1760

Observatio de summis divisorum

Leonhard Euler

OBSERVATIO
DE SVMMIS DIVISORVM.

Auctore L. EVLERO.

§. 1.

Proposito quocunque numero n denotet haec formula $\int n$ summam omnium diuisorum numeri n. Ita cum vnitas praeter se ipsam alium non habeat diuisorem, erit $\int 1 = 1$; atque cum numerus primus duos tantum habeat diuisores, vnitatem et se ipsum, si n fuerit numerus primus, erit $\int n = 1 + n$. Deinde cum numerus perfectus aequalis sit summae suarum partium aliquotarum, partes aliquotae autem sint diuisores eius praeter ipsum numerum, manifestum est numeri perfecti summam diuisorum se ipso esse duplo maiorem, hinc si n sit numerus perfectus, erit $\int n = 2n$. Porro quoniam numerus redundans appellari solet is, cuius summa partium aliquotarum ipso est maior, si n sit numerus redundans, erit $\int n > 2n$; ac si n sit numerus deficiens, seu talis, cuius summa partium aliquotarum ipso est minor, erit $\int n < 2n$.

§. 2. Hoc igitur modo indoles numerorum, quatenus summa partium aliquotarum, vel diuisorum, continetur, facile signis exprimitur. Si enim fuerit $\int n = 1 + n$, erit n numerus primus, si sit $\int n = 2n$ erit n numerus perfectus, ac si sit vel $\int n > 2n$, vel $\int n < 2n$, numerus n erit vel redundans, vel deficiens. Huc etiam referri potest quaestio de numeris, qui amicabiles vocari solent, quorum alter summae partium aliquotarum alterius aequatur. Si enim sint m et n numeri amicabiles, cum numeri m sit summa partium aliquotarum $= \int m - m$, et numeri $n = \int n - n$, erit ex natura horum numerorum $n = \int m - m$ et $m = \int n - n$: sicque habebitur $\int m = \int n = m + n$. Duo ergo numeri amicabiles eandem diuisorum summam habent, quae simul summae amborum numerorum est aequalis.

§. 3. Quo summa diuisorum cuiusque numeri propositi facilius inueniri possit, id commodissime fiet hunc numerum in duos factores, qui inter se sint primi, resoluendo. Si enim sint p et q numeri inter se primi, seu qui praeter vnitatem nullum habeant diuisorem communem, tum summa diuisorum producti pq, aequale erit producto ex summis diuisorum vtriusque seu erit $\int pq = \int p . \int q$. Hinc inuentis summis diuisorum numerorum minorum, inuentio summae diuisorum non difficulter ad numeros maiores extenditur.

§. 4. Si sint a, b, c, d, etc. numeri primi, omnis numerus, quantuscunque fuerit, semper ad huiusmodi formam $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. reducitur: qua forma inuenta erit huius numeri summa diuisorum seu

$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. $= \int a^\alpha . \int b^\beta . \int c^\gamma . \int d^\delta$. etc.

At ob a, b, c, d, etc. numeros primos erit

$$\int a^\alpha = 1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}, \text{ ideoque}$$

$$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \text{etc.} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} . \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} . \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} . \frac{d^{\delta+1} - 1}{d - 1} . \text{etc.}$$

Sufficiet ergo singularum potestatum numerorum primorum tantum summas diuisorum inuenisse.

§. 5.

§. 5. Hanc autem indagationem vlterius non persequor; sed, vt ad id, quod hic tractare institui, propius accedam, numerorum secundum ordinem naturalem progredientium summas diuisorum hic conspectui exponam.

