1759

Sur la force des colonnes

Leonhard Euler

SUR
LA FORCE DES COLONNES.
PAR M. EULER.

I.

Quand je dévelopai dans le ſupplément de mon Traité ſur les Iſopérimetres les courbes des lames élaſtiques, j'en ai tiré une régle pour juger de la force des colonnes, qui me parut dabord fort remarquable. Il s'agit de déterminer le poids qu'une colonne peut ſoutenir, ſans être ſujette à ſe plier. La Régle que j'ai trouvée, regarde les colonnes, qui ſont également fortes par toute leur longueur; & ſi l'on nomme la hauteur d'une telle colonne $= a$, & le moment de ſon reſſort $= Ekk$, dont j'ai expliqué tant la ſignification, que les moyens pour en trouver la juſte valeur en chaque cas; le poids que cette colonne eſt capable de ſoutenir ſans ſe plier, eſt $= \pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$, où π marque la circonference d'un cercle dont le diametre eſt $= 1$: d'où l'on voit que ce poids ſuit la raiſon renverſée du quarré de la hauteur de la colonne. Mais pour faire uſage de cette régle, il eſt bon que je rapporte ici ce qu'il faut entendre par l'expreſſion Ekk, que je viens de nommer *Moment du Reſſort*.

II. D'abord je dois remarquer, que ce moment n'eſt pas uniquement attaché aux corps élaſtiques, parmi lesquels on pourroit douter avec raiſon, ſi les colonnes y étoient compriſes. Il regarde proprement la force, dont un corps quelconque s'oppoſe à l'inflexion, & il eſt tout à fait indifférent, ſi le corps après l'inflexion eſt doué d'une force de ſe retablir ou non? Par cette raiſon on pourroit plutôt nommer ce moment celui de roideur, puisqu'il a effectivement lieu

lieu dans tous les corps qui s'oppofent à l'inflexion, foit qu'ils foient élaftiques ou non. Ces recherches peuvent donc être appliquées à toutes les colonnes, dont la force dépend de leur roideur, & qui font capables de foutenir des fardeaux, entant qu'elles réfiftent à l'inflexion. Si cette idée paroit moins convenir aux colonnes de pierre ou de marbre, elle fera fans contredit appliquable à celles de bois; & c'eft fous cette vuë, que je me propofe d'examiner leur force.

III. Pour déterminer ledit moment de reffort, ou plutot de roideur, exprimé par la formule Ekk, qui convient à une colonne quelconque, que je fuppofe ici comme également épaiffe par toute fa longueur; foit ABCD la colonne propofée, non feulement pofée verticalement, mais auffi fermement enchaffée au fond AB, qu'elle ne puiffe abandonner cette fituation verticale, qu'en fe pliant. Maintenant qu'on lui applique en haut une force horizontale CF, qui foit $= F$, & qui plie tant foit peu la colonne, en la forçant dans la fituation $ABcd$. Qu'on mefure exactement tant la hauteur de la colonne AC, que l'efpace $D\delta$, par lequel la force a fait avancer le haut de la colonne, & l'expreffion $F.\,AC^2\left(\frac{AC}{3D\delta} - \frac{1}{2}\right)$ donnera le moment de roideur Ekk. Or puisque $D\delta$ eft extrèmement petit par rapport à AC, on peut fuppofer fans erreur $Ekk = \frac{F.AC^3}{3D\delta}$. La raifon de cette détermination fe trouve expofée dans le §. 39. du fupplément allegué.

IV. Cette quantité Ekk exprimant le moment de roideur dans chaque endroit de la colonne, elle dépend uniquement de l'épaiffeur de la colonne, & de la roideur de la matiere, dont elle eft compofée. Donc l'épaiffeur & la matiere demeurant les mêmes, l'expérience rapportée fournira toujours la même valeur pour Ekk, quelle que foit la hauteur de la colonne AC, & la force F. D'où l'on voit, que fi la force F demeure la même, l'efpace de $D\delta$ doit fe trouver proportionnel au cube de la hauteur de la colonne : mais si la force F varie, la hauteur AC demeurant la même, l'espace $D\delta$ sera proportionnel à la force F : or en général si tant la hauteur de la colonne que la force varie, l'espace $D\delta$ sera proportionnel à $F.AC^3$. On pourra donc varier à l'infini les expériences pour découvrir la valeur Ekk, & en faisant plusieurs telles expériences, on s'assurera avec d'autant plus de certitude de la véritable quantité du moment de roideur Ekk.

V. Après avoir déterminé ce moment de roideur Ekk pour une certaine épaisseur & matiere, il seroit bon de faire de semblables expériences pour en connoitre la valeur, si tant l'épaisseur que la matiere de la colonne étoit différente. Or pour l'épaisseur, à moins qu'elle ne soit ronde ou circulaire, il la faut considerer dans un double sens ; ou bien il y faut distinguer la largeur & l'épaisseur proprement ainsi nommée. Si la colonne a la forme d'un prisme rectangulaire, la dimension exprimée dans la figure par la ligne AB sera l'épaisseur, suivant laquelle la force tend à rompre la colonne : & si le rectangle $ABab$ marque la base de la colonne, la dimension Aa en sera la largeur. Pour celle-cy il est assez évident, que le moment de roideur lui est proportionnel ; mais pour l'épaisseur, puisqu'elle s'oppose davantage à l'inflexion, il semble que le moment de roideur en suive la raison doublée, ou même triplée : d'où l'on pourroit conclure, que si la colonne est un cylindre, son moment de roideur seroit proportionnel au cube, ou peut être plutôt au quarré quarré du diamètre de sa base.

VI. Cependant il seroit à souhaiter, qu'on fit plusieurs expériences sur plusieurs figures différentes, & qu'on les pliât par la force F en plusieurs sens différens, pour connoitre plus exactement, combien tant la largeur que l'épaisseur contribuent à augmenter le moment de roideur. On pourroit ensuite étendre ces recherches à plusieurs matieres différentes, & ensuite par le secours de quelque Théorie on découvrira peut être une régle, par laquelle on sera en état de déterminer d'abord le moment de roideur d'une colonne proposée quelconconque, tant par rapport à la matiere dont elle eſt composée, que par rapport à ſa largeur & épaiſſeur. Alors, quand même la colonne ne ſeroit pas cylindrique ou prismatique, mais que ſon épaiſſeur ſeroit variable, on en pourroit aſſigner pour chaque endroit le vrai moment de roideur.

VII. Connoiſſant ce moment de roideur, il eſt facile de déterminer la courbure, que l'action d'une force quelconque doit produire: car une force n'y agiſſant qu'en vertu de ſon moment rapporté à l'endroit où ſe fait la courbure, ſi nous poſons ce moment de force $= Pf$, le moment de roideur étant $= Ekk$, le rayon de courbure imprimée au corps au même endroit, ſera $= \frac{Ekk}{Pf}$. C'eſt la raiſon, que le moment de roideur eſt le produit d'une force par le quarré d'une ligne, & qu'il eſt ſemblable aux expreſſions qui marquent le moment d'inertie des corps. Donc réciproquement, ſi le rayon de courbure eſt poſé $= r$, le moment de force requis à produire cette courbure eſt $= \frac{Ekk}{r}$; & c'eſt ſur ce principe qu'eſt fondée toute la Théorie, qui ſert à déterminer l'inflexion de tous les corps tant élaſtiques que ſimplement roides: car, tant qu'on ne regarde que l'inflexion, ſans ſe ſoucier ſi le corps après la ceſſation de la force ſe retablit ou non, l'élaſticité n'entre point en conſidération.

