



1759

Recherches sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets renversés

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

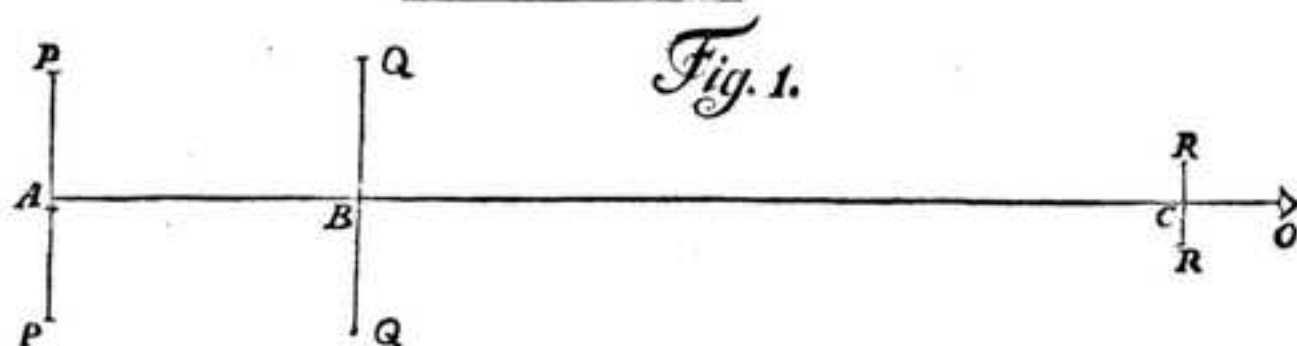
Euler, Leonhard, "Recherches sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets renversés" (1759). *Euler Archive - All Works*. 240. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/240>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



RECHERCHES
SUR LES LUNETTES A TROIS VERRES
QUI REPRÉSENTENT LES OBJETS
RENVERSÉS.

PAR M. EULER.



I.

Après avoir expliqué les principes généraux, sur lesquels doit être établie la construction tant des Telescopes que des Microscopes, je me propose ici d'en faire l'application aux Lunettes composées de trois verres. De telles Lunettes étant déjà assez en usage depuis qu'on leur a reconnu quelques avantages sur celles de deux verres, on sera peut-être surpris du haut degré de perfection, dont elles sont susceptibles, tant par leur arrangement, que par leur figure. Je ne considère ici que trois verres simples PP, QQ, & RR, dont les Lunettes soient composées, desquels le premier PP soit tourné vers l'objet, que je regarde comme infiniment éloigné, & qu'on nomme l'objectif, & le dernier RR vers l'œil en O.

Fig. 1.

II. Puisqu'il est ici question des Lunettes, & que la distance de l'objet, qui a été nommée ∞ , est supposée infinie, on doit met-



ore $l = a$, dans mes formules générales, & ϕ marquera le demi-diamètre de l'espace circulaire, que la lunette découvre dans le ciel; & qu'on nomme le champ apparent. Or chaque verre se rapportant à deux distances, dont l'une est celle de l'objet, ou de l'image, dont il reçoit les rayons, & l'autre celle de l'image représentée par ce verre, il convient d'introduire dans le calcul pour chaque verre ces deux distances; qu'on peut nommer les distances déterminatrices de chaque verre. Soit donc

Pour le I verre PP

la distance de l'objet avant le verre $= a = s$,

la distance de l'image après le verre $= a$.

Pour le II verre QQ

la distance de l'image précédente avant ce verre $= b$,

la distance de l'image formée après ce verre $= \xi$.

Pour le III verre RR

la distance de l'image précédente avant ce verre $= c$,

la distance de l'image formée après ce verre $= \gamma = s$.

III. Ayant fixé pour chaque verre ces deux distances déterminatrices, on en connoit d'abord les intervalles entre les verres, qui feront $AB = a + b$ & $BC = \xi + c$, auxquelles on doit ajouter la distance de l'œil $CO = k$, & il est évident que ces trois distances doivent être positives. Ensuite j'ai mis pour abrégé $\frac{a}{a} = A$, $\frac{\xi}{b} = B$, & $\frac{\gamma}{c} = C$.

d'où pour le cas présent nous aurons $A = 0$ & $C = s$. De là on connoîtra aussi promptement les distances de foyer de ces verres, qui seront exprimées en sorte

la distance de foyer du verre PP $= p = \frac{a a}{a + a} = a$

la distance de foyer du verre QQ $= q = \frac{b \xi}{\xi + b} = \frac{B b}{1 + B}$

la distance de foyer du verre RR $= r = \frac{c \gamma}{c + \gamma} = c$.

IV.



IV. Donc réciproquement, quand on connoit les distances de foyer p, q, r des verres avec les rapports de leurs distances déterminatrices A, B, C , desquelles $A = 0$ & $C = \infty$, on aura ces distances mêmes, comme il suit :

$$a = \infty; \alpha = p; b = \frac{1+B}{B}q; \xi = (1+B)q; c = r; \gamma = \infty.$$

Je regarde ici les distances de foyer p, q, r comme positives, ou les verres comme convexes; or si dans la suite quelqueune de ces distances se trouve négative, ce sera une marque, que ce verre doit être concave. Or j'ai trouvé moyen de n'introduire dans mes formules générales, que les distances de foyer p, q, r avec les lettres A, B, C , & de là les intervalles entre les verres seront déterminés en

$$\text{sorte } AB = p + \frac{1+B}{B}q \quad \& \quad BC = (1+B)q + r,$$

& partant la longueur de toute la lunette sera

$$AC = p + \frac{(1+B)^2}{B}q + r.$$

V. Or quoique la distance de foyer d'un verre soit donnée, on peut assigner une infinité de figures différentes toutes sphériques, qui produisent la même distance de foyer: car si la distance de foyer doit être $= p$, & que nous posions le rayon de sa face de devant $= f$, & celui de sa face de derrière $= g$, on satisfait à la condition du foyer en prenant $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{20}{11p}$, ou $\frac{fg}{f+g} = \frac{11}{20}p$: de sorte que l'un ou l'autre de ces deux rayons f & g puisse être pris à volonté. Tous ces verres ayant la même distance de foyer satisferont aussi aux mêmes distances déterminatrices: & s'il n'étoit question, que du lieu des images, il seroit indifférent, laquelle de cette infinité de figures indifférentes on donneroit au verre. Mais ces figures sont bien différentes par rapport à la confusion causée dans la représentation de l'image, & c'est de cette circonstance, qu'il faut déterminer dans chaque cas la figure la plus convenable.



VII. J'ai employé dans mes formules générales les caractères λ , λ' , λ'' , &c. pour exprimer la confusion causée par les verres PP, QQ, RR; où il faut remarquer que les valeurs de ces lettres ne sauroient jamais devenir moindres que l'unité. Dans ce cas la confusion est la plus petite, & il n'y a alors qu'une seule figure du verre, qui produise cet avantage. Toute autre figure qu'on donne à un verre, produira une plus grande confusion, & la lettre λ , qui lui appartient, sera plus grande que l'unité. Or réciproquement la valeur de λ étant donnée, pourvu qu'elle soit plus grande que l'unité, on peut assigner deux figures aux verres, qui produisent le même degré de confusion, les deux distances déterminatrices étant données. Ainsi, pour le verre objectif, dont les distances déterminatrices sont $a = \infty$, & $\alpha = p$, la distance de foyer étant $= p$, afin que la lettre λ convienne à sa confusion, il faut qu'il soit

$$\text{le rayon de sa face de devant} = \frac{p}{1,62740 \pm 0,90513 \sqrt{(\lambda-1)}}$$

$$\text{le rayon de sa face de derrière} = \frac{p}{0,19078 \mp 0,90513 \sqrt{(\lambda-1)}}$$

VII. Pour le second verre QQ, dont les distances déterminatrices sont b & ϵ , & la distance de foyer $= q$, afin que le nombre λ' convienne à sa confusion, posant $\frac{\epsilon}{b} = B$, il faut prendre le rayon de sa face

$$\text{de devant} = \frac{(1+B)q}{1,62740 + 0,19078B \pm 0,90513(1+B)\sqrt{(\lambda'-1)}}$$

$$\text{de derrière} = \frac{(1+B)q}{1,62740B + 0,19078 \mp 0,90513(1+B)\sqrt{(\lambda'-1)}}$$

De la même manière, pour le troisième verre RR, dont les distances déterminatrices sont $c = r$ & $\gamma = 0$, la distance de foyer étant $= r$, à cause de $\frac{\gamma}{c} = C = \infty$, afin que le nombre λ'' convienne à sa confusion, il faut prendre

le



$$\text{le rayon de la face de devant} = \frac{r}{0,19078 \pm 0,90513 \sqrt{(\lambda'' - 1)}}$$

$$\text{le rayon de la face de derrière} = \frac{r}{1,62740 \mp 0,90513 \sqrt{(\lambda'' - 1)}}$$

VIII. Outre ces déterminations, qui regardent le lieu, la distance de foyer, & la figure des verres, il faut aussi avoir égard à leurs ouvertures. Soit donc le demi-diamètre de l'ouverture du verre objectif $= x$; or pour les autres verres je pose le demi-diamètre

$$\text{de l'ouverture du second verre } QQ = \theta q,$$

$$\text{de l'ouverture du troisième verre } RR = \theta' r,$$

où il faut remarquer, qu'on ne sauroit donner à chaque verre une plus grande ouverture, que ses faces permettent; il faut pour cet effet se régler sur la face la plus courbe, & faire en sorte que le demi-diamètre de son ouverture ne surpasse point la moitié du rayon de cette face; afin que l'ouverture n'embrasse point des arcs plus grands que 60° . Il sera même bon de rendre ces arcs encore plus petits, & de ne donner au demi-diamètre de l'ouverture que le tiers ou le quart du rayon de la face la plus courbe.

IX. Que le nombre m exprime maintenant la multiplication dont on veut que la lunette grossisse les objets: & pour le degré de clarté soit y le demi-diamètre des pinceaux lumineux, qui sont transmis dans l'œil de chaque point de l'objet. Où il faut remarquer que la valeur $y = \frac{1}{50}$ pouce fournit encore un très grand degré de clarté, & qu'on se contente communément d'un plus petit, qui répond à $y = \frac{1}{70}$. Or le degré de clarté y avec la multiplication m étant donné, cela détermine d'abord le demi-diamètre de l'ouverture de l'objectif $x = my$: donc, prenant $y = \frac{1}{50}$ pouce, on aura

$$x =$$



$x = \frac{m}{50}$ pouces, & en ne prenant que $y = \frac{1}{70}$ pouce, on aura

$x = \frac{m}{70}$ pouces. De là il s'ensuit d'abord, que les rayons des faces de l'objectif doivent absolument être plus grands que $2x$, ou bien selon les remarques rapportées, plus grands que $3x$, ou même que $4x$.

X. Or, afin que tous les rayons qui entrent par l'objectif, soient aussi transmis par les deux autres verres, il faut que leurs ouvertures passent de certaines limites, que j'ai rapportées dans la seconde règle des instructions générales. Puisque $Aa = p$ & $C = \infty$, cette règle fournit les conditions suivantes :

$$\theta > \frac{B + 1}{B} \cdot \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{p},$$

où il s'agit uniquement de la quantité absolue de ces expressions sans avoir égard à leurs signes. Or il faut remarquer, que quand même les verres ont une telle figure, qui soit susceptible de la plus grande ouverture, ce qui arrive lorsque les deux faces sont égales, la valeur des nombres θ & θ' est au dessous de $\frac{1}{2}$, ou même de $\frac{1}{3}$, & de $\frac{1}{4}$: d'où l'on voit que la valeur du nombre B ne sauroit être prise beaucoup moindre que l'unité.

XI. On tâchera de procurer à ces deux fractions θ & θ' des valeurs aussi grandes qu'il est possible, puisque c'est d'elles que dépend principalement le champ apparent, dont je suppose le demi-diamètre $= \Phi$. L'une ou l'autre concourt toujours tout entière à déterminer le champ apparent : mais l'autre n'y contribue souvent qu'en partie, & quelquefois elle diminue même l'effet de l'autre. Pour tenir compte de cette circonstance, j'introduis au lieu des lettres θ & θ' d'autres π & π' , dont l'une soit égale à la correspondante, & l'autre ne surpasse point la sienne. Cela posé, puisque j'ai ici en vue la représentation renversée, on pourra procurer à la lunette un champ apparent

rent donné, savoir qu'il soit $\phi = \frac{\pi + \pi'}{m + 1}$: d'où l'on voit que le demi-diamètre du champ apparent ne sauroit jamais surpasser cette quantité $\frac{\theta + \theta'}{m + 1}$; mais on le peut faire aussi petit qu'on voudra.

XII. Or, ayant fixé les valeurs de π & π' , & déterminé la distance de foyer p du verre objectif avec le nombre B , on aura pour la construction de la lunette les formules suivantes

$$b = \frac{(B + 1)\phi}{B\pi - (B + 1)\phi} p ; \quad \epsilon = Bb ; \quad q = \frac{Bb}{B + 1}$$

$$c = r = \frac{B\phi}{\pi' + \pi - \phi} p = - \frac{Bp}{m},$$

d'où l'on tire les distances des verres

$$AB = a + b = \frac{B\pi}{B\pi - (B + 1)\phi} p$$

$$BC = \epsilon + c = \frac{B(B + 1)\phi}{B\pi - (B + 1)\phi} p - \frac{B}{m}.$$

Or pour la distance de l'œil $CO = k$, on aura

$$k = - \frac{\pi' c c}{B\phi p} = - \frac{\pi' B p}{\phi m m} = + \frac{\pi'}{\phi} \cdot \frac{r}{m}$$

laquelle avec les deux précédentes doit être positive.

