



1759

Recherches sur la déclinaison de l'aiguille aimantée

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Recherches sur la déclinaison de l'aiguille aimantée" (1759). *Euler Archive - All Works*. 237.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/237>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



RECHERCHES
SUR LA DÉCLINAISON DE L'AIGUILLE
AIMANTÉE.
PAR M. EULER.



La Carte que feu M. *Halley* a donnée sur la déclinaison de l'aiguille aimantée est trop connue, pour que j'aye besoin d'en donner une description détaillée. On y voit d'abord deux lignes courbes, qui passent par les endroits de la Terre, où la déclinaison a été nulle au commencement de ce siècle, pour lequel tems cette Carte fut dressée. Ensuite elle contient aussi des lignes tirées par les endroits, où la déclinaison fut alors de 5° , ou de 10° , ou de 15° &c. tant vers l'est que vers l'ouest. Comme cette Carte n'est fondée que sur des observations, elle offre un très important sujet à la Théorie, pour rendre raison de la figure de ces lignes, qui au premier coup d'oeil paroissent extrêmement bizarres. Or tous ceux qui ont entrepris cette recherche, furent bientôt obligés de l'abandonner par les difficultés presque insurmontables, qu'ils y ont rencontrées. La principale cause n'étoit pas tant la figure bizarre des lignes Halleyennes, qui ne semble susceptible d'aucune loi géométrique, que la persuasion, où l'on étoit par l'autorité de M. *Halley*, que les phénomènes de la déclinaison magnétique étoient causés par quatre poles magnétiques, qui se trouvoient dans les entrailles de la Terre, dont il avoit supposé deux fixes & deux mobiles, pour

ren-



rendre raison des changemens, qu'on observe avec le tems dans la déclinaison du même endroit.

Si nous étions bien assurés, qu'il y eut effectivement quatre poles magnétiques dans la Terre, comme on le croit généralement sur l'autorité de M. *Halley*, je conviens qu'une telle entreprise seroit trop hardie du moins pour l'état présent de nos connoissances, puisque la force directrice, dont deux ou plusieurs aimants agissent à la fois sur une aiguille, nous est encore tout à fait inconnue : & il vaudroit sans doute mieux d'abandonner d'abord cette entreprise, que de la fonder sur des hypotheses arbitraires. Il y a aussi grande apparence, que quand même on connoitroit à fond l'action simultanée de deux aimants sur une aiguille, le développement demanderoit des calculs trop compliqués. Mais, avant que nous renoncions tout à fait à cette recherche, il faudroit examiner plus soigneusement, si la raison, pourquoi M. *Halley* a établi quatre poles dans la Terre, est bien solide : car, en cas que la Terre n'eut que deux poles magnétiques, le problème se réduiroit à la pure Geometrie. Or la principale & l'unique raison, que M. *Halley* apporte pour établir quatre poles magnétiques, se réduit à ce raisonnement :

Si la Terre n'avoit que deux poles magnétiques, sous chaque méridien la boussole devoit décliner par tout en même sens, ou vers l'est ou vers l'ouest.

Mais on a observé que sous le méridien, qui passe par la baye de Hudson & les côtes du Bresil, la déclinaison étoit occidentale dans la baye de Hudson & orientale sur les côtes du Bresil, & même fort grande dans l'un & l'autre endroit.

D'où il s'ensuit, que deux poles magnétiques ne sont pas suffisans pour expliquer les phénomènes de la déclinaison.

Pour examiner la force de ce raisonnement, je remarque d'abord, que, si les deux poles magnétiques étoient diamétralement opposés, il
ne



ne sauroit arriver, que sous un même méridien la déclinaison fut quelque part orientale, & dans un autre endroit occidentale. Mais, dès que les deux poles magnétiques ne sont plus diamétralement opposés l'un à l'autre, la première proposition perd toute sa force, & il peut alors fort bien arriver, que sous un même méridien la déclinaison soit quelque part orientale, & en d'autres endroits occidentale. Comme je prouverai cela indubitablement dans la suite, il me sera permis de regarder l'hypothèse de quatre poles magnétiques comme fort douteuse; & avant qu'on ait très évidemment prouvé, que deux poles magnétiques ne sont pas suffisans pour expliquer les phénomènes de la déclinaison magnétique, ce seroit contre les règles d'une bonne Physique si l'on vouloit recourir à quatre poles. Après cette remarque, voilà un problème bien important, qui est de déterminer la déclinaison de l'aiguille aimantée pour tous les lieux de la terre, lorsque les deux poles magnétiques ne sont pas diamétralement opposés. Pour mieux épuiser ce problème, qui est, comme on verra, d'une fort grande étendue, & qui renferme des recherches très curieuses, je commencerai par considérer le cas, où les deux poles magnétiques sont diamétralement opposés; ensuite je les supposerai en deux méridiens opposés, mais non pas également éloignés des poles de la Terre. En troisième lieu, je les supposerai dans un même méridien; & enfin quatrième, en deux méridiens différens, d'où je partagerai mes recherches en quatre Sections. Si la Terre n'a que deux poles magnétiques, comme j'espère de le prouver, ces quatre cas peuvent devenir également intéressans; car, puisqu'il est certain, que ces poles changent de place avec le tems, il est possible que chaque cas ait déjà existé, ou qu'il aura un jour lieu.

PRE-



PREMIERE SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant diamétralement opposés.

I.

Comme cette recherche, de même que les suivantes, demandent la résolution analytique des triangles sphériques, il sera bon d'en mettre les formules devant les yeux, afin qu'on n'ait pas besoin de les chercher ailleurs. Je commencerai donc par les triangles rectangles; marquant les trois angles par les lettres A, B, C dont C est supposé droit, & les côtés qui leur sont opposés par les lettres a, b, c , dont c fera l'hypoténuse. Les règles pour la résolution sont contenues dans les Lemmes suivans.

LEMME I.

II. L'hypoténuse c avec un cathete a d'un triangle sphérique ABC étant donnés, trouver l'autre cathete b avec les angles A & B.

RÉSOLUTION.

$$\text{I. } \operatorname{cof} b = \frac{\operatorname{cof} c}{\operatorname{cof} a}; \quad \text{II. } \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \text{III. } \operatorname{cof} B = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}.$$

LEMME 2.

III. Les deux cathetes a & b d'un triangle rectangle sphérique étant donnés, trouver l'hypoténuse c avec les angles A & B.

RÉSOLUTION.

$$\text{I. } \operatorname{cof} c = \operatorname{cof} a \operatorname{cof} b; \quad \text{II. } \operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b}; \quad \text{III. } \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a}.$$

LEMME 3.

IV. L'hypoténuse c , avec un des angles A d'un triangle rectangle sphérique, étant donnés, trouver l'autre angle B avec les cathetes a & b .



RÉSOLUTION.

I. $\cot. B = \cos c \tan g A$; II. $\sin a = \sin c \sin A$; III. $\tan g b = \tan g c \cos A$.

LEMME 4.

V. Un cathete a avec l'angle, qui lui est opposé A , d'un triangle rectangle sphérique, étant donnés, trouver l'hypoténuse c , & l'autre cathete b , avec l'angle, qui lui est opposé B .

RÉSOLUTION.

I. $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$; II. $\sin b = \frac{\tan g a}{\tan g A}$; III. $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$.

LEMME 5.

VI. Un cathete a avec l'angle B , qui lui n'est pas opposé, d'un triangle sphérique rectangle, étant donnés, trouver l'hypoténuse c , & l'autre cathete b avec l'angle A .

RÉSOLUTION.

I. $\tan g c = \frac{\tan g a}{\cos B}$; II. $\tan g b = \sin a \tan g B$; III. $\cos A = \cos a \sin B$.

LEMME 6.

VII. Les deux angles A & B d'un triangle rectangle sphérique étant donnés, trouver l'hypoténuse c avec les deux cathetes a & b .

RÉSOLUTION.

I. $\cos c = \cot. A \cot B$; II. $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$; III. $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$.

VIII. Soit maintenant ABC un triangle sphérique quelconque, dont les angles soient indiqués par les lettres A, B, C , & les côtés tant qu'ils leur sont opposés par les lettres a, b, c . Les résolutions de tous les cas se réduisent aux Lemmes suivans.

LEMME 7.

IX. Dans un triangle sphérique quelconque, les trois côtés a, b, c étant donnés, trouver les angles A, B, C .



RÉSOLUTION.

$$\begin{aligned} \text{I. } \operatorname{cof} A &= \frac{\operatorname{cof} a - \operatorname{cof} b \cdot \operatorname{cof} c}{\sin c \cdot \sin b} \\ \text{II. } \operatorname{cof} B &= \frac{\operatorname{cof} b - \operatorname{cof} a \cdot \operatorname{cof} c}{\sin a \cdot \sin c} \\ \text{III. } \operatorname{cof} C &= \frac{\operatorname{cof} c - \operatorname{cof} a \cdot \operatorname{cof} b}{\sin a \cdot \sin b} \end{aligned}$$

LEMME 8.

X. Dans un triangle sphérique quelconque, les trois angles A, B, C étant donnés, trouver les côtés a, b, c .

RÉSOLUTION.

$$\begin{aligned} \text{I. } \operatorname{cof} a &= \frac{\operatorname{cof} A + \operatorname{cof} B \cdot \operatorname{cof} C}{\sin B \cdot \sin C} \\ \text{II. } \operatorname{cof} b &= \frac{\operatorname{cof} B + \operatorname{cof} A \cdot \operatorname{cof} C}{\sin A \cdot \sin C} \\ \text{III. } \operatorname{cof} c &= \frac{\operatorname{cof} C + \operatorname{cof} A \cdot \operatorname{cof} B}{\sin A \cdot \sin B} \end{aligned}$$

LEMME 9.

XI. Dans un triangle sphérique quelconque, deux côtés a & b avec l'angle C compris entr'eux, étant donnés, trouver le troisième côté c avec les deux autres angles A & B .

RÉSOLUTION.

$$\begin{aligned} \text{I. } \operatorname{cof} c &= \operatorname{cof} a \cdot \operatorname{cof} b + \sin a \sin b \operatorname{cof} C \\ \text{II. } \operatorname{tang} A &= \frac{\sin a \sin C}{\operatorname{cof} a \sin b - \sin a \operatorname{cof} b \operatorname{cof} C} \\ \text{III. } \operatorname{tang} B &= \frac{\sin b \sin C}{\operatorname{cof} b \sin a - \sin b \operatorname{cof} a \operatorname{cof} C} \end{aligned}$$



LEMME 10.

XII. Dans un triangle sphérique quelconque, deux angles A & B avec le côté compris entr'eux c étant donnés, trouver le troisième angle C avec les deux autres côtés a & b .

RÉSOLUTION.

$$\text{I. } \operatorname{cof} C = \operatorname{cof} c \cdot \sin A \cdot \sin B - \operatorname{cof} A \cdot \operatorname{cof} B$$

$$\text{II. } \operatorname{tang} a = \frac{\sin A \sin c}{\operatorname{cof} A \sin B + \sin A \operatorname{cof} B \operatorname{cof} c}$$

$$\text{III. } \operatorname{tang} b = \frac{\sin B \sin c}{\operatorname{cof} B \sin A + \sin B \operatorname{cof} A \operatorname{cof} c}$$

LEMME 11.

XIII. Dans un triangle sphérique quelconque, deux côtés a & b avec les angles A & B , qui leur sont opposés, étant donnés trouver le troisième côté c avec le troisième angle C .

Il faut ici remarquer, qu'il suffit, que des quatre élémens a , b , & A , B trois soient donnés, puisqu'on a toujours $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$.

RÉSOLUTION.

$$\text{I. } \operatorname{tang} c = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{\operatorname{cof} a \sin A \operatorname{cof} B - \operatorname{cof} b \operatorname{cof} A \sin B}$$

$$\text{ou } \sin c = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{\operatorname{cof} a \operatorname{cof} A \sin B - \operatorname{cof} b \sin A \operatorname{cof} B}$$

$$\text{II. } \operatorname{tang} C = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{\operatorname{cof} a \sin b \operatorname{cof} B - \sin a \operatorname{cof} b \operatorname{cof} A}$$

$$\text{ou } \sin C = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{-\operatorname{cof} a \sin b \operatorname{cof} A + \sin a \operatorname{cof} b \operatorname{cof} B}$$



PROBLEME I.

Fig. 2. XIV. *La position des poles magnétiques A & B à l'égard des poles de la terre P & p étant donnée, déterminer, pour un lieu quelconque de la terre L la déclinaison de la bouffole.*

SOLUTION.