VIII. Ayant établi ce principe, il eſt aiſé d'en déduire la regle que je viens d'expoſer, pour déterminer par des expériences le moment de roideur. Car, poſons pour un point quelconque M de la colonne cy-deſſus les coordonnées $BP = x$, & $PM = y$, & conſidérant que l'appliquée PM eſt quaſi infiniment petite, le rayon de courbure en M eſt $= \frac{dx^2}{ddy}$ prenant l'élément dx pour conſtant. Donc le moment de la force $CF = F$, à cauſe de $AC = a$, étant $= F(a-x)$ pour

pour le point M, nous aurons $\frac{dx^2}{ddy} = \frac{Ekk}{F(a-x)}$, posant Ekk pour le moment de roideur par toute l'étendue de la colonne. De là nous tirons $\frac{ddy}{dx} = \frac{F(a-x)dx}{Ekk}$, & en intégrant $\frac{dy}{dx} = \frac{F(2ax-xx)}{2Ekk}$, sans y ajouter de constante, puisque par l'hypothese il faut que $\frac{dy}{dx}$ évanouïsse au point A. La seconde intégration donne $y = \frac{F(3axx-x^3)}{6Ekk}$: donc posant $x=a$, puisque y devient $= D\delta$, nous aurons $D\delta = \frac{Fa^3}{3Ekk}$, d'où découle la régle donnée $Ekk = \frac{Fa^3}{3D\delta} = \frac{F.AC^3}{3D\delta}$, savoir pour les cas où $D\delta$ est extrèmement petit par rapport à AC.

IX. Nous voyons donc que, quelque petite que soit la force F, qui est supposée agir horizontalement, elle doit toujours produire quelque inflexion, puisque l'espace $D\delta$ est proportionnel à la force F même. Mais il n'en est pas de même lorsque la force agit verticalement, ou que la colonne a à soutenir un poids, dont elle est pressée par en haut. Or d'abord il semble, qu'une telle force, quelque grande qu'elle soit, ne sauroit plier la colonne : puisqu'il n'y auroit point de raison, pourquoi la colonne se plieroit dans un sens plutôt que dans un autre. Mais la moindre inégalité dans les parties de la colonne, ou le moindre effort qu'elle éprouve par quelque côté, fournit bientôt la raison suffisante, pour la faire plier dans un certain sens. Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient, ne surpasse point la quantité $\pi\pi.\frac{Ekk}{aa}$, il n'y a point à craindre que la co-

lonne

lonne ſubiſſe la moindre inflexion: mais un fardeau plus peſant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau ſurpaſſe la quantité marquéee $\pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$.

X. Cette différence entre l'action d'une force horizontale & verticale ne paroitra pas peu paradoxe: & il ſemble que, ſi une grande force fait plier une colonne, une moindre devroit toujours produire un ſemblable effet, quoiqu'il fut peut-être imperceptible. Cela ſemble exiger le principe de continuité: car, quel que ſoit le rapport entre la force & l'inflexion produite, il eſt difficile à concevoir, comment des forces, qui ſe trouvent au deſſons d'une certaine quantité, ne puiſſent produire abſolument aucune inflexion, tandis que de plus grandes en produiſent inconteſtablement. Mais ce raiſonnement n'eſt que précipité, puiſqu'on pourroit produire une infinité de cas ſemblables dans les lignes courbes, où nonobſtant le principe de continuité il arrive, qu'il ne répond aucune appliquée aux abſciſſes, tant qu'elles ſont au deſſous d'un certain terme, lequel étant paſſé les appliquées deviennent réelles.

XI. Donc, pour expliquer ce paradoxe, on n'a qu'à dire, que tant que le poids ſoutenu par la colonne eſt moindre que la quantité $\pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$, l'inflexion eſt imaginaire, & qu'elle devient $= 0$, lorsque le poids atteint cette limite, & que paſſant cette limite l'inflexion devienne réelle & croiſſe avec la force. Comme cela eſt conforme aux principes du calcul, lequel étant fondé ſur le principe de continuité, ne ſauroit rien donner de contraire à ce principe; on eſt ſans doute obligé d'acquieſcer à cette explication, & on peut établir pour principe général, que les réſultats du calcul fourniſſent toujours les plus ſures régles, que nous devons ſuivre dans nos raiſonnemens ſur le principe de continuité. Or on ne ſauroit reſtraindre cette maxime à la ſeule Géometrie, ou aux ſpéculations purement théoriques. Après que

que je viens de montrer, qu'un cas ſemblable a actuellement lieu dans les colonnes, qui ne ſont plus du reſſort d'une Théorie purement ſpéculative.

XII. La formule $\pi\pi.\frac{Ekk}{aa}$ nous fournit des conſéquences auſſi importantes que curieuſes ſur la force des colonnes. D'abord nous voyons, que plus une colonne eſt haute, & moins eſt elle capable de ſoutenir, ce qui ſe trouve ſuffiſamment conſtaté par l'expérience: mais nous voyons de plus, que la force qu'une colonne peut ſoutenir, eſt réciproquement comme le quarré de ſa hauteur. Donc deux colonnes cylindriques de la même matiere & d'une égale épaiſſeur & dont l'une ſoit deux fois plus haute que l'autre, étant propoſées, on peut prononcer, que la plus longue ne ſupportera que le quart du poids, que la plus courte eſt capable de ſoutenir. Enſuite, ſi le moment de roideur eſt proportionnel au cube du diametre, les colonnes étant cylindriques, & qu'une colonne dont la hauteur eſt $= a$, & le diametre $= d$, puiſſe ſoutenir un poids $= p$; une autre colonne de la même matiere, dont la hauteur $=$ A, & le diametre $=$ D, ſoutiendra le poids $=$ P, en ſorte qu'il ſoit

$$p : P = \frac{d^3}{aa} : \frac{D^3}{AA}, \quad \text{\& partant} \quad P = \frac{aaD^3}{AAd^3}.p.$$

D'où l'on peut comparer enſemble les forces de différentes colonnes tant par rapport à leur hauteur qu'à leur épaiſſeur.

XIII. Pour juger mieux du poids abſolu, qu'une colonne cylindrique peut ſoutenir, ſuppoſons qu'une force égale à ce poids $\pi\pi.\frac{Ekk}{aa}$ ſoit appliquée horizontalement en haut à la même colonne, après l'avoir affermie en bas, en ſorte qu'elle ne puiſſe pas être renverſée, & nous aurons pour le cas de l'expérience dévelopé cy-deſſus §. VIII. $F = \pi\pi.\frac{Ekk}{aa}$: or, cette valeur y étant ſubſtituée, nous

au-

aurons $D\delta = \frac{\pi\pi}{3}.a$: donc, puisque $\pi\pi$ eſt à peu près $= 10$, il y auroit $D\delta = 3\frac{1}{3}\,a = 3\frac{1}{3}.AC$; ce qui eſt ſans doute impoſſible. Mais il faut obſerver, que dans ce calcul nous avons ſuppoſé l'inflexion quaſi infiniment petite, & qu'il ne peut pas par conſéquent être appliqué au cas préſent, pour lequel ſi l'on achevoit le calcul ſelon toute la rigueur, ou trouveroit l'eſpace $D\delta$ beaucoup plus petit. Cependant il eſt aſſez évident, que cette force étant appliquée horizontalement à la colonne, y produiroit une inflexion énorme, d'où l'on peut juger, combien grande doit être la force qu'une colonne eſt capable de ſoutenir verticalement.

XIV. Après ces réflexions je paſſe à la démonſtration de cette régle, ou plutôt à l'analyſe qui y conduit : car, puiſque celle dont je me ſuis ſervi autrefois, eſt principalement appliquée aux lames élaſtiques, où j'ai eu à examiner pluſieurs autres objets à la fois, il ſera bon de donner ici une analyſe qui y ſoit uniquement attachée, afin qu'on ſoit d'autant plus aſſuré, que la conſidération du reſſort ne change rien dans la courbe qu'une colonne forme en ſe pliant. Je reſtraindrai cette recherche d'abord, comme j'ai fait autrefois, uniquement aux colonnes cylindriques, ou qui ayent par toute leur longueur le même moment de roideur ; & enſuite je tâcherai de pouſſer ces mêmes recherches aux colonnes dont l'épaiſſeur eſt variable. Or on verra que ce problème étant généralement propoſé ſurpaſſe les bornes de l'analyſe, ce qui m'oblige de n'en déveloper que quelques cas particuliers, mais qui ne laiſſeront pas cependant de répandre beaucoup de lumiere ſur cette matiere, & qui fourniront des réflexions aſſez importantes, tant ſur le ſujet même dont il s'agit, que ſur l'analyſe en général.

