frac{dP}{dx} + u - \frac{v\,dz}{dx}$, eius area in genere erit $\int y\,dx = P + \int u\,dx - \int v\,dz$, pendebit scilicet a quantitate transcendente $\int u\,dx$, cui altera $\int v\,dz$ est similis, nihilo vero minus casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. eius area algebraice exprimetur, fietque $\int y\,dx = P$. Hoc ergo modo effici potest, vt curua praecise tot, quot quis voluerit, obtineat areas quadrabiles, neque plures, neque pauciores.

COROLL. 1.

10. Cum v talis sit functio ipsius z, qualis u est ipsins x, ita vt v obtineatur ex u, si loco x scribatur z, sequitur etiam v talem esse functionem ipsius u, qualis z est ipsius x. Quare cum sit $z = x + S$, sequitur v obtineri ex a, si loco x scribatur $x + S$.

COROLL. 2.

11. Quoniam igitur quantitas v resultat ex functione u, si loco x scribatnr $x + S$, ex proprietate functionum alias demonstrata sequitur fore

$$v = u + \frac{S\,du}{dx} + \frac{S^2\,ddu}{1.2\,dx^2} + \frac{S^3\,d^3u}{1.2.3\,dx^3} + \frac{S^4\,d^4u}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

posito elemento dx constante, sed cum haec expressio in infinitum sit continuanda, praestat valorem ipsius v actuali substitutione definire.

EXEM-

EXEMPLVM.

12. *Inuenire curuam algebraicam, cuius quadratura indefinita pendeat a quadratura circuli, cuius vero area abſciſſae $x = a$ reſpondens algebraice exhibeatur.*

Vt quadratura curuae indefinita a quadratura circuli pendeat, ponatur $u = \sqrt{(2fx - xx)}$, et vt poſito $x = a$ ſiue $u = o$, fiat $S = n(a - x)$, vt ſit $z = x + na - nx = na - (n - 1)x$. Ergo ob $v = \sqrt{(2fz - zz)}$ erit $v = \sqrt{(2naf - 2(n-1)fx - nnaa + 2n(n-1)ax - (n-1)^2xx)}$ Ponatur, vt haec formula ſimplicior euadat, $2f = na$, eritque $v = \sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2xx)}$, et ob $dz = -(n-1)\,dx$ habebitur $Q = \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2xx)}$ ac pro curua erit

$$y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2xx)},$$

area vero erit

$$\int y\,dx = P + \int dx\sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\int dx\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2xx)}.$$

Verum hic notandum eſt, quemadmodum integrale $\int u\,dx$ ita capi ponitur, vt euaneſcat poſito $x = o$, ita quoque integrale $\int v\,dz$ ita capi debere, vt euaneſcat poſito $z = o$: Quamobrem vt tota area euaneſcat poſito $x = o$, neceſſe eſt, vt quoque fiat $z = o$ hoc caſu; alioquin enim expreſſio areae $\int y\,dx$ complecteretur quantitatem conſtantem portionem areae circularis denotantem, quae caſu $x = a$ deſtrueretur. Huic autem incommodo occurretur, ſi pro S eiusmodi ſumatur functio, quae poſito $x = o$ euaneſcat. Sit ergo $S = \frac{nx}{a}(a - x)$, et $z = x + \frac{nx}{a}(a - x)$, et $v = \sqrt{(2fz - zz)}$, atque quaeſito ſatisfiet modo ſolito. Ponatur, vt expreſſio fiat ſimpliciſſima $n = -1$, vt ſit

$z = \frac{xx}{a}$ et $v = \sqrt{(\frac{2fxx}{a} - \frac{x^4}{aa})} = \frac{x}{a}\sqrt{(2af - xx)}$ eritque applicata $y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(2fx - xx)} - \frac{2xx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$ ob $dz = \frac{2x\,dx}{a}$: atque area fiet

$$\int y\,dx = P + \int dx\sqrt{(2fx - xx)} - 2\int \frac{xx\,dx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$$

quae qualiscunque P fuerit functio ipsius x, in genere semper a quadratura circuli pendebit, casu autem $x = a$ area fiet algebraica $= P$.

SCHOLION.

13. Circumstantia haec ratione constantis ad areae expressionem adiiciendae, ne ea ipsa sit transcendens, in omnibus exemplis probe est obseruanda. Hunc in finem functio S non solum ita accipi debebit, vt casibus propositis $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. euanescat, sed etiam casu $x = o$ euanescere debebit. Quod quidem per se est perspicuum: nam quia omnis curuae aream abscissae euanescenti $x = o$ respondentem nihilo aequalem assumimus, ideoque a transcendentibus quantitatibus vacuam, euidens est, quotcunque casus propositi sint, quibus area fiat algebraica, iis semper superaddendum esse casum $x = o$, sicque functio S ita comparata esse debebit, vt non solum casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. qui sunt propositi, sed etiam casu $x = o$ fiat $S = o$.

PROBLEMA 3.

14. Si Z sit functio quaecunque algebraica binarum variabilium x et y, definire relationem algebraicam inter x et y, vt formula integralis $\int Z\,dx$ algebraicum obtineat valorem.

SOLV-

SOLVTIO.

Etsi problema hoc multo latius patere videtur, quam primum, tamen eius solutio non est difficilior. Ponatur enim $\int Z\,dx$ functioni cuicunque algebraicae ipsius x, quae sit $= X$ aequale, eritque $Z\,dx = dX$ et $Z = \frac{dX}{dx}$, vbi cum $\frac{dX}{dx}$ sit quoque functio algebraica psius x, habebitur aequatio algebraica inter x et y, qua earum relatio algebraice definietur: indeque erit per hypothesin $\int Z\,dx = X$.

COROLL. 1.

15. Si X non sit functio algebraica ipsius x, sed eius quampiam inuoluat functionem transcendentem, veluti si sit $X = P + \int Q\,dx$, ita vt $\frac{dX}{dx} = \frac{dP}{dx} + Q$, sit nihilominus functio algebraica ipsius x; tum orietur curva algebraica hac aequatione $Z = \frac{dP}{dx} + Q$ expressa, sed valor integralis inde oriundus $\int Z\,dx$ non erit algebraicus, verum functionem transcendentem $\int Q\,dx$ inuoluet.

COROLL. 2.

16. Si pro Q eiusmodi quantitatem substituamus, qualem in problemate praecedente descripsimus, tum valor quidem indefinitus formulae $\int Z\,dx$ non erit algebraicus, sed a quadratura quapiam data pendebit. Hoc tamen non obstante effici potest, vt eius valor tot casibus, quot lubuerit, et quidem datis veluti $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. fiat algebraicus. Vbi quidem notandum est, in calculo his casibus superaddendum esse semper casum $x = o$.

SCHOLION.

17. Si igitur vnica proponatur formula integralis ad valorem algebraicum reducenda, eaque pertineat ad ordinem primum, tum quaestio nulla laborat difficultate. Atque simul pari opera effici potest, vt illius formulae integratio a data quadratura pendeat, atque insuper vt tot, quot quis voluerit, casibus algebraicum obtineat valorem. Antequam igitur ad formulas sequentium ordinum progrediar, eiusmodi problemata proponam, quibus duae pluresue formulae ordinis primi simul ad valores algebraicos sint reducendae; ita vt existentibus V et Z functionibus ipsarum x et y, valores harum duarum formularum $\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ vel plurium huiusmodi algebraici sint efficiendi. Hic quidem ante omnia animaduerto, haec problemata in genere concepta mihi quidem non solubilia videri, sed nonnisi sub certis conditionibus, quibus functiones V et Z sint praeditae, solutionem admittere. Quibus igitur casibus mihi quidem ad solutionem peruenire licuerit, hic exponam.

PROBLEMA 4.

18. Si P et Q sint functiones quaecunque ipsius x, inuenire relationem ideoneam inter variabiles x et y, vt ambae hae formulae $\int yP\,dx$ et $\int yQ\,dx$ valores algebraicos adipiscantur.

SOLVTIO.

Ponatur vtraque formula seorsim aequalis quantitati cuicunque algebraicae, scilicet

$$\int yP\,dx = L \text{ et } \int yQ\,dx = M.$$

Hinc

Hinc ergo fiet $y = \frac{dL}{Pdx}$ et $y = \frac{dM}{Qdx}$ ideoque $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$, vbi sint L et M functiones nouae cuiuspiam variabilis z, ita vt $\frac{dL}{dM}$ sit functio algebraica huius variabilis z. Ope aequationis ergo inuentae $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$ valor ipsius x, cuius functio est $\frac{P}{Q}$, per z expressus reperietur, ita vt inde proditurum sit $x =$ functioni cuipiam ipsius z. Qua inuenta obtinebitur quoque valor ipsius y per functionem quampiam ipsius z expressus, ope formulae $y = \frac{dL}{Pdx}$ vel $y = \frac{dM}{Qdx}$, sicque vtraque variabilis x et y per nouam variabilem z determinabitur, idque algebraice; vnde relatio inter x et y quaesita innotescet. Ex his autem valoribus erit, vti assumsimus, $\int y\,P\,dx = L$ et $\int y\,Q\,dx = M$, vtraque scilicet functioni algebraicae ipsius z aequalis.

ALIA SOLVTIO.

Ponatur vt ante altera formula $\int y\,P\,dx$ quantitati cuipiam algebraicae L aequalis, seu $\int y\,P\,dx = L$, eritque hinc $y = \frac{dL}{Pdx}$, qui valor in altera formula substitutus dabit $\int y\,Q\,dx = \int \frac{Q}{P}\,dL$, quae algebraica reddenda restat. Iam vero per lemma praemissum est:

$$\int \frac{Q}{P}\,dL = \frac{LQ}{P} - \int L\,d.\,\frac{Q}{P}.$$

Sicque formula $\int L\,d.\,\frac{Q}{P}$ ad algebraicum valorem reduci debet; vbi notandum $d.\,\frac{Q}{P}$ huiusmodi formam $X\,dx$ esse habiturum, vbi sit X functio ipsius x cognita. Ponatur ergo $\int L\,d.\,\frac{Q}{P}$ functioni cuicunque ipsius x, quae sit V aequalis, erit $L = \frac{dV}{d(Q:P)}$ functioni scilicet ipsius x. Inuento autem valore ipsius L erit porro $\int y\,P\,dx$

 $= L$;

$= L$; $\int y\, Q\, d x = \frac{L Q}{P} - V$ atque variabilis y ita definietur per x, vt ſit $y = \frac{d L}{P d x}$, exiſtente vti inuenimus $L = d V : d. \frac{Q}{P}$: hoc ergo modo immediate, nulla alia noua variabili in ſubſidium vocata, variabilem y per x dedimus determinatam.