Soit P le pole arctique, & p l'antarctique de la terre: que le pole magnétique boreal se trouve en A, & le méridional qui lui est diamétralement opposé en B. Qu'on tire un méridien PAp, qui étant continué passe par les deux poles magnétiques; & j'envisagerai ici comme le premier méridien, celui PAp, qui passe par le pole magnétique boreal. Puisqu'on suppose donnée la position de ces poles, & que les arcs AP & Bp sont égaux, je pose $AP = Bp = a$. Soit maintenant un lieu quelconque de la terre L, par lequel faisant passer le méridien PLp, soit sa longitude exprimée par l'angle $APL = q$, & sa distance au pole arctique ou l'arc $PL = p$. Qu'on tire aussi par L & les poles magnétiques A & B le grand cercle ALB, & il est clair que l'aiguille aimantée en L doit suivre la direction de ce grand cercle; de sorte que l'angle PLA en marque la déclinaison, qui selon la figure sera orientale, en supposant l'orient vers E & l'occident vers F: où il faut remarquer que je compterai toujours la longitude ou l'angle APL vers l'ouest. On aura donc dans le triangle sphérique APL les deux côtés $AP = a$; $PL = p$, avec l'angle compris $APL = q$; d'où l'on trouvera l'angle PLA, ou la déclinaison magnétique. Donc, si nous posons cette déclinaison $= \delta$ entant qu'elle est supposée orientale, on aura

$$\text{tang } \delta = \frac{\sin a \sin q}{\cos a \sin p - \sin a \cos p \cos q}$$

d'où l'on connoitra pour tous les lieux de la terre la déclinaison magnétique.



COROLL. I.

XV. Tant que la valeur de cette formule est positive, la déclinaison sera orientale: mais, si elle devient négative, l'angle δ devenant aussi négatif, marquera une déclinaison occidentale.

COROLL. 2.

XVI. Or l'angle δ ne sauroit devenir négatif, à moins qu'on ne prenne l'angle q plus grand que de 180° ; car, tant que $\sin q$, est positif, la déclinaison est partout tournée vers l'Est, comme l'on voit par la figure. Car, quoique le dénominateur devienne négatif, cette négation se rapporte au cosinus de l'angle δ , qui surpassera alors 90° .

COROLL. 3.

XVII. Dans le premier méridien PEp , où $q = 0$, il y aura partout $\tan \delta = 0$, donc ou $\delta = 0$ ou $\delta = 180^\circ$. Or il est évident, que partout l'arc AP la déclinaison sera nulle: mais dans l'intervalle AP , où le bout méridional de l'aiguille est tourné vers P , la déclinaison doit être censée de 180° .

COROLL. 4.

XVIII. Il en est de même du méridien opposé PFp , qui passe par l'autre pôle magnétique B , où par toute l'étendue de l'arc PFB la déclinaison est $= 0$, & par l'intervalle Bp de 180° . Partout ailleurs, où $\sin q$ n'est pas $= 0$, la déclinaison ne sauroit évanouir.

COROLL. 5.

XIX. Dans cette hypothèse donc, la ligne où il n'y a point de déclinaison, est composée des méridiens PEp & PFp , si nous y comprenons aussi les endroits où la déclinaison est de 180° : que le calcul représente conjointement.

COROLL. 6.

XX. Pour calculer plus promptement la déclinaison, on n'a qu'à chercher un angle t , en sorte que $\tan t = \tan a \cos q$, & alors on aura $\tan \delta = \frac{\tan q \sin t}{\sin (p - t)}$.



I. REMARQUE.

XXI. Il semble douteux dans les cas, où l'expression trouvée pour $\text{tang } \delta$ devient négative, s'il faut alors prendre l'angle δ négatif, ou plus grand que de 90° , puisque deux angles $-\phi$ & $180^\circ - \phi$, ont la même tangente négative. Mais toute équivoque évanouira d'abord, si l'on procède par degrés en cherchant la déclinaison : car alors, quand la valeur de $\text{tang } \delta$ devient négative après avoir passé par 0, l'angle δ est certainement négatif : mais si $\text{tang } \delta$ de positif devient négatif en passant par l'infini, où l'on a $\delta = 90^\circ$, alors on est bien assuré, que l'angle δ est obtus.

2. REMARQUE.

XXII. Sous un même méridien, les quantités q & t demeurant les mêmes, la déclinaison magnétique δ est fort variable. Car si $p = t$, on aura $\delta = 90^\circ$, & où $p < t$, la déclinaison est encore plus grande. Or si $p > t$, la déclinaison décroît jusqu'à ce qu'il devienne $p - t = 90^\circ$ où elle doit être la plus petite, & augmentera de nouveau dès qu'on prend $p - t > 90^\circ$. Cet endroit où la déclinaison est la plus petite sous le même méridien, mérite une recherche particulière, à laquelle le problème suivant est destiné. D'ailleurs il est bien clair, que dans cette hypothèse il est impossible, que sous un même méridien la déclinaison soit orientale & occidentale à la fois, comme M. *Halley* l'a observée sous le méridien de la baye de Hudson : & si la même impossibilité avoit lieu en général pour deux poles magnétiques, de quelque manière qu'ils fussent situés, nous serions bien obligés d'embrasser le sentiment de 4 poles magnétiques. Mais le contraire sera mis hors de doute dans la suite.

3. REMARQUE.

XXIII. Il est ici fort important d'ajouter une remarque sur le principe, d'où la solution du problème a été tirée. J'ai supposé du consentement de tous les Physiciens, que la direction de l'aiguille suit le grand cercle, qui passe par le lieu proposé aux poles magnétiques.

Quel-



Quelqu' évident que paroisse ce principe par rapport au cas présent, il s'en faut beaucoup qu'il soit si général, qu'on pourroit penser. Car, dès que les deux poles magnétiques ne sont plus diamétralement opposés, on pourroit bien tirer d'un lieu proposé quelconque un arc de grand cercle à chaque pole magnétique ; mais ces deux arcs feroient un angle ensemble, & il n'y auroit point de raison, pourquoi l'un plutôt que l'autre marquât la direction magnétique. D'où je conclus que dans le cas présent aussi, où les deux poles magnétiques sont diamétralement opposés, le grand cercle ALB ne marque pas la direction magnétique, parce que ce cercle est le plus court chemin du point L à chaque pole magnétique : mais que la raison doit être cherchée dans un autre principe. Ce principe ne dépend pas sans doute de la surface de la terre : car, quand même la terre seroit couverte d'une croûte quelconque non magnétique, la direction magnétique demeureroit la même. Il faut donc qu'elle dépende uniquement des poles magnétiques, & il est évident qu'elle sera toujours dans un même plan avec les poles magnétiques. C'est aussi la raison, pourquoi dans notre cas le grand cercle tiré par les poles magnétiques & le lieu proposé marque la juste direction, puisqu'il représente le plan qui passe par les poles magnétiques. Donc, en quelque endroit, soit hors de la terre, soit au dedans, qu'on veuille déterminer la direction magnétique, elle se trouvera toujours dans le plan tiré par cet endroit proposé & les poles magnétiques.

P R O B L E M E II.

XXIV. *Sous chaque méridien de la terre PLp déterminer le lieu L, où la déclinaison magnétique est la plus petite, les deux poles magnétiques étant diamétralement opposés.*

S O L U T I O N.

Ayant posé les distances $AP = B = a$, & pour un lieu quelconque L l'angle $APL = q$, & l'arc $PL = p$, la déclinaison en L, qui soit $= \delta$ tournant vers l'orient, nous avons trouvé



$$\text{tang } \delta = \frac{\sin a \sin q}{\cos a \sin p - \sin a \cos p \cos q},$$

où il s'agit de déterminer l'arc p en sorte, que cette expression devienne la plus petite. Or on trouvera

$$\cos a \cos p + \sin a \sin p \cos q = 0, \quad \text{ou} \quad \text{tang } p = \frac{1}{\text{tang } a \cos q}.$$

Pour connoître mieux cette expression, tirons aussi du triangle sphérique APL le coté AL, qu'on trouve

$$\cos AL = \cos a \cos p + \sin a \sin p \cos q,$$

d'où l'on voit que la déclinaison sous le méridien PLP est la plus petite là, où $\cos AL = 0$, c'est à dire, où l'arc AL est de 90° .

Ayant trouvé ce point L, où $\cos a \cos p + \sin a \sin p \cos q = 0$, on aura pour la plus petite déclinaison

$$\text{tang } \delta = \frac{\sin a \sin p \sin q}{\cos a} = \text{tang } a \sin p \sin q.$$

Mais sachant à présent, que dans le triangle sphérique APL le côté AL est un quart de cercle, on en tirera cette proportion

$$1 : \sin q = \sin a : \sin \delta \quad \text{donc} \quad \sin \delta = \sin a \sin q,$$

d'où l'on voit que parmi les plus petites déclinaisons de tous les méridiens la déclinaison sera la plus grande dans celui qui est perpendiculaire au méridien PEp, où $q = 90$, ou l'on aura $\delta = a$ & $p = 90^\circ$.

COROLL. 1.

Fig. 3. XXV. Donc si nous tirons un grand cercle COD perpendiculaire à l'axe magnétique AB, qui représentera l'équateur magnétique, ce grand cercle coupera tous les méridiens aux points O, où la déclinaison magnétique est la plus petite pour chacun.

COROLL. 2.

XXVI. Puisque l'arc $AC = BC = 90^\circ$, on aura l'arc $PAC = a + 90^\circ$, & l'angle ACO étant droit, la résolution du tri-



triangle PCO donnera : $\text{tang } OC = \text{cof } a \text{ tang } q$, & comme nous avons déjà trouvé $\text{tang } PO = \frac{1}{\text{tang } a \text{ cof } q}$.

COROLL. 3.

XXVII. Que α marque la plus petite déclinaison sous le méridien PO*p*, de sorte que $\sin \alpha = \sin a \sin q$, & posant $PO = m$, de sorte que $\text{cot. } m = -\text{tang } a \text{ cof } q$. Pour un autre lieu quelconque L du même méridien, où $PL = p$, on trouvera la déclinaison δ en sorte $\text{tang } \delta = \frac{\sin \alpha \sin m}{\text{cof } a \text{ cof } (m-p)} = \frac{\text{tang } \alpha}{\text{cof } (m-p)}$.

COROLL. 4.

XXVIII. Cela devient plus évident si nous tirons les arcs OA & LA, où ayant dans le triangle AOL les côtés AO = 90°, OL = $m-p$ avec l'angle POA = α , on trouve l'angle PLA = δ , en sorte que $\text{tang } \delta = \frac{\text{tang } \alpha}{\text{cof } OL}$: d'où l'on voit que de part & d'autre du point O, à égales distances OL = O*l*, la déclinaison fera la même.

COROLL. 5.

XXIX. Si l'on prend CZ = 90°, ou que Z soit le pôle du grand cercle PA*p*B, la déclinaison magnétique γ est = a , qui est la plus grande dans tout l'équateur magnétique COD. Car en C & D la déclinaison évanouit, & si nous posons l'arc CO = r , la déclinaison en O étant = α , on trouve $\text{tang } \alpha = \text{tang } a \sin r$.

REMARQUE.

XXX. Puisque la plus petite déclinaison sous le méridien PO*p* en O est = α , en sorte que $\sin \alpha = \sin a \sin APO$, par tout ailleurs la déclinaison fera plus grande. Donc si nous cherchons selon l'idée de M. Halley des lignes, qui passent par tous les endroits, où la déclinaison est donnée & moindre que α , ces lignes ne fauroient couper nulle part le méridien PO*p*. Et puisque la déclinaison en Z est = a , tou-



tes les lignes Halleyennes qui marquent une moindre déclinaison que a , n'atteindront nulle part au méridien qui passe par le point Z . Or les lignes Halleyennes, qui marquent une plus grande déclinaison que a , doivent passer par tous les méridiens, comme nous verrons dans le problème suivant, où nous examinerons la figure des lignes Halleyennes.

P R O B L E M E III.

XXXI. *Les pôles magnétiques étant diamétralement opposés, déterminer les lignes Halleyennes qui passent par tous les endroits, où la déclinaison de la boussole est d'une quantité donnée.*

S O L U T I O N.

Si l'on cherche la ligne, où il n'y a aucune déclinaison, à cause de $\text{tang } \delta = 0$ on aura $\sin q = 0$, d'où l'on voit que cette ligne comprend les deux méridiens opposés PAp & PBp : sous lesquels la déclinaison magnétique évanouit comme j'ai déjà remarqué.