∫ 1 = 1	∫ 26 = 42	∫ 51 = 72	∫ 76 = 140
∫ 2 = 3	∫ 27 = 40	∫ 52 = 98	∫ 77 = 96
∫ 3 = 4	∫ 28 = 56	∫ 53 = 54	∫ 78 = 168
∫ 4 = 7	∫ 29 = 30	∫ 54 = 120	∫ 79 = 80
∫ 5 = 6	∫ 30 = 72	∫ 55 = 72	∫ 80 = 186
∫ 6 = 12	∫ 31 = 32	∫ 56 = 120	∫ 81 = 121
∫ 7 = 8	∫ 32 = 63	∫ 57 = 80	∫ 82 = 126
∫ 8 = 15	∫ 33 = 48	∫ 58 = 90	∫ 83 = 84
∫ 9 = 13	∫ 34 = 54	∫ 59 = 60	∫ 84 = 224
∫ 10 = 18	∫ 35 = 48	∫ 60 = 168	∫ 85 = 108
∫ 11 = 12	∫ 36 = 91	∫ 61 = 62	∫ 86 = 132
∫ 12 = 28	∫ 37 = 38	∫ 62 = 96	∫ 87 = 120
∫ 13 = 14	∫ 38 = 60	∫ 63 = 104	∫ 88 = 180
∫ 14 = 24	∫ 39 = 56	∫ 64 = 127	∫ 89 = 90
∫ 15 = 24	∫ 40 = 90	∫ 65 = 84	∫ 90 = 234
∫ 16 = 31	∫ 41 = 42	∫ 66 = 144	∫ 91 = 112
∫ 17 = 18	∫ 42 = 96	∫ 67 = 68	∫ 92 = 168
∫ 18 = 39	∫ 43 = 44	∫ 68 = 126	∫ 93 = 128
∫ 19 = 20	∫ 44 = 84	∫ 69 = 96	∫ 94 = 144
∫ 20 = 42	∫ 45 = 78	∫ 70 = 144	∫ 95 = 120
∫ 21 = 32	∫ 46 = 72	∫ 71 = 72	∫ 96 = 252
∫ 22 = 36	∫ 47 = 48	∫ 72 = 195	∫ 97 = 98
∫ 23 = 24	∫ 48 = 124	∫ 73 = 74	∫ 98 = 171
∫ 24 = 60	∫ 49 = 57	∫ 74 = 114	∫ 99 = 156
∫ 25 = 31	∫ 50 = 93	∫ 75 = 124	∫ 100 = 217

§. 6. Si iam contemplemur ſeriem horum numerorum 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28 etc. quam ſummae diuiſorum numeris naturali ordine procedentibus reſpondentes conſtituunt, non ſolum nulla lex progreſſionis patet, ſed ordo horum numerorum tantopere eſt perturbatus, vt nulli prorſus legi adſtrictus videatur. Quin etiam haec ſeries ordinem numerorum primorum manifeſto implicat, cum terminus indicis n ſeu $\int n$ toties ſit $= n + 1$, quoties n eſt numerus primus; conſtat autem, numeros primos nullo adhuc modo ad certam quandam progreſſionis legem reuocari potuiſſe. Cum autem noſtra ſeries non ſolum numerorum primorum, ſed etiam omnium reliquorum numerorum, quatenus ex primis ſunt compoſiti, rationem complectatur, eius lex multo etiam difficilior inuentu videtur, quam ipſius ſeriei numerorum primorum.

§. 7. Quae cum ita ſint, non parum equidem mihi ſcientiam numerorum promouiſſe videor, dum certam atque conſtantem legem detexi, ſecundum quam termini ſeriei propoſitae 1, 3, 4, 7, 6, etc. progrediantur, ita vt per hanc legem quilibet iſtius ſeriei terminus ex praecedentibus definiri poſſit, inueni enim, quod magis mirum videatur, hanc ſeriem ad id genus progreſſionum pertinere, quae recurrentes vocari ſolent; et quarum natura ita eſt comparata, vt quilibet terminus ex praecedentibus ſecundum certam quandam relationis rationem determinetur. Quis autem vnquam crediderit hanc ſeriem tantopore perturbatam, et quae cum ſeriebus recurrentibus nihil plane commune habere

videtur,

videtur, nihilominus in hoc ſerierum genere contineri eiusque ſcalam relationis aſſignari poſſe?