XV. Concevons donc une colonne cylindrique chargée d'un poids ſi grand, qui la faſſe plier tant ſoit peu, & ſoit AMC la figure infiniment peu courbe, qu'elle aura priſe. Poſons la hauteur de la Fig. 2.

colonne $= a$, qui ne différera pas de la corde AC, que je ſuppoſe verticale, le poids du fardeau, dont elle eſt chargée en D $= P$, & le moment de roideur en chaque endroit $M = Ekk$. Maintenant la colonne eſt ſuppoſée repoſer librement ſur ſon piédeſtal par la baſe AB, ſans y être affermie comme auparavant, où il s'agiſſoit de découvrir ſon moment de roideur, où un tel affermiſſement étoit néceſſaire. La ligne verticale CA exprime donc la direction de la force P, qui produit cette inflexion : laquelle étant ſuppoſée infiniment petite, on pourra négliger le propre poids de la colonne, puisqu'il ne ſauroit presque rien contribuer à l'inflexion : du moins je fais ici abſtraction de ſon effet, pour rendre la queſtion plus ſimple : me propoſant d'examiner dans la ſuite, combien le propre poids de la colonne influe ſur ſa force.

XVI. Prenant maintenant ſur la verticale une abſciſſe quelconque $CA = x$, à laquelle réponde l'appliquée $PM = y$, qui étant infiniment petite, l'abſciſſe x examinera en même tems l'arc CM ; & partant prenant l'élément dx conſtant le rayon de courbe en M ſera $= \frac{-dx^2}{ddy}$, puisque la courbe tourne ſa concavité vers l'axe CA. Or la force P agiſſant dans la direction CA, ſon moment pour produire cette courbe en M ſera $= Py$: donc, en vertu du principe établi cy-deſſus (§. 7.) nous aurons $\frac{-dx^2}{ddy} = \frac{Ekk}{Py}$, ou bien $\frac{Ekk}{P} ddy + ydx^2 = 0$. Multiplions par $2dy$ & l'intégrale ſera $\frac{Ekk}{P} dy^2 + yydx^2 = Cdx^2$; ou $dx = \frac{dy\sqrt{Ekk}}{\sqrt{P(C-yy)}}$: pour déterminer la conſtante C, ſoit θ la tangente de l'angle infiniment petit PCM, & poſant $y = 0$, il faut qu'il devienne $\frac{dy}{dx} = \theta$, donc $1 = \frac{\theta\sqrt{Ekk}}{\sqrt{CP}}$, de ſorte que $CP = Ekk\theta\theta$. Par conſéquent ayant

'ayant $dx = \frac{dy\sqrt{Ekk}}{\sqrt{(Ekk\theta\theta - Pyy)}}$, l'intégration fournit : $x = \sqrt{\frac{Ekk}{P}}$. A ſin $\frac{y\sqrt{P}}{\theta\sqrt{Ekk}}$, où il ne faut pas ajoûter de conſtante puisque l'abſciſſe x doit évanouïr en poſant $y = 0$.

XVII. Par le renverſement de cette équation nous tirons $\frac{y}{\theta}\sqrt{\frac{P}{Ekk}} = \sin x\sqrt{\frac{P}{Ekk}}$. Mais la nature de la queſtion demande, qu'il devienne encore $y = 0$, en prenant $x = CA = a$, il faut donc que l'angle $a\sqrt{\frac{P}{Ekk}}$ ſoit égal à deux droits, & partant poſant le rapport du diametre à la circonférence $= 1 : \pi$, nous aurons $a\sqrt{\frac{P}{Ekk}} = \pi$, & par conſéquent $P = \pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$. D'où nous apprenons que, pour faire plier infiniment peu la colonne, il faut que le poids dont elle eſt chargée ſoit $= \pi\pi . \frac{Ekz}{aa}$: & de là il s'enſuit, que tant que le fardeau eſt moindre, la colonne ne ſera aſſujettie à aucune inflexion, pas même infiniment petite. Or ſi l'on dévelope plus exactement le calcul, ſans négliger la petite différence entre l'abſciſſe $CP = x$, & l'arc CM, on trouvera que pour que la tangente de l'angle PCM devienne $= \theta$, il faut que le poids P ſoit $= \pi\pi . \frac{Ekk}{aa}\sqrt{(1 + \theta\theta)}$, cependant cette expreſſion n'a lieu que tandis que θ eſt extrèmement petit.

XVIII. Voilà donc le denoüement complet du paradoxe rapporté cy-deſſus : car puisqu'une inflexion qui répond à l'angle PCM, dont la tangente eſt ſuppoſée $= \theta$, demande un fardeau, dont le poids eſt $P = \pi\pi . \frac{Ekk}{aa}\sqrt{(1 + \theta\theta)}$, il eſt évident, que cette force

doit

doit être plus grande que $\pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$, de ſorte que, tant qu'elle eſt plus petite, elle ne ſauroit produire aucune inflexion, ou bien, ſi $P < \pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$, l'on voit que la quantité θ, qui détermine la grandeur de l'inflexion, deviendroit imaginaire, comme j'ai remarqué cy-deſſus. Au reſte on voit, que la courbe CMA eſt la trochoïde infiniment allongée, ou bien la ligne des *ſinus*; quoique notre deſſein n'exige pas la connoiſſance de cette courbe. Cependant il auroit été impoſſible de parvenir à notre concluſion, ſans le ſecours de l'équation qui exprime la nature de cette courbe.

XIX. Il ne ſera pas plus difficile de parvenir à une équation pour ces courbes, lorsque la colonne n'a pas partout la même épaiſſeur, mais qu'elle varie d'une maniere quelconque; on la pourra conſidérer comme une certaine fonction de l'arc CM, ou bien de l'abſciſſe $CP = x$. Soit donc le moment de roideur en $M = EkkX$, où X marque une fonction quelconque de x; & au lieu de l'équation trouvée pour le cas précédent, nous aurons celle-cy:

$$\frac{-dx^2}{ddy} = \frac{EkkX}{Py}, \text{ ou bien } \frac{Ekk}{P} . Xddy + ydx^2 = 0,$$

qui poſant $y = e^{\int u dx}$ ſe change en celle-cy:

$$du + uudx + \frac{Pdx}{EkkX} = 0.$$

Or on ſait qu'il eſt impoſſible de reſoudre celle équation en général, ce qui m'oblige de borner mes recherches à des cas particuliers, dont la réſolution eſt connue: qui ſont, lorsque X eſt une puiſſance de x, ou bien de $\alpha + \beta x$ dont l'expoſant eſt compris dans cette ſerie;

$$0;\ 4;\ \frac{4}{3};\ \frac{8}{3};\ \frac{8}{5};\ \frac{12}{5};\ \frac{12}{7};\ \frac{16}{7};\ \frac{16}{9};\ \&c.$$

XX.

XX. Supposons donc premièrement $X = \left(\alpha + \frac{\beta x}{a}\right)^4$, de sorte que le moment de roideur en M soit $= Ekk\left(\alpha + \frac{\beta x}{a}\right)^4$, & l'équation pour la courbe :

$$\frac{Ekk}{P}\left(\alpha + \frac{\beta x}{a}\right)^4 ddy + y\,dx^2 = 0.$$

Posons pour abréger $\alpha + \frac{\beta x}{a} = s$, & $\frac{Paa}{\beta\beta Ekk} = nn$, & nous aurons : $s^4 ddy + nny\,ds^2 = 0$, où l'élément ds est constant. Soit $y = b\,e^{\int u\,ds}$ pour obtenir cette équation :

$$du + uu\,ds + \frac{nn\,ds^2}{s^4} = 0,$$

dont l'intégrale complette est $u = \frac{1}{s} - \frac{n}{ss}\ \text{cot.}\left(\zeta + \frac{n}{s}\right)$, où ζ est la constante arbitraire. Maintenant ayant $\int u\,ds = ls + l\sin\left(\zeta + \frac{n}{s}\right)$, on obtiendra $y = bs\sin\left(\zeta + \frac{n}{s}\right)$, ou bien $y = \frac{b}{a}(\alpha a + \beta x)\sin\left(\zeta + \frac{na}{\alpha a + \beta x}\right)$.