Mais que la déclinaison proposée δ ait une valeur quelconque, & prenant l'angle q à plaisir, on trouvera la distance $PL = p$ par cette équation: $\text{cof } a \sin p - \sin a \text{ cof } p \text{ cof } q = \sin a \sin q \text{ cof } \delta$

dont la construction la plus commode se tire du §. 27. Qu'on cherche un arc m tel que $\text{cof } m = -\text{tang } a \text{ cof } q$, & ayant

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{tang } a \sin q \sin m}{\text{cof}(m-p)}, \text{ on aura } \text{cof}(m-p) = \frac{\text{tang } a \sin q \sin m}{\text{tang } \delta}.$$

Ou bien, après avoir trouvé l'angle m , qu'on cherche un autre n en sorte que $\text{cof } n = \frac{\text{tang } a \sin q \sin m}{\text{tang } \delta}$; & de là on tirera deux valeurs

pour l'arc $PL = p$, savoir ou $p = m + n$ ou $p = m - n$.

Puisque $\text{tang } a = -\frac{\text{cof } m}{\text{cof } q}$, on pourra aussi déterminer l'arc n par

$$\text{cof } n = -\frac{\text{tang } q \text{ cof } m}{\text{tang } \delta}.$$



COROLL. 1.

XXXII. La solution deviendra impossible, ou la ligne Halleyenne cherchée ne passera point par le méridien $P L p$, lorsque $\text{tang } \delta < \text{tang } q \text{ cof } m$, ou bien lorsque $\text{tang } \delta^2 < \frac{\sin a^2 \sin q^2}{\text{cof } a^2 + \sin a^2 \text{cof } q^2}$ à cause de $\text{cot } m = - \text{tang } a \text{ cof } q$. C'est à dire lorsque $1 + \text{tang } \delta^2 > \frac{1}{\text{cof } a^2 + \sin a^2 \text{cof } q^2}$, ou lorsque $\sin \delta < \sin a \sin q$ ou bien $\sin q > \frac{\sin \delta}{\sin a}$, comme nous l'avons déjà remarqué §. XXX.

COROLL. 2.

XXXIII. Si l'on prend q négatif, l'arc m demeure le même, & si l'on prend outre cela δ négatif, l'arc n ne changera pas non plus : d'où l'on entend que dans l'autre hémisphère les lignes Halleyennes sont les mêmes, en se rapportant à une déclinaison égale & contraire $-\delta$.

COROLL. 3.

XXXIV. Si la déclinaison δ doit être $= a$, on aura $\text{cof } n = \sin q \sin m$, ce qui est toujours possible : & prenant outre cela $q = 90^\circ$, à cause de $m = 90^\circ$, on aura $n = 0$, & les deux valeurs de p se réunissent dans une seule $p = 90^\circ$ ou bien cette ligne aura en Z un point double.

COROLL. 4.

XXXV. Si l'on pose $q = 0$, on aura $\text{cof } m = - \text{tang } a$, ou $90^\circ - m = -a$, & partant $m = 90^\circ + a$. Ensuite $\text{cof } n = 0$, donc $n = 90^\circ$, les deux valeurs de p seront donc $p = a$ & $p = 180^\circ + a$. D'où nous voyons que toutes les lignes Halleyennes passent par les deux poles magnétiques A & B .

COROLL. 5.

XXXVI. Toutes ces lignes passent aussi par les deux poles P & p : car faisant $p = 0$, on a : $-\sin a \text{cof } q = \sin a \sin q \text{cot } \delta$
 $A a 3$ ou



ou bien $\text{tang } q = - \text{tang } \delta$: ce qui donne $q = 180^\circ - \delta$, laquelle valeur est toujours possible. De même faisant $p = 180$, on aura $\text{tang } q = \text{tang } \delta$ ou $q = \delta$, qui est aussi toujours possible.

I. REMARQUE.

XXXVII. Mais posant $q = 180^\circ - \delta$, outre la valeur $p = 0$ on trouve encore une autre $\frac{\text{cof } a}{\text{fin } a \text{ cof } \delta} = \frac{1 - \text{cof } p}{\text{fin } p} = \text{tang } \frac{1}{2} p$ & posant $q = \delta$, la première équation donne

$$\text{cof } a \text{ fin } p - \text{fin } a \text{ cof } p \text{ cof } \delta = \text{fin } a \text{ cof } \delta \quad \text{donc}$$

$$\frac{\text{cof } a}{\text{fin } a \text{ cof } \delta} = \frac{1 + \text{cof } p}{\text{fin } p} = \text{cof } \frac{1}{2} p \quad \text{ou bien}$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} p = \text{tang } a \text{ cof } \delta.$$

Au reste il ne faut pas être surpris, que toutes les lignes Halleyennes passent tant par les poles magnétiques que par les poles naturels de la terre : car dans les poles magnétiques toute déclinaison doit être censée y avoir lieu, & dans les poles naturels de la Terre il en est de même, puisque tous les méridiens s'y confondent.

2. REMARQUE.

XXXVIII. Il ne sera pas hors de propos d'enseigner ici en général la résolution d'une telle équation :

$$A \text{ fin } p + B \text{ cof } p = C$$

sans extraction de la racine quarrée. On n'a qu'à chercher un angle

m de sorte $\text{tang } m = \frac{A}{B}$, & puisque

$$B \text{ tang } m \text{ fin } p + B \text{ cof } p = C \quad \text{ou}$$

$$B \text{ cof } (m - p) = C \text{ cof } m \quad \text{on aura}$$

$$\text{cof } (m - p) = \frac{C \text{ cof } m}{B} = \frac{C \text{ fin } m}{A} = \text{cof } n$$

d'où à cause de $\text{cof } n = \text{cof } -n$ on tire deux valeurs savoir $p = m \pm n$.

PRO.



PROBLEME IV.

XXXIX. Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque la déclinaison magnétique δ est plus petite que la distance des poles magnétiques aux poles de la terre $AP = Bp = a$.

SOLUTION.

Une telle ligne passera d'un pole magnétique A au pole opposé p de la Terre. Soit donc $AYFp$ une telle ligne, & pour en connoître mieux le cours, qu'on prenne un arc $AX = x$ pour abscisse & l'arc $XY = y$, pour appliquée qui y soit perpendiculaire. Donc, puisque $PX = a + x$, à cause de $APY = q$ & $PY = p$, on aura $\text{cof } p = \text{cof}(a + x) \text{cof } y$; $\text{fin } q = \frac{\text{fin } y}{\text{fin } p}$ & $\text{cof } q = \frac{\text{tang}(a + x)}{\text{tang } p}$; substituons ces valeurs dans l'équation $\text{tang } \delta (\text{cof } a \text{ fin } p - \text{fin } a \text{ cof } p \text{ cof } q) = \text{fin } a \text{ fin } q$ pour avoir

$$\text{tang } \delta \left(\text{cof } a \text{ fin } p - \frac{\text{fin } a \text{ cof } p^2 \text{ tang}(a + x)}{\text{fin } p} \right) = \frac{\text{fin } a \text{ fin } y}{\text{fin } p}$$

qui se réduit en substituant pour p sa valeur à celle-cy

$$\text{tang } \delta (\text{cof } a - \text{cof } x \text{ cof}(a + x) \text{ cof } y^2) = \text{fin } a \text{ fin } y$$

D'où l'on voit que l'appliquée y évanouit en prenant tant $x = 0$, que $x = 180 - a$; ensuite si $x = -a$, & $\text{fin } x = 180^\circ$, de sorte que l'appliquée y évanouit dans les quatre points A, p , P & B. Ensuite la valeur de y demeure la même quand on écrit au lieu de x tant $180 - a - x$; que $-a - x$ & $180 + x$; d'où l'on connoit que la courbe sort par des branches semblables des quatre poles A, p , P & B, de sorte que la courbe AFp ayant deux branches semblables AF & pF , il y a de l'autre côté pour la même déclinaison δ une courbe semblable qui passe de P à B. La courbe AFp aura donc un point F, qui répond à l'abscisse $x = AE = 90 - \frac{1}{2}a$, où l'appliquée EF fera la plus grande. Pour la trouver, posons $x = 90^\circ - \frac{1}{2}a$, & puisque $\text{cof } x \text{ cof}(a + x) = -\text{fin } \frac{1}{2}a \cdot \text{fin } \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{cof } a$ notre équation sera

tang



$\text{tang } \delta (\text{cof } a + \frac{1}{2} \text{cof } y^2 - \frac{1}{2} \text{cof } a \text{cof } y^2) = \text{fin } a \text{ fin } y$
 qui se réduit à celle-cy :

$$\text{fin } y^2 + \frac{2 \text{cot. } \frac{1}{2} a \text{ fin } y}{\text{fin } \delta} = \text{cot. } \frac{1}{2} a^2$$

ou $\text{fin } y = \frac{\text{cot. } \frac{1}{2} a (\text{cof } \delta + 1)}{\text{fin } \delta}$

L'une de ces deux valeurs donne

$$\text{fin } y = \text{cot. } \frac{1}{2} a \text{cot. } \frac{1}{2} \delta$$

& l'autre $\text{fin } y = \text{tang } \frac{1}{2} \delta \text{cot. } \frac{1}{2} a = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} \delta}{\text{tang } \frac{1}{2} a}$.

Or la première est impossible, puisque $a < 90$ & $\delta < a$. d'où tant $\text{cot. } \frac{1}{2} a$ que $\text{cot. } \frac{1}{2} \delta$ surpasseront le sinus total : & partant nous aurons $\text{fin } EF = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} \delta}{\text{tang } \frac{1}{2} a}$, qui ne peut avoir lieu à moins qu'il ne soit $\delta < a$, comme nous le supposons.

Par la différentiation nous apprenons que la branche F Y A fait en A avec le premier méridien un angle $= \delta$: & toutes les autres branches font un angle égal avec ce premier méridien.

COROLL. 1.

XL. Si l'on prend δ négatif, on n'a qu'à poser aussi y négatif pour avoir la même équation, ce qui est une marque, que pour les déclinaisons occidentales on a sur l'autre hémisphère les mêmes lignes Halleyennes.

COROLL. 2.

XLI. Plus la déclinaison δ est petite, plus la ligne Halleyenne A F p approche du méridien A p; & plus elle approche de la quantité a , plus son milieu F approche du sommet Z de l'hémisphère.

COROLL. 3.

XLII. On voit aussi, que ces lignes se rapportent également aux poles naturels de la Terre, qu'aux poles magnétiques ; & que tant
 que



que $\delta < a$, ces lignes sortent d'un pôle magnétique, & qu'elles rentrent dans le pôle naturel opposé, sans atteindre jusqu'au méridien, qui passe par le milieu de l'hémisphère.

I. REMARQUE.

XLIII. Quand on construit quelques unes de ces lignes, on verra qu'elles ont au milieu F une prominence vers le sommet de l'hémisphère, qui devient de plus en plus grande & pointue, plus la déclinaison δ approche de la quantité a : & quand $\delta = a$, elle acquiert une vraie pointe angulaire, qui se change en une intersection de deux courbes, comme nous verrons après.