§. 8. Cum huius ſeriei terminus indici n reſpondens, qui indicat ſummam diuiſorum numeri n ſit $= \int n$, eius termini antecedentes ordine retrogrado erunt $\int(n-1)$, $\int(n-2)$, $\int(n-3)$, $\int(n-4)$, $\int(n-5)$ etc. Quilibet autem terminus iſtius ſeriei ſcilicet $\int n$ ita ex aliquot antecedentium conflatur, vt ſit:

$$\begin{aligned} \int n = {} & \int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15) \\ & -\int(n-22)-\int(n-26)+\int(n-35)+\int(n-40)-\int(n-51)-\int(n-57) \\ & +\int(n-70)+\int(n-77)-\int(n-92)-\int(n-100)+\int(n-117)+\int(n-126)-\text{etc.} \end{aligned}$$

Vel cum ſigna $+$ et $-$ alternatim binos terminos afficiant, haec ſeries commode in duas diuellitur, hoc modo:

$$\int n = \begin{cases} \int(n-1)-\int(n-5)+\int(n-12)-\int(n-22)+\int(n-35)-\int(n-51)+\text{etc.} \\ \int(n-2)-\int(n-7)+\int(n-15)-\int(n-26)+\int(n-40)-\int(n-57)+\text{etc.} \end{cases}$$

§. 9. Ex hac poſteriori forma ordo numerorum, qui in vtraque ſerie ſucceſſiue a numero n ſubtrahuntur, facile perſpicitur, vtraque enim ſeries eſt ſecundi ordinis, differentias ſecundas habens conſtantes. Namque prioris ſeriei numeri cum ſuis differentiis tam primis, quam ſecundis, ſunt:

	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	etc.
diff. 1.	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	etc.	
diff. 2.	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3,	etc.		

Vnde illius ſeriei terminus generalis eſt $= \frac{3xx-x}{2}$, continetque adeo omnes numeros pentagonales. Altera ſeries eſt

2, 7,

$$2,\ 7,\ 15,\ 26,\ 40,\ 57,\ 77,\ 100,\ 126, \text{ etc.}$$
$$\text{diff. 1: } 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26 \text{ etc.}$$
$$\text{diff. 2: } 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3, \text{ etc.}$$

ideoque terminum generalem habet $\frac{3xx+x}{2}$, ac feriem numerorum pentagonalium retro continuatam continet.

§. 10. Omnino hic notatu eſt dignum, feriem numerorum pentagonalium tam ipſam, quam retro continuatam, ad ordinem feriei ſummarum diuiſorum potisſimum adhiberi, cum ſane nullum nexum inter numeros pentagonales et ſummas diuiſorum ne ſuſpicari quidem liceat. Si enim feries numerorum pentagonalium tam antrorſum, quam retrorſum, continuata exponatur hoc modo:

$$\text{etc. } 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, \text{ etc.}$$

formula noſtra ordinem ſummarum diuiſorum complectens ſignis alternantibus hoc modo ordinata exhibere poterit:

$$\text{etc.} - \int(n-15) + \int(n-7) - \int(n-2) + \int(n-0) - \int(n-1) + \int(n-5) - \int(n-12) + \int(n-22) - \text{etc.} = 0$$

quae feries vtrinque quidem in infinitum excurrit, ſed quouis caſu, ſiquidem ad vſum noſtrum rite adhibeatur, determinato terminorum numero conſtat.

§. 11. Si enim ope formulae noſtrae primum exhibitae

$$\begin{aligned}\int n = {} & \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) \\ & - \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) \\ & + \int(n-70) + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Summam diuiſorum numeri n inuenire velimus ex cognitis diuiſorum ſummis numerorum minorum, plures termi-

terminos huius formulae accipere non oportet, quam quoad ad ſummas diuiſorum numerorum negatiuorum perueniatur. Omnes ſcilicet termini, qui poſt ſignum $\int$ numeros negatiuos continent, ſunt reiiciendi; vnde patet ſi n ſit numerus exiguus, pauciſſimos terminos ſufficere, quo maior autem fuerit numerus n, eo plures terminos ex formula noſtra generali ad vſum adhiberi debere.