XIII. Il faut donc commencer par remplir ces trois conditions :

I. $\frac{B\pi}{B\pi - (B + 1)\phi} p > 0$

II. $\frac{B\phi [(B + 1)\pi' + \pi]}{[B\pi - (B + 1)\phi] (\pi' + \pi - \phi)} p > 0$

& III. $- \frac{B\phi}{\pi'} p > 0.$

Or la seconde divisée par la première doit aussi être positive, donc

$$\frac{\Phi [(B + 1) \pi' + \pi]}{\pi (\pi' + \pi - \Phi)} = \frac{(B + 1) \pi' + \pi}{m \pi} > 0$$

dont on peut se servir au lieu de la seconde. Si l'on veut éviter la confusion, qui résulte de la diverse réfrangibilité des rayons, on n'a qu'à satisfaire à cette équation :

$$\frac{(B + 1) \pi}{B \pi - (B + 1) \Phi} + \frac{\pi'}{m \Phi} = 0,$$

mais il suffit que cette quantité soit fort petite.

XIV. Or le principal objet, auquel nous devons fixer notre attention, c'est la confusion causée par l'ouverture des verres, laquelle posant pour abrégé :

$$\mu = 0,93819 \quad \& \quad \nu = 0,23269$$

s'est trouvée exprimée en sorte :

$$\frac{\mu m x^3}{4 p^3} \left(\lambda + \frac{\pi (B + 1)^2 \Phi [\lambda' (B + 1)^2 + \nu B]}{B^3 [B \pi - (B + 1) \Phi]} - \frac{\lambda''}{B^3 m} \right)$$

dont la valeur, afin que la confusion soit insensible, doit être moindre

que $\frac{\mu}{4 \cdot 30^3}$. Ici il est clair combien la figure des verres, ou les nombres $\lambda, \lambda', \lambda''$ influent sur la confusion de la lunette; & on comprend qu'on ne sauroit parvenir à un plus haut degré de perfection, qu'en déterminant les élémens de cette expression en sorte qu'elle évanouisse tout à fait. Voyons donc s'il est possible d'arriver à ce but.

XV. Pour obtenir un grand champ apparent, il faut donner aux lettres π & π' des valeurs positives, & aussi grandes qu'il est possible; partant les quantités π, π', Φ & m étant positives, il faut en vertu de la troisième condition que $-B p$ soit une quantité positive. Donc, ou le nombre B , ou la distance de foyer p du verre objectif



jectif doit être négative. Cependant, quand même la distance de l'œil $CO = k$ deviendrait négative, la lunette ne seroit pas tout à fait à rejeter, mais on auroit un cas semblable aux lunettes à deux verres, dont l'oculaire est concave; où il faudroit appliquer l'œil immédiatement au verre oculaire RR. Mais dans ce cas on ne jouira point du champ apparent, que la valeur de Φ indique; mais il dépendra de l'ouverture de la pupille, dont si nous posons le demi-diamètre $= \omega$, le demi-diamètre du champ apparent sera $= \frac{\omega(\pi' + \pi - \Phi)}{B\pi'p}$, qui à cause de $\pi' + \pi - \Phi = m\Phi$ est $= \frac{m\Phi}{B\pi'} \cdot \frac{\omega}{p}$. Comme ce cas est tout particulier, je le développerai ensuite séparément.

XVI. Mais, en supposant la distance $CO = k$ positive, nous avons deux cas à considérer, selon que le nombre B est négatif, ou la distance de foyer p. J'ai déjà remarqué (10.) que le nombre B ne sauroit évanouir, ou être pris extrêmement petit: donc, soit que ce nombre soit positif ou négatif, il faut exclure le cas, où il seroit trop petit. Mais je ne suivrai pas cette distinction tirée de la nature du nombre B, il conviendra plutôt de diriger nos recherches suivant la grandeur du champ apparent, pour lequel ayant $\Phi = \frac{\pi + \pi'}{m + 1}$, je donnerai successivement à π des valeurs croissantes depuis 0 jusqu'à la plus grande $\pi = \theta$, & ensuite on pourra faire de semblables hypothèses pour π' , où il faut remarquer, que, si $\pi < \theta$ on aura $\pi' = \theta'$, & réciproquement, si $\pi' < \theta'$, il faut qu'il soit $\pi = \theta$.

PREMIERE HYPOTHESE

où $\pi = 0$ & $\pi' = \theta'$.

Dans ce cas le demi-diamètre du champ apparent sera $\Phi = \frac{\theta'}{m + 1}$, & partant le même que si la lunette étoit composée de deux verres.



Aussi l'intervalle entre le premier & le second verre AB évanouit-il, de sorte que ces deux verres ensemble ne constituent que quasi un seul : ces lunettes auront aussi les mêmes propriétés que celles de deux verres, avec cette différence pourtant, que la confusion peut être rendue beaucoup plus petite, & même évanouissante. Puisque donc $\pi = 0$ & $\frac{\pi'}{\Phi} = m + 1$, nous aurons les déterminations suivantes

$$b = -p ; \quad \epsilon = -Bp ; \quad q = -\frac{Bp}{B+1}$$

$$e = r = -\frac{Bp}{m} \quad \& \quad k = \frac{m+1}{m}r, \quad \text{ensuite}$$

$$AB = 0 ; \quad BC = -Bp - \frac{Bp}{m} = -\frac{(m+1)B}{m}p.$$

Il faut donc que Bp soit une quantité négative, & les autres conditions

$$\text{font} \quad \theta > \frac{B+1}{B} \cdot \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{p}.$$

Pour la confusion elle sera exprimée en sorte :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{(B+1)[\lambda'(B+1)^2 + \nu B]}{B^3} - \frac{\lambda''}{B^3 m} \right),$$

& dans ce cas il est impossible de satisfaire à la condition qui anéantit la confusion causée par la diverse réfrangibilité des rayons. Nous avons ici deux cas à distinguer, l'un où le nombre B est négatif, & la distance de foyer p positive; & l'autre, où le nombre B est positif, & la distance de foyer p négative.

Premier cas, p positif & B négatif.

Pour le premier soit $B = -\frac{1}{n}$, pour avoir :

$$b = -p ; \quad \epsilon = \frac{p}{n} ; \quad q = \frac{p}{n-1} ; \quad r = \frac{p}{mn} ; \quad k = \frac{m+1}{m}r ;$$

$$AB = 0 ; \quad BC = \frac{(m+1)p}{mn} ; \quad \theta > (n-1)\frac{x}{p} ; \quad \theta' > n \cdot \frac{x}{p}, \quad \&$$



& la confusion sera :

$$\frac{\mu m x^3}{4 p^3} \left(\lambda + \lambda' (n-1)^3 - v n (n-1) + \frac{\lambda'' n^3}{m} \right),$$

où il faut voir, quelle valeur on doit donner au nombre n , afin que que cette quantité évanouisse, ou en cas que cela ne soit pas possible, qu'elle devienne la plus petite.

Ici on voit d'abord, que, si l'on posoit $n = 0$, il seroit aisé de faire évanouir la confusion; car, puisqu'elle seroit $= \frac{\mu m x^3}{4 p^3} (\lambda - \lambda')$, on n'auroit qu'à prendre $\lambda = 1$ & $\lambda' = 1$, ou en général $\lambda' = \lambda$. Mais dans ce cas la longueur de la lunette deviendroit infinie, de même que la distance de foyer du verre oculaire RR; ce qui rend ce cas inutile dans la pratique. Il faut donc supposer n plus grand que zero, d'où nous tirons les espèces suivantes.

$$I \text{ Espèce posant } n = \frac{1}{4}.$$

$$\text{La confusion étant } = \frac{\mu m x^3}{4 p^2} \left(\lambda - \frac{27}{64} \lambda' + \frac{3}{16} v + \frac{\lambda''}{64 m} \right),$$

$$\text{évanouira en prenant } \lambda' = \frac{64 \lambda + 12 v + \frac{\lambda''}{m}}{27},$$

où il est évident qu'on doit prendre $\lambda = 1$, & $\lambda'' = 1$, afin que la valeur de λ' surpasse aussi peu l'unité qu'il est possible. On aura donc, à cause de $v = 0,23269$

$$\lambda' = \frac{64}{27} + 0,10342 + \frac{1}{27 m} = 2,47379 + \frac{1}{27 m}$$

$$\& \quad V(\lambda' - 1) = 1,21399 + \frac{0,01525}{m},$$

où l'on peut aisément négliger le dernier terme, à moins que la multiplication m ne soit fort petite. Puisque $x = m y$ est le demi-dia-



mettre de l'ouverture des deux premiers verres PP & QQ, il faut donner à p une si grande valeur, que x ne surpasse point le tiers ou le quart du rayon de la face la plus courbe, qui se trouve dans ces deux verres. Par cette condition ayant fixé la distance de foyer p du verre objectif, les autres déterminations seront :

$$B = -4; b = -p; c = 4p; q = -\frac{4}{3}p; r = \frac{4p}{m}; k = \frac{m+1}{m}r$$

$$AB = 0; BC = \frac{4(m+1)p}{m}; \theta > \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{p}; \theta'' > \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{p},$$

& les verres doivent être formés en sorte :

Puisque $\lambda = 1$, on aura pour le premier verre PP le rayon

$$\text{de la face} \begin{cases} \text{de devant} = \frac{p}{1,62740} = 0,61448p \\ \text{de derrière} = \frac{p}{0,19078} = 5,24164p. \end{cases}$$

Or pour le verre QQ à cause de $B+1 = -3$ & $(1+B)q = 4p$, on aura le rayon de la face de devant :

$$\frac{4p}{0,86428 \pm \left(3,29648 + \frac{0,04141}{m}\right)} = \frac{-p}{0,60805 + \frac{0,01035}{m}}$$

& celui de la face de derrière

$$\frac{4p}{-6,31882 \mp \left(3,29648 + \frac{0,04141}{m}\right)} = \frac{-p}{0,75549 - \frac{0,01035}{m}}$$

$$\text{Ou le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = -\left(1,64460 - \frac{0,02798}{m}\right)p \\ \text{de derrière} = -\left(1,32364 + \frac{0,01813}{m}\right)p. \end{cases}$$

En-



Enfin pour le verre oculaire RR, dont la distance de foyer est $r = \frac{4p}{m}$,
à cause de $\lambda'' = 1$,

le rayon de sa face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = 5,24164 r \\ \text{de derrière} = 0,61448 r. \end{array} \right.$

Donc, puisque $x = my$, en égalant x à la quatrième partie du rayon de la face la plus courbe, nous aurons à peu près $0,153p = x$, & partant $p = 7x$. Voilà donc la description des Lunettes de cette espèce.

La multiplication m avec le degré de clarté y donne d'abord le demi-diamètre de l'ouverture de l'objectif $x = my$, & prenant la distance de foyer de l'objectif $p = 7x$, ou peut être suffit-il de prendre $p = 6x$, ce verre PP doit être travaillé en forte.

Le rayon de sa face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = 0,61448p \text{ convexe} \\ \text{de derrière} = 5,24164p \text{ convexe.} \end{array} \right.$

Immédiatement à ce verre on joindra le second QQ, qui doit être concave des deux côtés; dont la forme sera telle, en négligeant les particules divisées par m comme extrêmement petites :

Le rayon de sa face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = -1,64460p \text{ concave} \\ \text{de derrière} = -1,32364p \text{ concave} \end{array} \right.$

& ce verre aura avec le premier PP la même ouverture, dont le demi-diamètre $= x$. Où il faut remarquer, puisque $\theta q = x$, & partant $\theta = \frac{x}{q} = \frac{3x}{4p}$; la condition $\theta > \frac{3}{4} \frac{x}{p}$, sera remplie en donnant au verre QQ une ouverture tant soit peu plus grande que celle du verre PP.

A la distance $BC = \frac{4(m+1)p}{m}$ derrière le verre QQ on

mettra le verre oculaire RR, dont la distance de foyer soit $r = \frac{4p}{m}$:

or



or pour la figure de ce verre je remarque, que puisque la particule $\frac{\lambda''}{m}$, qui en dépend, n'est d'aucune conséquence, de sorte que nos formules demeureroient les mêmes, quoique λ'' fût plus grand que l'unité, on veut bien faire ce verre également convexe; & partant le rayon de l'une & de l'autre face sera $= \frac{11}{10}r$. Et alors pour son ouverture, dont le demi-diametre est $= \theta' r$, on peut hardiment prendre $\theta' = \frac{1}{4}$, ou même $\theta' = \frac{1}{3}$, & de là le demi-diametre du champ apparent sera $\phi = \frac{\theta'}{m+1} = \frac{1}{3(m+1)} = \frac{1416}{m+1}$ minutes. Enfin, pour le lieu de l'œil on aura $CO = k = \frac{m+1}{m}r$.

Remarque 1. Si l'on prend $y = \frac{3}{200}$, & partant $x = \frac{3m}{200}$ pouces, & ensuite $p = 7x = \frac{21m}{200}$ pouces, la longueur de cette Lunette sera $AC = \frac{21}{50}(m+1)$ pouces. Donc une Lunette de cette espece, qui grossit les objets en diametre 100 fois, aura $\frac{101}{50} \cdot 21$, ou 42 pouces de longueur.

Remarque 2. Ce que je viens de dire sur la longueur de ces Lunettes n'a lieu, que lorsque les faces de tous les verres sont exactement travaillées selon les mesures prescrites, de sorte que la confusion évanouisse tout à fait. Or, puisqu'on ne sauroit espérer un tel degré de précision dans la pratique, il est de la dernière importance d'examiner combien de petites aberrations des mesures prescrites troublent l'effet de ces lunettes. Ayant négligé dans les faces du verre



QQ, les particules $\frac{0,02799}{m}$ & $\frac{0,01813}{m}$, si nous supposons que les autres verres soient exactement formés selon les mesures prescrites, ces erreurs seront d'autant plus petites, plus la multiplication m est grande, de sorte que si $m = 50$, cette erreur ne vaut que la partie $\frac{1}{3000}$ du rayon entier de ces faces, qui est certainement insensible dans la pratique. Or, puisque ces petites particules tirent leur origine du terme $\frac{\lambda''}{64m}$, qui se trouve dans l'expression de la confusion, en les négligeant ce terme ne sera plus détruit, & la confusion sera encore $= \frac{\mu m x^3}{4p^3} \cdot \frac{\lambda''}{64m} = \frac{\mu}{4} \cdot \frac{\lambda'' x^3}{64p^3}$, il faut qu'il soit $\frac{x}{4p} \sqrt[3]{\lambda''} = \frac{1}{30}$, ou $p = 7\frac{1}{2} x \sqrt[3]{\lambda''}$. Donc, si $\lambda = 1$, pourvû qu'on prenne $p = 7\frac{1}{2} x$, une erreur de $\frac{1}{3000}$ dans les rayons des faces du verre QQ ne produira pas encore un effet sensible, au cas de $m = 50$. Mais, si l'erreur étoit étoit 8 fois plus grande, laquelle repondroit à $\lambda'' = 8$, il faudroit prendre $p = 15 x$ pour en rendre l'effet insensible; & si l'erreur montoit à $\frac{1}{100}$ dans le cas de $m = 50$, il faudroit prendre p trois fois, ou $\sqrt[3]{30}$ fois plus grande, c'est à dire $p = 23 x$. D'où l'on voit que, pour prévenir l'effet des petites aberrations, qui sont inévitables dans la pratique, il faut prendre le rapport de p à x beaucoup plus grand, que le donne le calcul pris à la rigueur. Ainsi, au lieu de prendre $p = 7 x$, on ne fera pas mal de prendre $p = 25 x$ ou $0 = 30 x$, & cela d'autant plus, plus la multiplication sera grande. Or il faut remarquer que cette augmentation fait la racine cubique de la multiplication m .