2. REMARQUE.

XLIV. Comme routes les appliquées XY se réunissent au sommet Z de l'hémisphère, le quart de cercle EFZ fera un diamètre de la courbe: auquel si nous tirons de Y perpendiculairement l'arc YV & que nous nommions $ZV = t$ & $VY = u$, nous aurons $\text{cof } ZY = \sin y = \text{cof } t \text{ cof } u$, & $\text{tang } XE = \text{tang } (90^\circ - \frac{1}{2}a - x) = \text{cot. } (\frac{1}{2}a + x) = \frac{\text{tang } u}{\sin t} = \frac{\sin u}{\sin t \text{ cof } u}$. De là nous tirons

$$\text{cof } (\frac{1}{2}a + x) = \frac{\sin u}{\text{cof } y} \quad \& \quad \sin (\frac{1}{2}a + x) = \frac{\sin t \text{ cof } u}{\text{cof } y}; \quad \text{donc}$$

$$\text{cof } x = \frac{\text{cof } \frac{1}{2}a \sin u + \sin \frac{1}{2}a \sin t \text{ cof } u}{\text{cof } y} \quad \& \quad \text{cof } (a + x) = \frac{\text{cof } \frac{1}{2}a \sin u - \sin \frac{1}{2}a \sin t \text{ cof } u}{\text{cof } y}$$

& partant

$$\text{cof } x \text{ cof } (a + x) \text{ cof } y^2 = \text{cof } \frac{1}{2}a^2 \sin u^2 - \sin \frac{1}{2}a^2 \sin t^2 \text{ cof } u^2$$

d'où nous trouvons entre t & u cette équation

$$\text{cof } a - \text{cof } \frac{1}{2}a^2 \sin u^2 + \sin \frac{1}{2}a^2 \sin t^2 \text{ cof } u^2 = \text{cot. } \delta \sin a \text{ cof } t \text{ cof } u$$

qui se change en celle - cy :

$$\sin \frac{1}{2}a^2 \text{ cof } t^2 \text{ cof } u^2 = -2 \text{ cot. } \delta \sin \frac{1}{2}a \text{ cof } \frac{1}{2}a \text{ cof } t \text{ cof } u + \text{cof } \frac{1}{2}a^2 \text{ cof } u^2 - \sin \frac{1}{2}a^2 \sin u^2$$

& par l'extraction de racine :

$$\sin \frac{1}{2}a \text{ cof } t \text{ cof } u = \frac{\text{cof } \delta \text{ cof } \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\text{cof } \frac{1}{2}a^2 - \sin \delta^2 \sin u^2)}}{\sin \delta}$$



De là on voit, que si $u = 0$, ce qui arrive au point F, il y aura
 $\sin \frac{1}{2} a^2 \operatorname{csc} t^2 = -2 \cot. \delta \sin \frac{1}{2} a \operatorname{csc} \frac{1}{2} a \operatorname{csc} t + \operatorname{csc} \frac{1}{2} a^2$, ou $\operatorname{csc} t = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \delta}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}$.
 Or posons u infiniment petit, & soit $t = f + v$, prenant $f = ZF$,
 de sorte que $\operatorname{csc} f = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \delta}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}$ & $FV = v$ infiniment petit, & l'on

trouve :

$$v \sin a \sin f + \frac{1}{2} v v \sin a \operatorname{csc} f = u u \sin \delta - \frac{1}{2} u u \sin a \operatorname{csc} f.$$

Donc, tant que $\delta < a$, la courbe sera perpendiculaire en F à l'arc ZE, mais si $\delta = a$, & $f = 0$, on aura l'équation $\frac{1}{2} v v = \frac{1}{2} u u$, ou $u = v$, de sorte que l'angle de la courbe en F avec ZE est un demi-droit, & les branches de la courbe se couperont en Z à angles droits.

PROBLEME V.

Fig. 5. XLV. Déterminer plus exactement la figure de la ligne Halleyenne qui passe par les lieux, où la déclinaison magnétique δ est égale à la distance des poles $AP = Bp = a$.

SOLUTION.

Posant $\delta = a$, on aura entre l'angle $APY = q$ & l'arc $PY = p$ cette équation

$$\operatorname{csc} a \sin p - \sin a \operatorname{csc} p \operatorname{csc} q = \operatorname{csc} a \sin q$$

Mais, si nous rapportons la courbe au méridien PAE_p par les coordonnées orthogonales $AX = x$ & $XY = y$, l'équation sera :

$$\operatorname{csc} a - \operatorname{csc} x \operatorname{csc}(a+x) \operatorname{csc} y^2 = \operatorname{csc} a \sin y$$

qui en divisant par $1 - \sin y$ se réduit à

$$\operatorname{csc} a = \operatorname{csc} x \operatorname{csc}(a+x) (1 + \sin y)$$

Or le diviseur $1 - \sin y$ marque que la courbe a un point au sommet Z, où toutes les appliquées se réunissent, l'autre équation donne

$$\sin y = \frac{\operatorname{csc} a - \operatorname{csc} x \operatorname{csc}(a+x)}{\operatorname{csc} x \operatorname{csc}(a+x)} = \operatorname{tang} x \operatorname{tang}(a+x)$$

Si

Si nous prenons les abscisses du point E en posant $EX = z$ à cause de $x = 90^\circ - \frac{1}{2}a - z$, nous aurons

$$\sin y = \cot. (z + \frac{1}{2}a) \cot. (z - \frac{1}{2}a) = \frac{\cos \frac{1}{2}a^2 - \sin z^2}{\sin z^2 - \sin \frac{1}{2}a^2} = \frac{\cos a + \cos 2z}{\cos a - \cos 2z}.$$

D'où l'on voit que $\cos 2z$ doit être négatif, & partant $z > 45^\circ$ avant que le rayon ZX coupe la courbe, & que si $z = 45^\circ$ ce rayon touche la courbe au sommet Z, où quatre branches semblables ZP, ZA, Zp & ZB se coupent à angles droits. Or si nous partageons l'intervalle PA en deux parties égales en C, & que nous nommions l'arc $CX = v$, & l'arc $ZY = t$, à cause de $\cos t = \sin y$

& $z = 90^\circ - v$, nous aurons $\cos t = \frac{\cos a - \cos 2v}{\cos a + \cos 2v}$: d'où nous

voyons que tant que $v < \frac{1}{2}a$ ou $CX < CA$, la valeur de t surpasse 90° , & alors la continuation des arcs ZA & ZP passe dans l'autre hémisphère, où la déclinaison sera $180 + a$, puisque $\tan \delta$ est la même, soit qu'on prenne $\delta = a$ ou $\delta = 180^\circ + a$. Or prenant $v = \frac{1}{2}a$ ou $CX = CA$, on a $\cos t = 0$, ou $t = 90^\circ$ ce qui donne le point A, & en augmentant v au delà de $\frac{1}{2}a$, on trouve la courbe AY, jusqu'à ce qu'on pose $v = 45^\circ$, où $ZY = t$ évanouit. D'ailleurs prenant x infiniment petit, y le fera aussi, & on aura $\frac{y}{x} = \tan a$, ce qui indique que chaque branche ZA fait en A avec

le premier méridien un angle $= a$. Après cette inclinaison les quatre branches montent au sommet Z, où elles se croisent à angles droits.

COROLL. I.

XLVI. Tandis que la déclinaison δ étoit plus petite que a , les lignes Halleyennes sortoient du point A pour rentrer en p, par une courbe continue AFp, qui avoit au milieu F une prominence vers le sommet Z. Or à présent cette prominence atteint le sommet Z & se change en un angle droit. Fig. 4.



COROLL. 2.

Fig. 5. XLVII. La figure AFP , qu'avoient les lignes Halleyennes pendant que $\delta < a$, s'en va lorsque $\delta = a$ en celle-cy $AYZyp$, & perd en même tems la continuité: car maintenant l'arc Zp n'est plus la continuation de l'arc AZ , mais plutôt celle de l'arc PZ , & l'arc AZ a sa continuation par l'arc ZB .

COROLL. 3.

XLVIII. Maintenant donc où $\delta = a$, des deux lignes Halleyennes qui représentent cette déclinaison, l'une AZB va d'un pole magnétique A à l'autre B , & l'autre PZp va d'un pole naturel de la Terre P à l'autre p : pendant qu'auparavant où $\delta < a$ ces lignes ont été tirées d'un pole magnétique au pole naturel opposé.

REMARQUE.

XLIX. Nous verrons bientôt, que lorsque $\delta > a$, les lignes Halleyennes prennent un tour encore différent, en passant d'un pole magnétique au pole naturel, qui lui est le plus proche. Entre ces deux cours différents le cas $\delta = a$ tient un milieu, & ne suit ni l'un ni l'autre, participant également de chacun: d'où cette ligne, que je viens de décrire, est fort remarquable. Elle est aussi la seule qui forme une intersection, pendant que les branches des autres ne se coupent nulle part.

PROBLEME VI.

Fig. 6. L. Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque la déclinaison magnétique δ est plus grande que la distance des poles $AP = Pp = a$.

SOLUTION.

Soit AFP une de ces lignes où $\delta > a$, & pour en connoître le cours, nous n'avons qu'à prendre l'abscisse $AX = x$ négative dans le problème IV. en laissant $XY = y$: & alors nous aurons:

$$\text{tang } \delta (\text{cos } a - \text{cos } x \text{ cos } (a - x) \text{ cos } y^2) = \sin a \sin y$$

Ou prenant E au milieu de l'arc AP , de sorte que $AE = \frac{1}{2} a$, si nous po-



posons $EX = z$, à cause de $x = \frac{1}{2}a - z$, nous aurons :

$$\text{tang } \delta (\text{cof } a - \text{cof}(\frac{1}{2}a - z) \text{cof}(\frac{1}{2}a + z) \text{cof } y^2) = \text{fin } a \text{ fin } y$$

d'où nous voyons que prenant z négatif ou positif l'équation ne change point, de sorte que les arcs AF & PF seront semblables. Pour trouver le milieu de cette courbe F soit $z = 0$; & on aura

$$\text{tang } \delta (\text{cof } a - \text{cof} \frac{1}{2} a^2 \text{cof } y^2) = \text{fin } a \text{ fin } y \quad \text{ou bien}$$

$$\text{tang } \delta (\text{cof} \frac{1}{2} a^2 \text{fin } y^2 - \text{fin} \frac{1}{2} a^2) = 2 \text{fin} \frac{1}{2} a \text{cof} \frac{1}{2} a \text{fin } y$$

$$\text{d'où l'on tire : } \text{fin } y = \frac{\text{fin} \frac{1}{2} a (\text{cof } \delta + 1)}{\text{fin } \delta \text{cof} \frac{1}{2} a} = \frac{\text{tang} \frac{1}{2} a}{\text{tang} \frac{1}{2} \delta}$$

qui n'est réelle que si $\delta > a$. Par conséquent ayant $\text{fin } EF = \frac{\text{tang} \frac{1}{2} a}{\text{tang} \frac{1}{2} \delta}$, on voit que plus la déclinaison δ est grande, plus sera petit l'arc EF .

Nous avons déjà vu, que si $z = \frac{1}{2}a$ ou $x = 0$, l'appliquée y évanouit aussi, & que la courbe AY est inclinée au méridien Ap d'un angle $YAp = \delta$. Mais, posant $z = \frac{1}{2}a$, le quart de cercle ZYX coupera la courbe encore dans un autre point, Soit donc $x = 0$, & l'équation $\text{tang } \delta \text{cof } a \text{fin } y^2 = \text{fin } a \text{fin } y$, outre la valeur $y = 0$ donne encore $\text{fin } y = \frac{\text{tang } a}{\text{tang } \delta}$. L'abscisse $EX = z$ aura donc un *maximum*, qui sera là où

$$\text{cof}(\frac{1}{2}a - z) \text{cof}(\frac{1}{2}a + z) = \frac{\text{fin } a}{2 \text{tang } \delta \text{fin } y} \quad \& \quad \text{fin } y = \frac{\text{tang } \delta - \sqrt{(\text{tang } \delta^2 - \text{tang } a^2)}}{\text{tang } a}$$

$$\& \text{ partant } \text{cof } a + \text{cof } 2z = \frac{\text{cof } a (\text{tang } \delta + \sqrt{(\text{tang } \delta^2 - \text{tang } a^2)})}{\text{tang } \delta}$$

$$\text{donc } \text{cof } 2z = \text{cof } a \sqrt{\left(1 - \frac{\text{tang } a^2}{\text{tang } \delta^2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\text{fin } a^2}{\text{fin } \delta^2}\right)} \quad \text{de}$$

$$\text{sorte que } \text{fin } 2z = \frac{\text{fin } a}{\text{fin } \delta} \quad \& \quad \text{fin } y = \frac{\text{fin } \delta \text{cof } a - \sqrt{(\text{fin } \delta^2 - \text{fin } a^2)}}{\text{cof } \delta \text{fin } a}$$



COROLL. I.

LI. Puisque $\text{col}(\frac{1}{2}a - z)\text{col}(\frac{1}{2}a + z) = \frac{1}{2}\text{col}a + \frac{1}{2}\text{col}2z$, l'équation entre y & z sera exprimée en sorte :

$\text{tang} \delta (2 \text{col} a - \text{col} a \text{col} y^2 - \text{col} 2z \text{col} y^2) = 2 \sin a \sin y$
d'où l'on tire sans extraction de racine :

$$\text{col} 2z = \frac{\text{col} a (1 + \sin y^2)}{\text{col} y^2} - \frac{2 \sin a \sin y}{\text{tang} \delta \text{col} y^2}.$$

COROLL. 2.

LII. Les lignes des grandes déclinaisons sont donc renfermées tant entre les poles septentrionaux P & A, que les méridionaux B & p, & approchent d'autant plus de l'arc AP, plus la déclinaison est grande : l'arc AP lui-même étant la ligne, où la déclinaison est de 180° .

REMARQUE.

Fig. 7.