§. 12. Summa igitur diuiſorum numeri propoſiti n ex ſummis diuiſorum aliquot numerorum minorum, quas cognitas eſſe aſſumo, conflatur; quoniam quouis caſu ſummae numerorum negatiuorum reiiciuntur. Quae cautio cum eo ſit facilior, quod numerorum negatiuorum ſumma diuiſorum ne concipi quidem poſſit, inſuper moneri oportet, quomodo operatio ſit dirigenda iis caſibus, quibus formula noſtra praebet terminum $\int(n-n)$ ſeu $\int 0$, qui cum cyphra per omnes numeros ſit diuiſibilis, vel infinitus vel indeterminatus videtur. Caſus hic autem toties occurrit, quoties n eſt numerus ex ſerie numerorum pentagonalium vel ipſa, vel retro continuata; his igitur caſibus tenendum eſt, ſemper pro termino $\int(n-n)$ ſeu $\int 0$ ipſum illum numerum n, qui proponitur, eſſe ſcribendum, et quidem cum eo ſigno, quo terminus $(n-n)$ in formula noſtra afficitur.

§. 13. His expoſitis praeceptis, quae ad vſum formulae noſtrae obſeruari debent, exempla a numeris minimis inchoando apponam, quo facilius vis formulae noſtrae perſpiciatur, ſimulque eius veritas agnoſcatur.

$\int 1 = \int 0$ ſeu
$\int 1 = 1 = 1$

$\int 2 = \int 1 + \int 0$ ſeu
$\int 2 = 1 + 2 = 3$

$\int 3 = \int 2 + \int 1$ ſeu
$\int 3 = 3 + 1 = 4$

$\int 4 = \int 3 + \int 2$ ſeu
$\int 4 = 4 + 3 = 7$

$\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0$ ſeu
$\int 5 = 7 + 4 - 5 = 6$

$\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1$ ſeu
$\int 6 = 6 + 7 - 1 = 12$

$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0$ ſeu
$\int 7 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$

$\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1$ ſeu
$\int 8 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$

$\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$ ſeu
$\int 9 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$

$\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3$ ſeu
$\int 10 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$

$\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4$ ſeu
$\int 11 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$

$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$ ſeu
$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$

§. 14. Exempla haec attentius inſpicienti, atque etiam ad numeros maiores progredienti, non ſine admiratione patebit, quemadmodum ſemper quaſi praeter

expecta-

expectationem ad veram diuiſorum ſummam numeri propoſiti perueniatur; et quo hic conſenſus facilius deprehendatur, ſupra iam omnium numerorum centenario non maiorum ſummas diuiſorum exhibui; vnde veritas noſtrae formulae in numeris maioribus explorari poterit. Imprimis autem non ſine delectatione reperiemus, quoties numerus propoſitus fuerit primus, ex formula noſtra pro eius diuiſorum ſumma inueniri numerum vnitate maiorem. Euoluamus in hunc finem exemplum, quo numerus propoſitus $n = 101$, quaſi ignorantes exploraturi, vtrum hic numerus ſit primus nec ne? atque operatio ita conſtabit:

$$\begin{array}{l} \int 101 = \int 100 + \int 99 - \int 96 - \int 94 + \int 89 + \int 86 - \int 79 - \int 75 \\ \qquad\quad 217 + 156 - 252 - 144 + 90 + 132 - 80 - 124 \\ \qquad + \int 66 + \int 61 - \int 50 - \int 44 + \int 31 + \int 24 - \int 9 - \int 1 \\ \qquad + 144 + 62 - 93 - 84 + 32 + 60 - 13 - 1 \end{array}$$