XXI. Puisque posant $x = 0$, & $x = a$, il faut que y évanouïsse, nous en déterminerons d'abord la constante $\zeta = -\frac{n}{\alpha}$, de sorte que $y = \frac{b}{a}(\alpha a + \beta x)\sin\frac{-n\beta x}{\alpha(\alpha a + \beta x)}$: où il faut remarquer qu'il est indifférent de prendre n positivement ou négativement, puisque dans l'équation différentio-différentielle il ne se trouve que le quarré nn : d'ailleurs on pourroit aussi donner à b une valeur négative. Mais, pourque y évanouïsse en posant $x = a$, il est clair qu'il doit

doit être $\frac{n\beta a}{\alpha(\alpha a + \beta a)} = \pi = \frac{n\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}$, donc $n = \frac{\pi\alpha(\alpha+\beta)}{\beta}$.

Or notre ſuppoſition donne $P = \frac{aa}{nn\beta\beta} . Ekk$, & partant

$$P = \frac{\pi\pi\alpha\alpha(\alpha+\beta)^2}{aa} . Ekk,$$

le moment de roideur en M étant $= Ekk\left(\alpha + \frac{\beta x}{a}\right)^4$.

Donc une telle colonne demeurera ferme tant que le fardeau qu'elle ſoutient, eſt moindre que $\frac{\pi\pi\alpha\alpha(\alpha+\beta)^2}{aa} . Ekk$: ſi $\alpha = 1$, & $\beta = 0$, nous avons le cas, où la colonne eſt par toute ſa longueur également épaiſſe.

XXII. Cette formule nous donne à connoitre, que ſi $\alpha = 0$, ou $\beta = -\alpha$, il devient $P = 0$: dans le premier cas le moment de roideur évanouït en haut, & dans l'autre en bas; d'où nous voyons qu'une colonne pointue tant en haut qu'en bas n'a aucune force. Mais ſuppoſons l'épaiſſeur en haut telle, qu'il lui réponde le moment de roideur Ekk; & nous aurons $\alpha = 1$, & le moment de roideur en bas ſera $= Ekk(\alpha+\beta)^4 = Ekk(1+\beta)^4$; & partant plus grand: or la charge de cette colonne étant $= \frac{\pi\pi(1+\beta)^2}{aa}.Ekk$ on voit que cet élargiſſement en bas contribue conſidérablement à augmenter la force de la colonne. Si le diamètre de la baſe d'en haut eſt $= f$, & de celle d'en bas $= h$, à cauſe de $f^3 : h^3 = 1 : (1+\beta)^4$; nous aurons $(1+\beta)^2 = \frac{h\sqrt{h}}{f\sqrt{f}}$, & partant s'il y avoit $h = 2f$, la force de la colomne ſeroit $2\sqrt{2}$, ou bien 3 fois plus grande, que ſi l'épaiſſeur étoit partout égale à celle d'en haut.

XXIII.

XXIII. Laissons $\alpha + \frac{\varepsilon x}{a} = s$, & $\frac{Paa}{\varepsilon\varepsilon . Ekk} = nn$; & soit plus généralement le moment de roideur en $M = Ekk . s^{4\lambda}$ ce qui nous fournit cette équation: $s^{4\lambda} ddy + nnyds^2 = 0$, où λ soit un tel nombre, qui rende l'équation intégrable. Or, pour découvrir cette intégrale, mettons $-mm$ pour nn, puisque sans cela nous tomberions en des expressions imaginaires: & posons $y = e^{-m:(2\lambda-1)s^{2\lambda-1}} z$, pour avoir cette équation transformée:

$$ddz + \frac{2mdsdz}{s^{2\lambda}} - \frac{2\lambda mzds^2}{s^{2\lambda+1}} = 0$$

pour laquelle supposons:

$$z = As^{\lambda} + Bs^{3\lambda-1} + Cs^{5\lambda-2} + Ds^{7\lambda-3} + Es^{9\lambda-4} + \&c.$$

& la substitution fournira les déterminations suivantes

$$B = -\frac{\lambda(\lambda-1)A}{2(2\lambda-1)m};\quad C = +\frac{\lambda(\lambda-1)(3\lambda-1)(3\lambda-2)A}{2.4(2\lambda-1)^2 mm}$$

$$D = -\frac{\lambda(\lambda-1)(3\lambda-1)(3\lambda-2)(5\lambda-2)(5\lambda-3)A}{2.4.6(2\lambda-1)^3 m^3}\ \&c.$$

XXIV. Puisque $m = n\sqrt{-1}$, tant l'expression exponentielle $e^{\frac{-m}{2\lambda-1}s^{-2\lambda+1}}$ que les coëfficiens B, D, F, &c. seront imaginaires. Donc, posant pour abréger $(2\lambda-1)s^{2\lambda-1} = v$, nous aurons $e^{\frac{-n\sqrt{-1}}{v}} = \cos\frac{n}{v} - \sqrt{-1}.\sin\frac{n}{v}$. Ensuite soit

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2(2\lambda-1)}=\mathfrak{A};\quad \frac{(3\lambda-1)(3\lambda-2)}{4(2\lambda-1)}=\mathfrak{B};\quad \frac{(5\lambda-2)(5\lambda-3)}{6(2\lambda-1)}=\mathfrak{C};$$

& notre intégrale ſera :

$$y=A\left(\operatorname{cſ}\frac{n}{v}-\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}\frac{n}{v}\right)\left(s^{\lambda}+\frac{\mathfrak{A}\sqrt{-1}}{n}s^{3\lambda-1}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn}s^{5\lambda-2}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\sqrt{-1}}{n^3}s^{7\lambda-3}\ \&c.\right)$$

Or, puiſque nous pouvons prendre avec autant de raiſon n négatif, il y aura également :

$$y=A'\left(\operatorname{cſ}\frac{n}{v}+\sqrt{-1}.\operatorname{ſn}\frac{n}{v}\right)\left(s^{\lambda}-\frac{\mathfrak{A}\sqrt{-1}}{n}s^{3\lambda-1}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn}s^{5\lambda-2}+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\sqrt{-1}}{n^3}s^{7\lambda-3}\ \&c.\right)$$

Mais il eſt aiſé de voir, que ſi chacune de ces deux formules ſatisfait ſeparement à l'équation différentio-différentielle propoſée, leur ſomme lui doit ſatisfaire également. Donc leur ſomme fournira l'intégrale complette de notre équation, puiſqu'elle renferme deux conſtantes arbitraires A & A'.

XXV. Mais, pour délivrer cette expreſſion des imaginaires, il faut donner aux conſtantes A & A' des valeurs imaginaires : ſoit donc $A=M+N\sqrt{-1}$, & $A'=M-N\sqrt{-1}$, par ce moyen la ſomme des deux expreſſions trouvées, & partant l'intégrale complette, ſera exprimée en ſorte :

$$y=\begin{array}{l}+2\left(M\operatorname{coſ}\frac{n}{v}+N\operatorname{ſin}\frac{n}{v}\right)\left(s^{\lambda}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn}s^{5\lambda-2}+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{n^4}s^{9\lambda-4}-\&c.\right)\\ -2\left(N\operatorname{coſ}\frac{n}{v}-M\operatorname{ſin}\frac{n}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{A}}{n}s^{3\lambda-1}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{n^3}s^{7\lambda-3}+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{n^5}s^{11\lambda-5}-\&c.\right)\end{array}$$

Soit $M=\frac{1}{2}b\operatorname{ſin}\zeta$, & $N=\frac{1}{2}b\operatorname{coſ}\zeta$, pour avoir

$$y=\begin{array}{l}b\operatorname{ſin}\left(\zeta+\frac{n}{v}\right)\left(s^{\lambda}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn}s^{5\lambda-2}+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{n^4}s^{9\lambda-4}-\&c.\right)\\ -b\operatorname{cſ}\left(\zeta+\frac{n}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{A}}{n}s^{3\lambda-1}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{n^3}s^{7\lambda-3}+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{n^5}s^{11n-5}-\&c.\right)\end{array}$$

Qu'on

Qu'on pose de plus pour abréger :

$$s^{\lambda} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn} s^{5\lambda-2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{n^4} s^{9\lambda-4} - \text{\&c.} = \mathrm{R}$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{n} s^{3\lambda-1} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{n^3} s^{7\lambda-3} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{n^5} s^{11n-5} - \text{\&c.} = \mathrm{Q},$$