LIII. La 7^{me} Figure représente l'état des lignes Halleyennes pour les déclinaisons orientales, lorsque la distance des poles AP & Bp est de 30° . Les parties du méridien Ap & PB sont les lignes, où il n'y a point de déclinaison. Ensuite on y voit de part & d'autre les lignes, où la déclinaison est de 10° & de 20° , qui étant plus petites que 30° vont d'un pole magnétique au pole naturel opposé, de A en p & de B en P. Pour la déclinaison de 30° les lignes se croisent au milieu, & tant vers le Nord que le Sud on voit les lignes, où la déclinaison est de 45° & de 90° . Les lignes du même nom ne semblent pas être liées ensemble, mais se terminer brusquement dans les poles : mais il faut remarquer, qu'elles tiennent ensemble par une ligne où la déclinaison est $180^\circ + \delta$, ou bien $180^\circ - \delta$ vers l'ouest, qui joint ou les poles boreaux ou méridionaux, dans l'autre hémisphère. Car puisque $\text{tang}(180^\circ + \delta) = \text{tang} \delta$, ces deux cas sont compris dans la même équation. Au reste on remarque déjà un bel accord entre ces lignes & celles, qu'on voit sur la Carte de Halley; surtout pour les grandes déclinaisons; mais en donnant aux poles magnétiques une autre situation, on verra bientôt, qu'il sera possible de parvenir à un accord parfait, autant que l'imperfection des observations en est susceptible.

SE



SECONDE SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant en deux méridiens opposés.

PROBLEME VII.

LIV. *Les deux poles magnétiques de la terre n'étant pas diamétralement opposés, déterminer la direction de l'aiguille aimantée pour un lieu quelconque dans la surface de la terre.*

SOLUTION.

Soient A & B les deux poles magnétiques de la terre, & L un lieu quelconque, où il faut déterminer la direction de l'aiguille. Or il est certain, que la direction magnétique se trouve toujours dans un plan qui passe par les deux poles magnétiques. Concevons donc une section du Globe, qui passe par le lieu L & les deux poles magnétiques A & B ; & cette section fera un petit cercle dont la tangente en L fera la direction de l'aiguille $L\delta$. Cherchons donc d'abord le pole ou le centre de ce petit cercle sur la surface de la terre: pour cet effet divisons l'arc du grand cercle ACB , qui passe par les deux poles magnétiques A & B , en deux parties égales au point C , & par C tirons un grand cercle COc perpendiculaire à ACB , qui sera l'équateur magnétique, dont chaque point O est également éloigné des deux poles magnétiques. Le centre du petit cercle cherché fera donc quelque part dans cet équateur magnétique en O , d'où les arcs de grands cercles OA & OL feront égaux. Posons la demi-distance des poles magnétiques ou l'arc $AC = BC = c$; & pour le lieu proposé L , auquel on tire de C l'arc du grand cercle CL , soit l'angle $ACL = n$ & l'arc $CL = m$; soit de plus l'arc inconnu $CO = \phi$. Donc, tirant l'arc du grand cercle AO , nous aurons $\cos AO = c \sin c \sin \phi$; or à cet arc AO doit être égal l'arc OL . Mais le triangle sphérique OCL ,

Fig. 8.



OCL, où $CL = m$; $CO = \phi$ & $OCL = 90^\circ - n$ donne

$$\text{cof } OL = \text{cof } m \text{ cof } \phi + \text{fin } m \text{ fin } \phi \text{ fin } n = \text{cofc } \text{cof } \phi$$

d'où nous tirons $\text{tang } \phi = \frac{\text{cofc} - \text{cof } m}{\text{fin } m \text{ fin } n}$.

Or le même triangle OCL donne

$$\text{tang } CLO = \frac{\text{fin } \phi \text{ cof } n}{\text{cof } \phi \text{ fin } m - \text{fin } \phi \text{ cof } m \text{ fin } n}$$

où, si nous substituons pour ϕ la valeur trouvée, nous aurons :

$$\text{tang } CLO = \frac{\text{cof } n (\text{cofc} - \text{cof } m)}{\text{fin } m^2 \text{ fin } n - \text{cof } m \text{ fin } n (\text{cofc} - \text{cof } m)}$$

ou $\text{tang } CLO = \frac{\text{cof } n (\text{cofc} - \text{cof } m)}{\text{fin } n - \text{cofc } \text{cof } m \text{ fin } n}$.

Or la direction magnétique $L\delta$ étant perpendiculaire au rayon du petit cercle, ou à l'arc OL , nous aurons $\text{tang } CL\delta = \text{cot. } CLO$ & partant

$$\text{tang } CL\delta = \frac{\text{fin } n (1 - \text{cofc } \text{cof } m)}{\text{cof } n (\text{cofc} - \text{cof } m)} = \frac{\text{tang } n (1 - \text{cofc } \text{cof } m)}{\text{cofc} - \text{cof } m}$$

d'où nous connoissons l'angle $CL\delta$ que fait la direction magnétique $L\delta$ avec l'arc CL , dont la position est donnée.

REMARQUE.

LV. La solution de ce problème & des suivans est fondée sur ce principe, que la direction magnétique sur la terre suit toujours le petit cercle, qui passe par le lieu proposé & les deux poles magnétiques de la terre. On m'accordera bien ce principe à l'égard de la véritable direction magnétique, qui renferme ensemble l'inclinaison & la déclinaison; mais, puisque la déclinaison dont il s'agit ici, se règle sur le plan vertical, qui passe par la direction magnétique, on en pourroit tirer quantité d'objections, dont la discussion meneroit trop loin, & surpasseroit les bornes de notre connoissance. Mais on pourra en sorte fixer les idées, qui entrent ici en considération, que ces objections



rions n'y aient plus de prise. Si l'on plaçoit là les poles magnétiques de la Terre, où l'axe magnétique traverse la surface de la Terre, on seroit sans doute fort embarrassé ; puisque la déclinaison n'y seroit plus indéterminée, à moins que l'axe magnétique ne passeroit par le centre de la Terre. Par cette raison j'établirai les poles magnétiques de la Terre là, où la véritable direction magnétique est verticale, de sorte que dans ces endroits il ne puisse y avoir question de la déclinaison ; & ce sera dans ces points, où toutes les lignes Halleyennes doivent aboutir, de même qu'aux poles naturels de la Terre. Or déterminant en sorte les poles magnétiques de la terre, sans s'embarasser de l'axe véritable magnétique, les objections mentionnées n'empêcheront plus, qu'on n'accorde le principe établi, c'est à dire que partout l'aiguille aimantée se dirige suivant la tangente du petit cercle tiré sur la surface de la Terre par chaque lieu proposé, & lesdits poles magnétiques, où l'inclinaison devient verticale.

P R O B L E M E VIII.

LVI. *Les deux poles magnétiques en deux méridiens opposés étant donnés, trouver la déclinaison magnétique pour un lieu proposé quelconque L.*

SOLUTION.

Soient A & B les deux poles magnétiques, le boréal A dans le méridien PAC, & le méridional B dans le méridien opposé P c B p, à des distances inégales des poles naturels P & p, savoir: $AP = a$ & $Bp = b$. Qu'on coupe l'arc $AB = 180^\circ - a + b$ en deux parties égales en C, & soit $AC = BC = 90^\circ - \frac{a+b}{2} = c$; & l'arc

$PC = 90^\circ + \frac{a+b}{2} = a + c = d$. Maintenant pour le lieu proposé L, par lequel passe le méridien PLp, soit la longitude vers l'ouest ou l'angle $CPL = q$, & l'arc $PL = p$; donc, ayant dans le triangle sphérique CPL les côtés $PC = d$, $PL = p$, avec l'angle



compris $CPL = q$, on déterminera les élémens précédens $CL = m$
& l'angle $PCL = n$ en sorte

$$\text{cof } m = \text{cof } d \text{ cof } p + \text{fin } d \text{ fin } p \text{ cof } q \quad \&$$

$$\text{tang } n = \frac{\text{fin } p \text{ fin } q}{\text{fin } d \text{ cof } p - \text{cof } d \text{ fin } p \text{ cof } q}$$

De là, posant $L\delta$ pour la direction magnétique, on aura

$$\text{tang } CL\delta = \frac{\text{fin } p \text{ fin } q (1 - \text{cof } c \text{ cof } d \text{ cof } p - \text{cof } c \text{ fin } d \text{ fin } p \text{ cof } q)}{(\text{fin } d \text{ cof } p - \text{cof } d \text{ fin } p \text{ cof } q) (\text{cof } c - \text{cof } d \text{ cof } p - \text{fin } d \text{ fin } p \text{ cof } q)}$$

Or le même triangle sphérique CPL fournit

$$\text{tang } CLP = \frac{\text{fin } d \text{ fin } q}{\text{cof } d \text{ fin } p - \text{fin } d \text{ cof } p \text{ cof } q}$$

duquel angle il faut soustraire l'angle $CL\delta$ pour avoir la déclinaison magnétique $PL\delta = \delta$ tournée vers l'Est. Posons pour rendre cette opération plus aisée :

$$\text{cof } d \text{ cof } p + \text{cof } d \text{ fin } p \text{ cof } q = A$$

$$\text{fin } d \text{ cof } p - \text{cof } d \text{ fin } p \text{ cof } q = B; \quad \text{cof } d \text{ fin } p - \text{fin } d \text{ cof } p \text{ cof } q = C$$

& ayant :

$$\text{tang } CLR = \frac{\text{fin } d \text{ fin } q}{C}; \quad \text{tang } CL\delta = \frac{\text{fin } p \text{ fin } q (1 - A \text{ cof } c)}{B(\text{cof } c - A)}$$

on en tirera

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{cof } c \text{ fin } q (B \text{ fin } d + A C \text{ fin } p) - \text{fin } q (A B \text{ fin } d + C \text{ fin } p)}{\text{cof } c (B C - A \text{ fin } d \text{ fin } p \text{ fin } q^2) + \text{fin } d \text{ fin } p \text{ fin } q^2 - A B C}$$

Mais, en substituant les valeurs pour A, B, C on trouve

$$B \text{ fin } d + A C \text{ fin } p = (1 - A A) \text{ cof } p; \quad A B \text{ fin } d + C \text{ fin } p = (1 - A A) \text{ cof } d$$

$$B C - A \text{ fin } d \text{ fin } p \text{ fin } q^2 = - (1 - A A) \text{ cof } q$$

$$\text{fin } d \text{ fin } p \text{ fin } q^2 - A B C = (1 - A A) (\text{fin } d \text{ fin } p + \text{cof } \text{cof } p \text{ cof } q)$$

donc, divisant le haut & le bas par $1 - A A$, on obtiendra :

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{cof } c \text{ cof } p \text{ fin } q - \text{cof } d \text{ fin } q}{-\text{cof } c \text{ cof } q + \text{fin } d \text{ fin } p + \text{cof } d \text{ cof } p \text{ cof } q}$$



COROLL. I.

LVII. Puisque $c = 90^\circ - \frac{a+b}{2}$ & $d = 90^\circ + \frac{a+b}{2}$:

la formule trouvée prendra cette forme :

$$\text{tang } \delta = \frac{\left(\sin \frac{a-b}{2} \cos p + \sin \frac{a+b}{2} \right) \sin q}{\cos \frac{a+b}{2} \sin p - \sin \frac{a+b}{2} \cos p \cos q - \sin \frac{a-b}{2} \cos q}$$

où je remarque que le numérateur est toujours positif pour l'hémisphère supérieur que nous avons en vûe, où $\sin q$ est positif : & quand même on prend $\cos p = -1$, l'autre facteur $\sin \frac{a-b}{2} \cos p + \sin \frac{a+b}{2}$ demeure pourtant positif.

COROLL. 2.

LVIII. De là il s'ensuit que par tout cet hémisphère supérieur la déclinaison est positive, ou dirigée vers l'est ; car, quoique le dénominateur devienne négatif, l'angle δ ne devient pas pour cela négatif, mais seulement plus grand que 90° .

COROLL. 3.

LIX. La raison en est, que le dénominateur ne fauroit devenir négatif sans passer par zero : or dans ce cas il marque un angle droit, & partant s'il devient négatif, la tangente négative de δ ne fauroit subitement indiquer un angle négatif. Mais l'autre signification d'un angle obtus aura uniquement lieu.

COROLL. 4.

LX. Pour l'autre hémisphère il y en a de même, à l'égard des déclinaisons occidentales, qui y auront uniquement lieu ; comme dans le cas précédent, où les poles magnétiques étoient diamétralement opposés. D'où l'on comprend qu'il n'y a d'autre ligne sans déclinaison, que les deux méridiens opposés, qui passent par les poles magnétiques.



REMARQUE.