Remarque 3. Donc pour une multiplication quelconque m , en supposant une erreur de $\frac{1}{100}$ dans les rayons des faces, il faudra prendre $p = 23x\sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 6\frac{1}{3}x\sqrt[3]{m}$, & la longueur de la Lunette fera $= \frac{25\frac{1}{2}(m+1)x}{m}\sqrt[3]{m}$. Or si l'on construisoit une lunette ordinaire de deux verres pour la même multiplication, on auroit la confusion $= \frac{\mu mx^3}{4p^3} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{\mu}{4 \cdot 30^3}$, donc $p = 30x\sqrt[3]{(m+1)}$, & la longueur de la lunette $= \frac{30(m+1)x}{m}\sqrt[3]{(m+1)}$; qui n'étant que fort peu plus longue, que celle de trois verres, il n'y a presque rien à gagner par cette espèce; & on perdroit encore considérablement, si la pratique étoit assujettie à de plus grandes erreurs.

II Espèce posant $n = \frac{1}{2}$.

La confusion étant $= \frac{\mu mx^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{1}{8}\lambda' + \frac{1}{4}v + \frac{\lambda''}{8m}\right)$ se réduit le plus aisément à rien en supposant $\lambda = 1$, & alors il faut poser

$$\lambda' = 8 + 2v + \frac{\lambda''}{m} = 8,46538 + \frac{\lambda''}{m},$$

d'où l'on tire :

$$V(\lambda' - 1) = 2,73228 + \frac{0,18301\lambda''}{m},$$

& les autres déterminations seront :

$$B = -2; b = -p; C = 2p; q = -2p; r = \frac{2p}{m}; k = \frac{m+1}{m}r$$

$$AB = 0; BC = \frac{2(m+1)p}{m}; \theta > \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{p}; \theta' > \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{p}.$$

Or



Or les verres doivent être formés en forte :

Puisque $\lambda = 1$, on aura pour le premier verre PP

le rayon de sa face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,61448 p \\ \text{de derrière} = 5,24164 p. \end{cases}$

Pour le verre QQ, à cause de $B = -2$, & $(1+B)q = 2p$, on aura le rayon de sa face de devant

$$\frac{-2p}{1,22723 + 0,16563 \cdot \frac{\lambda''}{m}} = -p \left(1,62970 - 0,21994 \frac{\lambda''}{m} \right)$$

& de derrière

$$\frac{-2p}{0,59095 - 0,16563 \cdot \frac{\lambda''}{m}} = -p \left(3,38438 + 0,94860 \frac{\lambda''}{m} \right)$$

Si l'on négligeoit les termes divisés par m , & qu'on mit $\lambda'' = 1$, & $m = 50$, l'erreur seroit dans la face de devant $\frac{1}{370}$, & dans celle

de derrière $\frac{1}{179}$; prenant donc un milieu, une erreur de $\frac{1}{270}$ dans

les faces de ce verre produiroit une confusion $= \frac{\mu}{4} \cdot \frac{x^3}{8p^3}$, & par-

tant il faudroit prendre $p = 15x$; mais, si l'erreur étoit $\frac{1}{100}$, il fau-

droit prendre $p = 19x$, & pour une autre multiplication quelcon-

que $p = 19x \sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 5 \frac{1}{4} x \sqrt[3]{m}$: d'où la longueur de la Lunette

seroit $10 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) x \sqrt[3]{m}$; qui nonobstant cette erreur de $\frac{1}{100}$

est presque trois fois plus petite, que si l'on vouloit se servir d'une lunette de deux verres.



Mais supposant qu'on exécutât les verres exactement suivant les règles données, si nous égalons x à la quatrième partie du rayon de la face la plus courbe, nous aurons comme auparavant $p = 7x$. Voici donc la règle pour la construction des lunettes de cette espèce.

La multiplication m étant proposée avec le degré de clarté y , on aura d'abord le demi-diamètre de l'ouverture de l'objectif $x = my$, d'où l'on prendra $p = 7x$, ou plus grand selon les erreurs inévitables de la pratique. Savoir si l'on doit craindre une erreur de $\frac{1}{100}$, il faut prendre $p = 5\frac{1}{4}x\sqrt[3]{m}$, & si l'erreur à craindre montoit à $\frac{1}{50}$, on devroit prendre $p = 6\frac{1}{4}x\sqrt[3]{m}$, si elle montoit à $\frac{1}{25}$, $p = 8\frac{1}{4}x\sqrt[3]{m}$.

Ayant ainsi établi la valeur de p , on aura

Pour le verre PP convexe des deux côtés

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = 0,61448 p \\ \text{de derrière} = 5,24164 p. \end{cases}$$

Pour le verre QQ concave des deux côtés

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = - \left(1,62970 - 0,21994 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right) p \\ \text{de derrière} = - \left(3,38438 + 0,94860 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right) p. \end{cases}$$

Le nombre λ'' dépend de la figure du verre oculaire RR, lequel étant fait également convexe des deux côtés, on a $\lambda'' = 1,6298$, & la distance de foyer du verre RR étant $r = \frac{2p}{m}$, le rayon de cha-

que face doit être pris $= \frac{11}{10} r$.



Ensuite on joindra les deux verres PP & QQ immédiatement ensemble, & on établira le verre oculaire RR à la distance $BC = 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) p$: derrière lequel l'œil se trouvera à la distance $CO = k = \left(1 + \frac{1}{m}\right) r$. Enfin prenant $\theta' = \frac{1}{3}$ le demi-diamètre du champ apparent sera $\phi = \frac{1}{3(m+1)} = \frac{1146}{m+1}$ minutes.

Remarque. Cette espèce est donc préférable à la précédente, puisque les mêmes erreurs, qui sont à craindre dans la pratique, n'allongent pas tant la lunette. Et quand même l'erreur monteroit à $\frac{1}{25}$, la longueur de la lunette seroit encore deux fois plus petite, que si l'on employoit une lunette de deux verres.

III Espèce posant $n = \frac{2}{3}$.

La confusion étant $= \frac{\mu m \lambda^3}{4 p^3} \left(\lambda - \frac{1}{27} \lambda' + \frac{2}{9} v + \frac{8 \lambda''}{27 m} \right)$, se réduit le plus commodément à rien en prenant $\lambda = 1$, pour avoir $\lambda' = 27 + 6v + \frac{8 \lambda''}{m} = 28,39614 + \frac{8 \lambda''}{m}$, d'où l'on tire :

$$\sqrt{(\lambda' - 1)} = 5,23413 + 0,76422 \cdot \frac{\lambda''}{m},$$

& les autres déterminations seront :

$$B = -\frac{3}{2}; b = -p; c = \frac{3}{2}p; q = -3p; r = \frac{3p}{2m}; k = \frac{m+1}{m}r;$$

$$AB = 0; BC = \frac{3(m+1)}{2m}p; \theta > \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{p}; \theta' > \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{p}.$$



Pour la formation du verre QQ à cause de $B + 1 = -\frac{1}{2}$, &

$(1 + B) q = \frac{3}{2} p$, on aura le rayon de la face de devant :

$$\frac{-1,5p}{0,52756 + 0,34585 \cdot \frac{\lambda''}{m}} = -p \left(2,84328 - 1,86399 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right)$$

& celui de la face de derrière :

$$\frac{+1,5p}{0,11846 + 0,34585 \cdot \frac{\lambda''}{m}} = +p \left(12,66143 - 36,96332 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right).$$

Si l'on négligeoit les termes divisés par m , & qu'il fût $m = 50$, en posant $\lambda'' = 1$, l'erreur seroit dans la face de devant $\frac{1}{76}$, & dans

celle de derrière $\frac{1}{17}$ du rayon entier: prenant donc un milieu $\frac{1}{50}$,

à cause de cette erreur il faudroit prendre $p = 20x$. . Donc, si l'er-

reur n'étoit qu' $\frac{1}{100}$, il faudroit prendre $p = 16x$, & pour toute au-

tre multiplication m , & la même erreur $\frac{1}{100}$, $p = 16x \sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 4\frac{1}{2}x \sqrt[3]{m}$,

d'où la longueur de la lunette étant $= 6\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) x \sqrt[3]{m}$ sera en-

core environ 4 fois plus petite, que d'une lunette à deux verres, non-
obstant une erreur commise de $\frac{1}{100}$: & quand même l'erreur mon-

teroit à $\frac{1}{12}$, la lunette seroit encore deux fois plus courte.

Mais supposant qu'on réussisse parfaitement dans la figure prescrite des verres, on pourroit prendre $p = 7x$, & l'on obtiendrait des lunettes encore beaucoup plus courtes.



La multiplication m étant donc proposée avec le degré de clarté y , on aura d'abord le demi-diamètre de l'ouverture du verre objectif $x = my$, qui doit aussi convenir au verre QQ ; & alors on prendra $p = 7x$, ou plus grand, selon que la pratique s'écarte de la Théorie, savoir $p = 4\frac{1}{2}x\sqrt[3]{m}$, si l'erreur étoit $\frac{1}{100}$, & $p = 5\frac{1}{2}x\sqrt[3]{m}$, si l'erreur montoit à $\frac{1}{50}$; & $p = 6\frac{3}{4}x\sqrt[3]{m}$, si l'erreur montoit à $\frac{1}{25}$.

Ayant ainsi établi la quantité p , on aura

Pour le verre PP convexe de deux côtés

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,61448 p \\ \text{de derrière} = 5,24164 p. \end{cases}$

Pour le verre QQ , qui est ménisque tournant sa face concave en avant :

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = - \left(2,84328 - 1,86399 \frac{\lambda''}{m} \right) p \\ \text{de derrière} = + \left(12,66143 - 36,96332 \frac{\lambda''}{m} \right) p, \end{cases}$

où $\lambda'' = 1,6298$, si l'on fait le verre oculaire RR également convexe des deux côtés, pour qu'il admette la plus grande ouverture, & qu'on puisse prendre $\theta' = \frac{1}{3}$, d'où résulte le demi-diamètre du champ

apparent $\phi = \frac{1146}{m+1}$ minutes. Or la distance de foyer du verre

oculaire étant $r = \frac{3p}{2m}$, le rayon de chaque face doit être $= \frac{11}{10} r$,

& l'œil placé à la distance $CO = k = \left(1 + \frac{1}{m} \right) r$. Enfin les deux verres PP & QQ étant joints immédiatement ensemble, la distance du

du verre oculaire fera $BC = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) p$, qui est aussi la longueur de la lunette.

Remarque. Ces lunettes sont encore préférables aux précédentes, puisqu'elles deviennent plus courtes, quoiqu'on commette les mêmes erreurs dans la construction des verres.

IV *Especce posant* $n = 1$.

Puisque la distance de foyer du second verre QQ devient infinie, ce verre ne changera rien dans la réfraction, & cette especce revient au cas des lunettes à deux verres; la distance de foyer de l'objectif étant $= p$, & celle de l'oculaire $r = \left(1 + \frac{1}{m} \right) p$. La multiplication m avec le degré de clarté y donne d'abord le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif $x = my$, & la confusion étant $= \frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda''}{m} \right)$ ne peut être réduite à zero. On prendra donc

$\lambda = 1$, & posant la confusion égale à $\frac{\mu}{4.30^3}$, on aura $p = 30x\sqrt{m + \lambda''}$ où la figure de l'objectif sera la même que dans les especes précédentes; & faisant l'oculaire également convexe des deux cotés, on posera $\lambda'' = 1,6298$. Le champ apparent sera aussi le même que jusq'ici.

V *Especce posant* $n = 1 + t$.

On aura la confusion $= \frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \lambda' t^3 - v(t + tt) + \frac{\lambda''(1+t)^3}{m} \right)$ laquelle ne pouvant être réduite à zero, il conviendra de chercher une telle valeur de t afin qu'elle devienne la plus petite. Pour cet effet il faut d'abord prendre $\lambda = 1$ & $\lambda' = 1$, & on peut négliger dans cette recherche le dernier terme $\frac{\lambda''(1+t)^3}{m}$, puisqu'il est fort



fort petit à l'égard des autres, surtout dans les grandes multiplications. Il s'agit donc de rendre $1 + t^3 - vt - vtt$ un *minimum*, d'où l'on trouve $3tt - v - 2vt = 0$ & $t = \frac{v \pm \sqrt{(vv + 3v)}}{3} = \frac{11}{30}$.

Alors la confusion sera $= \frac{\mu m x^8}{4p^3} \left(0,93268 + \frac{\lambda''(1+t)^3}{m} \right)$.

Mais pour trouver le cas le plus avantageux, il faut plutôt chercher celui, où la longueur de route la lunette devient la plus petite.