& qu'on introduise l'angle ϕ, dont tang $\phi = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$, & on aura enfin

$$y = b\sqrt{(\mathrm{RR}+\mathrm{QQ})}\,.\,\sin\left(\zeta + \frac{n}{v} - \phi\right).$$

XXVI. Maintenant la solution de notre problême, par lequel nous cherchons la force P capable de faire plier la colonne, dont la hauteur $\mathrm{AC} = a$, & le moment de roideur dans un endroit quelconque $\mathrm{M} = \mathrm{E}kk\left(\alpha + \frac{\beta x}{a}\right)^{4\lambda}$ nommant $\mathrm{CP} = x$, s'achevera en sorte. Premièrement on pose $x = o$, ou $s = \alpha$, & ayant déterminé pour ce cas les quantités v & ϕ, on déterminera l'angle constant $\zeta = \phi - \frac{n}{v}$. Ensuite on mettra $x = a$, & $s = \alpha + \beta$, & après avoir conformément déterminé les quantités v & ϕ, il faut que l'angle $\zeta + \frac{n}{v} - \phi$ devienne $= \pi$, d'où l'on tirera la valeur de n; & de là enfin la force cherchée $\mathrm{P} = \frac{nn\beta\beta}{aa}.\mathrm{E}kk$. Si l'on pose $\lambda = o$, ce qui est le cas des colonnes également épaisses, on a $v = -\frac{1}{s}$; $\mathfrak{A} = o$, $\mathfrak{B} = o$, &c. donc $\mathrm{R} = 1$ & $\mathrm{Q} = o$, par conséquent $\phi = o$, & $\zeta + \frac{n}{v} - \phi = \zeta - ns$. Donc $\zeta - n\alpha = o$ & $\zeta - n(\alpha + \beta) = \pi$, & partant $-n\beta = \pi$:

 d'où

d'où il s'ensuit comme cy-dessus la force $P = \frac{\pi\pi}{aa}.Ekk$. Si $\lambda = 1$, on aura le cas déjà dévelopé, où le moment de roideur étoit $= Ekk\left(\alpha + \frac{6x}{a}\right)^4$, & pour quelques autres ajoûtons les exemples suivans.

I EXEMPLE.

XXVII. La hauteur de la colonne AC étant $= a$, & le moment de roideur en M $= Ekk\left(\alpha + \frac{6x}{a}\right)^4$, à cause de $\lambda = 1$, nous aurons $v = s$; $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, &c. donc $R = s$ & $Q = 0$, & partant tang $\phi = \frac{Q}{R} = 0$, ou $\phi = 0$. Notre angle $\zeta + \frac{n}{v} - \phi$ sera donc $= \zeta + \frac{n}{s}$, & partant $\zeta = -\frac{n}{\alpha}$. Faisons maintenant $s = \alpha + 6$, & posons $-\frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\alpha + 6} = \pi = -\frac{nb}{\alpha(\alpha + 6)}$; d'où nous tirons $n6 = -\pi\alpha(\alpha + 6)$. Par conséquent la force capable de faire plier la colonne sera $P = \frac{\pi\pi\alpha^2(\alpha + 6)^2}{aa}.Ekk$ tout comme nous l'avons trouvée cy-dessus.

2 EXEMPLE.

XXVIII. Soit $\lambda = \frac{1}{3}$, & la hauteur de la colonne étant AC $= a$, le moment de roideur en M sera $= Ekk\left(\alpha + \frac{6x}{a}\right)^{\frac{4}{3}}$. Pour ce cas nous aurons $v = -\frac{1}{3}s^{-\frac{1}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{s}}$, & $\mathfrak{A} = \frac{1}{3}$, $\mathfrak{B} = 0$, donc $R = s^{\frac{1}{3}}$ & $Q = \frac{1}{3n}$, & partant tang $\phi = \frac{1}{3n\sqrt[3]{s}}$, ou bien

bien $\Phi = A\ \text{tang}\ \frac{1}{3n\sqrt[3]{s}}$. Maintenant notre angle étant $\zeta + \frac{n}{v} - \Phi = \zeta - 3n\sqrt[3]{s} - A\ \text{tang}.\frac{1}{3n\sqrt[3]{s}}$, si nous posons $x = 0$, ou $s = \alpha$ pour le point C, nous aurons l'angle constant $\zeta = 3n\sqrt[3]{\alpha} + A\ \text{tang}.\frac{1}{3n\sqrt[3]{\alpha}}$. Soit à présent pour l'autre bout A, $s = \alpha + \beta$, & notre angle doit devenir $= \pi$, ce qui donne

$$3n\sqrt[3]{\alpha} + A\ \text{tang}.\frac{1}{3n\sqrt[3]{\alpha}} - 3n\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} - A\ \text{tg}.\frac{2}{3n\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}} = \pi,$$

d'où l'on doit déterminer la valeur du nombre n, & alors le poids cherché P, qui est capable de faire plier la colonne, sera $P = \frac{nn\beta\beta}{aa}.Ekk$. Puisqu'il est difficile de trouver en général la valeur de n, soit $\alpha = 1$, & β extrêmement petit, & puisque alors $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} = 1 + \frac{1}{3}\beta$, &

$$A\ \text{tang}\frac{1}{3n\sqrt[3]{\alpha}} - A\ \text{tang}\frac{1}{3n\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}} = A\ \text{tang}.\frac{3n\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} - 3n\sqrt[3]{\alpha}}{1+9nn\sqrt[3]{\alpha(\alpha+\beta)}},$$

nous aurons: $-n\beta + A\ \text{tang}\ \frac{n\beta}{1+9nn} = \pi = -\frac{9n^3\beta}{1+9nn}$,

d'où l'on voit que le nombre n est extrêmement grand : & partant assez près $-n\beta = \pi + \frac{\beta\beta}{9\pi}$, de sorte que $P = \left(\pi + \frac{\beta\beta}{9\pi}\right)^2.\frac{Ekk}{aa}$. Mais, en poursuivant plus exactement les approximations, on aura $P = \pi\pi\left(1+\frac{\beta}{3}\right)^2.\frac{Ekk}{aa}$, ou $P = \pi\pi\left(1+\frac{2}{3}\beta\right).\frac{Ekk}{aa}$, le moment de roideur étant en $C = Ekk$, & en $A = \left(1+\frac{4}{3}\beta\right).Ekk$.

XXIX. Puisque nous voyons, que si β est un nombre fort petit par rapport à α, le nombre n devient très grand, les arcs seront à peu près égaux à leur tangentes, & partant nous aurons

$$3n\sqrt[3]{\alpha} - 3n\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} + \frac{1}{3n\sqrt[3]{\alpha}} - \frac{1}{3n\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}} = \pi,$$

d'où nous tirons assez près $n = \frac{-\pi}{3\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} - 3\sqrt[3]{\alpha}}$, & partant $P = \frac{\pi\pi\beta\beta}{9[\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} - \sqrt[3]{\alpha}]^2} \cdot \frac{Ekk}{aa}$. Or, si β étoit plus grand, cette formule tromperoit: cependant l'erreur ne sera pas considérable, tant que β n'excede pas considérablement α. Pour prouver cela, soit $\beta = \alpha$, & selon cette régle on auroit $n = \frac{-\pi}{3\sqrt[3]{2\alpha} - 3\sqrt[3]{\alpha}} = -\frac{4{,}0289}{\sqrt[3]{\alpha}}$. Or faisant le calcul on trouve $n = -\frac{4{,}0505}{\sqrt[3]{\alpha}}$, & $P = 16{,}4065\,\alpha\sqrt[3]{\alpha} \cdot \frac{Ekk}{aa}$. Donc si $\alpha = 1$, & le moment de roideur en $M = \left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot Ekk$, le poids, que cette colonne peut soutenir sera $P = 16{,}4065 \cdot \frac{Ekk}{aa}$. Or, si le moment de roideur étoit $= \left(1+\frac{x}{a}\right)^{4} \cdot Ekk$, ce poids se trouve $P = 39{,}47844 \cdot \frac{Ekk}{aa}$: mais pour le cas du moment de roideur constant $= Ekk$, on a $P = 9{,}86961 \cdot \frac{Ekk}{aa}$.