LXI. Par rapport à la réduction de l'expression, que nous avons d'abord trouvée pour $\text{tang } \delta$, on évitera des calculs fort ennuyans, quand on fait faire usage de la relation, que les trois lettres A, B, C ont entr'elles. D'abord il faut remarquer que

$$1 - AA = \sin p^2 \sin q^2 + BB = \sin d^2 \sin q^2 + CC$$

ensuite leur comparaison fournit ces formules,

$$B \sin d + A \cos d = \cos p; \quad C \sin p + A \cos p = \cos d$$

$$A \sin d - B \cos d = \sin q; \quad A \sin p - C \cos p = \sin d \cos q$$

$$C + B \cos q = \cos q^2; \quad B + C \cos q = \sin d \cos p \sin q^2.$$

Pour en faire usage prenons la dernière formule,

$$\sin d \sin p \sin q^2 - ABC, \text{ qui à cause de } C = \cos d \sin p \sin q^2 - B \cos q$$

se change en

$$\sin d \sin p \sin q^2 - AB \cos d \sin p \sin q^2 + ABB \cos q$$

$$\text{Mais } BB = 1 - AA - \sin p^2 \sin q^2 \text{ donne}$$

$$\sin d \sin p \sin q^2 - AB \cos d \sin p \sin q^2 + A(1 - AA) \cos q \\ - A \sin p^2 \sin q^2 \cos q$$

$$\text{Or } -B \cos d = \sin p \cos q - A \sin d \text{ produit}$$

$$\sin d \sin p \sin q^2 + A \sin p^2 \sin p^2 \cos q - AA \sin d \sin p^2 \cos q^2$$

$$+ A(1 - AA) \cos q - A \sin p^2 \sin q^2 \cos q,$$

ou $(1 - AA) \sin d \sin p \sin q^2 + A(1 - AA) \cos q$, le reste est évident. Ce même artifice sera d'une grande utilité dans la suite.

PROBLEME IX.

LXII. *Trouver les lignes Halleyennes, qui passent par tous les lieux de la terre, où la déclinaison de la boussole est d'une quantité donnée.*

SOLUTION.

Soit δ la déclinaison proposée, qui étant positive sera dirigée vers l'Est, mais vers l'ouest, si elle est négative. Par la position des



poles magnétiques les quantités c & d seront données, & si L est un lieu, par où passe la ligne cherchée, il s'agit de trouver une équation entre $PL = p$ & $CPL = q$. Or l'équation trouvée dans le problème précédent fournit celle-cy

$$\text{tang } \delta \sin d \sin p + (\text{tang } \delta \cos d \cos q - \cos c \sin q) \cos p = \text{tang } \delta \cos c \cos q - \cos d \sin q,$$

au lieu de laquelle je considérerai cette forme générale

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

de sorte que pour le cas présent,

$$A = \text{tang } \delta \sin d; \quad B = \text{tang } \delta \cos d; \quad C = \cos c \\ D = \text{tang } \delta \cos c; \quad E = \cos d$$

Maintenant, pour trouver la valeur de p pour chaque angle donné q , je commence par chercher un angle r de sorte que

$$\text{tang } r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q} \text{ \& j'aurai } \frac{A \cos(r-p)}{\sin r} = D \cos q - E \sin q.$$

Qu'on cherche ensuite deux angles m & n de sorte que

$$\text{tang } m = \frac{B}{C} \quad \& \quad \text{tang } n = \frac{D}{E} \quad \& \text{ on aura :}$$

$$\text{tang } r = \frac{A \cos m}{C \sin(m-q)} = \frac{A \sin m}{B \sin(m-q)}$$

$$\frac{A \cos(r-p)}{\sin r} = \frac{E \sin(n-q)}{\cos n} = \frac{D \sin(n-q)}{\sin n}.$$

Cela posé, en substituant pour les lettres A, B, C, D, E , leurs valeurs, on fera les opérations suivantes :

$$\text{tang } m = \frac{\text{tang } \delta \cos d}{\cos c}; \quad \text{tang } n = \frac{\text{tang } \delta \cos c}{\cos d}$$

$$\text{tang } r = \frac{\text{tang } \delta \sin m}{\sin(m-q)}; \quad \cos(r-p) = \frac{\cos c \sin(n-q) \sin r}{\sin d \sin n}.$$



Ces formules étant fort propres pour le calcul trigonométrique, on trouvera aisément r & $r - p$; car supposons qu'on trouve $\text{col}(r - p) = \text{col } s$, à cause de $r - p = \pm s$, les deux valeurs de p seront $p = r \pm s$.

COROLL. 1.

LXIII. En chaque méridien donc il y a deux points par où chaque ligne Halleyenne passe, à moins que ces deux points ne se réunissent dans un seul, ou qu'ils ne deviennent imaginaires. Le premier arrive si l'expression $\frac{\text{col } c \sin(n - q) \sin r}{\sin d \sin n}$ devient égale à l'unité, & l'autre si elle surpasse l'unité.

COROLL. 2.

LXIV. Concevons qu'on tire par C un grand cercle CO, qui coupe le méridien PLP en sorte en O, qu'il devienne $PO = r$; & partant $OL = r - p$: & ayant dans le triangle CPO les côtés $CP = d$; $PO = r$ & $CPO = q$, à cause de $\text{tang } r = \frac{\sin d \sin m}{\text{col } d \sin(m - q)}$ on trouve

$$\text{tang } PCO = \frac{\sin m \sin q}{\text{col } d \sin(m - q) - \text{col } d \sin m \text{ col } q} = - \frac{\text{tang } m}{\text{col } d}$$

de sorte que, puisque $\text{tang } m = \frac{\text{tang } \delta \text{ col } d}{\text{col } c}$, on aura

$$\text{tang } PCO = - \frac{\text{tang } \delta}{\text{col } c} \quad \text{ou} \quad \text{tang } pCO = \frac{\text{tang } \delta}{\text{col } c}.$$

COROLL. 3.

LXV. Il est donc remarquable que la position du grand cercle CO ne dépend pas de l'angle $CPO = q$ & qu'elle a lieu pour tous les méridiens. Et puisque l'arc $OL = r - p$, est tant négatif que positif, ce grand cercle CO fera le diamètre des lignes Halleyennes pour la même déclinaison magnétique δ .



COROLL. 4.

LXVI. Puisque $AC = c$, si nous tirons de A un grand cercle AE, qui fasse avec CA un angle $CAE = \delta$, on trouvera l'arc AE égal à un quart de cercle. Donc, pour construire le cercle diamétral CO, on n'a qu'à appliquer en A un quart de cercle AE sous un angle $CAE = \delta$, & les deux points C, E détermineront ce cercle.

COROLL. 5.

LXVII. Si nous posons $q = 0$, nous aurons $r = d$ & $r - p = c$ donc $p = d \pm c$. Mais, ayant posé $c = 90^\circ - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $p = 90^\circ + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, ces deux valeurs de p font a & $180^\circ + b$, qui marquent les deux poles magnétiques, auxquels toutes les lignes Halleyennes aboutissent.

I. REMARQUE.

LXVIII. Par la première équation on voit, que prenant la déclinaison δ négative, ou occidentale, l'équation demeure la même, pourvu qu'on prenne aussi l'angle q négatif. Dans ce cas les lignes Halleyennes tomberont dans l'autre hémisphère, & seront tout à fait semblables à celles du supérieur: il suffit donc d'avoir calculé ces lignes pour un hémisphère.

2. REMARQUE.

LXIX. Les formules que nous avons données pour l'usage du calcul, ne sont pas applicables au cas, où la déclinaison doit évanouir, puisque alors l'angle q évanouit nécessairement: la ligne sans déclinaison étant l'un & l'autre méridien, qui passent par les poles magnétiques. Or, si la déclinaison est très petite, l'angle q ne fauroit surpasser une certaine grandeur: pour la trouver, soit la déclinaison δ & l'angle q extrêmement petit, & à cause de $m = \frac{\delta \cos l}{\cos c}$ & $n = \frac{\delta \cos c}{\cos d}$:

nous aurons $\text{tang } r = \frac{\delta \sin d}{\delta \cos d - q \cos c}$ & ensuite

$$\cos (r - p) = \frac{\delta \cos l - q \cos c}{\sqrt{(\delta \delta - 2 \delta q \cos c \cos d + q q \cos c^2)}}$$

où



où la plus grande valeur, dont q est susceptible, est

$$\sin q = \frac{\delta \sin c}{\sqrt{(\sin c^2 - \sin d^2)}} = \frac{\delta \operatorname{cof} \frac{1}{2}(a - b)}{\sqrt{\sin a \sin b}}, \text{ d'où l'on voit,}$$

combien les lignes Halleyennes pour les très petites déclinaisons s'éloignent des méridiens PAp & PBp . Mais il est clair en même tems, que ces lignes s'avancent d'autant plus vers le milieu de l'hémisphère, plus la déclinaison croit, & qu'il y en aura une, comme dans le cas précédent, dont les branches se coupent mutuellement, & qui fera la limite entre les petites & les grandes déclinaisons.

PROBLEME X.

LXX. *Trouver la déclinaison δ , dont la ligne Halleyenne est composée des branches, qui se coupent mutuellement.*

SOLUTION.

A l'endroit où les deux branches se coupent, l'arc du méridien PL qui passe par cet endroit, aura deux valeurs égales. Donc, dans la solution du problème précédent, l'expression $\frac{\operatorname{cof} c \sin(n - q) \sin r}{\sin d \sin n}$, fera égale à l'unité, prise positivement ou négativement. Or, afin que cette expression ne devienne pas plus grande que l'unité, il faut que l'unité soit la plus grande valeur. Voilà donc à quoi revient la solution du problème : Il faut que l'expression $\frac{\operatorname{cof} c \sin(n - q) \sin r}{\sin d \sin n}$ soit égale à l'unité, & que son différentiel soit en même tems $= 0$. Mais, tant pour la facilité du calcul, que pour rendre notre recherche plus générale, je me tiendrai aux formules plus générales

$$\operatorname{tang} r = \frac{A}{B \operatorname{cof} q - C \sin q} \quad \& \quad \operatorname{cof}(r - p) = \frac{(D \operatorname{cof} q - E \sin q) \sin r}{A}$$

& il faut qu'il soit

$$\text{premierement} \quad (D \operatorname{cof} q - E \sin q) \sin r = \pm A$$

$$\& \text{ ensuite} \quad dr \operatorname{cof} r (D \operatorname{cof} q - E \sin q) = dq \sin r (D \sin q + E \operatorname{cof} q).$$

Or



Or le différentiel logarithmique de l'équation $\text{tang } r = \frac{A}{B \text{ cof } q - C \text{ fin } q}$

donne $\frac{dr}{\text{fin } r \text{ cof } r} = \frac{dq(B \text{ fin } q + \text{cof } q)}{B \text{ cof } q - C \text{ fin } q}$: d'où nous tirons :

$$\text{cof } r^2 = \frac{(B \text{ cof } q - C \text{ fin } q)(D \text{ fin } q + E \text{ cof } q)}{(B \text{ fin } q + C \text{ cof } q)(D \text{ cof } q - E \text{ fin } q)}$$

& partant $\text{fin } r^2 = \frac{CD - BE}{(B \text{ fin } q + C \text{ cof } q)(D \text{ cof } q - E \text{ fin } q)}$

d'où la valeur de $\text{tang } r$ fournit $\frac{AA}{CD - BE} = \frac{B \text{ cof } q - C \text{ fin } q}{D \text{ fin } q + E \text{ cof } q}$,

& la première égalité : $\frac{AA}{CD - BE} = \frac{D \text{ cof } q - E \text{ fin } q}{B \text{ fin } q + C \text{ cof } q}$.

Pofons pour abrégé $\frac{AA}{CD - BE} = M$, & nous trouverons

$$\text{tang } q = \frac{D - MC}{E + MB} = \frac{B - ME}{C + MD}, \quad \& \text{ partant}$$

$$(1 - MM)(CD - BE) = M(BB + CC - DD - EE)$$

ou bien

$$A^4 + AA(BB + CC - DD - EE) = (CD - BE)^2.$$

Maintenant, si nous substituons les valeurs du problème précédent, on aura

$$BB + CC - DD - EE = -(1 - \text{tang } \delta^2)(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)$$

$$CD - BE = -\text{tang } \delta (\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2) \quad \& \quad A = \text{tang } \delta \text{ fin } d,$$

& de là on tirera enfin

$$\text{tang } \delta = \frac{\sqrt{(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)}}{\text{fin } d} = \frac{\sqrt{\text{fin } a \text{ fin } b}}{\text{cof } \frac{1}{2}(a+b)}, \quad \text{ou} \quad \text{cof } \delta = \frac{\text{fin } d}{\text{fin } c},$$

à cause de $\text{cof } d = -\text{fin } \frac{1}{2}(a+b)$ & $\text{cof } c = \text{fin } \frac{1}{2}(a-b)$.