Pofant donc en général la confusion $= \frac{\mu}{4 \cdot 30^3}$ pour avoir

$$p = 30x \sqrt[3]{m} \left(\lambda + \lambda' (n-1)^3 - vn(n-1) + \frac{\lambda'' n^3}{m} \right),$$

& nous obtiendrons la longueur de la lunette

$$BC = \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}} \sqrt[3]{ \left(\frac{\lambda}{n^3} + \frac{\lambda'(n-1)^3}{n^3} - \frac{v(n-1)}{nn} + \frac{\lambda''}{m} \right)},$$

qui deviendra un *minimum* en prenant $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$ & $n = 2$,

$$\text{d'où elle résulte } BC = \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}} \sqrt[3]{ \left(\frac{1}{4} - \frac{v}{4} + \frac{\lambda''}{m} \right)},$$

$$\text{ou } BC = \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}} \sqrt[3]{ \left(0,19183 + \frac{\lambda''}{m} \right)}.$$

Or dans le cas de deux verres, ou de $n = 1$, cette longueur seroit $= \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}} \sqrt[3]{ \left(1 + \frac{\lambda''}{m} \right)}$, & partant environ $\sqrt[3]{5}$, ou $1\frac{3}{4}$ fois plus longue.

Pofons donc $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$, & $n = 2$, pour avoir

$$B = -\frac{1}{2}; b = -p; c = \frac{1}{2}p; q = p; r = \frac{p}{2m}; k = \left(1 + \frac{1}{m} \right) r.$$

$$AB = 0; BC = \frac{m+1}{2m} p; \theta > \frac{x}{p}; \& \theta'' > 2 \cdot \frac{x}{p},$$



& après avoir déterminé par la multiplication m , & le degré de clarté y , le demi-diamètre de l'ouverture de l'objectif $x = my$, on

prendra $p = 30x \sqrt[3]{(1,53462m + 8\lambda'')} = q,$

ou $p = q = 60x \sqrt[3]{(0,19183m + \lambda'')},$

& la figure du premier verre PP sera

rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,61448p \\ \text{de derrière} = 5,24164p. \end{cases}$

& pour le verre QQ le rayon de sa face

de devant $= \frac{q}{3,06402} = 0,32637p$

de derrière $= \frac{q}{1,24584} = 0,80267p.$

Or pour le verre oculaire RR, si l'on le fait également convexe des deux côtés pour qu'il admette la plus grande ouverture, le rayon de chaque face doit être $= \frac{11}{10}r$, prenant $r = \frac{p}{2m}$, & alors on auroit $\lambda'' = 1,6298$, mais si l'on vouloit mettre $\lambda'' = 1$, on devroit prendre

le rayon de sa face $\begin{cases} \text{de devant} = 5,24164r \\ \text{de derrière} = 0,61448r. \end{cases}$

Or alors on pourroit à peine prendre $\theta' = \frac{1}{6}$, de sorte que le demi-

diamètre du champ apparent seroit $\phi = \frac{1}{5(m+1)} = \frac{687}{m+1}$ minutes. Enfin la distance BC, ou la longueur de la Lunette, sera $= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)p$, & pour le lieu de l'œil $CO = k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)r.$



Remarque. Cette espèce ne cede presque en rien aux précédentes; car, quoique la longueur de la lunette soit plus grande, les erreurs dans la figure des verres n'empêchent presque point le succès, puisque la nature du *minimum*, d'où ces déterminations sont tirées admet une aberration assez sensible, avant que l'effet devienne considérable. Mais, si les ouvriers parvenoient à exécuter précisément le plan prescrit, il n'y a aucun doute que les espèces n°. 2 & 3 ne soient fort préférables, puisqu'elles donneroient des Lunettes beaucoup plus courtes.

Second cas, p positif & B négatif.

Pour ce cas nous n'avons qu'à donner au nombre n du cas précédent des valeurs négatives, & à prendre p négatif.

Mettant donc $B = \frac{1}{n}$, & écrivant $-p$, au lieu de p , on aura les déterminations suivantes.

$$q = \frac{p}{n+1}; \quad r = \frac{p}{mn}; \quad k = \frac{m+1}{m} r$$

$$AB = 0; \quad BC = \frac{(m+1)p}{mn}; \quad \theta > (n+1) \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > n \cdot \frac{x}{p},$$

De sorte que $-p$ marque la distance de foyer du premier verre PP & la confusion sera exprimée en sorte :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - (n+1)^3 \lambda' - \nu n (n+1) - \frac{\lambda'' n^3}{m} \right),$$

qui peut bien être réduite à zero, en prenant $\lambda > 1$, & laissant $\lambda' = 1$, il faudra prendre alors :

$$\lambda = (n+1)^3 + \nu n (n+1) + \frac{\lambda'' n^3}{m}.$$

Or il est d'abord évident qu'on ne sauroit prendre $n = 0$, puisque alors la distance BC deviendroit infinie, & il ne convient pas non plus de donner à n une valeur beaucoup plus grande que l'unité, puis-



que la valeur de λ deviendroit trop grande, & la figure du premier verre PP incommode. J'examinerai donc les principales especes contenues dans ce cas.

VI Espece posant $n = \frac{1}{4}$.

Pour cette espece nous avons :

$$B = 4 ; q = \frac{4}{5} p ; r = \frac{4p}{m} ; k = \frac{m+1}{m} r ;$$

$$AB = 0 ; BC = \frac{4(m+1)}{m} p ; \theta > \frac{4}{5} \cdot \frac{x}{p} ; \theta' > \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{p},$$

& pour faire évanouïr la confusion en posant $\lambda' = 1$,

$$\lambda = \frac{125}{64} + \frac{5}{16} v + \frac{\lambda''}{64m} = 2,02584 + \frac{\lambda''}{64m},$$

d'où nous aurons :

$$V(\lambda - 1) = 1,01284 + 0,00771 \cdot \frac{\lambda''}{m}$$

& partant pour le verre PP le rayon de sa face de devant

$$\frac{-p}{1,62740 \pm \left(0,91675 + 0,00698 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = -p \left(1,40696 + 0,01382 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)$$

& celui de sa face de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 \mp \left(0,91675 + 0,00698 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = -p \left(0,90291 - 0,00569 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)$$

Or pour le verre QQ on aura

$$\text{le rayon de la face } \begin{cases} \text{de devant} = 1,67328 p \\ \text{de derrière} = 0,59698 p. \end{cases}$$

Ici il faut observer, que si l'on négligeoit dans les rayons des faces du verre PP les parties divisées par m , ou en posant $\lambda'' = 1$ & $m = 50$,
si



si l'on y commettoit une erreur de $\frac{1}{5923}$ il faudroit prendre $p = 7\frac{1}{2}x$,

& partant une erreur de $\frac{1}{100}$ obligeroit à prendre $p = 29x$, & pour

une autre multiplication quelconque $p = 29x\sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 8x\sqrt[3]{m}$, &

la longueur de la lunette seroit $= 32\left(1 + \frac{1}{m}\right)x\sqrt[3]{m}$; de sorte qu'une si petite erreur allongeroit la lunette plus, que si elle étoit composée de deux verres.

Mais, si l'on pouvoit exactement observer les mesures prescrites, il suffiroit de prendre $p = 7x$, ayant $x = my$, & la construction de la lunette doit être conduite par ces règles, ayant donné à p sa juste valeur.

Le premier verre PP doit être concave des deux côtés en forte

$$\text{la rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} = - \left(1,40696 + 0,01382 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right) p \\ \text{de derrière} = - \left(0,90291 - 0,00569 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right) p. \end{cases}$$

Le second verre QQ doit être convexe des deux cotés

$$\text{le rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} = 1,67328 p \\ \text{de derrière} = 0,59698 p. \end{cases}$$

Ces deux verres doivent être joints immédiatement ensemble & derrière à la distance $= 4\left(1 + \frac{1}{m}\right)p$, placé le verre oculaire RR, dont

la distance de foyer soit $= r = \frac{4p}{m}$. Si l'on fait également convexes ces deux côtés on aura $\lambda'' = 1,6298$, & le rayon de chaque face



doit être pris $= \frac{11}{10} r$, d'où l'on obtiendra un champ apparent, dont

le demi-diamètre $\phi = \frac{1146}{m+1}$ minutes, prenant $\theta' = \frac{1}{3}$.

VII *Especce, posant* $\alpha = \frac{1}{2}$.

Pour cette especce nous aurons :

$$B = 2 ; q = \frac{2}{3} p ; r = \frac{2p}{m} ; k = \frac{m+1}{m} p ;$$

$$AB = 0 ; BC = \frac{2(m+1)}{m} ; \theta > \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{p} ; \& \theta' > \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{p},$$

& afin que la confusion évanouisse tout à fait en posant $\lambda' = 1$,

$$\lambda = \frac{27}{8} + \frac{3}{4} v + \frac{\lambda''}{8m} = 3,54952 + \frac{\lambda''}{8m},$$

d'où l'on tire

$$V(\lambda - 1) = 1,59672 + 0,03914 \cdot \frac{\lambda''}{m}.$$

Donc pour le verre PP il faut faire le rayon de sa face de devant

$$\frac{-p}{1,62740 \pm \left(1,44524 + 0,03543 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{-p}{0,18216 - 0,04543 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

& de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 \mp \left(1,44524 + 0,03443 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{-p}{1,63602 + 0,03543 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

d'où l'on tire pour le verre PP cette construction :

$$\text{le rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} = - \left(5,48698 + 1,06771 \cdot \lambda''\right) p \\ \text{de derrière} = - \left(0,61124 - 0,01324 \cdot \lambda''\right) p \end{cases}$$

&



& pour le verre QQ on aura :

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,99554 p \\ \text{de derrière} = 0,58045 p. \end{cases}$

Ces deux verres étant joints ensemble on mettra derrière eux à la distance de foyer $BC = 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) p$ le verre oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{2p}{m}$; lequel étant fait également convexe des deux côtés, on aura $\lambda'' = 1,6298$.

Si l'on ne commettrait aucune erreur dans l'exécution, on pourroit prendre $p = 7x$: mais, pour juger des erreurs, supposons qu'on se trompe des parties divisées par m , de sorte que prenant un milieu, & posant $m = 50$ & $\lambda'' = 1$, l'erreur vaudroit $\frac{1}{282}$, & il faudroit prendre $p = 15x$. Donc une erreur de $\frac{1}{100}$ donneroit $p = 21x$,

& pour une multiplication quelconque $p = 21x \sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 5\frac{3}{4}x \sqrt[3]{m}$;

d'où la longueur de la lunette seroit $= 11\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right) x \sqrt[3]{m}$, &

partant presque trois fois plus petite, que des lunettes à deux verres:

& quand même l'erreur monteroit à $\frac{8}{100}$ des rayons entiers, on n'auroit qu'à prendre $p = 11\frac{1}{2}x \sqrt[3]{m}$, & la longueur de la lunette

$23 \left(1 + \frac{1}{m}\right) x \sqrt[3]{m}$ seroit encore moindre que celle de deux verres.

VIII Espece, posant $n = 1$.

On aura $B = 1$; $q = \frac{1}{2}p$; $r = \frac{p}{m}$; $k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)r$, & ensuite

$AB = 0$; $BC = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p$; $\theta > 2 \cdot \frac{x}{p}$; & $\vartheta > \frac{x}{p}$. Pour



Pour faire évanouir la confusion, prenant $\lambda' = 1$, il faut qu'il soit

$$\lambda = 8 + 2\nu + \frac{\lambda''}{m} = 8,46528 + \frac{\lambda''}{m},$$

d'où l'on tire :

$$V(\lambda - 1) = 2,73228 + 0,18301 \cdot \frac{\lambda''}{m},$$

& partant pour le verre PP le rayon de sa face de devant :

$$\frac{-p}{1,62740 + \left(2,47307 + 0,16565 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{+p}{0,84567 + 0,16565 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

& de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 + \left(2,47307 + 0,16565 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{-p}{2,66386 + 0,16565 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

Le premier verre PP fera donc ménisque, tournant sa face convexe vers l'objet

$$\text{le rayon de sa face } \begin{cases} \text{de devant} = + \left(1,18249 - 0,23162 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right) \\ \text{de derrière} = - \left(0,37540 - 0,02335 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right). \end{cases}$$

Pour le second QQ on aura $\lambda' = 1$, &

$$\text{le rayon de sa face } \begin{cases} \text{de devant} = + 0,55 p \\ \text{de derrière} = + 0,55 p. \end{cases}$$

qui est donc également convexe des deux côtés.

Ces deux verres étant joints ensemble, l'oculaire RR, dont la distance de foyer est $r = \frac{p}{m}$, doit être placé à la distance BC =

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right) p; \text{ \& ce verre étant fait également convexe des deux côtés,}$$

rés,



tés, de sorte que le rayon de chaque face $= \frac{11}{10} r$, on aura $\lambda'' = 1,6298$, d'où le demi-diametre du champ apparent sera $\phi = \frac{1146}{m+1}$ minutes, prenant $\theta' = \frac{1}{3}$.

Si l'on pouvoit exactement exécuter ces mesures, on pourroit prendre $x = 0,09p$, ou bien $p = 11x$, d'où la longueur de la lunette seroit $= 11 \left(1 + \frac{1}{m}\right)x$, & partant plus petite que dans l'espece précédente. Mais, si l'on se trompoit des termes affectés par $\frac{\lambda''}{m}$, ce qui en posant $\lambda'' = 1$ & $m = 50$ seroit une erreur de $\frac{1}{283}$ sur les rayons entiers, il faudroit prendre $p = 30x$, & partant si l'erreur ne montoit qu'à $\frac{1}{100}$, $p = 42x$, & pour une multiplication quelconque $p = 42x \sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 12x \sqrt[3]{m}$: donc la longueur de la lunette $= 12 \left(1 + \frac{1}{m}\right)x \sqrt[3]{m}$ ou $2\frac{1}{2}$ fois plus petite qu'au cas de deux verres.

Remarque. Ce sont les especes principales de la première hypothese, dont le caractere est, que les deux verres PP & QQ sont immédiatement joints ensemble, ou que la distance AB évanouit. La plûpart de ces especes ont un avantage assez considérable sur les lunettes à deux verres, entant qu'elles sont plus courtes, & ce raccourcissement pourroit aller fort loin, si l'art de polir les verres étoit porté à un plus haut degré de perfection. Cependant on ne gagne rien sur le champ apparent, qui est le même, que dans les lunettes de deux verres; mais les hypothèses suivantes fourniront un plus grand champ.