Colligendis ergo binis terminis erit

$$\begin{array}{rrr} \int 101 = & + 373 & - 396 \\ & + 222 & - 204 \\ & + 206 & - 177 \\ & + 92 & - 14 \\ \hline \text{ſeu } \int 101 = & + 893 & - 791 = 102 \end{array}$$

Reperitur ergo ſumma diuiſorum numeri 101 vnitae maior ſcilicet 102, vnde, etiamſi id aliunde non conſtaret, ſequitur manifeſto, numerum 101 eſſe primum. Hoc autem merito eo mirabilius videtur, cum nulla operatio ſit inſtituta, quae ad rationem diuiſorum vllo modo referri queat; quin etiam diuiſores, quorum ſumma per hanc regulam reperitur, ipsi manent incogniti, etiamsi saepe ex consideratione ipsius summae concludi possint.

§. 15. Insignis haec proprietas, qua summae diuisorum sunt praeditae, non minus foret memorabilis, etiamsi eius demonstratio esset obuia et quasi in aprico posita. Sin autem demonstratio admodum esset abstrusa, atque numerorum proprietatibus maxime reconditis inniteretur, inde non mediocriter certe pretium huius legis progressionis repertae augeretur, siquidem earum veritatum inuestigatio eo magis est laudanda, quo magis eae fuerint absconditae. Verum dum fateri cogor, me non solum nullam huius veritatis demonstrationem proferre posse, sed etiam propemodum pro desperato habere, nescio an non ob hanc ipsam causam cognitio talis veritatis multo magis sit aestimanda, cuius demonstratio nobis est imperscrutabilis. Atque hanc ob rem istam veritatem pluribus exemplis confirmare visum est, quod mihi quidem eius demonstrationem exhibere non liceat.

§. 16. Eximium igitur hic eiusmodi propositionum habemus exemplum, de quarum veritate nullo modo dubitare possumus, etiamsi eas demonstrare non valeamus, quod plerisque eo magis mirum videbitur, quod in mathesi vulgo nullae aliae propositiones admitti putantur, nisi quarum veritas ex indubitatis principiis euinci queat. Interim tamen non fortuito et quasi diuinando ad cognitionem huius veritatis perueni; cui enim in mentem venire potuisset, ordinem, qui forte in summis diuisorum locum habuerit, ex natura serierum recur-

recurrentium ac numerorum pentagonalium per solam coniecturam elicere velle? Hanc ob rem non abs re fore arbitror, si modum, quo ad cognitionem huius ordinis pertigerim, dilucide exposuero, praesertim cum is admodum sit reconditus ac longe multasque per ambages conquisitus.

§. 17. Deductus autem sum ad hanc obseruationem per considerationem istius formulae infinitae

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\text{ etc.}$$

cuius valorem, si multiplicatione singulorum factorum actu instituta euoluatur, ac secundum potestates ipsius x disponatur, deprehendi in sequentem seriem conuerti:

$$s = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-\text{ etc.}$$

vbi in exponentibus ipsius x iidem numeri occurrunt quos supra descripsi, numeri scilicet pentagonales cum ipsi, tum retro continuati. Vnde, quo ordo facilius perspiciatur, haec series ita exhiberi poterit, vt vtrinque in infinitum excurrat:

$$s = \text{etc.}+x^{26}-x^{15}+x^7-x^2+x^0-x^1+x^5-x^{12}+x^{22}-x^{35}+x^{51}-\text{ etc.}$$

§. 18. Aequalitas harum duarum formularum pro s exhibitarum iam est id ipsum, quod solida demonstratione confirmare non possum; verum tamen, qui opus euolutionis formulae prioris $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. in se suscipere, hosque factores successiue in se multiplicare voluerit, statim ad terminos primores alterius seriei $s = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+$ etc. perueniet, neque difficulter perspiciet, bina signa $+$ et $-$ geminata se inuicem excipere, et exponentes potestatum ipsius x eam legem sequi, quam iam satis exposui.