C O R O L L. 1.

19. Cum in priori ſolutione altera variabilis x definiri debeat ex aequatione $\frac{P}{Q} = \frac{d L}{d M}$, altera vero ſit $y = \frac{d L}{P d x}$, ſicque vtraque per nouam variabilem z cuius L et M ſunt functiones algebraicae, exprimatur, ambae formulae integrales propoſitae valores obtinebunt algebraicos ſcilicet

$$\int y\, P\, d x = L \text{ et } \int y\, Q\, d x = M$$

C O R O L L. 2.

20. Per eandem ergo ſolutionem ſumendis pro L et M functionibus transcendentibus ipſius z, ita tamen vt $\frac{d L}{d z}$ et $\frac{d M}{d z}$ ſint functiones algebraicae, effici poterit, vt integratio vtriusque formulae propoſitae $\int y\, P\, d x$ et $\int y\, Q\, d x$ a data quadratura pendeat; vel vt altera ſit algebraica, altera vero datam quadraturam inuoluat.

C O R O L L. 3.

21. Si ambae hae formulae debeant eſſe algebraicae, ſolutio poſterior eundem praeſtat vſum; ſumta enim pro V functione quacunque algebraica ipſius x, erit $L = d V : d. \frac{Q}{P}$ quoque functio algebraica ipſius x;

x; tum vero si statuatur altera variabilis $y = \frac{dL}{P\,dx}$, erit

$$\int y P\,dx = L \text{ et } \int y Q\,dx = \frac{LQ}{P} - V \text{ seu}$$
$$\int y P\,dx = \frac{dV}{d.\frac{Q}{P}} \text{ et } \int y Q\,dx = \frac{Q\,dV}{P\,d.\frac{Q}{P}} - V$$

COROLL. 4.

22. Sin autem in hac solutione pro V capiatur functio transcendens ipsius x, ita tamen vt $\frac{dV}{dx}$ sit functio algebraica, ob $\frac{d(Q:P)}{dx}$ etiam functionem algebraicam, fiet quoque $L = dV : d.\frac{Q}{P}$, ideoque etiam y functio algebraica ipsius x; vnde prioris formulae $\int yP\,dx = L$ valor fiet algebraicus, atque altera tantum $\int y Q\,dx$ a praescripta quadratura V pendebit.

COROLL. 5.

23. Per hanc igitur alteram solutionem effici non potest, vt vtraque formula integralis proposita datam quadraturam inuoluat, dum alterius valor semper reperitur algebraicus. Quare si vtraque debeat habere valorem transcendentem, solutione priore erit vtendum.

EXEMPLVM.

24. *Inuenire curuas algebraicas, in quibus non solum area $\int y\,dx$, sed etiam areae momentum $\int y\,x\,dx$ algebraice exhiberi possit.*

Per priorem solutionem ponatur:

$$\int y\,dx = L \text{ et } \int y\,x\,dx = M$$

erit $y = \frac{dL}{dx} = \frac{dM}{x\,dx}$ vnde fit $x = \frac{dM}{dL}$ et

$y =$

$y = dL : d\left(\frac{dM}{dL}\right)$, vbi pro L et M functiones quaecunque algebraicae nouae variabilis z accipi possunt. Nihil ergo impedit quo minus statuatur $L = z$, et pro M sumatur functio quaecunque ipsius z, quae sit $= Z$, quo facto erit $x = \frac{dZ}{dz}$ et sumto elemento dz constante $y = \frac{dz^2}{ddZ}$.

Per alteram solutionem ponatur $\int y\,dx = L$, vt sit $y = \frac{dL}{dx}$, erit $\int yx\,dx = \int x\,dL = xL - \int L\,dx$. Statuatur iam $\int L\,dx = V$ functioni cuicunque ipsius x, erit $L = \frac{dV}{dx}$, ideoque $\int y\,dx = \frac{dV}{dx}$ et $\int yx\,dx = \frac{x\,dV}{dx} - V$, vnde posito elemento dx constante applicata y ita per abscissam x definietur, vt sit $y = \frac{ddV}{dx^2}$.

SCHOLION.

25. Me non monente intelligitur, simili modo huiusmodi formulas $\int Y P\,dx$ et $\int Y Q\,dx$ ad valores algebraicos reduci posse, si Y functionem quamcunque alterius variabilis y designet, dummodo P et Q sint functiones ipsius x; determinationes enim ante pro y inuentae nunc ipsi Y sunt tribuendae. Quin etiam, si Y denotet functionem quampiam ipsarum x et y, solutio pari modo absoluetur: ita reductio harum formularum $\int P\,dx\,\sqrt{(xx + yy)}$ et $\int Q\,dx\,\sqrt{(xx + yy)}$ ad valores algebraicos nullam habebit difficultatem, quoniam hae formulae similes euadent propositis, si pro $\sqrt{(xx + yy)}$ scribatur vnica littera veluti v. Vnde colligitur ope huius problematis semper binas huiusmodi formulas $\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ ad valores algebraicos perduci posse, quaecunque V et Z fuerint functiones ipsarum x et y, dummo-

dummodo $\frac{V}{Z}$ ſit functio ipſius x tantum. Si enim x ſit iſta functio, ſeu $\frac{V}{Z} = x$, loco alterius variabilis y introducatur noua v, vt ſit $v = \frac{V}{X}$ ſeu $v = Z$, atque formulae reducendae erunt $\int v X dx$ et $\int v dx$, quarum reſolutio iam erit in promtu. Inueſtigemus vero etiam alia formularum integralium paria, quae ſimili modo ad valores algebraicos reduci queant, quod eueniet ſi quapiam transformatione ad huiusmodi formas reuocari potuerint.

PROBLEMA 5.

26. Si P et Q fuerint functiones quaecunque ipſius x, inuenire relationem idoneam inter variabiles x et y, vt ambae hae formulae $\int P dy$ et $\int Q dy$ valores algebraicos adipiſcantur.

SOLVTIO.

Cum per lemma praemiſſum ſit $\int P dy = Py - \int y dP$ et $\int Q dy = Qy - \int y dQ$, quaeſtio huc redit, vt hae duae formulae integrales $\int y dP$ et $\int y dQ$ valores algebraicos conſequantur, quod per problema praecedens duplici modo efficietur.

I. Statuatur enim $\int y dP = L$ et $\int y dQ = M$ erit $y = \frac{dL}{dP} = \frac{dM}{dQ}$, vnde fit $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$: vbi cum $\frac{dP}{dQ}$ ſit functio ipſius x, ſi pro L et M functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis z aſſumantur, vt $\frac{dL}{dM}$ fiat functio huius variabilis z, ex aequatione $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$ quantitas x per z determinabitur, ita vt x aequalis reperiatur functioni cuidam ipſius z. Dehinc aequatio $y = \frac{dL}{dP}$ definiet alteram variabilem y per eandem x: quo facto habebitur:

$$\int P\,dy = \frac{P\,dL}{dP} - L \text{ et } \int Q\,dy = \frac{Q\,dM}{dQ} - M.$$

II. Pro altera solutione fiat $\int y\,dP = L$, vt fit $y = \frac{dL}{dP}$, eritque altera formula $\int y\,dQ = \int \frac{dQ}{dP}\,dL = L.\frac{dQ}{dP} - \int L\,d.\frac{dQ}{dP}$; vbi cum $\frac{dQ}{dP}$ fit functio ipfius x, ponatur $\int L\,d.\frac{dQ}{dP} = V$ functioni cuicunque ipfius x, orietur hinc $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$. Inuenta ergo hac quantitate $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$, quae erit functio ipfius x, habebitur altera variabilis $y = \frac{dL}{dP}$ indeque valores algebraici binarum formularum integralium propofitarum erunt:

$$\int P\,dy = P\,y - L \text{ et}$$
$$\int Q\,dy = Q\,y - \frac{L\,dQ}{dP} + V.$$

COROLL. 1.

27. Si hae formulae non debeant effe algebraicae, fed datas quadraturas inuoluentes, eadem valebunt quae ad problema praecedens annotaui. Scilicet fi vtraque debeat effe transcendens, hoc nonnifi per folutionem priorem praeftari poterit, fin autem altera tantum quantitatem transcendentem implicare debeat, per vtramque folutionem fatisfieri poterit.

COROLL. 2.

28. Hinc etiam patet fi formulae propofitae fuerint huiusmodi $\int y\,P\,dx$ et $\int Q\,dy$, reductionem ad valores algebraicos pari modo perfici poffe. Cum enim fit $\int Q\,dy = Q\,y - \int y\,dQ$, has duas formulas reduci opor-

oportebit $\int y\,P\,dx$ et $\int y\,dQ$, quae non differunt ab iis, quae in praecedente problemate ſunt tractatae.

COROLL. 3.

29. Intelligitur etiam, ſi Y denotet functionem quandam ipſius y, ſimili modo huiusmodi binas formulas $\int PY\,dy$ et $\int QY\,dy$ ad valores algebraicos reduci poſſe, dummodo $\int Y\,dy$ integrationem admittat. Poſito enim $\int Y\,dy = v$, formulae reducendae erunt $\int P\,dv$ et $\int Q\,dv$, quae hic propoſitis ſunt ſimiles. At ſi $\int Y\,dy$ ſit functio transcendens ipſius y reductio modo hic expoſito non ſuccedit.

PROBLEMA. 6.

30. Inuenire relationem algebraicam inter variabiles x et y, vt hae duae formulae integrales $\int y^m x^{n-1}dx$ et $\int y^\mu x^{\nu-1}dx$ valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Coaequatis his formulis inter ſe fit $y^m x^n = y^\mu x^\nu$ vnde oritur $y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}}$. Ponatur ergo:

$$y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}}z, \quad \text{vt ſit } y^m = x^{\frac{m\nu-mn}{m-\mu}}z^m \text{ et } y^\mu = x^{\frac{\mu\nu-\mu n}{m-\mu}}z^\mu$$

atque formulae propoſitae abibunt in has:

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1}z^m dx \text{ et } \int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1}z^\mu dx$$

Iam vero eſt:

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1}z^m dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n}x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}}z^m - \frac{m(m-\mu)}{m\nu-\mu n}\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}}z^{m-1}dz$$

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^{\mu} dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n} x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu} - \frac{\mu(m-\mu)}{m\nu-\mu n} \int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu-1} dz$$

Nisi ergo sit $m\nu = \mu n$, quo casu haec reductio locum non habet, si ponatur $x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} = v$, quaestio perducetur ad has formnlas:

$\int v z^{m-1} dz$ et $\int v z^{\mu-1} dz$

quae per problema superius sine difficultate resoluuntur.