SECONDE HYPOTHESE

$$\text{où } \pi = \phi \quad \& \quad \pi' = \theta'.$$

Puisque $\pi = \phi$, on aura $\phi = \frac{\phi + \theta'}{m + 1}$, & partant $\phi = \frac{\theta'}{m}$, & le champ apparent est un peu plus grand que dans l'hypothèse précédente. Ayant donc $\pi = \phi$ & $\pi' = m\phi$, nous aurons les déterminations suivantes

$$b = - (B + 1)p ; \quad \epsilon = - B(B + 1)p ; \quad q = - Bp$$

$$c = r = - \frac{B}{m} p, \quad \& \quad k = r,$$

& partant les distances des verres

$$AB = a + b = - Bp ; \quad BC = \epsilon + c = - Bp \left(B + 1 + \frac{1}{m} \right),$$

d'où il faut encore que l'une ou l'autre des deux quantités B & p soit négative ; afin que $- Bp$ devienne une quantité positive ; & alors la distance AB fera précisément égale à la distance de foyer du second verre QQ . Outre cela il fera $r = \frac{q}{m}$, & la longueur de toute la lunette

$$AB + BC = AC = - Bp \left(B + 2 + \frac{1}{m} \right) = q \left(B + 2 + \frac{1}{m} \right).$$

Depuis, parce que $- Bp$ est une quantité positive, il faut que $B + 1 + \frac{1}{m}$ en soit aussi une : donc, si B est négatif, il faut qu'il soit plus

petit que $1 + \frac{1}{m}$. Les conditions à remplir sont $\theta > \frac{B + 1}{B} \cdot \frac{x}{p}$ &

$\theta' > \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{p}$; & la confusion devient :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{(B + 1)^2}{B^3} [\lambda' (B + 1)^2 + \nu B] - \frac{\lambda''}{B^3 m} \right)$$

Enfin

Enfin, pour que la diverse réfrangibilité des rayons ne produise aucun effet sensible, il faut satisfaire à cette équation :

$$-(B+1) + 1 = 0 \text{ c. à d. } B = 0$$

ce qui étant impossible, cet effet sera d'autant plus petit, plus on prendra petit le nombre B. Pour développer cette hypothèse, nous aurons deux cas à examiner, l'un où p est positif, & B négatif : l'autre où p est négatif, & B positif.

Premier cas, p positif & B négatif.

Posons $B = -n$, pour avoir $q = np$, $r = \frac{np}{m}$, $k = r$;

$AB = np$ & $BC = np \left(1 + \frac{1}{m} - n\right)$, & la confusion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda'(n-1)^4}{n^3} - \frac{\nu(n-1)^2}{n^2} + \frac{\lambda''}{n^3 m} \right),$$

où il faut qu'il soit $n < 1 + \frac{1}{m}$.

IX Espèce, posant $n = 1 + \frac{1}{m}$.

Ayant ici $B = -1 - \frac{1}{m}$; les déterminations de la lunette seront

$$q = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p; \quad r = \frac{q}{m}; \quad k = r; \quad AB = q = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p$$

$$\text{\& } BC = 0,$$

les deux derniers verres QQ & RR sont joints ensemble, & la longueur de la lunette est $= \left(1 + \frac{1}{m}\right)p$. Mais la confusion étant

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda'}{m(m+1)^3} - \frac{\nu}{(m+1)^2} + \frac{\lambda'' m m}{(m+1)^3} \right)$$

puisque le terme $\frac{\lambda'}{m(m+1)^3}$ est extrêmement petit, il est indifférent quelle figure qu'on donne au second verre QQ pourvû que sa distance de foyer soit $= q = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p$. On prendra donc $\lambda = 1$ & $p = 30x\sqrt[3]{(m+\lambda')}$, & la longueur de la lunette sera la même que d'une lunette à deux verres, le seul avantage consistant dans la petite augmentation du champ apparent, laquelle étant imperceptible, l'addition du troisième verre ne vaut pas la peine.

Remarque. Si l'on met $n = 1$, ou $n < 1$, on n'en retire non plus aucun avantage sensible sur les lunettes à deux verres. La plus avantageuse position seroit $n = \frac{2}{3}$, qui rendroit la confusion plus petite, mais pourtant l'avantage seroit extrêmement petit. C'est pourquoi je passe à l'autre cas contenu dans cette hypothèse.

Second cas, p négatif & B positif.

Mettons donc $-p$ & $-n$ pour $+p$ & $+n$ dans le cas précédent, pour avoir :

$$B = n ; q = np ; r = \frac{np}{m} ; k = r ;$$

$$AB = np ; BC = np \left(1 + n + \frac{1}{m}\right),$$

& la confusion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{\lambda'(n+1)^4}{n^3} - \frac{v(n+1)^2}{nn} - \frac{\lambda''}{n^3 m} \right),$$

& laquelle, pour qu'elle puisse être réduite à rien, & que la valeur de λ ne devienne pas très grande, nous n'aurons qu'une espèce à développer, qui est la

X *Especce*, posant $n = 3$.

Ayant donc $B = 3$; $q = 3p$; $r = \frac{3p}{m}$; $k = r$;

$$AB = 3p ; BC = 3p \left(4 + \frac{1}{m} \right) ; \theta > \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{p} ; \& \theta' > \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{p}$$

de sorte que la longueur de toute la lunette est $AC = 3p \left(5 + \frac{1}{m} \right)$

la confusion fera $\frac{\mu m \lambda^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{256}{27} \lambda' - \frac{16}{9} \nu - \frac{\lambda''}{27m} \right)$.

Pour la réduire à rien soit $\lambda' = 1$, & nous aurons :

$$\lambda = 9,89515 + \frac{\lambda''}{27m}, \quad \& \text{partant}$$

$$V(\lambda - 1) = 2,98247 + 0,00621 \cdot \frac{\lambda''}{m},$$

d'où pour le verre PP résulte le rayon de sa face de devant

$$\frac{-p}{1,62740 + \left(2,69953 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right)} = \frac{+p}{1,07213 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

& celui de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 + \left(2,69953 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right)} = \frac{-p}{2,89031 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m}},$$

& partant le verre PP doit être construit en sorte,

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = + \left(0,93272 - 0,00489 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right) p \\ \text{de derrière} = - \left(0,34598 - 0,00067 \cdot \frac{\lambda''}{m} \right) p. \end{cases}$$

A la distance $AB = 3p$, après ce verre on placera le second QQ dont la distance de foyer est $q = 3p$, &

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = 1,81840 q \\ \text{de derrière} = 0,78849 q. \end{cases} \quad \text{En-}$$

Enfin à la distance $BC = \left(12 + \frac{3}{m}\right)p$ après ce verre on placera

l'oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{3p}{m}$, qui étant fait également convexe des deux côtés donnera $\lambda'' = 1,6298$. Il reste donc de déterminer p ; or le quart du moindre rayon du verre PP donne $0,086 = \frac{x}{p}$, donc $p = 11x$; & puisque $\theta = 0,197$,

cette valeur est plus grande que $\frac{4}{3} \cdot \frac{x}{p}$ comme il faut. Mais prenant

$p = 11x$, la longueur de la lunette sera $= \left(165 + \frac{33}{m}\right)x$.

Remarque. Comme cette lunette devient si longue, quoiqu'on réussisse parfaitement dans la construction des verres; elle deviendra excessive, si l'on y commet la moindre faute. Et partant on feroit bien mal, si l'on vouloit faire usage de cette lunette.

TROISIEME HYPOTHESE.

où $\pi = \theta'$ & $\pi' = \theta$.

Cette hypothèse fournit sans doute le plus grand champ apparent qu'il soit possible, en n'employant que trois verres: & on aura

$$\phi = \frac{2\theta'}{m+1}, \text{ donc } \pi = \pi' = \frac{m+1}{2}\phi.$$

La lunette sera déterminée par les formules suivantes:

$$b = \frac{2(B+1)}{Bm-B-2}p; \quad q = \frac{2B}{Bm-B-2}p; \quad r = -\frac{B}{m}p; \quad k = \frac{m+1}{2m}r;$$

$$AB = \frac{B(m+1)}{Bm-B-2}p; \quad BC = \frac{B(B+2)(m+1)}{m(Bm-B-2)}p,$$

$$\& \text{ toute la longueur } \quad AC = \frac{B(B+m+2)(m+1)}{m(Bm-B-2)}p.$$

D'a-

D'abord il faut donc que $\frac{BC}{AB} = \frac{B+2}{m}$, ou $B+2$ soit un nombre positif, & ensuite aussi $\frac{Bp}{Bm-B-2}$. Enfin le champ apparent demande que k , & partant $-Bp$ soit une quantité positive. Donc, puisque Bp est négative, il faut que $B+2 - Bm$ soit positive, par conséquent $B+2 > Bm$, & $B < \frac{2}{m-1}$. Donc les limites entre lesquelles le nombre B doit subsister sont $\frac{2}{m-1}$ & -2 ; d'où il sera ou positif ou négatif: dans le premier cas p doit être une quantité négative, dans l'autre une positive.

Voyons aussi s'il est possible de remplir la condition de la diverse réfrangibilité des rayons, laquelle est contenue dans cette équation:

$$\frac{(B+1)(m+1)}{Bm-B-2} + \frac{m+1}{2m} = 0, \text{ ou } B = -\frac{2m+2}{3m-1}.$$

Donc, puisque cette valeur est comprise entre les limites trouvées, la chose est possible au cas que p est une quantité positive.

Les conditions à remplir sont outre cela $\theta \geq \frac{B+1}{B} \cdot \frac{x}{p}$, & $\theta' > \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{p}$, où il faut remarquer, que θ ne sauroit être plus petit que θ' . Enfin la confusion de ces lunettes est :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda \frac{2(E+1)^2 [\lambda'(B+1)^2 + \nu B]}{B^3 (B+2 - Bm)} - \frac{\lambda''}{B^3 m} \right).$$

Premier cas, p positif & B négatif.

Soit donc $B = -n$, & le nombre n doit être contenu entre les limites 0 & 2. Les déterminations de ces lunettes sont

$$B =$$

$$B = -n : q = \frac{2np}{mn - n + 2} ; r = \frac{np}{m} ; \& k = \frac{m+1}{2m} r ;$$

$$AB = \frac{n(m+1)}{mn - n + 2} p ; BC = \frac{n(2-n)(m+1)}{m(mn - n + 2)} p ;$$

$$\& \text{ toute la longueur } AC = \frac{n(m-n+2)(m+1)}{m(mn - n + 2)} p ,$$

$$\text{ensuite } \theta > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{p} .$$

Or la confusion est exprimée en sorte

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{2\lambda'(n-1)^2 - 2\nu n(n-1)^2}{n^3(mn - n + 2)} + \frac{\lambda''}{n^3 m} \right),$$

& si l'on veut éviter la confusion des couleurs, on n'a qu'à prendre

$$n = \frac{2m-2}{3m-1} .$$

XI Espèce, posant $n = 2$.

$$\text{Cette espèce donne } B = -2 ; q = \frac{2p}{m} ; r = \frac{2p}{m} ; \& k = \frac{m+1}{2m} r ;$$

$$AB = \frac{m+1}{m} p ; BC = 0 \quad \& \quad AC = \frac{m+1}{m} p ; \quad \& \quad \theta = \theta' > \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{p} ,$$

$$\text{or la confusion sera } \frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda' - 2\nu}{8m} + \frac{\lambda''}{8m} \right) ,$$

laquelle ne pouvant évanouir, on mettra $\lambda = 1$, & pour que les deux verres QQ & RR admettent la plus grande ouverture, on fera l'un & l'autre également convexe des deux côtés, d'où l'on aura

$$\lambda'' = 1,6298 ; \quad \& \quad \sqrt{\lambda' - 1} = \frac{2,15493}{0,90513} = 2,38080 , \quad \text{donc}$$

$$\lambda' = 6,6682 , \quad \text{de sorte que la confusion résulte} = \frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(1 + \frac{0,9791}{m} \right) ,$$

$$\& \text{ partant on prendra } p = 30 x \sqrt[3]{(m + 0,9791)} .$$

Ayant



Ayant donc pris $x = my$, le premier verre se construira en sorte

$$\text{le rayon de sa face } \begin{cases} \text{de devant} = 0,61448 p \\ \text{de derrière} = 5,24164 p \end{cases}$$

à la distance $AB = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p$ on placera les deux verres QQ & RR joints ensemble, tous les deux étant égaux entr'eux, & également convexes de part & d'autre, leur distance de foyer étant $r = \frac{2p}{m}$, le

rayon de leur courbure sera $= \frac{11}{5}r = 2,2r$, & le demi-diametre du champ apparent $\phi = \frac{2\theta'}{m+1} = \frac{2292}{m+1}$ minutes, prenant $\theta = \theta' = \frac{1}{3}$.

Remarque. Cette lunette ne diffère des ordinaires à deux verres, qu'en ce qu'on se sert ici d'un oculaire double, qui double aussi le diametre du champ apparent. Outre cela cette lunette devient aussi tant soit peu plus courte, puisque pour les ordinaires, où le verre oculaire est également convexe des deux côtés, il faut prendre $p = 30x\sqrt[3]{(m+1,6298)}$; or cette différence ne sauroit être sensible, à moins que les verres ne soient exactement construits sur les règles données.

XII Espece, posant $n = \frac{3}{2}$.