Concessa autem hac aequalitate inter binas istas formulas infinitas proprietas summarum diuisorum, quam ante indicaui, rigide inde demonstrari potest; atque vicissim si haec proprietas pro vera agnoscatur, ex ea veritas consensus duarum harum formularum euincetur.

§. 19. Quodsi enim pro demonstrato assumamus, posito $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. fore $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$ erit logarithmis sumendis

$$ls = l(1-x) + l(1-x^2) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \text{etc.}$$

$$\textit{et } ls = l(1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.})$$

Sumantur vtriusque formae differentialia, eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-xx} - \frac{3xxdx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} \text{ etc.}$$

$$\text{et } \frac{ds}{s} = \frac{-dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

Multiplicetur vtraque per $\frac{-x}{dx}$, vt habeatur

$$\text{I. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-xx} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \text{etc.}$$

$$\text{II. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} - x^{26} + \text{etc.}}$$

§. 20. Harum expressionum inter se aequalium contemplemur primo priorem, ac singulos terminos more consueto in progressiones geometricas conuertamus; quo facto prodibit, infinitas has progressiones geometricas secundum potestates ipsius x disponendo:

$$
\begin{array}{rcccccccccccccl}
-\frac{xds}{sdx} = & x^1 & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} & +x^{11} & +x^{12} & \text{etc.} \\
 & & +2 & . & +2 & . & +2 & . & +2 & . & +2 & . & +2 & \\
 & & & +3 & . & . & +3 & . & . & +3 & . & . & +3 & \\
 & & & & +4 & . & . & . & +4 & . & . & . & +4 & \\
 & & & & & +5 & . & . & . & . & +5 & . & . & \\
 & & & & & & +6 & . & . & . & . & . & +6 & \\
 & & & & & & & +7 & . & . & . & . & . & \\
 & & & & & & & & +8 & . & . & . & . & \\
 & & & & & & & & & +9 & . & . & . & \\
 & & & & & & & & & & +10 & . & . & \\
 & & & & & & & & & & & +11 & . & \\
 & & & & & & & & & & & & +12 &
\end{array}
$$

§. 21. Si iam ſingularum poteſtatum ipſius x coefficientes colligantur, habebitur:

$$-\frac{xds}{sdx} = x^1 + x^2(1+2) + x^3(1+3) + x^4(1+2+4) + x^5(1+5) + x^6(1+2+3+6) \text{ etc.}$$

vbi manifeſtum eſt, cuiusque poteſtatis ipſius x coefficientem eſſe aggregatum omnium numerorum, per quos exponens illius poteſtatis eſt diuiſibilis. Scilicet poteſtatis x^n coefficiens erit ſumma omnium diuiſorum numeri n, erit ergo is ſecundum modum ſignandi ſupra receptum $= \int n$. Hinc itaque ſeriei ipſi $-\frac{xds}{sdx}$ aequalis inuenta ita exhibebitur, vt ſit

$$-\frac{xds}{sdx} = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$

ſicque poſito $x = 1$ prodit progreſſio ſummarum diuiſorum, qui ſingulis numeris ordine naturali progredientibus conueniunt.

§. 22.

§. 22. Designemus iam hanc seriem per t vt sit
$$t = x^1\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$
et ob $t = -\frac{x\,ds}{s\,dx}$ erit quoque
$$t = \frac{x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$
Necesse igitur est, vt ex euolutione huius fractionis pro t series obtineatur aequalis illi, quam prior forma suppeditauit: vnde manifestum est, seriem illam pro t inuentam esse recurrentem, cuius singuli termini per praecedentes determinentur, secundum scalam relationis, quam denominator $1 - x - x^2 + x^5 + x^7$ etc. indicat.