ALITER.

Si neque n neque v fuerit $= o$, alia solutio simili modo adhiberi potest. Scilicet cum sit

$\int y^m x^{n-1} dx = \frac{1}{n} y x - \frac{m}{n} \int x^n y^{m-1} dy$ et

$\int y^{\mu} x^{\nu-1} dx = \frac{1}{\nu} y^{\mu} x^{\nu} - \frac{\mu}{\nu} \int x^{\nu} y^{\mu-1} dy$

quaestio redit ad has duas formulas:

$\int x^n y^{m-1} dy$ et $\int x^{\nu} y^{\mu-1} dy$

quae posito $x = y^{\frac{\mu-m}{n-\nu}} z$ perinde atque ante tractantur.

COROLL. 1.

31. Si sit vel $m = \mu$ vel $n = \nu$, formulae propositae statim per superius problema reduci possunt, sine vlla praeuia praeparatione. Casu tamen posteriori quo $n = \nu$ excipiendus est casus quo $n = \nu = o$; quia reductio supra praescripta hic non succedit.

COROLL. 2.

32. Per praecepta ergo adhuc tradita huiusmodi binae formulae $\int \frac{y^m dx}{x}$ et $\int \frac{y^{\mu} dx}{x}$ ad valores algebraicos reduci nequeunt.

COROL.

COROLL. 3.

33. Praeterea vero etiam excipiuntur casus, quibus $m\nu = \mu n$, seu $m : n = \mu : \nu$, qui ob eandem rationem reductionem non permittunt. Qui casus quo facilius cognoscantur, sit $m = \alpha\mu$, et $n = \alpha\nu$, erunt formumulae hoc pacto irreductibiles:

$$\int y^{\alpha\mu} x^{\alpha\nu-1} dx \text{ et } \int y^{\mu} x^{\nu-1} dx.$$

COROLL. 4.

34. Sit breuitatis gratia $y^{\mu} = z$ et $x^{\nu} = v$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\nu v}$, vnde formulae hae irreductibiles sunt.

$$\frac{1}{\nu}\int z^{\alpha} v^{\alpha-1} dv \text{ et } \frac{1}{\nu}\int z\, dv.$$

Ac si vlterius ponatur $z = \frac{u}{v}$, hae formulae abibunt in $\frac{1}{\nu}\int\frac{u^{\alpha} dv}{v}$ et $\frac{1}{\nu}\int\frac{u\, dv}{v}$, quae iam in formulis Coroll. 2. exclusis continentur.

COROLL. 5.

35. Reliquis igitur casibus omnibus, qui in his exceptionibus locum non habent, reductio ad valores algebraicos semper absolui poterit, idque duplici modo pro vtraque solutione hic tradita, atque vtroque modo gemina resolutio valebit secundum binas problematis superioris solutiones.

PROBLEMA 7.

36. Si P et Q fuerint functiones ipsius x, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt ambae

hae formulae $\int y^{m} P\, d x$ et $\int y^{n} Q\, d x$ valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Ponatur $y = (\frac{Q}{P})^{\frac{1}{m-n}} z$ seu $y = Q^{\frac{1}{m-n}} P^{\frac{-1}{m-n}} z$ ex hacque substitutione assequemur:

$$\int y^{m} P\, d x = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^{m} d x,$$

$$\int y^{n} Q\, d x = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^{n} d x$$

Iam notandum est reductionem, quam intendimus, esse successuram, si haec formula:

$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} d x$ integrationem admittat.

Nisi enim haec conditio locum habeat, fateor me solutionem exhibere non posse. Sit igitur

$$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} d z = X$$

ideoque X functio algebraica ipsius x, formulaeque reducendae erunt:

$\int z^{m} d X$ et $\int z^{n} d X$, vnde resultat

$$\int z^{m} d X = X z^{m} - m \int X z^{m-1} d z$$

$$\int z^{n} d X = X z^{n} - n \int X z^{n-1} d z$$

Harum autem formularum reductio supra iam idque duplici modo, est ostensa.

COROLL.

37. Si esset $m = n$, problema congrueret cum problemate quarto, ita vt incommoda, quae in hac solutione inde oritura videntur, nihil plane noceant. Conditio

ditio igitur, ſub qua reductio propoſitarum formularum ſuccedit, poſtulat, vt formula differentialis $P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dx$ integrationem admittat.

PROBLEMA 8.

38. Si V et Z ſint functiones ipſarum x et y homogeneae, atque V functio m dimenſionum, Z vero functio n dimenſionum, inuenire relationem algebraicam inter x et y, qua duae hae formulae:

$\int V dx$ et $\int Z dx$ reddantur integrabiles.

SOLVTIO.

Quia V et Z ſunt functiones homogeneae, ita vt ambae variabiles x et y vbique eundem dimenſionum numerum compleant, ibi nempe dimenſionum numerum m, hic vero n: ponatur $y = t x$, atque functio V abibit in $x^m P$, et Z in $x^n Q$, vbi P et Q erunt functiones quantitatis t. Ita cum per hanc ſubſtitutionem fiat

$$V = x^m P \text{ et } Z = x^n Q,$$

formulae ad reducendum propoſitae erunt

$$\int P x^m dx \text{ et } \int Q x^n dx,$$

vbi P et Q ſint functiones alterius variabilis t, cuius ad x relationem inueſtigare oportet. Iam hae duae formulae ex duabus variabilibus t et x conſtantes reducuntur ad

$$\int P x^m dx = \tfrac{1}{m+1} P x^{m+1} - \tfrac{1}{m+1} \int x^{m+1} dP$$
$$\int Q x^n dx = \tfrac{1}{n+1} Q x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1} dQ$$

dummo-

dummodo neque m neque n fuerit $= -1$. Quare cum reductio ad has formulas $\int x^{m+1} d\,P$ et $\int x^{n+1} d\,Q$ reuocatur, ponatur $x = (\frac{dQ}{dP})^{\frac{1}{m-n}} z = z\, d\,P^{\frac{1}{n-m}} d\,Q^{\frac{1}{m-n}}$ formulaeque reducendae erunt

$$\int z^{m+1} d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}} \text{ et } \int z^{n+1} d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}}$$

quibus valores algebraicos conciliare licebit, si formula differentialis $d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}} = (\frac{dP}{dQ})^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q$ absolute fuerit integrabilis; reliquis enim casibus haec reductio non succedit. Ponamus ergo hanc formulam esse integrabilem, et cum eius integrale futurum sit functio algebraica ipsius t, quae sit T, ita vt habeatur

$$\int d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}} = T$$

atque formulae reducendae fient:

$$\int z^{m+1} d\,T = z^{m+1} T - (m+1) \int T z^m dz$$
$$\int z^{n+1} d\,T = z^{n+1} T - (n+1) \int T z^n dz$$

Hinc cum hae formulae $\int T z^m dz$ et $\int T z^n dz$ valores algebraicos obtinere debeant, hoc per problema quartum duplici modo efficietur.

COROLL. 1.

39. Patet ergo primo si fuerit vel $m = -1$ vel $n = -1$, reductionem per methodum propositam perfici non posse. Praeterea vero eam quoque locum non habere, nisi formula differentialis $d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}}$ absolute fuerit integrabilis.

COROL.

COROLL. 2.

40. Quodsi fuerit $m = n$, dummodo vtriusque litterae valor non sit $= -1$, posteriori transformatione non erit opus, sed formulae $\int x^{n+1} dP$ et $\int x^{n+1} dQ$ immediate ope problematis quarti reduci poterunt.

EXEMPLVM.

41. *Quaeratur relatio algebraica inter x et y, vt hae formulae $\int \frac{y^3 dx}{xx}$ et $\int \frac{dx}{x^3}(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$ valores algebraicos obtineant.*

Cum hic sit $V = \frac{y^3}{xx}$ et $Z = \frac{1}{x^3}(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$, vtraque ergo functio V et Z homogenea, illiusque dimensionum numerus $m = 1$, huius vero $n = 0$, si ponatur $y = tx$, fiet $V = xt^3$ et $Z = (1+tt)^{\frac{3}{2}}$, et formulae reducendae erunt

$$\int t^3 x\,dx \quad \text{et} \int dx\,(1+tt)^{\frac{3}{2}}$$

vnde fit

$$\int t^3 x\,dx = \tfrac{1}{2} t^3 xx - \tfrac{3}{2}\int x^2 tt\,dt$$

$$\int dx\,(1+tt)^{\frac{3}{2}} = x(1+tt)^{\frac{3}{2}} - 3\int x\,t\,dt\,\sqrt{(1+tt)}$$

Ponatur iam $x = \frac{z}{t}\sqrt{(1+tt)}$, fietque

$$\int x^2 tt\,dt = \int zz\,dt\,(1+tt) = zz(t+\tfrac{1}{3}t^3) - 2\int(t+\tfrac{1}{3}t^3)z\,dz$$

$$\int x\,t\,dt\sqrt{(1+tt)} = \int z\,dt\,(1+tt) = z(t+\tfrac{1}{3}t^3) - \int(t+\tfrac{1}{3}t^3)dz$$

Sit breuitatis gratia $t + \frac{1}{3}t^3 = u$, et cum formulae reducendae sint $\int u\,z\,dz$ et $\int u\,dz$, ponatur

$$\int u\,z\,dz = L \quad \text{et} \int u\,dz = M$$

fiet $u = \frac{dL}{z\,dz} = \frac{dM}{dz}$, ideoque $z = \frac{dL}{dM}$.

Si igitur L et M fuerint functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis s, aequatio $z = \frac{dL}{dM}$ dabit functionem ipsius s pro z, vnde etiam $u = t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{dM}{dz}$ dabitur per s; ac propterea pro t reperitur hinc valor in s expressus. Hincque porro dabitur per s variabilis $x = \frac{z}{x} V(1+tt)$ et $y = tx$, vnde relatio inter x et y definiri poterit.

Altera solutio posito $\int u\,dz = L$ dabit $\int uz\,dz = \int z\,dL = zL - \int L\,dz$. Sit $\int L\,dz = S$ existente S functione quacunque ipsius z, fiet $L = \frac{ds}{dz}$; porroque $u = \frac{dL}{dz} = t + \frac{1}{3}t^3$; $x = \frac{z}{t} V(1+tt)$ et $y = tx$, vnde denuo relatio inter x et y reperitur. Nam ob $t = \frac{y}{x}$ et $z = \frac{xy}{V(xx+yy)}$ hi valores in aequatione $\frac{dL}{dz} = \frac{dds}{dz^2} = \frac{3xxy+y^3}{3x^3}$ substituti dabunt aequationem inter x et y.