3. EXEMPLE.

XXX. Soit $\lambda = \frac{2}{3}$, ou la hauteur de la colonne étant $AC = a$, le moment de roideur en $M = \left(\alpha^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta x}{a}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot Ekk$, & pour ce cas nous au-

aurons $v = \frac{1}{3}\sqrt[3]{s}$, $\mathfrak{A} = -\frac{1}{3}$, $\mathfrak{B} = 0$, donc $R = \sqrt[3]{ss}$; & $Q = -\frac{1}{3n}s$, & partant tang $\Phi = -\frac{\sqrt[3]{s}}{3n}$, par conſéquent notre angle $= \zeta + \frac{3n}{\sqrt[3]{s}} + \mathrm{A\,tang}\,\frac{\sqrt[3]{s}}{3n}$. Soit $s = \alpha$, & nous aurons $\zeta = -\frac{3n}{\sqrt[3]{\alpha}} - \mathrm{A\,tang}\,\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{3n}$. De plus poſant $s = \alpha + \beta$, il faut qu'il devienne :

$$-\frac{3n}{\sqrt[3]{\alpha}} + \frac{3n}{\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}} - \mathrm{A\,tang}\,\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{3n} + \mathrm{A\,tang}.\,\frac{\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}}{3n} = \pi,$$

où il eſt encore évident, que ſi β eſt fort petit par rapport à α, le nombre n ſera fort grand, & partant il y aura fort exactement $nn = + \frac{\pi\pi\sqrt[3]{\alpha\alpha\,(\alpha+\beta)^2}}{9[\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} - \sqrt[3]{\alpha}]^2}$, donc le poids que la colonne eſt capable de ſoutenir ſera : $P = \frac{\pi\pi\beta\beta\sqrt[3]{\alpha\alpha(\alpha+\beta)^2}}{9[\sqrt[3]{(\alpha+\beta)} - \sqrt[3]{\alpha}]^2} \cdot \frac{Ekk}{aa}$.
Mais, quand β ſurpaſſe α, il faut déterminer plus exactement le nombre n.

4 EXEMPLE.

XXX. Les autres cas où notre équation peut-être reſoluë, conduiroient à des formules trop compliquées. Mais il y a encore un cas bien remarquable, quand $\lambda = \frac{1}{2}$, où le moment de roideur en $M = \left(\alpha + \frac{\beta x}{a}\right)^2 \cdot Ekk$; puisqu'alors notre équation différentio-différentielle poſant $\alpha + \frac{\beta x}{a} = s$ devient homogene $ssddy + nnyds^2 = 0$, à laquelle doit ſatisfaire une certaine puiſſance de s. Poſons donc $y = s^{\mu}$, & l'expoſant μ ſe déterminera par cette équation $\mu(\mu - 1) + nn = 0$, d'où l'on tire $\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - nn)}$,
&

& cette double valeur nous fournit l'intégrale complette :

$$y = A s^{\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} - nn)}} + B s^{\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - nn)}}.$$

Ici il est clair, que si $\sqrt{(\frac{1}{4} - nn)}$ est réél, ou $nn < \frac{1}{4}$, il est impossible que y évanouïsse dans les deux cas $s = \alpha$, & $s = \alpha + \beta$. D'où il s'ensuit que si $nn < \frac{1}{4}$, une force $P = nn\beta\beta . \frac{Ekk}{aa}$, n'est pas capable de faire plier la colonne. Il en est encore de même si $nn = \frac{1}{4}$, auquel cas l'intégrale est $y = (A + B\,l\,s)\sqrt{s}$.

XXXII. Soit donc $nn > \frac{1}{4}$ & $\sqrt{(nn - \frac{1}{4})} = \nu$, ou $nn = \nu\nu + \frac{1}{4}$, & notre intégrale étant $y = \left(A s^{+\nu\sqrt{-1}} + B s^{-\nu\sqrt{-1}}\right)\sqrt{s}$, les exposans imaginaires se réduisent en cette forme :

$$y = [(A + B) \operatorname{cos}. \nu l s + (A - B)\sqrt{-1}. \operatorname{sin} \nu l s]\sqrt{s},$$

& changeant les constantes nous aurons : $y = b \operatorname{sin}(\zeta + \nu l s). \sqrt{s}$. Or la position $s = \alpha$ donne $\zeta = -\nu\, l\, \alpha$, & posant $s = \alpha + \beta$, il faut qu'il soit $-\nu\, l\, \alpha + \nu\, l\,(\alpha + \beta) = \pi = \nu l\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$,

donc $\nu = \frac{\pi}{l(1 + \frac{\beta}{\alpha})}$ & $nn = \frac{1}{4} + \frac{\pi\pi}{[l(+\frac{\beta}{\alpha})]^2}$,

& cette valeur de nn étant la force cherchée sera

$$P = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\pi}{[l(+\frac{\beta}{\alpha})]^2}\right)\beta\beta . \frac{Ekk}{aa},$$

ou toute force moindre que celle-cy ne produira aucune inflexion.

XXXIII. Ces cas peuvent suffire pour juger de la force des colonnes non cylindriques, pourvu que leur figure ne s'écarte pas très considérablement de celles qui répondent aux cas dévelopés. Si la figure ne différe pas beaucoup d'un cylindre, tous ces cas aboutissent au même resultat : car soit le moment de roideur en haut en $C = Ekk$, & celui d'en bas en $A = mmEkk$, où m soit un nombre peu différent de l'unité ; & nous aurons dans tous nos exemples $\alpha = 1$. Or si la figure répond au premier exemple, nous aurons $(1+\beta)^4 = mm$, donc $(1+\beta)^2 = m$. Donc cette colonne pourra soutenir sans se plier un poids $P = \pi\pi m.\frac{Ekk}{aa} = 9{,}86961\,m.\frac{Ekk}{aa}$.

Mais, si elle convient avec le second exemple, à cause de $(1+\beta)^{\frac{4}{3}} = mm$ & $1+\beta = m^{\frac{3}{2}}$, ce poids sera

$$P = \frac{\pi\pi(m^{\frac{3}{2}}-1)^2}{9(\sqrt{m}-1)^2}\frac{Ekk}{aa} = \tfrac{1}{9}\pi\pi(m+\sqrt{m}+1)^2.\frac{Ekk}{aa};$$

& partant, si $m = 1+\omega$, de sorte que ω soit fort petit, on aura $P = \pi\pi(1+\omega).\frac{Ekk}{aa}$: ce même accord se trouve aussi dans les autres exemples. Mais, si m n'est pas si près de l'unité, le premier exemple demeure dans son entier, mais le quatrième donne

$$P = (m-1)^2\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi\pi}{(lm)^2}\right).\frac{Ekk}{aa},\text{ à cause de } 1+\beta = m.$$

XXXIV. Si la colonne a la figure d'un cone tronqué, & que le diametre de la base d'en haut soit $= f$, & de celle d'en bas $= h$, le diametre de son épaisseur en M sera $= f+\frac{(h-f)x}{a}$. Donc, posant le moment de roideur en haut $= Ekk$, si le moment de roideur étoit comme le quarré-quarré du diametre de l'épaisseur, nous aurions le cas du premier exemple, & le poids, que la colonne peut sou-

soutenir sans se plier seroit $P = \frac{\pi\pi hh}{ff} \cdot \frac{Ekk}{aa}$. Mais, si le moment de roideur étoit comme le cube du diametre de l'épaisseur, le moment de roideur en M sera $= Ekk\left(1 + \frac{(h-f)x}{fa}\right)^3$, auquel cas notre calcul ne peut pas être appliqué. Mais, si h différe fort peu de f, puisqu'il y aura fort à peu près

$$\left(1 + \frac{(h-f)x}{fa}\right)^3 = 1 + \frac{3(h-f)x}{fa} = \left(1 + \frac{3(h-f)x}{4fa}\right)^4.$$

Le premier exemple, à cause de $\alpha = 1$, & $\beta = \frac{3(h-f)}{4f}$, donne le poids, que cette colonne peut encore soutenir sans se plier $P = \frac{\pi\pi(3h+f)^2}{16ff} \cdot \frac{Ekk}{aa}$. Or ce cas étant pareillement appliqué au quatrième exemple, où l'on auroit $\beta = \frac{3(h-f)}{2f}$, on trouveroit ce poids $P = \frac{9(h-f)^2}{4ff}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\pi}{(l\frac{3h-f}{2f})^2}\right) \cdot \frac{Ekk}{aa}$.

la lettre a marquant la hauteur de la colonne.