Pour cette espece nous aurons :

$$B = -\frac{3}{2}; \quad q = \frac{6p}{3m+1}; \quad r = \frac{3p}{2m}; \quad k = \frac{m+1}{2m}r; \quad \theta > \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{p}; \quad \theta' > \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{p}$$

$$AB = \frac{3(m+1)p}{3m+1}; \quad BC = \frac{3(m+1)p}{2m(3m+1)}; \quad AC = \frac{3(m+1)(2m+1)}{2m(3m+1)}p,$$

$$\& \text{ la confusion : } \frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{2\lambda' - 12\nu}{27(3m+1)} + \frac{8\lambda''}{27m} \right).$$

Mais, pour obtenir le plus grand champ apparent, il faut que les deux verres QQ & RR soient également convexes des deux côtés, & tant le rayon des deux faces du verre QQ = $\frac{11}{10} q$, & du verre

RR = $\frac{11}{10} r$. Alors on aura $\lambda'' = 1,6298$, & pour le verre QQ

$$V(\lambda' - 1) = \frac{1,43662(1 - B)}{2,0,90513(1 + B)} = 0,39680 \text{ \& } \lambda' = 16,7450$$

donc la confusion

$$\frac{\mu m x^3}{4 p^3} \left(\lambda + \frac{1,1367}{3m+1} + \frac{0,4829}{m} \right) = \frac{\mu m x^3}{4 p^3} \left(\lambda + \frac{0,8618}{m} - \frac{0,1263}{mm} \right),$$

on prendra donc $\lambda = 1$, &

$$p = 30 x \sqrt[3]{\left(m + 0,8618 - \frac{0,1263}{m} \right)},$$

& on aura pour la construction du verre PP

$$\text{le rayon de la face } \begin{cases} \text{de devant} = 0,61448 p \\ \text{de derrière} = 5,24164 p. \end{cases}$$

Or, si m est un nombre médiocrement grand, on connoitra plus aisément les mesures de ces lunettes par les formules suivantes

$$q = \frac{2p}{m} - \frac{2p}{3mm}; \quad r = \frac{3p}{2m}; \quad AB = \left(1 + \frac{2}{3m} - \frac{2}{9mm} \right) p;$$

$$BC = \left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{3mm} \right) p; \quad \text{donc } AC = \left(1 + \frac{7}{6m} + \frac{1}{9mm} \right) p,$$

& partant cette lunette est un peu plus longue, qu'une de deux verres, si p a la même valeur, mais ici elle peut être prise un peu plus petite.

XIII Espèce, posant $n = 1$.

Cette position fournit les déterminations suivantes :

$$B = -1; \quad q = \frac{2p}{m+1}; \quad r = \frac{p}{m}; \quad k = \frac{m+1}{2m} r; \quad \theta > 0; \quad \theta' > \frac{x}{p};$$

$$AB = p; \quad BC = \frac{p}{m} \quad \& \quad AC = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p.$$

Le second verre QQ se trouve donc ici précisément dans le foyer commun des verres PP & RR, & ne change rien dans la confusion,

qui est
$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda''}{m} \right).$$

Donc on prendra $\lambda = 1$, & afin qu'on obtienne le plus grand champ, on fera les deux verres QQ & RR également convexes des deux côtés, d'où l'on aura $\lambda'' = 1,6298$.

Et partant, ayant pris $x = my$, on posera $p = 30x\sqrt[3]{(m+1,6298)}$, & pour le verre objectif PP on aura

$$\text{le rayon de la face } \begin{cases} \text{de devant} = 0,61448 p \\ \text{de derrière} = 5,24164 p. \end{cases}$$

Précisément au foyer de ce verre, à la distance $AB = p$, on mettra

le verre QQ dont la distance de foyer $q = \frac{2p}{m+1}$, & le rayon de

chaque face $= \frac{11}{10}q$. Derrière ce verre à la distance $BC = \frac{p}{m}$, on

mettra l'oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{p}{m}$, & le rayon

de chaque face $= \frac{11}{10}r$. On donnera à ces deux verres QQ & RR

la plus grande ouverture, dont leur figure est susceptible, & si l'on

prend $\theta = \theta' = \frac{1}{3}$ le demi-diamètre du champ apparent sera $= \frac{2292}{m+1}$

minutes.

Remarque. On transformera donc aisément une lunette ordinaire de deux verres dans cette espèce, en plaçant au foyer commun des deux verres un troisième verre convexe, dont la distance de foyer soit à peu près double de celle du verre oculaire RR ; par ce moyen ou doublera le diamètre du champ apparent, & en même tems la distance de l'œil derrière le verre oculaire sera réduite à la moitié.

$$XIV \text{ Espèce, posant } n = \frac{2(m-1)}{3m-1}.$$

Cette espèce contient les lunettes, où la confusion des couleurs évanouit : ayant donc $mn - n + 2 = \frac{2m(m+1)}{3m-1}$ les déterminations seront

$$B = -\frac{2(m-1)}{3m-1}; \quad q = \frac{2(m-1)p}{m(m+1)}; \quad r = \frac{2(m-1)p}{m(3m-1)}; \quad k = \frac{m+1}{2m}p.$$

$$AB = \frac{m-1}{m}p; \quad BC = \frac{4(m-1)}{m(3m-1)}p; \quad AC = \frac{3(m-1)}{m(3m-1)}p,$$

& partant le verre du milieu est ici placé un peu avant le foyer de l'objectif. Or la confusion est

$$\frac{\mu x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda'(m+1)^3}{8m(m-1)^3} - \frac{r(m+1)(3m-1)}{4m(m-1)^2} + \frac{\lambda''(3m-1)^3}{8m(m-1)^3} \right),$$

où si l'on fait les verres QQ & RR également convexes des deux côtés pour pouvoir mettre $\theta = \theta' = \frac{1}{3}$, on aura $\lambda'' = 1,6298$

& $\lambda' = 16,7450$. Donc, si nous regardons le nombre m comme très grand, & que nous posions $\lambda = 1$, la confusion sera

$$\frac{\mu x^3}{4p^3} (m + 7,5191) \quad \text{donc} \quad p = 30x\sqrt[3]{(m + 7,5191)}:$$

ayant pris $x = my$; alors la construction du verre objectif sera

$$\text{le rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} = 0,61448 p \\ \text{de derrière} = 5,24164 p. \end{cases}$$

Der-

Derrière ce verre à la distance $AB = \left(1 - \frac{1}{m}\right)p$, on placera le verre QQ , dont la distance de foyer $q = \frac{2(m-1)}{m(m+1)}p = \left(\frac{2}{m} - \frac{4}{mm}\right)p$; & le rayon de chaque face $= \frac{11}{10}q$: après celui à la distance $BC = \left(\frac{4}{3m} - \frac{8}{9mm}\right)p$: on mettra le verre RR dont la distance de foyer $r = \frac{2(m-1)}{m(3m-1)}p = \left(\frac{2}{3m} - \frac{4}{9mm}\right)p$, & le rayon de chaque face $= \frac{11}{10}r$. On aura donc $BC = 2r$, & la longueur de toute la lunette sera $= \left(1 + \frac{1}{3m} - \frac{8}{9mm}\right)p$, & partant un peu plus courte, qu'au cas de deux verres.

Second cas, p négatif & B positif.

Nous n'avons qu'à prendre p & n négatifs dans le cas précédent, & nous aurons :

$$B = n; q = \frac{2np}{2+n-mn}; r = \frac{np}{m}; k = \frac{m+1}{2m}r; \theta > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x}{p}; \theta' > \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{p};$$

$$AB = \frac{n(m+1)}{2+n-mn}p; BC = \frac{n(2+n)(m+1)}{m(2+n-mn)}p, \text{ donc toute la longueur}$$

$$\text{de la lunette } AC = \frac{n(m+n+2)(m+1)}{m(2+n-mn)}p. \text{ Or la confusion sera}$$

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{2\lambda'(n+1)^4 - 2vn(n+1)^2}{n^3(2+n-mn)} - \frac{\lambda''}{n^3 m} \right),$$

Or il faut qu'il soit $n < \frac{2}{m-1}$, & $n > 0$.



XV *Especce, posant* $n = \frac{3}{2(m-1)}$.

Puisque $n = \frac{3}{2(m-1)}$, on aura $2 + n - mu = \frac{1}{2}$, donc

$$B = \frac{3}{2(m-1)}; q = \frac{6}{m-1}p; r = \frac{2p}{2m(m-1)}; k = \frac{m+1}{2m}r;$$

$$AB = \frac{3(m+1)}{m-1}p; BC = \frac{3(4m-1)(m+1)}{2m(m-1)^2}p; \theta > \frac{2m+1}{3} \cdot \frac{x}{p}; \theta' > \frac{2m-2}{3} \cdot \frac{x}{p},$$

& la longueur de la lunette $AC = \frac{3(m+1)(2mm+2m-1)}{2m(m-1)^2}p$.

Or la confusion étant

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{2\lambda'(2m+1)^4}{27(m-1)} - \frac{4}{9}v(2m+1)^2 - \frac{8\lambda''(m-1)^3}{27m} \right)$$

devient si excessivement grande, qu'on ne sauroit en aucune maniere faire usage de cette especce. Et il en est de même de toutes les autres valeurs, qu'on pourroit donner à n .

QUATRIEME HYPOTHESE

$$B + 1 = 0.$$

Cette hypothese comprend en général tous les cas, où le second verre se trouve au foyer de l'objectif, & on aura :

$$B = -1; b = 0; q = \frac{\Phi}{\pi}p; r = \frac{p}{m}; AB = p; BC = \frac{p}{m}; \& k = \frac{\pi'}{\Phi} \cdot \frac{r}{m}$$

& la confusion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda''}{m} \right) \text{ donc } p = 30x\sqrt[3]{(\lambda m + \lambda'')}$$

tout comme dans le cas de deux verres ; & le verre oculaire se trouve aussi à la même distance. Le verre du milieu QQ ne change rien, ni dans la multiplication, ni dans la confusion : mais son effet consiste dans le champ apparent, & le lieu de l'œil. Si le verre du milieu étoit

con-



concave, & partant π négatif, le champ apparent en seroit diminué, or s'il est convexe, & plus grand que l'oculaire, il l'augmente, & s'il est plus petit, il le diminue, ce qu'on verra plus clairement par les cas suivant :

$$\text{I. } \pi = 0; \pi' = (m+1)\phi; \text{ donc } \phi = \frac{\pi'}{m+1} = \frac{\theta'}{m+1}$$

$$\text{Or } q = s; \text{ \& } k = \frac{m+1}{m} r$$

$$\text{II. } \pi = \frac{m+1}{10}\phi; \pi' = \frac{9(m+1)}{10}\phi; \text{ donc } \phi = \frac{10\theta'}{9(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{10p}{m+1}; \text{ \& } k = \frac{9(m+1)}{10m} r$$

$$\text{III. } \pi = \frac{m+1}{5}\phi; \pi' = \frac{4(m+1)}{5}\phi; \text{ donc } \phi = \frac{5\theta'}{4(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{5p}{m+1}; \text{ \& } k = \frac{4(m+1)}{5m} r$$

$$\text{IV. } \pi = \frac{3(m+1)}{10}\phi; \pi' = \frac{7(m+1)}{10}\phi; \text{ donc } \phi = \frac{10\theta'}{7(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{10p}{3(m+1)}; \text{ \& } k = \frac{7(m+1)}{10m} r$$

$$\text{V. } \pi = \frac{2(m+1)}{5}\phi; \pi' = \frac{3(m+1)}{5}\phi; \text{ donc } \phi = \frac{5\theta'}{3(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{5p}{2(m+1)}; \text{ \& } k = \frac{3(m+1)}{5m} r$$

$$\text{VI. } \pi = \frac{m+1}{2}\phi; \pi' = \frac{m+1}{2}\phi; \text{ donc } \phi = \frac{2\theta'}{m+1} = \frac{2\theta}{m+1}$$

$$\text{Or } q = \frac{2p}{m+1}; \text{ \& } k = \frac{m+1}{2m} r$$



$$\text{VI. } \pi = \frac{3(m+1)}{5} \phi; \pi' = \frac{2(m+1)}{5} \phi; \text{ donc } \phi = \frac{5\theta}{3(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{5p}{3(m+1)}; \& k = \frac{2(m+1)}{5m} r$$

$$\text{VII. } \pi = \frac{7(m+1)}{10} \phi; \pi' = \frac{3(m+1)}{10} \phi; \text{ donc } \phi = \frac{10\theta}{7(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{10p}{7(m+1)}; \& k = \frac{3(m+1)}{10m} r$$

$$\text{VIII. } \pi = \frac{4(m+1)}{5} \phi; \pi' = \frac{m+1}{5} \phi; \text{ donc } \phi = \frac{5\theta}{4(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{5p}{4(m+1)}; \& k = \frac{m+1}{5m} r$$

$$\text{IX. } \pi = \frac{9(m+1)}{10} \phi; \pi' = \frac{m+1}{10} \phi; \text{ donc } \phi = \frac{10\theta}{9(m+1)}$$

$$\text{Or } q = \frac{10p}{9(m+1)}; \& k = \frac{m+1}{10m} r$$

$$\text{X. } \pi = (m+1) \phi; \pi' = 0; \text{ donc } \phi = \frac{\theta}{m+1}$$

$$\text{Or } q = p; \& k = 0 r.$$

Remarque. Si nous regardons au champ apparent les especes XII, XIII, & XIV, paroissent les plus avantageuses pour la pratique, mais si nous regardons au raccourcissement des lunettes, les especes de la première hypothese méritent la preference, où les deux verres PP & QQ sont immédiatement joints ensemble. Mais, puisque les verres ont toujours quelque épaisseur, qui rendent cette hypothese impraticable à la rigueur, il sera bon de développer aussi de telles hypotheses, où l'intervalle entre les deux premières verres PP & QQ devienne fort petit, ce qui arrive lorsqu'on suppose $\pi = \frac{1}{m}$, ou en général $\pi = \frac{\alpha}{m}$.