Ensuite, pour le lieu de l'interfection, on aura à cause de

$$M = -\frac{\text{tang } \delta \sin d^2}{\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2} = -\frac{1}{\text{tang } \delta}, \quad \& \quad E + MB = 0, \quad \text{l'angle}$$

$$q = 90^\circ; \quad \& \quad \sin r^2 = \frac{BE - CD}{BE} = \frac{\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2}{\text{cof } d^2}; \quad \& \quad \text{cof } r = \frac{\text{cof } c}{\text{cof } d}$$

donc $\text{cof}(r-p) = -\frac{E}{A} \sin r = 1$, & puisque $p = r$, on aura

$$\begin{aligned} \sin p &= \frac{\sqrt{(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)}}{\text{cof } d} = -\text{tang } \delta \text{ tang } d = \frac{\text{tang } \delta \text{ cof } \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \\ &= \frac{\sqrt{\sin a \sin b}}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}; \quad \text{ou} \quad \text{cof } p = -\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}; \end{aligned}$$

ayant déjà trouvé $q = 90^\circ$.

COROLL. 1.

LXXI. Puisque
$$\frac{B \text{ cof } q - C \sin q}{D \sin q + E \text{ cof } q} = \frac{D \text{ cof } q - E \sin q}{B \sin q + C \text{ cof } q},$$

cette équation donne d'abord la tangente de $2q$ favoir

$$\text{tang } 2q = \frac{2(BC - DE)}{BB + CC + DD - EE},$$

& puisque dans notre cas $BC = DE$, on en conclut d'abord $2q = 180^\circ$ & $q = 90^\circ$. Donc, $E + MB = 0$, ou

$$C + MD = 0, \quad \& \quad \text{partant} \quad M = -\frac{C}{D}, \quad \text{ou}$$

$$\frac{\text{tang } \delta \sin d^2}{\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2} = \frac{1}{\text{tang } \delta}, \quad \text{c'est à dire} \quad \text{tang } \delta = \frac{\sqrt{(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)}}{\sin d}$$

comme auparavant.

COROLL. 2.

LXXII. Or la même valeur de tangente $2q$ donné

$$\sin 2q = \frac{2(BC - DE)}{\sqrt{[4(BC - DE)^2 + (BB - CC - DD + EE)^2]}}$$

&



& ensuite ayant

$$2AA + BB + CC - DD - EE = \sqrt{4(CD - BE)^2 + (BB + CC - DD - EE)^2}$$

l'égalité des signes radicaux fournit

$$2AA + BB + CC - DD - EE = \frac{2(BC - DE)}{\sin 2q}, \text{ ou bien}$$

$$2AA + BB + CC - DD - EE = -\frac{BB + CC + DD - EE}{\cos 2q}$$

$$\text{donc } \operatorname{tang} q^2 = \frac{AA + BB - DD}{AA + CC - EE}.$$

COROLL. 3.

LXXIII. Pour notre cas nous aurons donc :

$$\operatorname{tang} q^2 = \frac{\operatorname{rang} \delta^2 \sin d^2}{\operatorname{tang} \delta^2 \sin d^2 - \operatorname{cof} d^2 + \operatorname{cof} c^2},$$

& puisque $\operatorname{tang} 2q = 0$, & partant $q = 90$, nous en concluons d'abord

$$\operatorname{tang} \delta^2 \sin d^2 = \operatorname{cof} d^2 - \operatorname{cof} c^2, \text{ ou } \operatorname{tang} \delta = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof} d^2 - \operatorname{cof} c^2)}}{\sin d},$$

$$\text{ou bien } \operatorname{tang} \delta = \frac{\sqrt{\sin a \sin b}}{\operatorname{cof} \frac{1}{2}(a + b)}$$

COROLL. 4.

LXXIV. Le signe radical marque tant une valeur positive que négative pour la déclinaison δ : de sorte que si δ donne une intersection dans la ligne Halleyenne, la déclinaison $-\delta$ en donnera aussi une, qui sera toujours dans un méridien perpendiculaire à ceux qui passent par les poles magnétiques.

COROLL. 5.

LXXV. Si $Bp = AP$ ou $b = a$, la déclinaison $\delta = \pm a$ donnera une ligne à intersection, & pour l'intersection on aura $q = 90^\circ$, & $p = 90^\circ$. Mais, si $b = 0$, ou si un pole magnétique étoit dans

D d 2

un



un pôle naturel de la Terre, on auroit $\delta = 0$, & $p = 0$: l'interfection seroit alors dans ce pôle de la Terre, pour une déclinaison infiniment petite.

I. REMARQUE.

LXXVI. Examinons plus soigneusement le cas, où l'intervalle $Bp = b$ évanouit, & puisque alors $c = 90^\circ - \frac{1}{2}a$ & $d = 90^\circ + \frac{1}{2}a$, pour trouver les lignes Halleyennes nous aurons d'abord $\text{tang } m = \text{tang } n = \text{--- tang } \delta$. Soit donc $m = n = \text{--- } \delta$, & nous trouverons

$$\text{tang } r = \text{---} \frac{\sin \delta}{\text{tang } \frac{1}{2} a \sin (\delta + q)} \quad \& \quad \text{cof } (r - p) = \text{--- cof } r$$

donc $r - p = \pm (180^\circ - r)$ de sorte que

$$p = 180^\circ \quad \text{ou} \quad p = 2r - 180^\circ$$

Chaque méridien n'est donc coupé que dans un point, l'autre se perdant dans le pôle p . Or, pour trouver plus commodément l'autre point, posons $a = 90^\circ + t$, & il faudra chercher l'angle t de sorte que

re que $\text{tang } t = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} a \sin (\delta + q)}{\sin \delta}$, & alors on aura $p = 2t$.

Si $q = 0$, on a $t = \frac{1}{2} a$: d'où l'on voit que toutes les lignes Halleyennes sortent du pôle A , & qu'elles rentrent dans l'autre pôle P .

2. REMARQUE.

LXXVII. Dans la supposition que le pôle méridional magnétique soit réuni avec le pôle antarctique p , j'ai posé la distance $AP = 30^\circ$, & la figure 10 représente les lignes Halleyennes pour les déclinaisons de 5° , 10° , 15° &c. qui sont toutes semblables à celles, que nous avons trouvées dans la première section pour les grandes déclinaisons. Toutes ces courbes, à ce qu'on voit, aboutissent aux pôles P & A , & n'entrent nulle part dans le pôle B , quoique ce point selon le calcul appartienne à chacune de ces lignes. En construisant ces lignes on s'apperçoit d'abord, qu'elles contiennent des branches semblables, & qu'un grand cercle perpendiculaire à PAB , & tiré par le

Fig. 10.



le milieu de l'intervalle AP, en seroit le diamètre. Or, si nous rapportons les lignes Halleyennes à ce diamètre, on verra bientôt, qu'elles sont toutes de petits cercles, qui passent par les deux poles A & P. Soit R le rayon d'un de ces petits cercles pour la déclinaison δ , prenant pour R l'arc du grand cercle, qui en représente le rayon dans la surface de la sphère, & on trouve $\cos R = \cos \frac{1}{2} a \cos \omega$, prenant $\tan \omega = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\tan \delta}$, ou bien on aura $\tan R = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\sin \delta}$. La démonstration de ces formules peut conduire à de fort beaux Théoremes de la Trigonométrie sphérique, mais ce cas est trop particulier, pour que je m'y arrête.

P R O B L E M E X I.

LXXVIII. *Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque les poles magnétiques ne sont pas diamétralement opposés, mais qu'ils se trouvent pourtant en des méridiens opposés.*

S O L U T I O N.

Ayant distribué cy-dessus les lignes Halleyennes en trois ordres, dont le premier contient les lignes, qui vont d'un pole magnétique au pole naturel qui lui est contraire; & le troisième celles, qui vont d'un pole magnétique au pole naturel, qui lui est le plus proche. Entre ces deux ordres le second est quasi la limite, & ne renferme qu'une seule ligne, composée de deux branches, qui se croisent quelque part, & forment un point d'intersection, comme on peut voir dans la septième figure. Ces trois ordres ont lieu dans tous les cas; quoiqu'il puisse arriver quelquefois, qu'un ou deux évanouissent ou se confondent ensemble, comme nous venons de voir dans le cas, où un pole magnétique tomboit dans un pole naturel: car, puisque la ligne du second ordre répondoit à une déclinaison infiniment petite, tant elle que le premier ordre tout entier se confondoit avec la ligne sans déclinaison, & toutes les déclinaisons donnoient des lignes du troisième



ordre. Mais, si aucune des distances $AP = a$ & $Bp = b$ n'évanouit, les trois ordres seront distingués, & pour les bien connoître, on n'a qu'à déterminer la ligne du second ordre, qui répond à la déclinaison δ , en sorte que

$$\text{tang } \delta = \frac{\sqrt{(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)}}{\text{fin } d} = \frac{\sqrt{\text{fin } a \text{ fin } b}}{\text{cof } \frac{1}{2}(a + b)}$$

d'où l'on tire

$$\text{fin } \delta = \frac{\sqrt{(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)}}{\text{fin } c} \quad \& \quad \text{cof } \delta = \frac{\text{fin } d}{\text{fin } c} = \frac{\text{cof } \frac{1}{2}(a + b)}{\text{cof } \frac{1}{2}(a - b)}$$

cette dernière expression rationnelle est la plus commode pour en tirer la déclinaison δ requise pour la ligne du second ordre; qui marque aussi tant $+$ δ pour la déclinaison orientale que $-$ δ pour l'occidentale. Ensuite nous avons vu que le point d'intersection tombe dans le méridien, où $g = 90^\circ$, & sa distance du pôle boréal P sera l'arc PL, en sorte que $\text{cof } PL = \frac{\text{cof } c}{\text{cof } d} = - \frac{\text{fin } \frac{1}{2}(a - b)}{\text{fin } \frac{1}{2}(a + b)}$. De là on voit que, si $a > b$, ou $AP > Bp$, cette intersection tombe vers le sud, & si $AP < Bp$ vers le nord.

Après avoir déterminé cette ligne, dont une branche passe d'un pôle magnétique à l'autre, & l'autre branche d'un pôle naturel à l'autre, les moindres déclinaisons donneront des lignes du premier ordre, & les plus grandes des lignes du troisième ordre: qu'on construira par les formules du §. LXII.

EXEMPLE.

LXXIX. Soit la distance des poles au nord $AP = 10^\circ$, & au sud $Bp = 20^\circ$: ayant donc $a = 10$, & $b = 20$, on aura $c = 90 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 95^\circ$, & $d = 90 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 105^\circ$.

De là pour la ligne du second ordre on trouvera la déclinaison $\delta = 14^\circ, 9', 36\frac{2}{3}''$. Soit cette déclinaison orientale, & cherchons dans tous les méridiens de 10° à 10° les points, par où cette ligne passera :



φ	r	s	PL	Pl
0'	105°, 0'	95°, 0'	10°, 0'	200°, 0'
10	101, 24	84, 37	16, 47	186, 1
20	97, 22	73, 58	23, 24	171, 20
30	93, 3	63, 7	29, 56	156, 10
40	88, 35	52, 10	36, 25	140, 45
50	84, 11	41, 16	42, 55	125, 27
60	80, 1	30, 31	49, 30	110, 32
70	76, 16	20, 1	56, 15	96, 17
80	73, 0	9, 52	63, 8	82, 52
90	70, 19	0, 0	70, 19	70, 19
100	68, 15	9, 36	77, 51	58, 39
110	66, 50	18, 56	85, 46	47, 54
120	66, 4	28, 8	94, 12	37, 56
130	65, 57	37, 16	103, 13	28, 41
140	66, 29	46, 26	112, 55	20, 3
150	67, 40	55, 54	123, 34	11, 46
160	69, 29	65, 12	134, 41	4, 17
170	71, 57	74, 57	146, 54	- 3, 0
180	75, 0	85, 0	160, 0	- 10, 0

Cette ligne est représentée dans la figure 11^{me}, où l'on voit outre les lignes sans déclinaison, les lignes pour la déclinaison de 5° & 10° du premier ordre, & du troisième ordre, on voit les lignes de 20° & 25° de déclinaison. De là on jugera aisément, quelle doit être la figure de ces lignes dans tout autre cas, où les poles magnétiques se trouvent en deux méridiens opposés, quelles que soient leurs distances aux poles naturels de la Terre. Fig. 11.



TROISIÈME SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre se trouvant dans le même méridien.