PROBLEMA 9.

42. Si V et Z fuerint vt ante functiones homogeneae ipsarum x et y, illa quidem m, haec vero n dimensionum, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt hae duae formulae $\int V\,dx$ et $\int Z\,dy$ fiant integrabiles.

SOLVTIO.

Ponatur vt ante $y = tx$, fietque $V = x^m P$ et $Z = x^n Q$ existentibus P et Q functionibus nouae variabilis t, et ob $dy = t\,dx + x\,dt$ formulae reducendae erunt:

$$\int P x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\int x^{m+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{m+1}dP$$

$\int Q x$

$\int Q x^n dy = \int Q x^n t\, dx + \int Q x^{n+1} dt$ at

$\int Q t x^n dx = \frac{1}{n+1} Q t x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (Q dt + t dQ)$

vnde habebimus:

$$\int Q x^n dy = \frac{1}{n+1} Q t x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (t dQ - n Q dt)$$

Atque adeo formulae ad valores gebraicos perducendae erunt $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} (t dQ - n Q dt)$, quae ponendo $x = \left(\frac{t dQ - n Q dt}{dP}\right)^{\frac{1}{m-n}} z$ reducentur vti in problemate praecedente, dum haec formula differentialis

$$\left(\frac{t dQ - n Q dt}{dP}\right)^{\frac{m+1}{m-n}} dP \text{ fuerit integrabilis.}$$

Vbi quidem iterum excludendi sunt casus, quibus vel $m = -1$ vel $n = -1$; Praeterea vero notandum est si sit $m = n$, tum vltima transformatione ne opus quidem esse, quia formulae $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} (t dQ - n Q dt)$ statim per problema quartum reduci possunt.

SCHOLION.

43. Atque hi sunt fere casus, quibus duae formulae integrales ordinis primi ad valores algebraicos methodo quidem adhuc exposita reduci possunt. Nullum autem est dubium, quin haec methodus ad maiorem perfectionis gradum euehi possit, vt etiam formulae hic exclusae ad valores algebraicos reduci queant, quod negotium aliis vberius excolendum relinquo. Consideretur autem potissimum casus harum formularum $\int \frac{y\, dx}{x}$ et $\int \frac{yy\, dx}{x}$, quas generatim quidem nullo adhuc modo ad integrabilitatem reducere potui, etsi non est

P 2 difficile

difficile innumeras relationes inter x et y exhibere, quae proposito satisfaciant. His igitur regulis pro duabus formulis primi ordinis traditis contentus, ad tres pluresve formulas eiusdem ordinis progredior, eos inuestigaturus casus, quibus omnes simul methodo hactenus exposita ad valores algebraicos reduci queant, quod quidem ea methodo, qua in solutione secunda problematis 4 sum vsus, praestari debere animaduerto.

PROBLEMA 10.

44. Si P, Q, R sint functiones quaecunque algebraicae ipsius x, inuenire relationem algebraicam inter variabiles x et y, vt tres hae formulae integrales

$$\int yPdx;\ \int yQdx;\ \int yRdx$$

valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Ponatur $\int yPdx = L$ eritque $y = \frac{dL}{Pdx}$, atque duae reliquae formulae reducendae fient:

$$\int yQdx = \int\frac{Q}{P}dL = \frac{LQ}{P} - \int L\,d.\frac{Q}{P}$$
$$\int yRdx = \int\frac{R}{P}dL = \frac{LR}{P} - \int L\,d.\frac{R}{P}$$

Iam vero hae duae formulae $\int L\,d.\frac{Q}{P}$ et $\int L\,d.\frac{R}{P}$ per problema quartum facile resoluuntur, idque duplici modo.

I. Priori modo poni oportet:

$\int L\,d.\frac{Q}{P} = M$ et $\int L\,d.\frac{R}{P} = N$, hincque erit: $L = dM : d.\frac{Q}{P} = dN : \frac{R}{P}$. Vnde elicitur aequatio $\frac{d(Q:P)}{d(R:P)} = \frac{dM}{dN}$, cuius primum membrum cum sit functio ipsius

ipſius x, pro M et N capiantur functiones nouae variabilis z, atque per hanc aequationem x definietur in z expreſſum, vnde porro per z dabitur

$$L = \frac{dM}{d(Q:P)} \text{ et } y = \frac{dL}{Pdx}$$

II. Poſteriori reſolutione vtentes ponamus $\int L\, d.\frac{Q}{P} = M$ vt ſit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$, qui valor in tertia formula ſubſtitutus producet $\int L\, d.\frac{R}{P} = \int dM.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}$ $= M\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} - \int M\, d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}$

Ponatur ergo $\int M\, d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} = N$ exiſtente N functione quacunque ipſius x, eritque $M = \frac{dN}{d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}}$, vnde pro M inuenitur functio ipſius x, qua inuenta erit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$ ac denique $y = \frac{dL}{Pdx}$. Tum vero valores algebraici trium formularum propoſitarum erunt.

$$\int yPdx = L$$
$$\int yQdx = \frac{LQ}{P} - M$$
$$\int yRdx = \frac{LR}{P} - M\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} - N$$

COROLL. 1.

45. Cum in priori ſolutione pro litteris M et N functiones quaecunque ipſius z accipi queant, ſi iis valores transcendentes tribuantur, ita tamen vt $\frac{dM}{dz}$ et $\frac{dN}{dz}$ fiant functiones algebraicae, effici poterit vt trium formularum integralium propoſitarum duae $\int yQdx$ et $\int yRdx$ a datis quadraturis pendeant. Quod etiam per probl. 2 ita expediri poterit, vt vtraque tot quot lubuerit caſibus nihilominus valores algebraicos adipiſcatur.

COROLL. 2.

46. Sin autem ſolutionem poſteriorem adhibeamus, quoniam vnica littera N arbitrio noſtro relinquitur, ſi pro ea functio transcendens ipſius x accipiatur, vnius tantum formulae propoſitae integratio datam quadraturam inuoluet, reliquae vero duae neceſſario valores algebraicos obtinebunt.

COROLL. 3.

47. Patet etiam ſi Y fuerit functio quaecunque ipſius y, ſimili modo has tres formulas:

$$\int Y P\,dx;\ \int Y Q\,dx;\ \int Y R\,dx$$

ad valores algebraicos reduci. Quin etiam eadem reductio locum habebit, ſi Y ſit functio quaecunque ambarum variabilium x et y.

PROBLEMA 11.

48. Si P, Q, R fuerint functiones quaecunque algebraicae variabilis x, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt hae tres formulae integrales:

$$\int P\,dy;\ \int Q\,dy;\ \int R\,dy$$

valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Formulae iſtae per lemma praemiſſum transformantur in ſequentes.

$$\int P\,dy = Py - \int y\,dP$$
$$\int Q\,dy = Qy - \int y\,dQ$$
$$\int R\,dy = Ry - \int y\,dR$$

Quaeſtio

Quaestio ergo redit ad has tres formulas:

$$\int y\,d\mathrm{P};\quad \int y\,d\mathrm{Q};\quad \int y\,d\mathrm{R}$$

algebraicas efficiendas, quae cum similes sint iis, quae in probl. praec. sunt tractatae, resolutio nullam habebit difficultatem, atque adeo duplici modo absolui poterit.

COROLL. 1.

49. Quin etiam si ordo inter has formulas immutetur, quoniam perinde est a quanam earum operatio incipiatur, nouem omnino solutiones exhiberi possunt. Incipiendo enim a prima ponendo $\int y\,d\mathrm{P} = \mathrm{L}$, solutio prior ante tradita vnam praebet solutionem, posterior vero duas, prout duae reliquae formulae sumuntur, vel $\int y\,d\mathrm{Q}$ et $\int y\,d\mathrm{R}$, vel ordine inuerso $\int y\,d\mathrm{R}$ et $\int y\,d\mathrm{Q}$, sicque hinc tres solutiones impetrantur. Atque cum operatio a qualibet harum formularum inchoari queat, omnino nouem solutiones exhiberi poterunt.

COROLL. 2.

50. In hac ergo methodo perinde est, siue formula quaepiam proposita sit $\int y\,\mathrm{P}\,dx$ siue $\int \mathrm{P}\,dy$, quia posterior $\int \mathrm{P}\,dy$ facile ad formam prioris $\int y\,d\mathrm{P}$ reducitur. Hincque inposterum nullam amplius discrimen inter duas huiusmodi formulas constituam, ne praeter necessitatem hanc tractationem prolixiorem reddam.

COROLL. 3.

51. Perinde ergo problema resoluetur, si ad valores algebraicos reduci debeant huiusmodi formulae ternae

vel

vel $\int y\,P\,dx$; $\int y\,Q\,dx$; $\int R\,dy$
vel $\int y\,P\,dx$; $\int Q\,dy$; $\int R\,dy$

Superfluum ergo foret diuersa hinc problemata constituere.

PROBLEMA 12.

52. Ad valores algebraicos reducere quatuor huiusmodi formulas integrales:

$$\int y\,P\,dx;\quad \int y\,Q\,dx;\quad \int y\,R\,dx;\quad \int y\,S\,dx$$

in quibus litterae P, Q, R, S denotent functiones quascunque algebraicas ipsius x.

SOLVTIO.

Incipiatur operatio a quacunque harum quatuor formularum propositarum, ponendo $\int y\,P\,dx = L$, vt sit $y = \frac{dL}{P\,dx}$, atque tres reliquae formulae transformabuntur sequenti modo:

$$\int y\,Q\,dx = \int \tfrac{Q}{P}\,dL = \tfrac{LQ}{P} - \int L\,d.\tfrac{Q}{P}$$
$$\int y\,R\,dx = \int \tfrac{R}{P}.dL = \tfrac{LR}{P} - \int L\,d\,\tfrac{R}{P}$$
$$\int y\,S\,dx = \int \tfrac{S}{P}\,dL = \tfrac{LS}{P} - \int L\,d.\tfrac{S}{P}$$

Cum igitur nunc ad valores algebraicos reducendae sint hae tres formulae:

$$\int L\,d.\tfrac{Q}{P};\quad \int L\,d.\tfrac{R}{P};\quad \int L\,d.\tfrac{S}{P}$$

haeque congruant cum iis, quae in probl. 10mo sunt pertractatae, resolutio erit in promtu; et quoniam hic nouem diuersae solutiones suppeditantur, totidemque reperiantur, a quanam alia quatuor formularum propositarum initium capiatur, omnino huius problematis quater, nouem, seu 36 solutiones exhiberi poterunt.