§. 23. Quo nunc facilius indoles huius seriei recurrentis cognoscatur, binos istos valores pro t inuentos inter se coaequemus, atque ad fractionem tollendam vterque per denominatorem $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} +$ etc. multiplicetur, quo facto orietur terminis secundum potestates ipsius x disponendis:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x^1\int 1 & +x^2\int 2 & +x^3\int 3 & +x^4\int 4 & +x^5\int 5 & +x^6\int 6 & +x^7\int 7 & +x^8\int 8 & +x^9\int 9 & +x^{10}\int 10 & +x^{11}\int 11 & +x^{12}\int 12 \text{ etc.} \\
 & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\int 9 & -\int 10 & -\int 11 \\
 & & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\int 9 & -\int 10 \\
 & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\int 4 & +\int 5 & +\int 6 & +\int 7 \\
 & & & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\int 4 & +\int 5 \\
 & & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

aequale

$$x^1 + 2x^2 \quad * \quad * \quad -5x^5 \quad * \quad -7x^7 \quad * \quad * \quad * \quad * \quad +12x^{12} \text{ etc.}$$

§. 24. Cum iam singularum potestatum ipsius x coefficientes se mutuo destruere debeant, hinc sequentes eliciemus aequalitates:

$\int 1 = 1$

$$\begin{array}{ll}
\int 1 = 1 & \int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7 \\
\int 2 = \int 1 + 2 & \int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \\
\int 3 = \int 2 + \int 1 & \int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \\
\int 4 = \int 3 + \int 2 & \int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 \\
\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5 & \int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 \\
\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 & \int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12
\end{array}$$

etc.

quae manifesto redeunt ad istas:

$$\begin{array}{ll}
\int 1 = 1 & \int 7 = \int(7-1) + \int(7-2) - \int(7-5) - 7 \\
\int 2 = \int(2-1) + 2 & \int 8 = \int(8-1) + \int(8-2) - \int(8-5) - \int(8-7) \\
\int 3 = \int(3-1) + \int(3-2) & \int 9 = \int(9-1) + \int(9-2) - \int(9-5) - \int(9-7) \\
\int 4 = \int(4-1) + \int(4-2) & \int 10 = \int(10-1) + \int(10-2) - \int(10-5) - \int(10-7) \\
\int 5 = \int(5-1) + \int(5-2) - 5 & \int 11 = \int(11-1) + \int(11-2) - \int(11-5) - \int(11-7) \\
\int 6 = \int(6-1) + \int(6-2) - \int(6-5) & \int 12 = \int(12-1) + \int(12-2) - \int(12-5) - \int(12-7) + 12
\end{array}$$

§. 25. Hic perspicuum est, numeros, qui continuo a numero proposito, cuius diuisorum summa quaeritur, subtrahi debent, esse ipsos numeros seriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. ex quibus tot quouis casu sunt assumendi, quoad numerum propositum non excedant: atque etiam signa eam tenere rationem, quae supra est descripta. Hinc ergo proposito numero quocunque n manifestum est, fore

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \text{etc.}$$

hos terminos eousque continuando, donec numeri signum $\int$ praefixum habentes, fiant negatiui. Simul ergo ex origine seriei huius recurrentis ratio patet, cur ista progressio quouis casu vlterius continuari non debeat.

§. 26. Quod porro ad numeros absolutos attinet, qui in formularum inuentarum aliquibus sub finem annectuntur, manifestum est, eos ex numeratore fractionis, qua valor ipsius t expressus est inuentus (§. 22) oriri, atque iis tantum casibus legem continuitatis interrumpere, quibus numerus n est terminus huius seriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26 etc. quanquam ne hoc quidem caſu lex ſignorum perturbatur. His autem caſibus numerus abſolutus inſuper cum ſigno ſuo adiiciendus ipſi numero propoſito eſt aequalis; atque ſi legem ante deſcriptam conſideremus, hunc numerum vtique deprehendemus reſpondere termino $\int(n-n)$: vnde ratio patet, cur quoties in applicatione formae

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \text{etc.}$$

peruenitur ad terminum $\int(n-n)$, is non omitti, ſed pro eius valore ipſe numerus n ſcribi debeat. Hinc igitur regula ſupra expoſita in omnibus partibus confirmatur.

DEMON-