XXXV. Quoique ces deux expressions deviennent d'accord si la différence $h-f$ est extrèmement petite, elles s'écartent sensiblement, lorsque cette différence $h-f$ est considérable, la derniere donnant une valeur plus petite pour P. Cependant, comme la véritable formule $\left(1 + \frac{(h-f)x}{fa}\right)^3$, tient un milieu entre celles qui repondent à nos deux exemples, il est certain que la valeur de P tirée du premier exemple est trop grande, & l'autre trop petite, de sorte qu'en prenant en chaque cas un milieu, on approchera fort de la vérité

vérité. Ainsi, s'il étoit $h = 2f$ la premiere formule donneroit $P = 30,22568 . \frac{Ekk}{aa}$, & la seconde $P = 27,01186 . \frac{Ekk}{aa}$, donc prenant un milieu il y aura fort à peu près $P = 28\frac{1}{2} . \frac{Ekk}{aa}$. Or la pratique ne demande jamais un tel degré de précision.

XXVI. Examinons enfin aussi, combien le propre poids d'une colonne contribue à la plier: dans cette recherche je considérerai la colonne comme cylindrique, dont la hauteur soit, comme jusqu'ici, $AC = a$, & soit Q le poids de toute la colonne, P étant celui du fardeau dont elle est chargée. Rapportons l'inflexion qui en naît à celle de l'axe de la colonne, puisqu'il passe par les centres de gravité de toutes les sections. Soit donc CMA la figure de cet axe courbé, Fig. 3. dont la courbure soit infiniment petite, & le moment de roideur partout $= Ekk$. Nommant maintenant $CP = x$ & $PM = y$, le rayon de courbure en M sera $= -\frac{dx^2}{ddy}$, prenant dx pour constant; & le moment de la force P pour produire cette inflexion sera $= Py$, auquel il faut ajoûter le moment qui résulte du poids de la partie CM. Or la longueur CM étant $= x$, le poids de la partie CM sera $= \frac{Qx}{a}$: lequel doit être conçu ramassé au centre de gravité de la partie CM, mais cette considération meneroit à un calcul trop ennuyant.

XXXVII. Envisageons pour un moment le point M comme fixe, par rapport auquel le point Y soit variable, & nommons $CX = CY = X$ & $XY = Y$. Maintenant, quel que soit le moment du poids de l'arc CY sur le point M, son différentiel sera égal au poids de l'élément $Yy = \frac{QdX}{a}$ par $y - Y$, c'est à dire

$$= \frac{QdX}{a}(y - Y) = \frac{Q}{a}(yX - \int YdX.$$

Avan-

Avançons à préſent le point Y jusqu'en M, & à cauſe de $X = x$ & $Y = y$, le moment du poids de la partie, qui répond à l'arc

$$CM \text{ fera } = \frac{Q}{a}(xy - \int y\,dx) = \frac{Q}{a}\int x\,dy,$$

qui étant ajoûté au moment déjà trouvé Py, donne le moment total $= Py + \frac{Q}{a}\int x\,dy$, d'où nous tirons pour la courbe cette équation :

$$Ekk = -\frac{dx^2}{a\,ddy}(Pay + Q\int x\,dy),$$

ou bien $Ekka\,ddy + Pay\,dx^2 + Q\,dx^2\int x\,dy = 0$,

laquelle étant encore différentiée pour la dégager de l'intégral $\int x\,dy$ donne $Ekka\,d^3y + Pa\,dx^2\,dy + Qx\,dx^2\,dy = 0$.

XXXVIII. Poſons pour abréger $1 + \frac{Qx}{Pa} = s$, & l'élément ds fera maintenant conſtant. Donc, à cauſe de $dx = \frac{Pa\,ds}{Q}$, notre équation prendra cette forme :

$$\frac{QQ}{P^3}.\frac{Ekk}{aa}d^3y + s\,ds^2\,dy = 0.$$

Soit $dy = u\,ds$, & à cauſe de $d^3y = ds\,ddu$ nous aurons

$$\frac{QQ}{P^3}.\frac{Ekk}{aa}ddu + us\,ds^2 = 0,$$

laquelle ſe peut bien réduire à une équation ſimplement différentielle en poſant $u = e^{\int v\,ds}$, & on parviendra à celle-cy :

$$dv + vv\,ds + \frac{P^3aa}{Q^2Ekk}.s\,ds = 0,$$

qui eſt un tel cas de l'équation de Riccati, qu'on s'eſt donné jusqu'ici en vain la peine de l'intégrer : & partant on n'en attendra pas ici le dénouëment.

XXXIX. Cependant, quand le poids Q est très petit par rapport au poids P, ce qui arrivera presque toujours, puisqu'une colonne peut toujours porter un poids, qui surpasse plusieurs fois son propre poids, avant que de plier : dans ces cas il ne sera pas difficile d'approcher de la solution. Car, puisque $s = 1 + \frac{Qx}{Pa}$ différe fort peu de l'unité, & que cette quantité est presque constante ; cette considération nous fournit l'approximation suivante. Posons pour abréger : $\frac{Paa}{Ekk} = nn$ & $\frac{Q}{P} = m$, nombre très petit, & notre équation donnant $\int x\,dy = -\frac{ay}{m} - \frac{a^3\,ddy}{mnn\,dx^2}$, ce sera une condition à remplir dans les intégrations suivantes, que $\int x\,dy$ évanouïsse en posant $x = 0$. Or différentiant encore nous aurons :

$$(a + mx)\,dy + \frac{a^3\,d^3y}{nn\,dx^2} = 0,$$

& faisant $dy = u\,dx$ celle-cy :

$$(a + mx)\,u + \frac{a^3\,ddu}{nn\,dx^2} = 0.$$

XL. S'il étoit $m = 0$, l'intégrale complette seroit $u = \alpha \sin\left(\zeta + \frac{nx}{a}\right)$. Mais, puisque m est très petit, on pourra envisager $1 + \frac{mx}{a}$ comme étant $= \left(1 - \frac{mx}{4a}\right)^{-4}$, desorte qu'on ait

$$nnu\,dx^2 + aa\,ddu\left(1 - \frac{mx}{4a}\right)^4 = 0,$$

dont l'intégrale complette est

$$u = C\left(1 - \frac{mx}{4a}\right)\sin\left(\zeta + \frac{16an}{m(4a - mx)}\right) = \frac{dy}{dx},$$

 &

& partant

$$\frac{du}{dx}=\frac{ddy}{dx^2}=-\frac{Cm}{4a}\sin\left(\zeta+\frac{16an}{m(4a-mx)}\right)+\frac{4nC}{4a-mx}\cos\left(\zeta+\frac{16an}{m(4a-mx)}\right).$$

Mais en intégrant

$$y=\frac{C}{4a}\int(4a-mx)\,dx\sin\left(\zeta+\frac{16an}{m(4a-mx)}\right),$$

ce qu'il faut déterminer par approximation.

XLI. D'abord, puisque m est très petit, on aura $\frac{16na}{m(4a-mx)}=\frac{4n}{m}+\frac{nx}{a}+\frac{mnxx}{4aa}$. Donc posant $\zeta+\frac{4n}{m}=\theta$;

$$u=C\left(1-\frac{mx}{4a}\right)\sin\left(\theta+\frac{nx}{a}+\frac{mnxx}{4aa}\right),\qquad \text{ou}$$

$$u=C\left(1-\frac{mx}{4a}\right)\sin\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)+\frac{mnCxx}{4aa}\cos\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)=\frac{dy}{dx}$$

& en différentiant

$$\frac{du}{dx}=\frac{ddy}{dx^2}=-\frac{mC}{4a}\sin\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)+\frac{nC}{a}\left(1+\frac{mx}{4a}\right)\cos\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)$$
$$-\frac{mnnCxx}{4a^3}\sin\left(\theta+\frac{nx}{a}\right).$$

Mais, puisque y évanouït au cas $x=0$, il faut que $\frac{ddy}{dx^2}$ évanouïsse aussi: ce qui donne

$$-\frac{m}{4}\sin\theta+n\cos\theta=0,\quad\text{donc}\quad \tan\theta=\frac{4n}{m}.$$

En-

Enſuite nous trouverons :

$$y = \int u\,dx = -\frac{Ca}{n}\operatorname{cof}\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)+\frac{3mCx}{4n}\operatorname{cof}\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)-\frac{3mCa}{4nn}\sin\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)$$
$$+\frac{mCxx}{4a}\sin\left(\theta+\frac{nx}{a}\right)+\frac{Ca}{a}\operatorname{cof}\theta+\frac{3mCa}{4nn}\sin\theta,$$

ayant ajoûté une telle conſtante, que y évanouïſſe quand on met $x=0$.