COROL.

COROLL. 1.

53. Si vna quaedam formularum propositarum, veluti $\int y S dx$, a data quadratura pendere debeat, ea in operatione ad finem vsque est referuanda, id quod 12 modis diuersis fieri potest. Sin autem duae formulae datae, veluti $\int y R dx$ et $\int y S dx$, a datis quadraturis pendere debeant, hoc nonnisi duobus modis diuersis praestabitur.

COROLL. 2.

54. Hinc etiam patet, eundem soluendi modum ad quinque, pluresque, quotquot proponantur, similes formulas extendi, dummodo quaelibet formula habeat speciem $\int y P dx$ vel $\int P dy$, existente P functione ipsius x, ita vt in singulis formulis altera variabilis y nonnisi vnicam obtineat dimensionem.

COROLL. 3.

55. Quemadmodum in casu duarum huiusmodi formularum propositarum reperiri possunt 3 solutiones et in casu trium formularum 9 solutiones; sic in casu 4 formularum inueniuntur $4 . 9 = 36$ solutiones. Atque porro in casu 5 formularum $5 . 36 = 180$ solutiones, in casu 6 formularum $6 . 180 = 1080$ solutiones, et ita porro.

PROBLEMA 13.

56. Si propositae fuerint quotcunque huiusmodi formulae integrales $\int Z dx$ vel $\int Z dy$, in quibus omnibus Z sit functio homogenea ipsarum x et y, et

 in

in singulis idem dimensionum numerus n deprehendatur, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt singularum harum formularum valores prodeant algebraici.

SOLVTIO.

Cum Z sit functio homogenea n dimensionum ipsarum x et y, si ponatur $y = t x$, ea transibit in huiusmodi expressionem $x^n T$, existente T functione quapiam ipsius t tantum; ideoque quaelibet formula huius generis $\int Z\, d x$ reducitur sequenti modo:

$$\int Z\, d x = \int T\, x^n d x = \tfrac{1}{n+1} T\, x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1}\, d T$$

Deinde ob $d y = t\, d x + x\, d t$ formulae huius generis $\int Z\, d y$ simili modo transformabuntur:

$$\int Z\, dy = \int T\, x^n (t dx + x dt) = \int x^{n+1} T\, dt + \int T\, t\, x^n dx$$

at $\int T\, t\, x^n dx = \tfrac{1}{n+1} T\, t\, x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1} (T\, dt + t dT)$

vnde fiet

$$\int Z\, dy = \tfrac{1}{n+1} T\, t\, x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1} (t\, d\, T - n T\, d\, t)$$

Quare quotcunque proponantur formulae integrales, vel huius $\int Z\, d x$, vel huius $\int Z\, d y$ speciei, quaestio reuocabitur ad totidem formulas istius speciei $\int x^{n+1} \Theta\, d t$, existente Θ functione ipsius t, quae posito $x^{n+1} = u$ abeunt in $\int u\, \Theta\, d t$. Quotcunque autem huiusmodi formulae $\int u\, \Theta\, d t$ fuerint propositae, eae omnes per praecepta hactenus tradita ad valores algebraicos reduci poterunt.

COROL.

COROLL. 1.

57. Excipi tamen debent ii casus, quibus functionum Z numerus dimensionum n est $= - 1$, seu $n + 1 = 0$, quoniam his casibus reductiones hic adhibitae non succedunt.

COROLL. 2.

58. Patet etiam, quaecunque et quotcunque fuerint formulae propositae, dummodo eae omnes per substitutionem aut transformationem quampiam ad huiusmodi formas $\int u \Theta dt$ reduci queant, eas omnes semper integrabiles reddi posse.

SCHOLION.

59. Vis igitur methodi hactenus expositae in hoc consistit, vt quotquot proponantur formulae integrales duas variabiles x et y inuoluentes, dummodo in singulis altera variabilis y vnicam obtineat dimensionem eiusue differentiale dy, reductio ad valores algebraicos semper perfici queat; hoc ergo euenit, si singulae formulae fuerint vel huius generis $\int y X dx$, vel huius $\int X dy$, propterea quod huius integratio reuocatur ad hanc $\int y dX$, siquidem X sit functio quaecunque ipsius x. Atque hi sunt casus, quibus duas pluresue formulas integrales primi ordinis mihi quidem adhuc ad valores algebraicos reducere contigit. Dantur vero etiam formulae secundi superiorumque ordinum, quas facile ad formulas primi ordinis formae $\int y X dx$ reducere licet, ex quo, si eiusmodi formulae integrales superiorum ordinum occurrant, resolutio problematum hactenus allatorum perinde succedet.

cedet. Eas igitur formulas superiorum ordinum, quae huiusmodi reductionem admittunt, hic indicari conueniet.

PROBLEMA. 14.

60. Si P sit functio quaecunque ipsius x, elementumque dx sumatur constans, reducere integrationem huiusmodi formularum integralium $\int\frac{\mathrm{P}ddy}{dx}$, $\int\frac{\mathrm{P}d^3y}{dx^2}$, $\int\frac{\mathrm{P}d^4y}{dx^3}$ et ingenere huius $\int\frac{\mathrm{P}d^ny}{dx^{n-1}}$ ad integrationem formulae primi ordinis huiusmodi $\int y\mathrm{Q}dx$, existente Q functione ipsius x.

SOLVTIO.

Consideretur formula prima, eaque per lemma ita reducetur:

$$\int\frac{\mathrm{P}ddy}{dx^2} = \frac{\mathrm{P}dy}{dx} - \int dy.\frac{d\mathrm{P}}{dx} \text{ at } \int dy.\frac{d\mathrm{P}}{dx} = \frac{yd\mathrm{P}}{dx} - \int\frac{ydd\mathrm{P}}{dx};$$

sicque erit:

$$\int\frac{\mathrm{P}ddy}{dx} = \frac{\mathrm{P}dy}{dx} - \frac{yd\mathrm{P}}{dx} + \int\frac{ydd\mathrm{P}}{dx}.$$

At $\frac{dd\mathrm{P}}{dx}$ est expressio differentialis formae $\mathrm{Q}\,dx$, ideoque formula $\int\frac{\mathrm{P}ddy}{dx}$ reducta est ad formulam $\int y\mathrm{Q}dx$.

Simili modo formula secunda reducitur:

$$\int\frac{\mathrm{P}d^3y}{dx} = \frac{\mathrm{P}ddy}{dx^2} - \int\frac{d\mathrm{P}ddy}{dx^2}, \text{ at:}$$

$$\int\frac{d\mathrm{P}ddy}{dx^2} = \frac{d\mathrm{P}dy}{dx^2} - \frac{ydd\mathrm{P}}{dx^2} + \int\frac{yd^3\mathrm{P}}{dx^2}, \text{ ideoque:}$$

$$\int\frac{\mathrm{P}d^3y}{dx^2} = \frac{\mathrm{P}ddy - d\mathrm{P}dy + ydd\mathrm{P}}{dx^2} - \int\frac{yd^3\mathrm{P}}{dx^2},$$

vbi $\int\frac{yd^3\mathrm{P}}{dx^2}$ est iterum formae $\int y\mathrm{Q}dx$.

Pro tertia formula proposita erit:

$\int\mathrm{P}d^4y.$

$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y}{d x^3} - \int \frac{d P d^3 y}{d x^3}$; at per reduct.: praeced.

$\int \frac{d P d^3 y}{d x^3} = \frac{d P d d y - d y d d P + y d^3 P}{d x^3} - \int \frac{y d^4 P}{d x^3}$; ergo

$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y - d P d d y + d y d d P - y d^3 P}{d x^3} + \int \frac{y d^4 P}{d x^3}$,

vbi iterum $\int \frac{y d^4 P}{d x^3}$ est formae $\int y Q d x$.

Hinc colligitur fore vlterius progrediendo:

$\int \frac{P d^5 y}{d x^4} = \frac{P d^4 y - d P d^3 y + d d P d d y - d y d^3 P + y d^4 P}{d x^4} - \int \frac{y d^5 P}{d x^4}$

vnde etiam generatim patet, hac ratione istius formulae $\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}$ integrationem reduci ad integrationem huius formulae $\int \frac{y d^n P}{d x^{n-1}}$, foreque semper hanc expressionem huius formae $\int y Q d x$, est enim $\frac{d^n P}{d x^n}$ functio algebraica ipsius x, eiusque loco si ponatur Q erit $\frac{d^n P}{d x^{n-1}} = Q d x$.

COROLL. 1.

61. Omnes ergo reductiones, quae supra circa formulas huiusmodi $\int y Q d x$ sunt exhibitae, eodem succedunt modo, si huiusmodi formulae $\left(\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}\right)$ proponantur; vnde opus non est problemata praecedentia pro huiusmodi formulis altiorum ordinum resoluere.

COROLL. 2.

62. Si expressio $\frac{d^n P}{d x^n}$ euanescat, id erit indicio, formulam $\int \frac{P d^n y}{d x^n}$ esse absolute integrabilem; ea ergo

his caſibus in noſtris problematibus locum non habebit. Hoc autem euenit, ſi P fuerit ipſius x huiusmodi functio $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^{n-1}$ tum enim $\int \frac{P\, d^n y}{d x^n}$ integrationem abſolute admittet.

COROLL. 3.

63. Formulae ergo integrabiles cum ſuis integrabilibus erunt pro variis ipſius n valoribus ſequentes:

$$\int \alpha\, dy = \alpha y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\, ddy}{dx} = (\alpha + \beta x) \frac{dy}{dx} - \beta y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, d^3 y}{dx^2} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2) \frac{ddy}{dx^2} - (\beta + 2\gamma x) \frac{dy}{dx} + 2\gamma y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)\, d^4 y}{dx^3} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) \frac{d^3 y}{dx^3} - (\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2) \frac{ddy}{dx^2}$$
$$+ (2\gamma + 6\delta x) \frac{dy}{dx} - 6\delta y$$

SCHOLION.