CINQUIEME HYPOTHESE

$$\text{ou } \pi = \frac{\alpha}{m} \phi \quad \& \quad \pi = \frac{mm + m - \alpha}{m} \phi.$$

Puisque π est supposé fort petit, on aura $\pi' = \theta'$, & partant

$$\phi = \frac{m\theta'}{mm + m - \alpha}. \text{ Ayant donc } \frac{\pi}{\phi} = \frac{\alpha}{m} \quad \& \quad \frac{\pi'}{\phi} = \frac{mm + m - \alpha}{m}$$

les déterminations de ces lunettes sont :

$$q = \frac{Bm}{B\alpha - Bm - m} p; \quad r = -\frac{Bp}{m}; \quad k = \frac{mm + m - \alpha}{mm} r;$$

$$AB = \frac{B\alpha}{B\alpha - Bm - m} p; \quad BC = \frac{B(B+1)m}{B\alpha - Bm - m} p - \frac{Bp}{m};$$

$$\text{ou } BC = \frac{B[(B+1)m(m+1) - B\alpha]}{m(B\alpha - Bm - m)} p.$$

Il faut donc qu'il soit $(B+1)m(m+1) > B\alpha$, & $\frac{B\alpha p}{B\alpha - Bm - m}$ une quantité positive. Or, afin que k en soit aussi une, la quantité $-Bp$ doit être positive, & partant aussi $\frac{\alpha}{B\alpha - Bm - m}$, ou bien $(B+1)m - B\alpha$: mais si celle-cy est positive, la première condition y est déjà comprise. Les conditions principales à remplir sont donc :

$$-Bp > 0 \quad \& \quad (B+1)m > B\alpha, \quad \& \text{ la confusion}$$

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda - \frac{(B+1)^2 m [\lambda'(B+1)^2 + \nu B]}{B^3 [(B+1)m - B\alpha]} - \frac{\lambda''}{B^3 m} \right).$$

Premier cas, p positif & B négatif.

Posons $B = -n$ pour avoir :

$$q = \frac{mnp}{m + \alpha n - mn} ; \quad r = \frac{np}{m} ; \quad k = \frac{mm + m - \alpha}{mm} r ;$$

$$AB = \frac{\alpha np}{m + \alpha n - mn} ; \quad BC = \frac{n[(1-n)m(m+1) + \alpha n]}{m(m + \alpha n - mn)} p ;$$

$$\theta > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{p} .$$

Il faut donc qu'il soit $n < \frac{m}{m-\alpha}$, & $n < \frac{m(m+1)}{m(m+1)-\alpha}$; mais

on doit prendre $n < 1$, puisque le cas $n = 1$ ne donne pas l'intervalle AB petit. Ensuite la confusion est :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{(1-n)^2 m [\lambda'(1-n)^2 - \nu n]}{n^3 [(1-n)m + \alpha n]} + \frac{\lambda''}{n^3 m} \right),$$

où nous n'avons qu'une espèce à considérer, puisque n doit être pris entre les limites 1 & 0.

XVI Espèce, où $n = \frac{1}{2}$.

Nous aurons donc pour les déterminations de cette espèce

$$B = -\frac{1}{2} ; \quad q = \frac{m}{m + \alpha} p ; \quad r = \frac{p}{2m} ; \quad k = \frac{2m(m+1) - \alpha}{2mm} r ;$$

$$AB = \frac{\alpha p}{m + \alpha} ; \quad BC = \frac{m(m+1) + \alpha}{2m(m + \alpha)} p ; \quad \theta > \frac{x}{p} ; \quad \& \quad \theta' > \frac{2x}{p} ,$$

$$\& \text{ la confusion } \frac{\mu m x^3}{4p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda' m - 2\nu m}{m + \alpha} + \frac{8\lambda''}{m} \right) .$$

Pour la rendre aussi petite qu'il est possible, posons $\lambda = 1$, & $\lambda' = 1$,

$$\& \text{ prenons } p = 30x\sqrt[3]{\left(\frac{1,53462 mm + \alpha m}{m + \alpha} + 8\lambda'' \right)},$$

ou



ou à peu près $p = 30x\sqrt[3]{(1,53462m - 0,53462\alpha + 8\lambda'')}$,
d'où la longueur de toute la lunette devient :

$$AC = \frac{m(m+1) + \alpha(2m+1)}{2m(m+\alpha)} p = \frac{m+1+\alpha}{2m} p, \text{ à peu près.}$$

Prenons pour α une fraction assez petite, pour que les deux verres PP & QQ se touchent presque : & que le verre oculaire RR soit également convexe des deux côtés : on aura $\lambda'' = 1,6298$. Donc, après avoir pris $x = my$, il faut prendre

$$p = 60x\sqrt[3]{(0,19183m + 1,6298 - 0,06683\alpha)},$$

& le verre objectif PP doit être formé en sorte :

$$\text{rayon de la face } \begin{cases} \text{de devant} = 0,61448p \\ \text{de derrière} = 5,24164p. \end{cases}$$

Après ce verre à la distance $AB = \frac{\alpha p}{m+\alpha}$ on placera le verre QQ,

dont la distance de foyer soit $q = \frac{m}{m+\alpha}$, & la construction

$$\text{le rayon de la face } \begin{cases} \text{de devant} = + 0,32637q \\ \text{de derrière} = - 0,80267q. \end{cases}$$

Enfin, après ce verre, à la distance $BC = \frac{m(m+1) + \alpha}{2m(m+\alpha)} p$, on mettra

le verre oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{p}{2m}$, qui soit

également convexe des deux côtés, & le rayon de chacun $= \frac{11}{10} r$.

Remarque. Cette lunette est en même tems la plus courte dans son espece, & convient avec l'espece V: & puisque les deux verres PP & QQ sont fort à peu près les mêmes que là, on voit qu'un petit éloignement entre ces deux verres ne nuit rien dans les avantages de ces lunettes.



Second cas, p négatif & B positif.

Nous n'avons qu'à changer les signes des lettres p & n dans les formules du cas précédent pour avoir

$$B = n; q = \frac{mnp}{m(n+1) - \alpha n}; r = \frac{np}{m}; k = \frac{m(m+1) - \alpha}{mm} r;$$

$$AB = \frac{\alpha np}{m(n+2) - \alpha n}; BC = \frac{n[(n+1)m(m+1) - \alpha n]p}{m[(n+1)m - \alpha n]};$$

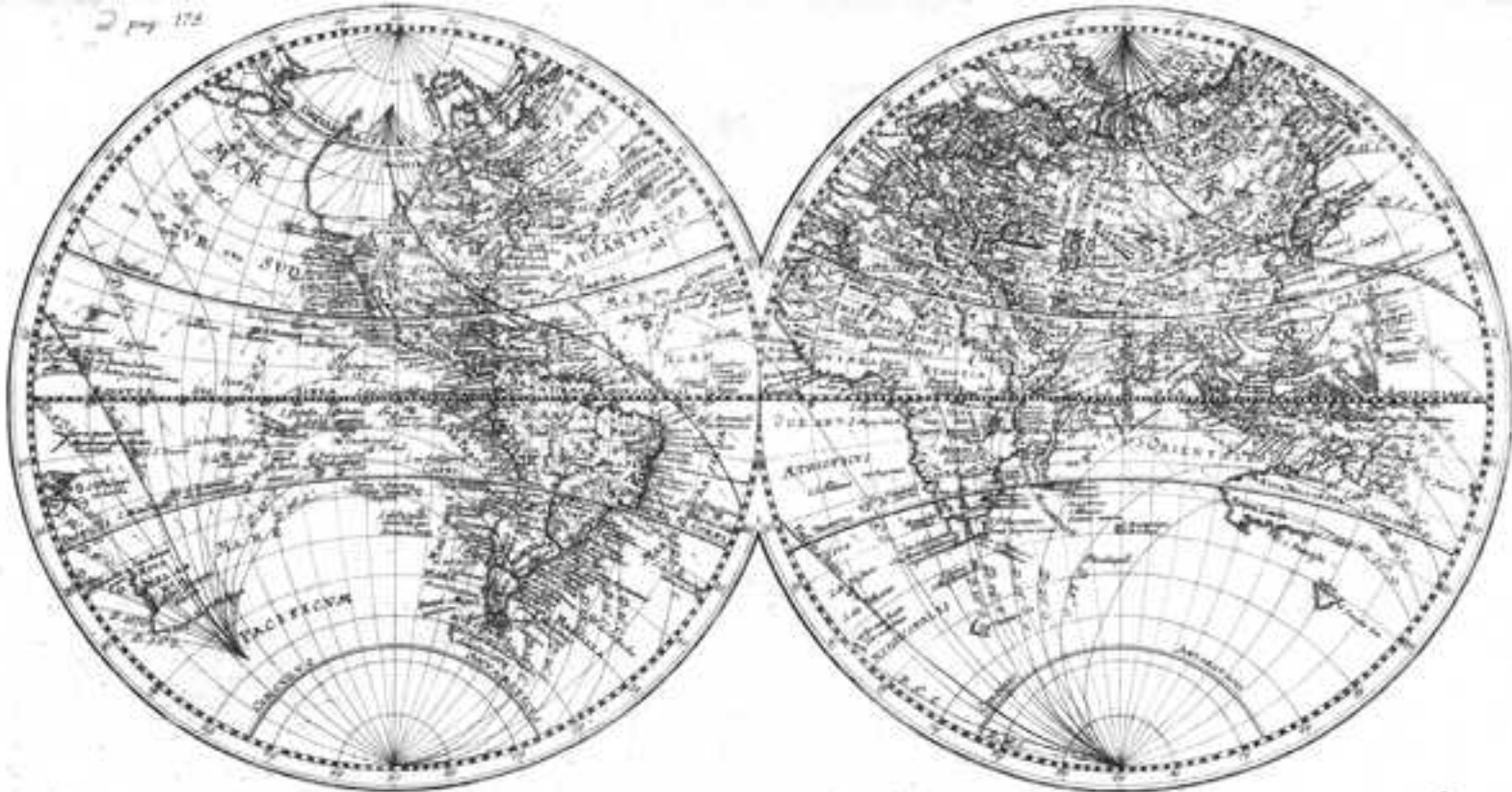
$$\theta > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{p},$$

d'où il est clair que les distances AB & BC sont toujours positives, pourvu que α soit un nombre plus petit que m . Or la confusion est

$$\frac{\mu m^3}{4p^3} \left(\lambda \frac{m(n+1)^2 [\lambda'(n+1)^2 + \nu n]}{n^3 [(n+1) - \alpha n]} - \frac{\lambda''}{n^3 m} \right),$$

laquelle peut aisément être réduite à rien. Mais il est aisé de voir qu'on en tire les mêmes déterminations que s'il y avoit $\alpha = 0$, de sorte que les espèces de la première hypothèse puissent subsister quoique les deux verres PP & QQ ne soient pas immédiatement joints ensemble, mais qu'on laisse entr'eux quelque petit intervalle. Et partant il seroit superflu, d'en rapporter des exemples.





Tab. I.