XLII. Maintenant, poſant $x=a$, il faut qu'il devienne encore $y=0$, d'où l'on parvient à cette équation :

$$0=-\frac{1}{n}(\theta+n)+\frac{1}{n}\operatorname{cof}\theta+\frac{3m}{4n}\operatorname{cof}(\theta+n)-\frac{3m}{4nn}\sin(\theta+n)$$
$$+\frac{3m}{4nn}\sin\theta+\frac{m}{4}\sin(\theta+n),$$

d'où il s'agit de trouver la valeur de n. Pour cet effet cherchons encore la valeur de tang θ, qui ſera :

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{4n\operatorname{cof}n-4n-3mn\operatorname{cof}n+3m\sin n-mnn\sin n}{4n\sin u-3mn\sin n-3m\operatorname{cof}n+3m+mnn\operatorname{cof}n}=\frac{4n}{m},$$

d'où l'on trouve, en négligeant les termes, où m monte à la ſeconde dimenſion :

$$4n\sin n-3mn\sin n-4m\operatorname{cof}n+4m+mnn\operatorname{cof}n=0.$$

Puiſque nous ſavons que, s'il étoit $m=0$, il ſeroit $n=\pi$, poſons $n=\pi-\omega$, de ſorte que $\sin n=\omega$, & $\operatorname{cof}n=-1$, & notre équation devenant : $4\pi\omega-3m\omega\omega+4m-m\pi\pi=0$ donne $\omega=\frac{(\pi\pi-8)m}{4\pi}$; donc $n=\pi-\frac{(\pi\pi-8)m}{4\pi}$.

Par

Par conséquent le poids P qui commence à faire plier la colonne sera:

$$P = \left(\pi\pi - \frac{Q}{2P}(\pi\pi - 8)\right).\frac{Ekk}{aa} = \pi\pi.\frac{Ekk}{aa} - \frac{(\pi\pi-8)Q}{2\pi\pi}.$$

XLIII. Par là nous apprenons, que le poids que la colonne est capable de soutenir, est un peu diminué par le propre poids de la colonne, celui-cy contribuant quelque chose à la faire plier. Cependant cet effet est très petit, & puisque $\pi\pi = 10$ fort à peu près' il ne vaut qu'environ la dixième partie du poids entier de la colonne. Ayant donc fait voir que ce poids est fort petit par rapport à celui qui est capable de faire plier la colonne, il est certain que dans l'estime de la force des colonnes on peut hardiment négliger leur propre poids, pourvu qu'elles ne soient faites d'une matiere extrèmement fragile, ou qu'elles ne soient très hautes par rapport à leur épaisseur. Au reste, pour ce qui regarde les colonnes, ou cylindriques, ou qui ont la figure d'un cone tronqué, la matiere étant la même, tant la Théorie que quelques expériences faites sur la roideur des corps, nous assurent que le moment de roideur en chaque endroit est assez exactement proportionnel au quarré-quarré du diametre de l'épaisseur, ou au quarré de la section faite au même endroit.

XLIV. De ce que je viens d'exposer, on peut tirer les conséquences suivantes sur la force des colonnes. D'abord on peut supposer, qu'on ait une colonne cylindrique quelque petite qu'elle soit, faite de la même matiere, & qu'on ait déterminé par quelques expériences le poids qu'elle est capable de soutenir sans se plier. Soit a la hauteur de cette colonne d le diametre de l'une de ses bases, & p le poids qu'elle peut soutenir. Maintenant ayant une autre colonne cylindrique faite de la même matiere, dont la hauteur soit $= A$, & le diametre de l'une de ses bases $= D$; on trouvera le poids qu'elle peut soutenir $P = \frac{aaD^4}{AAd^4}.p$. Mais si la colonne a la figure d'un cone

tron-

tronqué de la hauteur $=$ A, & que le diametre de sa base d'en haut soit $=$ D, & de celle d'en bas $=$ E, le poids qu'elle sera capable de soutenir sera $P = \frac{aaDDEE}{AAd^4}p$. Si l'on veut juger des colonnes faites d'une autre matiere, il faut se procurer un modele de la même matiere, pour servir de fondement à ces conclusions.

XLV. Considérons deux colonnes parfaitement semblables, & faites de la même matiere, les mesures de la premiere étant à celles de l'autre comme $1 : n$, & il est clair, que les poids soutenus par ces colonnes seroient entr'eux comme $1 : nn$, ou bien une colonne, dont la hauteur seroit double, & partant aussi le diametre de son épaisseur, ne seroit capable de porter qu'un poids quadruple, quoique son poids soit 8 fois plus grand. Or, si les batimens soutenus par les colonnes sont semblables, il faudroit que les colonnes, dont la hauteur est double, portassent un poids huit fois plus grand, & en général les poids soutenus par les colonnes devroient être proportionnels aux cubes de leurs hauteurs. A cet égard donc, on peut dire que les colonnes plus hautes sont moins fortes; entant qu'on les construit sur le même modele, comme les Architectes ont coutume de faire. Et partant si les poids que les colonnes doivent soutenir, suivent la raison cubique de leur hauteur, leur épaisseur doit être augmentée dans une plus grande raison que leur hauteur, & on ne sauroit plus les former sur le même modele.

XLVI. Car, posant la hauteur d'une petite colonne $= a$, le diametre de son épaisseur $= d$, & le poids qu'elle est capable de soutenir $= p$; s'il faut construire une colonne de la hauteur na, qui doive porter le poids $= n^3 p$, le diametre de l'épaisseur de cette colonne ne doit pas être pris $= nd$, mais il faut qu'il soit $= nd\sqrt[4]{n}$; d'où l'on tire cette table

hauteur de la colonne	diametre de l'épaisseur	poids soutenu	hauteur de la colonne	diametre de l'épaisseur	poids soutenu
a	1,0000 d	p	7 a	11,3860 d	343 p
2 a	2,3784 d	8 p	8 a	13,4543 d	512 p
3 a	3,9528 d	27 p	9 a	15,5885 d	729 p
4 a	5,6568 d	64 p	10 a	17,3828 d	1000 p
5 a	7,4767 d	125 p	11 a	20,0327 d	1331 p
6 a	9,3905 d	216 p	12 a	22,3345 d	1728 p

XLVII. Peut-être que ces proportions ſerviroient mieux à établir les ordres & les régles pour la conſtruction des colonnes, ſi nous en exceptions ce qui regarde uniquement leurs ornemens. Mais, puiſque le poids à ſoutenir n'eſt pas toujours proportionnel au cube de la hauteur des colonnes, il conviendra de donner à notre régle une plus grande étendue. Soit la hauteur d'une colonne, qui nous ſert de modele $= a$, le diametre de ſon épaiſſeur $= d$, & le poids, qu'elle eſt capable de ſoutenir $= p$, & qu'il faille conſtruire une colonne de la même matiere, dont la hauteur ſoit $= na$, & qui doive ſoutenir un poids $= mp$. Alors il faudra que le diametre de l'épaiſſeur de cette colonne ſoit $= d\sqrt[4]{mnn}$; & de là on tirera aiſément pour tous les cas la juſte épaiſſeur des colonnes qu'on veut employer; dont le diametre doit ſuivre la raiſon compoſée de la racine quarrée de ſa hauteur, & de la racine quarré-quarrée du poids qu'elle doit ſoutenir.