64. Progrediamur ergo ad formulas ordinis ſecundi, cum reductioni earum, quae ſunt primi ordinis, iam tantum ſimus immorati, quantum quidem profectus in hac methodo facti adhuc permiſerunt. Quoniam vero ad ordinem ſecundum eas retulimus formulas, in quibus vtriusque variabilis x et y differentialia dx et dy inſunt, eae ſine dubio ſunt ſimpliciſſimae, in quibus haec bina differentialia plus vna dimenſione non obtinent, cuiusmodi in genere eſt haec formula $\int (V\, dx + Z\, dy)$, vbi V et Z ſint functiones quaecunque ipſarum x et y. Nam ſi vnicum adſit differentiale dy, quanquam inde poſito $dy = p\, dx$, littera p in functionem ingreditur, tamen manifeſtum eſt, binas variabiles x et y eſſe commuta-

mutabiles, atque formulas $\int Z\,dy$ perinde tractari posse, ac $\int Z\,dx$. Quibus ergo casibus huiusmodi formulis $\int(V\,dx + Z\,dy)$ valores algebraicos conciliare potuerim, explicabo.

PROBLEMA 15.

65. Si V et Z denotent functiones ipsarum x et y, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt haec formula $\int(V\,dx + Z\,dy)$ algebraicum obtineat valorem.

SOLVTIO.

I. Dispiciatur primo, vtrum altera pars $\int V\,dx$, vel $\int Z\,dy$, per lemma reduci possit, vt fiat
vel $\int V\,dx = P - \int Q\,dy$,
vel $\int Z\,dy = R - \int S\,dx$.
Si alterum enim succedit, solutio erit facilis: priori enim casu habebitur.
$\int(V\,dx + Z\,dy) = P + \int(Z - Q)\,dy$, posteriori vero
$\int(V\,dx + Z\,dy) = R + \int(V - S)\,dx$;
Vtrauis autem haec formula nullam habet difficultatem per problema 3.

II. Si hoc modo reductio inueniri nequeat, indagetur functio algebraica ipsarum x et y, quae sit $= P$, vt $\frac{V\,dx + Z\,dy}{P}$ fiat differentiale functionis cuiuspiam algebraicae Q ipsarum x et y, hoc enim casu fiet $\int(V\,dx + Z\,dy) = \int P\,dQ$, quae formula nulla difficultate ad integrabilitatem perducitur per problema 3.

III. Saepe etiam huiusmodi functio algebraica ipsarum x et y puta T inueniri potest, cuius differentiali existente $= P\,dx + Q\,dy$, si ponatur

$\int(V\,dx$

$\int(V\,dx + Z\,dy) = T + \int(V-P)\,dx + (Z-Q)\,dy)$ vt haec formula modo vel primo, vel secundo, reductionem admittat.

IV. Interdum quoque iuuabit, in locum vnius vel ambarum variabilium x et y vnam duasue nouas t et q introducere, ponendis x et y aequalibus functionibus quibuspiam harum duarum nouarum variabilium t et u, ita vt facta substitutione formula huiusmodi obtineatur: $\int(V\,dz + Z\,dy) = \int(P\,dt + Q\,du)$, vbi iam P et Q sunt functiones ipsarum t et u, quae aliquo expositorum modorum reductionem admittat.

V. Casus adhuc singularis est memorandus, quo V et Z sunt functiones homogeneae ipsarum x et y eiusdem ambae numeri dimensionum, qui sit $= n$. Posito enim $y = tx$ fiet $V = P\,x^m$ et $Z = Q\,x^n$, existentibus P et Q functionibus ipsius t. Tum ob $dy = t\,dx + x\,dt$; formula proposita transibit in hanc

$$\int(P\,x^n dx + Q\,t\,x^n dx + Q\,x^{n+1} dt)$$

at $\int(P + Qt)\,x^n dx = \frac{1}{n+1}(P+Qt)\,x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} d(P+Qt)$ vnde reductio reuocatur ad huiusmodi formam $\int x^{n+1} S\,dt$, nisi sit $n = -1$, existente S functione ipsius t.

SCHOLION.

66. Sufficiat has operationes in genere explicasse, quoniam exempla, quae vsum quempiam memorabilem habere videantur, non succurrunt. Interim tamen notandum est, plurima exempla proponi posse, quae vel difficulter, vel plane non, per vllam harum operationum reduci queant. Cuiusmodi est, si relatio inter x et y quaerenda sit, vt haec formula integralis $\int(\frac{y\,dx}{x} + \frac{dy}{y})$ valorem

valorem algebraicum obtineat, neque enim video, quomodo huic quaestioni satisfaciendum sit. Quamobrem multo minus talia attingo problemata, in quibus duae pluresue huiusmodi formulae ad integrabilitatem perduci debeant. Neque etiam formulas superiorum ordinum generaliter pertractare licebit, praeter casum in sequenti problemate contentum.

PROBEMA 16.

67. Si Z sit functio nullius dimensionis ipsarum dx et dy, ita vt ipsae quantitates finitae x et y in eam non ingrediantur, ad integrabilitatem reducere hanc formulam $\int Z dx$.

SOLVTIO.

Cum formula differentialis $Z dx$ ita sit comparata, vt praeter quantitates constantes nonnisi differentialia dx et dy contineat, quae propterea vnam dimensionem adimplebunt, cuiusmodi sunt hae formulae: $\frac{dy^2}{dx}$; $\sqrt{(a dx^2 + b dx dy + c dy^2)}$; $\frac{a dx^2 + b dy^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ etc. ponatur $dy = p dx$, atque formula proposita $\int Z dx$ induet hanc speciem $\int P dx$, ita vt P fiat functio quantitatis p tantum, neque x neque y inuoluens. Efficiendum ergo erit, vt non solum haec formula $\int P dx$, sed etiam ob $dy = p dx$ haec $\int p dx$, algebraicum nanciscatur valorem, quod per problema 4. ita duplici modo praestabitur. Cum enim sit

$$\int Z dx = \int P dx = Px - \int x dP$$
$$y = \int p dx = px - \int x dp$$

 Fiat

Fiat primo:

$$\int x\,dP = M \text{ et } \int x\,dp = N,$$

eritque $x = \frac{dM}{dP} = \frac{dN}{dp}$, vnde fit $\frac{dP}{dp} = \frac{dM}{dN}$, et quia $\frac{dP}{dp}$ est functio ipsius p, inde valor ipsius p erui debet, quo inuento habebitur $x = \frac{dM}{dP}$, seu $x = \frac{dN}{dp}$, ac deinceps $y = px - N$: qui valores praebebunt $\int Z\,dx = Px - M$.
Pro altera solutione ponatur:
$\int x\,dP = M$, vt sit $x = \frac{dM}{dP}$, et $\int x\,dp = \int \frac{dp}{dP}.\,dM = M.\frac{dp}{dP} - \int M\,d.\frac{dp}{dP}$. Iam ponatur $\int M\,d.\frac{dp}{dP} = R$ functioni ipsius p cuicunque, ac reperietur $M = dR : d.\frac{dp}{dP}$, quo valore ipsius M inuento, prodibit porro:

$$x = \frac{dM}{dP};\; y = px - \frac{M\,dp}{dP} + R,$$

vnde fit $\int Z\,dx = Px - M$.

Vel ponatur $\int x\,dp = N$, et ob $x = \frac{dN}{dp}$, fiet $\int x\,dP = \int dN.\frac{dP}{dp} = N.\frac{dP}{dp} - \int N\,d.\frac{dP}{dp}$. Sit $\int N\,d.\frac{dP}{dp} = S$ erit $N = dS : d.\frac{dP}{dp}$; hincque $x = \frac{dN}{dp}$ et $y = px - N$ ex quibus efficitur $\int Z\,dx = Px - \frac{N\,dP}{dp} + S$.

COROLLARIVM.

68. Simili modo solutio exhiberi poterit, si duae pluresue huiusmodi formulae $\int Z\,dx$ proponantur, quibus valores algebraici conciliari debeant. Posito enim $dy = p\,dx$, praeter hanc formulam $\int p\,dx$, duae pluresue huiusmodi $\int P\,dx$, $\int Q\,dx$, etc. vbi P et Q etc. sint functiones ipsius p, integrabiles erunt efficiendae, quod per methodos supra traditas facile praestatur.

SCHO-

SCHOLION.

69. Vt igitur finem huic disquiſitioni imponam, eximium eius vſum in ſoluendis praecipuis huius generis problematibus, quae quidem adhuc ſunt agitata, oſtendam. Verſantur autem haec problemata potiſſimum circa curuas rectificabiles algebraicas, quamobrem ex methodis hactenus traditis plures deriuabo regulas, quarum ope tot, quot lubuerit, curuas algebraicas rectificabiles reperire liceat, vnde ſimul patebit, quomodo eiusmodi curuae algebraicae ſint inueniendae, quarum integratio a data pendeat quadratura, ita vt omnia problemata, quae ope cuiuspiam quadraturae ſint conſtructa, facile per rectificationem curuae algebraicae expediri poſſint. Tum vero non magis erit difficile eiusmodi curvas algebraicas exhibere, quarum rectificatio indefinita a data quadratura pendeat, quae tamen nihilo minus vnum pluresue imo praeciſe tot, quot lubuerit, habeant arcus definitos algebraice aſſignabiles. Denique ſolutionem mei illius problematis de duabus curuis, in quibus arcuum communi abſciſſae reſpondentium ſumma fiat algebraica, ex his principiis deducam.

PROBLEMA 17.

70. Inuenire curuas algebraicas rectificabiles, ſeu quarum omnes arcus algebraice exhiberi queant.

SOLVTIO.

Sint curuae coordinatae orthogonales x et y, arcusque his coordinatis reſpondens $= z$. Primo igitur quaeritur aequatio algebraica inter x et y, deinde valor ipsius z inde emergens debet esse algebraicus. Cum igitur sit $z = \int \surd (dx^2 + dy^2)$, haec formula integrabilis erit reddenda; quod sequentibus modis praestabitur.

I.

Ponatur $dy = p\,dx$, atque hae duae formulae

$$y = \int p\,dx \text{ et } z = \int dx \surd (1 + pp)$$

algebraicae sunt reddendae. Cum igitur sit

$$y = px - \int x\,dp$$

$$z = x \surd (1 + pp) - \int \tfrac{x\,p\,dp}{\surd (1 + pp)}$$

sumantur nouae cuiusdam variabilis u functiones quaecunque algebraicae P et Q, ponaturque

$$\int x\,dp = \mathrm{P} \text{ et } \int \tfrac{x\,p\,dp}{\surd (1 + pp)} = \mathrm{Q}$$

erit $x = \frac{d\mathrm{P}}{dp} = \frac{d\mathrm{Q} \surd (1 + pp)}{p\,dp}$, vnde fit

$$p\,d\mathrm{P} = d\mathrm{Q} \surd (1 + pp), \text{ ideoque } p = \tfrac{d\mathrm{Q}}{\surd (d\mathrm{P}^2 - d\mathrm{Q}^2)}$$

Dabitur ergo p per functionem quandam ipsius u, quae ob $\frac{d\mathrm{P}}{du}$ et $\frac{d\mathrm{Q}}{du}$ ideoque $\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{Q}}$ quantitates algebraicas, ipsa erit algebraica $p = \frac{d\mathrm{Q}}{\surd (d\mathrm{P}^2 - d\mathrm{Q}^2)}$, ex qua habebitur porro:

$x = \frac{d\mathrm{P}}{dp}$; $y = px - \mathrm{P}$; et $z = x \surd (1 + pp) - \mathrm{Q}$.