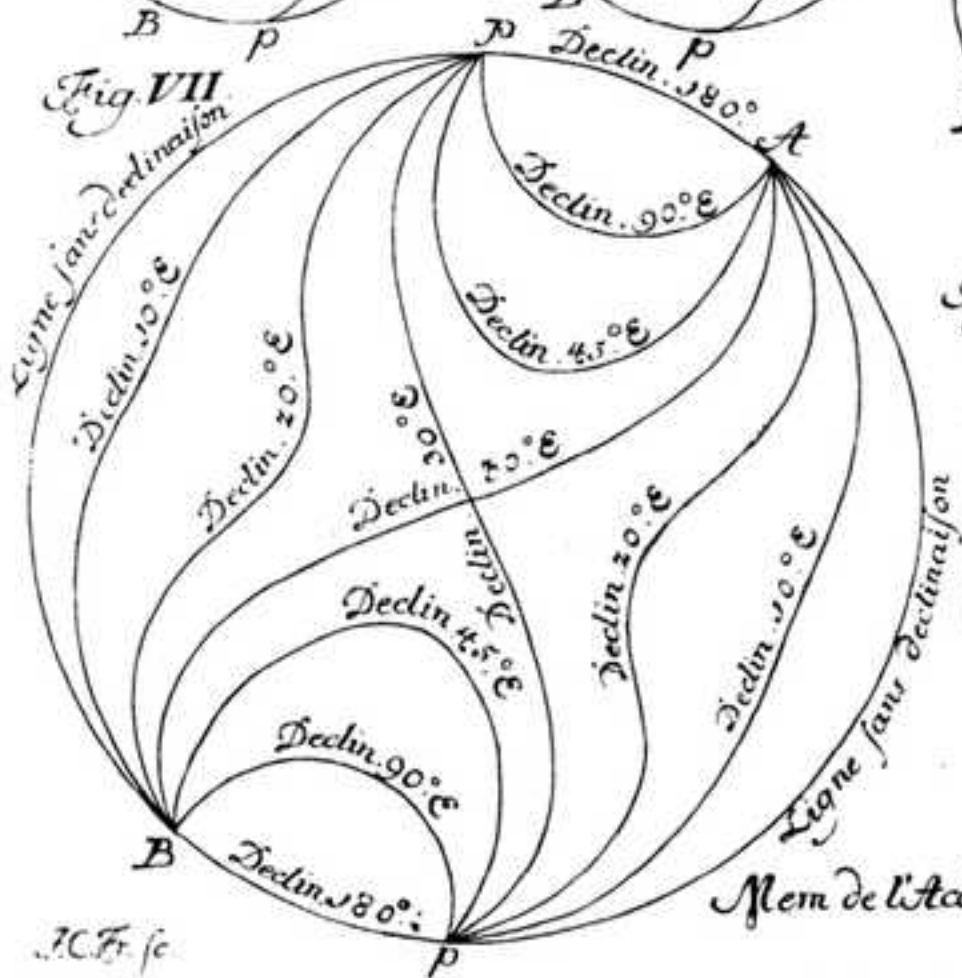
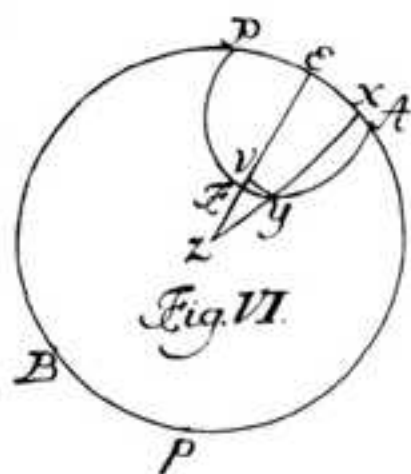
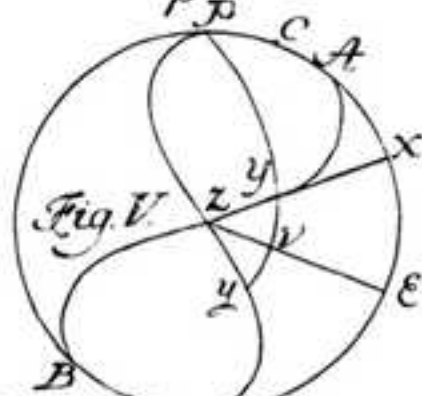
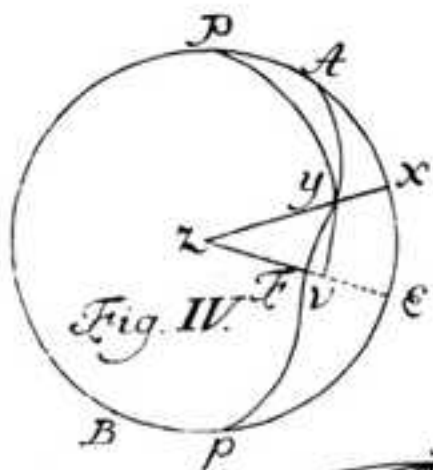
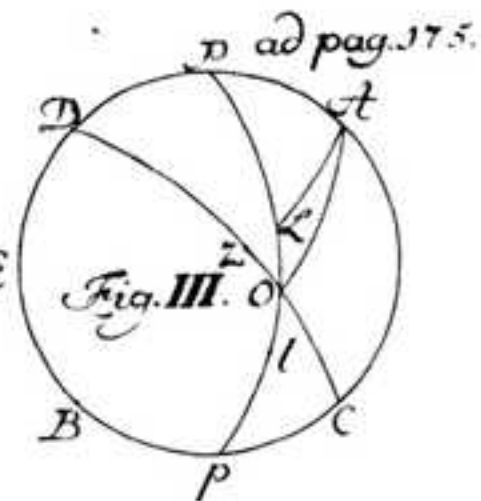
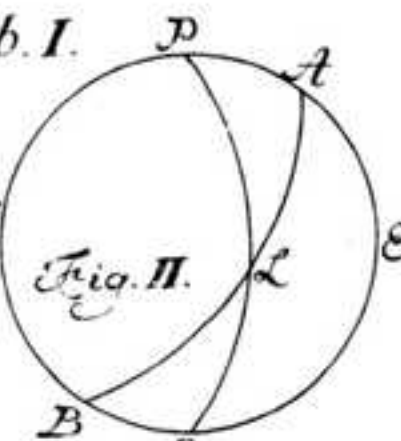
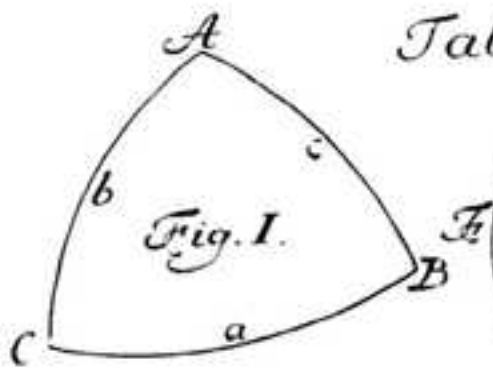
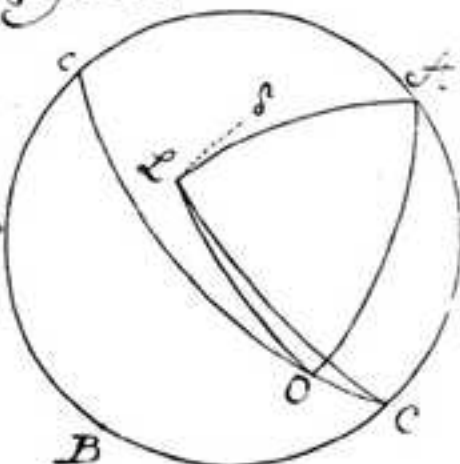
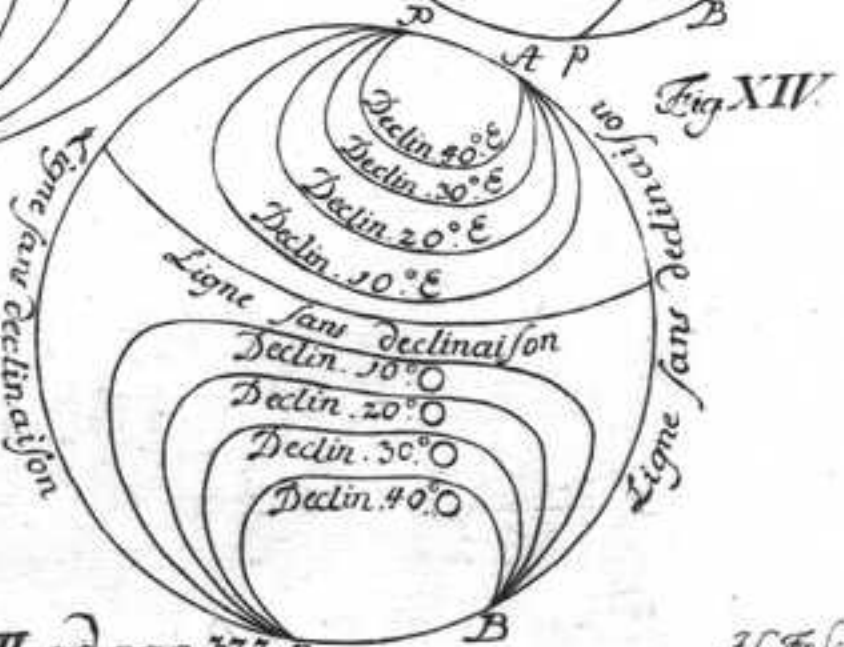
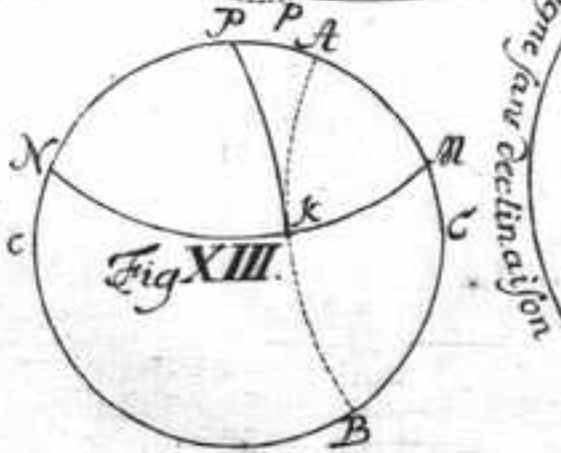
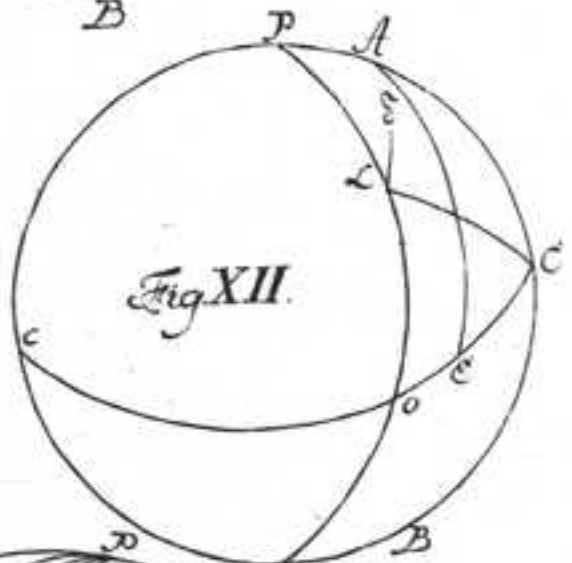
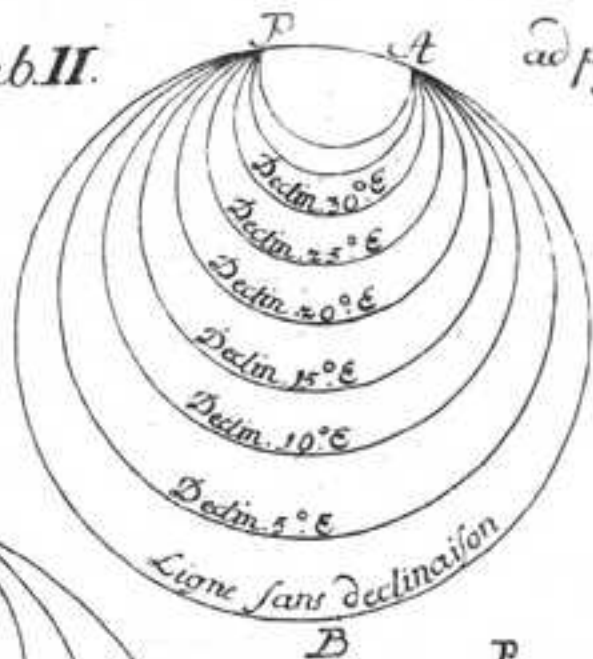
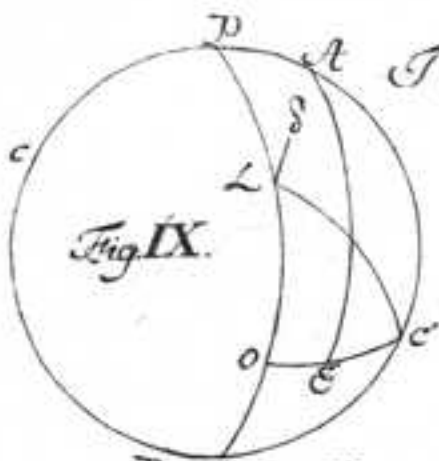


Fig. VIII.



Mem de l'Acad Tom XIII. ad pag. 372.



ad pag. 175.
Fig. XV.

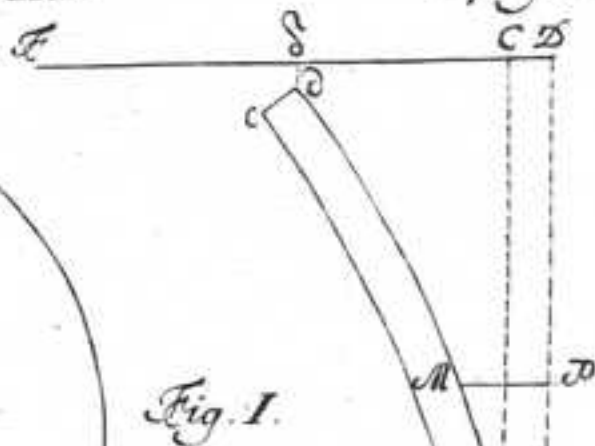
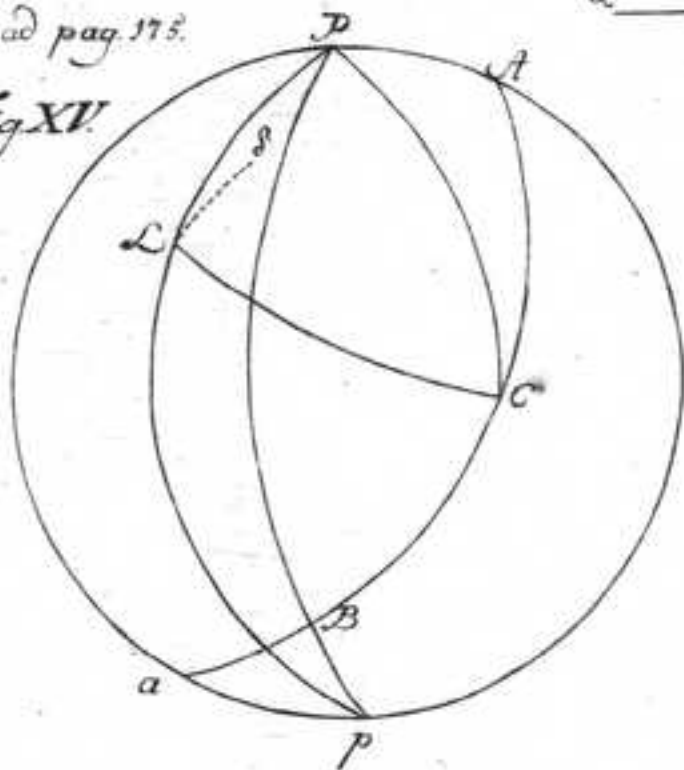


Fig. I.

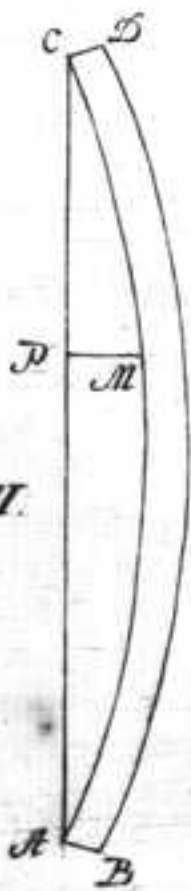


Fig. II.

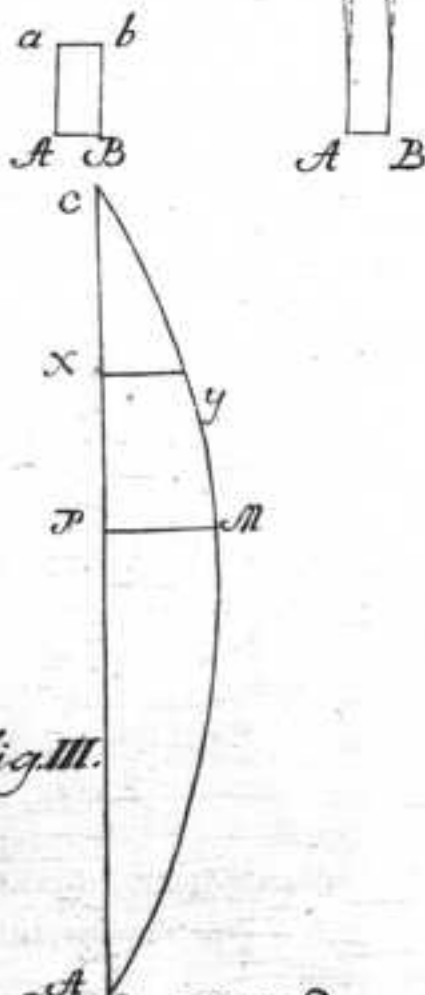


Fig. III.