Seu sit $\mathrm{Q} = u$ et $\mathrm{P} = \mathrm{V}$, et quia posito du constante est $dp = \frac{-du\,d\mathrm{V}\,dd\mathrm{V}}{(d\mathrm{V}^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}$ ob $p = \frac{du}{\surd (d\mathrm{V}^2 - du^2)}$ habebitur:

$$x = \frac{-(d\mathrm{V}^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,dd\mathrm{V}}$$

$$y = \frac{-(d\mathrm{V}^2 - du^2)}{dd\mathrm{V}} - \mathrm{V}$$

et

et $z = \frac{-dV(dV^2 - du^2)}{du\,ddV} - u.$

Posito autem contra $P = u$ et $Q = V$, vt V sit functio quaecunque ipsius u, ob $p = \frac{dV}{\sqrt{(du^2 - dV^2)}}$ et $dp = \frac{du^2\,ddV}{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}$ posito du constante, erit

$$x = \frac{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,ddV}$$

$$y = \frac{dV(du^2 - dV^2)}{du\,ddV} - u$$

$$z = \frac{du^2 - dV^2}{ddV} - V$$

II.

Posito vt ante $dy = p\,dx$, sit $\int x\,dp = M$, ideoque $x = \frac{dM}{dp}$, vnde fit

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{p\,dM}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{pM}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{M\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Ponatur $\int \frac{M\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = P$ functioni cuicunque ipsius p, fietque $M = \frac{dP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$, vnde erit porro

$$x = \frac{dM}{dp};\ y = px - M;$$

$$\text{et } z = x\sqrt{(1+pp)} = \frac{Mp}{\sqrt{(1+pp)}} + P.$$

Seu posito dp constante ob $dM = \frac{ddP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + 3\,pdP$ $\sqrt{(1+pp)}$ erit:

$$x = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{3\,pdP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$y = \frac{pddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{(2pp-1)dP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$z = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^2 + \frac{2p(1+pp)dP}{dp} + P.$$

III.

Sit $\int\frac{x\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = N$, erit $x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp}$, ideoque $\int x\,dp = \int\frac{dN}{p}\sqrt{(1+pp)} = \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} + \left(\int\frac{N\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}}\right)$ Ponatur $\int\frac{N\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = P$ functioni ipsius p, eritque $N = \left(\frac{pp\,dP\sqrt{(1+pp)}}{dp}\right)$, ex quo valore erit porro: $x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp}$; $y = px - \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} - P$ et $z = x\sqrt{(1+pp)} - N$ Posito autem dp constante ob $dN - \frac{pp\,ddP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$ $+ \left(\frac{p\,dP(2+3pp)}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$ erit:

$$x = \frac{p\,ddP\,(1+pp)}{dp^2} + \frac{dP\,(2+3pp)}{dp}$$

$$y = \frac{pp\,ddP\,(1+pp)}{dp^2} + \frac{p\,dP(1+2pp)}{dp} - P$$

$$z = \frac{p\,ddP(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{2\,dP\,(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$$

IV.

IV.

Ponatur $dy = \frac{dx(qq-1)}{2q}$, erit $dz = \frac{dx(qq+1)}{2q}$; Hinc fit $z + y = \int q\,dx$ et $z - y = \int \frac{dx}{q}$; duae ergo hae formulae integrabiles ſunt reddendae. Ponatur

$$\int q\,dx = qx - \int x\,dq = qx - M$$

$$\int \frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int \frac{x\,dq}{qq} = \frac{x}{q} + N$$

vt ſit $x = \frac{dM}{dq} = \frac{qq\,dN}{dq}$; ergo $q = \sqrt{\frac{dM}{dN}}$
Sint iam M et N functiones quaecunque ipſius u, et ob
$dq = \frac{dN\,ddM - dM\,ddN}{2dN\sqrt{dM\,dN}}$ erit:

$$x = \frac{2\,dM\,dN\sqrt{dM\,dN}}{dN\,ddM - dM\,ddN}$$

$$z + y = \frac{2\,dM^2\,dN}{dN\,ddM - dM\,ddN} - M$$

$$z - y = \frac{2\,dM\,dN^2}{dN\,ddM - dM\,ddN} + N$$

$$\text{ergo } y = \frac{dM\,dN\,(dM - dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M - N}{2}$$

$$\text{et } z = \frac{dM\,dN\,(dM + dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M + N}{2}$$

V.

Iisdem poſitis fiat $\int x\,dq = M$, vt ſit $\int q\,dx = qx - M$, erit $x = \frac{dM}{dq}$, et $\int \frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int \frac{dM}{qq} = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2\int \frac{M\,dq}{q^3}$. Iam ſit $\int \frac{M\,dq}{q^3} = Q$, ideoque $M = \frac{q^3\,dQ}{dq}$, quo valore per q inuento, cum Q ſit functio ipſius q, erit $x = \frac{dM}{dq}$; $z + y = qx - M$ et $z - y = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2Q$, ſeu ob $dM = \frac{q^3\,ddQ}{dq} + 3qq\,dQ$, erit

$$x = \frac{q^3\,ddQ}{dq^2} + \frac{3qq\,dQ}{dq}$$

$$z + y = \frac{q^4\,ddQ}{dq^2} + \frac{2q^3\,dQ}{dq}$$

$$z - y = \frac{qq\,ddQ}{dq^2} + \frac{4q\,dQ}{dq} + 2Q$$

hinc-

hincque propterea

$$y = \frac{qq(qq-1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} - Q$$
$$z = \frac{qq(qq+1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} + Q$$

VI.

Vel fiat $\int\frac{xdq}{qq} = N$, vt habeatur $x = \frac{qqdN}{dq}$ et $\int xdq = \int qqdN = qqN - 2\int Nqdq$. Iam ponatur $\int Nqdq = Q$ existente Q functione quacunque ipsius q, atque erit $N = \frac{dQ}{qdq}$, $dN = \frac{ddQ}{qdq} - \frac{dQ}{qq}$
ergo $x = \frac{qddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$; et $\int xdq = \frac{qdQ}{dq} - 2Q$
vnde fiet $z+y = \frac{qqdQ}{dq^2} - \frac{2qdQ}{dq} + 2Q$
et $z - y = \frac{ddQ}{dq^2}$
Quamobrem nanciscemur has formulas:

$$x = \frac{qddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$$
$$y = \frac{(qq-1)ddQ}{2dq^2} - \frac{qdQ}{dq} + Q$$
$$z = \frac{(qq+1)ddQ}{2dq^2} - \frac{qdQ}{dq} + Q$$

VII.

Ad alias formulas inueniendas ponamus:

$dx = 2pdu$; $dy = du(pp-1)$ et $dz = du(pp+1)$
eritque:

$x = 2\int pdu$; $y+z = 2\int ppdu$; $z-y = 2u$
ergo quaestio ad has duas formulas reducitur:

$\int pdu = pu - \int udp$; $\int ppdu = ppu - 2\int updp$.
Sit nunc $\int udp = M$, et $\int updp = N$, erit:
$u = \frac{dM}{dp} = \frac{dN}{pdp}$, ideoque $p = \frac{dN}{dM}$ et $dp = \frac{dMddN - dNddM}{dM^2}$
vnde $u = \frac{dM^3}{dMddN - dNddM} = \frac{z-y}{2}$

Porro

Porro eſt $\int p\,du = \frac{x}{2} = \frac{dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - M$, et

$$\int pp\,du = \frac{z+y}{2} = \frac{dM\,dN^2}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N; \text{ ergo}$$

$$x = \frac{2dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2M;\ y = \frac{dM(dN^2 - dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$$

atque $z = \frac{dM(dN^2 + dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$.

Si elementum dM ſumatur conſtans, erit

$$x = \frac{2dM\,dN}{ddN} - 2M$$
$$y = \frac{dN^2 - dM^2}{ddN} - 2N$$
$$z = \frac{dN^2 + dM^2}{ddN} - 2N$$

VIII.

In praecedente ſolutione ponatur, vt ante, $\int u\,dp = M$ ſeu $u = \frac{dM}{dp}$, fiet $\int up\,dp = \int p\,dM = pM - \int M\,dp$. Iam ſit $\int M\,dp = P$, erit $M = \frac{dP}{dp}$; et $dM = \frac{ddP}{dp}$ vnde fit $u = \frac{ddP}{dp^2}$, atque porro:

$$\tfrac{1}{2}x = \frac{p\,ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp};\ \frac{z-y}{2} = \frac{ddP}{dp^2}$$

et $\frac{z+y}{2} = \frac{pp\,ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$

hincque eliciuntur iſtae formulae:

$$x = \frac{2p\,ddP}{dp^2} - \frac{2dP}{dp}$$
$$y = \frac{(pp-1)ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$
$$z = \frac{(pp+1)ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$

IX.

Loco praecedentis operationis fiat $\int up\,dp = N$, ſeu $u = \frac{dN}{p\,dp}$, eritque $\int u\,dp = \int \frac{dN}{p} = \frac{N}{p} + \int \frac{N\,dp}{pp}$. Iam ſit $\int \frac{N\,dp}{pp} = P$, fietque $N = \frac{pp\,dP}{dp}$ et $dN = \frac{pp\,ddP}{dp} + 2p\,dP$, vnde $u = \frac{p\,ddP}{dp^2} + \frac{2\,dP}{dp} = \frac{z-y}{2}$; at erit

$$\frac{z+y}{2} = \frac{p^3\,ddP}{dp^2} + \text{ et } \tfrac{1}{2}x = \frac{pp\,ddP}{dp^2} + \frac{p\,dP}{dp} - P;$$

Ergo

$$x = \frac{2pp\,dd\mathrm{P}}{dp^2} + \frac{2p\,d\mathrm{P}}{dp} - 2\mathrm{P}$$

$$y = \frac{p(pp-1)\,dd\mathrm{P}}{dp^2} - \frac{2d\mathrm{P}}{dp}$$

$$z = \frac{p(pp+1)\,dd\mathrm{P}}{dp^2} + \frac{2d\mathrm{P}}{dp}$$

COROLL. 1.

71. Si rectificatio curuae non debeat esse algebraica, sed a data quadratura pendere, hoc ope regulae primae ac secundae facile praestabitur. In prima enim regula pro V eiusmodi capiatur functio transcendens ipsius u, quae datam quadraturam puta $\int \mathrm{U}\,du$ inuoluat, ita tamen vt $\frac{d\mathrm{V}}{du}$ fiat quantitas algebraica, si secunda regula vti velimus, pro P eiusmodi functio transcendens ipsius p accipi debet.

COROLL. 2.

72. Vtrauis autem regula adhibeatur, id facile expediri poterit ope probl. 2. vt curuae rectificatio indefinita non solum a data quadratura pendeat; sed vt in eadem curua tot, quot lubuerit, extent arcus, quorum longitudo algebraice exprimi queant.

SCHOLION.

73. En ergo nouem formulas specie quidem diuersas quibus curuae algebraicae, rectificabiles, continentur, verumtamen quaelibet earum tam late patet, vt omnes omnino curuas algebraicas, quae sint rectificabiles, complectatur. Interim tamen quaedam in iis reperiuntur, quae ope leuis substitutionis ad se inuicem reducuntur

cuntur. Ita solutio quarta ad primam reducitur ponendo $M = u + V$ et $N = u - V$. Deinde si in sexta ponatur $Q = Qqq$, ea redigitur ad quintam. De his autem solutionibus notandum est, ex singulis relationem finitam seu finitis quantitatibus expressam inter tres quantitates x, y et z reperiri posse, cum differentialia inde eliminari queant, pro singulis igitur solutionibus hae relationes finitae ita se habebunt:

Solutio I. dat $(z + V)^2 = x^2 + (y + u)^2$
Solutio II. dat $z\sqrt{(1 + pp)} = x + py + P\sqrt{(1 + pp)}$
Solutio III. dat $z\sqrt{(1 + pp)} = x + py + Pp$
Solutio IV. dat $(z + y + M)(z - y - N) = xx$
Solutio V. dat $z(1 + qq) = 2qx + (qq - 1)y + 2Qqq$
Solutio VI. dat $z(1 + qq) = 2qx + (qq - 1)y + 2Q$
Solutio VII. dat $(z + y + 4N)(z - y) = (x + 2M)^2$
Solutio VIII. dat $(pp + 1)z = 2px + (pp - 1)y + 4P$
Solutio IX. dat $(pp + 1)z = 2px + (pp - 1)y + 4Pp$

Hinc patet solutiones II et III in vnam coalescere si in secunda ponatur $P = \frac{R}{\sqrt{(1 + pp)}}$, vel in tertia $P = \frac{R}{p}$; inde enim prodit haec solutio simplicior:

$$x = \frac{(1 + pp)ddR}{dp^2} + \frac{p\,dR}{dp} - R$$

$$y = \frac{p(1 + pp)ddR}{dp^2} - \frac{dR}{dp}$$

$$z = \frac{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}ddR}{dp^2}$$

Deinde solutiones V, VI, VIII et IX manifesto inter se conueniunt, et ad VI, quae est simplicissima, redeunt. Denique solutio IV ad primam est reducta ita vt tantum remaneant 4 solutiones quae pro diuersis haberi queant:

(I, IV); (II, III); (V, VI, VIII, IX) et (VII).

Quatuor igitur has solutiones principales hic conspectui exponere conueniet, formis earum ita parumper immutatis, vt in singulis sit P functio quaecunque ipsius p.

SOLVTIO I.

$$x = \frac{(dp^2 - dP^2)^{\frac{3}{2}}}{dp\,ddP}$$

$$y = \frac{dP(dp^2 - dP^2)}{dp\,ddP} - p$$

$$z = \frac{dp^2 - dP^2}{ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = x^2 + (y+p)^2$$

SOLVTIO II.

$$x = \frac{dp\,dP}{ddP} - p$$

$$y = \frac{dP^2 - dp^2}{2\,ddP} - P$$

$$z = \frac{dP^2 + dp^2}{2\,ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = (x+p)^2 + (y+P)^2$$

SOLV-

SOLVTIO III.

$$x = \frac{(1+pp)ddP}{dp^2} + \frac{pdP}{dp} - P$$

$$y = \frac{p(1+pp)ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$z = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}ddP}{dp^2}$$

$$z\sqrt{(1+pp)} = x + py + P$$

SOLVTIO IV.

$$x = \frac{pddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$y = \frac{(pp-1)ddP}{2dp^2} - \frac{pdP}{dp} + P$$

$$z = \frac{(pp+1)ddP}{2dp^2} - \frac{pdP}{dp} + P$$

$$(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 2P$$

Hinc igitur, si pro P functiones simpliciores ipsius p substituantur, curuae algebraicae simpliciores, quae sunt rectificabiles, obtinebuntur, ac parabolicas quidem ex III erui obseruo, si ponatur $P = A + Bp^2 + Cp^4 + Dp^6 +$ etc. et coefficientes debite determinentur.

PROBLEMA 18.

74. Inuenire duas curuas algebraicas ad eundem axem relatas, quarum vtriusque rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vtriusque arcuum eidem abscissae respondentium summa algebraice exhiberi queat.

SOLVTIO.

Sit abſciſſa communis $=x$, et vnius curuae applicata $=y$, arcus $=z$; pro altera curua ſit applicata $=u$, et arcus $=w$; Ponatur $dy=pdx$, et $du=qdx$, eritque

pro curua I	pro curua II
$y=px-\int xdp$	$u=qx-\int xdq$
$z=x\surd(1+pp)-\frac{\int xpdp}{\surd(1+pp)}$	$w=x\surd(1+qq)-\frac{\int xqdq}{\surd(1+qq)}$

Neceſſe eſt ergo primo, vt formulae $\int xdp$ et $\int xdq$ valores nanciſcantur algebraicos, deinde vt ſumma arcuum $z+w$ ſit pariter algebraica, tertio vt vterque arcus ſeorſim ſumtus, vel, quod eodem redit, arcuum differentia $z-w$ a data quadratura pendeat.

Ponatur breuitatis gratia

$$\surd(1+pp)+\surd(1+qq)=r$$
$$\surd(1+pp)-\surd(1+qq)=s$$

vt ſit

$$y=px-\int xdp;\; u=qx-\int xdq$$
$$z=\frac{x(r+s)}{2}-\tfrac{1}{2}\int x(dr+ds);\; w=\frac{x(r-s)}{2}-\tfrac{1}{2}\int x(dr-ds)$$
$$z+w=xr-\int xdr$$
$$z-w=xs-\int xds.$$

Efficiendum ergo eſt, vt hae tres formulae:

$\int xdp$; $\int xdq$ et $\int xdr$ fiant algebraicae,

ſimulque vt formula $\int xds$ a data quadratura pendeat. Ad hoc ponatur $\int xdp=L$, erit $x=\frac{dL}{dp}$, et

$\int xdq$

$$\int x\,dq = \int dL.\frac{dq}{dp} = \frac{L\,dq}{dp} - \int L\,d.\frac{dq}{dp}$$
$$\int x\,dr = \int dL.\frac{dr}{dp} = \frac{L\,dr}{dp} - \int L\,d.\frac{dr}{dp}$$
$$\int x\,ds = \int dL.\frac{ds}{dp} = \frac{L\,ds}{dp} - \int L\,d.\frac{ds}{dp}$$

Iam ponatur $\int L\,d.\frac{dq}{dp} = M$, seu $L = \frac{dM}{d.\frac{dq}{dp}}$ erit $\int L\,d.\frac{dr}{dp}$

$$= \int dM\,\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = M\,\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} - \int M\,d.\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} \text{ et } \int L\,d.\frac{ds}{dp} = \int dM\,\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}$$
$$= M\,\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} - \int M\,d.\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}$$

Quod si iam ad abbreuiandum scribatur:

$$\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = \mu \text{ et } \frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = \nu$$

vt sit

$$\int L\,d.\frac{dr}{dp} = M\mu - \int M\,d\mu$$
$$\int L\,d.\frac{ds}{dp} = M\nu - \int M\,d\nu$$

Superest, vt formula $\int M\,d\mu$ reddatur algebraica, altera vero $\int M\,d\nu$ a data quadratura pendeat. Sit ergo $\int M\,d\mu = N$ seu $M = \frac{dN}{d\mu}$, erit

$$\int M\,d\nu = \int dN\,\frac{d\nu}{d\mu} = N\,\frac{d\nu}{d\mu} - \int N\,d.\frac{d\nu}{d\mu}$$

Sit iam P eiusmodi functio transcendens, quae datam quadraturam inuoluat, ac ponatur:

$$\int N\,d.\frac{d\nu}{d\mu} = P \text{ vt sit } N = \frac{dP}{d.\frac{d\nu}{d\mu}}$$

quo valore in praecedentibus formulis substituto, reperientur binae curuae algebraicae quaesito satisfacientes. Sumatur

matur ſcilicet pro q functio quaecunque ipſius p, ita vt r et s fiant functiones ipſius p, eruntque etiam μ et ν functiones ipſius p; quare pro P capi debebit functio transcendens ipſius p, quae quidem propoſitam quadraturam inuoluat, hocque modo N dabitur per P, vnde deinceps vtraque curua definietur. Hinc autem cum $\frac{d\mu}{d\nu}$ ſit functio ipſius p, alia ſolutio exhiberi poterit.

Scilicet ponatur: $\int M\,d\mu = R$ et $\int M\,d\nu = S$, ita vt R ſit functio algebraica, S vero datam quadraturam includat, eritque $M = \frac{dR}{d\mu} = \frac{dS}{d\nu}$, vnde fit $\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{dR}{dS}$, ex qua aequatione quantitas p definietur per nouam variabilem ν, ſiquidem pro R et S capiantur functiones ipſius ν, vnde denuo determinationes pro vtraque curua inuenientur.

SCOLION.

75. Haec iam ſufficere videntur, ad oſtendendum quousque mihi quidem in cultura huius nouae methodi adhuc pertingere licuit; neque dubito, quin haec ſpecimina aliis anſam ſint praebitura, vires ſuas ad hanc methodum vlterius promouendam intendendi. Si enim methodus, quae Diophantea appellari ſolet, quondam ab excellentiſſimis ingeniis omni ſtudio eſt exculta, haec certe noua methodus, quae in quaeſtionibus longe ſublimioribus verſatur, minore attentione digna non eſt aeſtimanda.

DE