PROBLÈME XII.

Fig. 11. LXXX. *Les deux poles magnétiques A & B étant situés dans un même méridien PCp, déterminer la déclinaison magnétique pour chaque lieu proposé de la terre L.*

SOLUTION.

Soit la distance du pole magnétique boréal A au pole arctique $AP = a$, & la distance du pole méridional B au pole antarctique $Bp = b$. La distance des poles magnétiques $AB = 180^\circ - a - b$ soit partagée au milieu C; soit la moitié $CA = CB = 90 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = c$, & l'arc du méridien $CP = d = 90^\circ + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Qu'en tire par le lieu proposé de la Terre L le méridien PLp, & soit la longitude $APL = q$, comptant cet angle depuis le méridien PCp vers l'occident, & la distance au pole arctique $PL = p$; enfin soit δ la déclinaison de la boussole en L, laquelle étant positive soit orientale, de sorte qu'une valeur négative trouvée pour δ marque une déclinaison occidentale. Cela posé, tout le raisonnement demeurant le même, comme dans la section précédente, puisque la différence se trouve uniquement dans les quantités c & d , entant qu'elles dépendent des distances a & b , on trouvera comme cy-dessus la déclinaison magnétique exprimée en sorte

$$\text{tang } \delta = \frac{(\text{cof } c \text{ cof } p - \text{cof } d) \sin q}{-\text{cof } c \text{ cof } q + \sin d \sin p + \text{cof } d \text{ cof } p \text{ cof } q}, \quad \text{où}$$

$$\text{cof } c = \sin \frac{1}{2}(a + b), \quad \text{cof } d = \sin \frac{1}{2}(b - a) \quad \& \quad \sin d = \text{cof } \frac{1}{2}(b - a).$$

Donc, en substituant ces valeurs, nous aurons

$$\text{tang } \delta = \frac{[\sin \frac{1}{2}(a + b) \text{ cof } p - \sin \frac{1}{2}(b - a)] \sin q}{-\sin \frac{1}{2}(a + b) \text{ cof } q + \text{cof } \frac{1}{2}(b - a) \sin p + \sin \frac{1}{2}(b - a) \text{ cof } p \text{ cof } q}.$$



COROLL. I.

LXXXI. Par tout l'hémisphère que la figure représente, que je nommerai le supérieur, tant $\sin q$ que $\sin p$ ont partout des valeurs positives; mais si q & p surpassent 90° , leurs cosinus deviennent négatifs. D'où l'on voit que le numérateur ne demeure pas toujours positif, comme dans la section précédente.

COROLL. 2.

LXXXII. Quand l'arc p est pris si grand, que $\cos p = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)}$ la déclinaison δ évanouit, & si l'on augmente au delà l'arc $PL = p$, la déclinaison deviendra sur ce même hémisphère négative ou occidentale. Et par la même raison les deux espèces de déclinaison auront aussi lieu sur l'autre hémisphère.

COROLL. 3.

LXXXIII. Car, puisque l'équation demeure inaltérée quoiqu'on prenne δ & q négatifs, la déclinaison sur l'hémisphère inférieur suivra la même loi que sur le supérieur, pourvu qu'on change le titre.

COROLL. 4.

LXXXIV. Si les deux distances AP & Bp sont égales $a = b$; notre expression deviendra $\tan \delta = \frac{\sin a \cos p \sin q}{-\sin a \cos q + \sin p}$. Donc, si $p = 90^\circ$, c'est à dire partout sous l'équateur, la déclinaison magnétique sera $= 0$. Or si $p = 0$, on aura $\tan \delta = -\tan q$, ou $\delta = 180 - q$; dans l'autre pôle ou $p = 180^\circ$, ayant $\tan \delta = \frac{-\sin q}{-\cos q}$, à cause du numérateur & dénominateur négatif, on aura $\delta = 180^\circ + q$.

COROLL. 5.

LXXXV. Ces deux dernières conclusions ont aussi lieu en général, d'où l'on voit que sur l'hémisphère supérieur proche du pôle boréal P la déclinaison sera $\delta = 180^\circ - q$, & partant orientale;



mais proche du pôle antarctique p , la valeur $\delta = 180^\circ - q$ indique une déclinaison occidentale.

R E M A R Q U E.

LXXXVI. Voilà donc déjà une grande différence entre le cas de cette section & celui de la précédente. Car auparavant la déclinaison étoit par tout l'hémisphère supérieur orientale, & sur l'autre hémisphère partout occidentale, de sorte que sous chaque méridien elle fut partout de la même espèce. Mais dans le cas présent nous voyons, que sur le même hémisphère les deux espèces ont lieu, de sorte que sous un même méridien l'aiguille décline tant vers l'est que vers l'ouest. Par là est renversé le fondement, sur lequel M. *Halley* avoit établi son système de quatre pôles magnétiques, croyant que s'il n'y en avoit que deux, il seroit impossible, que les deux espèces de déclinaison régnaissent sous un même méridien, ce qui sera mis dans un plus grand jour par les recherches suivantes.

P R O B L E M E XIII.

LXXXVII. *Les deux pôles magnétiques A & B étant placés dans un même méridien PCp, trouver les lignes Halleyennes, qui passent par tous les endroits, où il n'y a point du tout de déclinaison.*

S O L U T I O N.

Ayant posé comme auparavant les distances $AP = a$ & $Bp = b$, puisque pour un lieu quelconque L déterminé par l'angle $CP\hat{L} = q$ & l'arc $PL = p$, la déclinaison δ est exprimée en sorte

$$\text{tang } \delta = \frac{[\sin \frac{1}{2}(a+b) \cos p - \sin \frac{1}{2}(b-a)] \sin q}{-\sin \frac{1}{2}(a+b) \cos q + \cos \frac{1}{2}(b-a) \sin p + \sin \frac{1}{2}(b-a) \cos p \cos q}$$

on voit que la déclinaison δ évanouit en deux cas, l'un où $\sin q = 0$, & l'autre où $\cos p = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}$; le premier donne ou $q = 0$, ou $q = 180^\circ$, & partant la déclinaison sera nulle, tant sous le méridien PCp qui passe par les deux pôles magnétiques A & B, que sous le méridien $Pc\hat{p}$ qui lui est opposé.

Mais



Mais, puisque l'autre équation $\cos p = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}$ est aussi possible, il y a outre ces deux méridiens encore d'autres endroits, où la déclinaison évanouit également; & il est évident, que tous ces lieux sont situés dans un cercle parallèle à l'équateur, dont le sinus de latitude est $= \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}$. La latitude de ce parallèle sera donc boréale si $b > a$, ou si l'intervalle méridional Bp est plus grand que le boréal AP ; & elle sera méridionale, si $AP > Bp$. Si ces deux intervalles étoient égaux, ce seroit partout sous l'équateur même, quo l'aiguille n'eut point de déclinaison.

COROLL. I.

LXXXVIII. Dans ce cas donc, où les deux poles magnétiques A & B se trouvent dans le même méridien PCp , il y a outre les deux méridiens PCp & Pcp encore un cercle parallèle MKN , où la déclinaison est nulle, ce qui produit une différence bien remarquable entre ce cas, & celui que j'ai considéré dans la section précédente.

Fig. 11.

COROLL. 2.

LXXXIX. Pour déterminer ce parallèle MKN , sa distance au pole arctique P , ou l'arc PM , est tel que $\cos PM = \frac{\cos d}{\cos c} = \frac{\cos CP}{\cos CA}$; d'où l'on déduit cette construction. Du point C comme centre avec l'intervalle CA qu'on décrit sur la sphère le petit cercle AKB , & qu'on tire un méridien PK , qui le touche en K , alors le parallèle cherché MKN passera par le point K .

COROLL. 3.

XC. Par ce parallèle MKN , & les deux méridiens PCp & Pcp , la surface de la Terre est en sorte partagée en quatre parties, que sur l'hémisphère supérieur, la déclinaison est orientale dans la partie boréale, & occidentale dans la partie méridionale. Or au contraire sur l'autre hémisphère la déclinaison est occidentale sur la partie boréale & orientale sur la partie méridionale.



COROLL. 4.

XCI. En passant donc tant l'un des deux méridiens que ce parallèle MKN on rencontrera toujours une déclinaison contraire à celle qu'on a eu auparavant, à moins qu'on ne passe par les points d'intersection M ou N, un tel passage devant être censé double.

REMARQUE.

XCII. Puisque les lignes sans déclinaison forment deux intersections M & N, il est évident qu'aucune autre ligne Halleyenne ne sauroit donner des intersections. Cela est aussi clair par la détermination de la ligne du second ordre, que nous avons donnée dans la section précédente; car, puisqu'ici l'intervalle b doit pris négatif, la déclinaison δ à laquelle devrait répondre la ligne du second ordre, seroit déterminée ainsi $\text{tang } \delta = \frac{\sqrt{-\sin a \sin b}}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}$, & partant imaginaire. Cependant, puisque le cas $\delta = 0$ donne en effet une intersection, il faut remarquer, que l'équation, qui nous a fourni cy-dessus cette valeur (69) a été divisible par $\text{tang } \delta$, de sorte que ce cas n'en est pas exclus. Donc, parce que la ligne du second ordre se confond ici avec la ligne sans déclinaison, il n'y aura point de lignes du premier ordre, mais toutes les lignes Halleyennes seront du troisième ordre. Il ne reste donc que d'en enseigner la construction, ce que je ferai dans le problème suivant.

PROBLEME XIV.

XCIII. *Dans le cas de cette section déterminer les lignes Halleyennes pour tous les degrés de déclinaison tant vers l'Est que vers le Ouest.*

SOLUTION.

Fig. 12. Que δ marque la déclinaison proposée, & soit L un point dans la ligne que nous cherchons. Posant maintenant $AC = c$; $CP = d$, $CPL = q$ & $PL = p$, la solution de ce problème sera la même que celle du problème 9, la diversité de la détermination des quantités c & d par a & b n'y causant aucun changement, puisqu'ici nous
avons



avons $c = 90^\circ - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ & $d = 90^\circ + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. On commencera donc par chercher deux angles m & n en sorte que

$$\text{tang } m = \frac{\text{tang } \delta \text{ cof } d}{\text{cof } c} = \frac{\text{tang } \delta \text{ fin } \frac{1}{2}(b-a)}{\text{fin } \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang } n = \frac{\text{tang } \delta \text{ cof } c}{\text{cof } d} = \frac{\text{tang } \delta \text{ fin } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{fin } \frac{1}{2}(b-a)}$$

Alors pour une longitude CPL = q quelconque on cherchera deux arcs r & s en sorte que

$$\text{tang } r = \frac{\text{tang } d \text{ fin } m}{\text{fin}(m-q)} = \frac{\text{cof } \frac{1}{2}(b-a) \text{ fin } m}{\text{fin } \frac{1}{2}(b-a) \text{ fin}(m-q)}, \quad \&$$

$$\text{cof } s = \frac{\text{cof } c \text{ fin}(n-q) \text{ fin } r}{\text{fin } d \text{ fin } n} = \frac{\text{fin } \frac{1}{2}(a+b) \text{ fin}(n-q) \text{ fin } r}{\text{cof } \frac{1}{2}(b-a) \text{ fin } n}$$

De là on conclura deux valeurs pour la distance du point L au pôle arctique P, savoir $p = r \pm s$. Or il suffit de calculer les lignes pour les déclinaisons orientales, puisque celles qui répondent aux occidentales, où δ négatif, leur sont semblables, & tombent dans l'hémisphère opposé. Toutes ces lignes seront du troisième ordre, & sortiront de chaque pôle magnétique pour rentrer dans le pôle voisin de la Terre; elles seront aussi de part & d'autres avec le grand cercle PCp cP des angles égaux à la déclinaison δ . Par cette détermination on verra, que les lignes Halleyennes seront à peu près telles, qu'elles sont représentées dans la figure 14. qui n'a pas besoin d'explication.

Fig. 14.

COROLL. I.

XCIV. On peut observer ici comme cy-dessus, que si l'on applique en A un quart de cercle AE, qui fasse avec le méridien PCp un angle CAE = δ vers l'occident, si δ est positif, le grand cercle tiré par les points C & E coupera tous les méridiens PLp en sorte en O que PO = r .

Fig. 11.



COROLL. 2.

Fig. 13.
& 14.

XCV. Or le petit cercle parallèle à l'équateur MKN, où la déclinaison est nulle, coupe en sorte les méridiens de l'hémisphère supérieur, que sous la partie vers le Nord la déclinaison est orientale, & sous la partie vers le Sud occidentale.

REMARQUE.

XCVI. Puisque toutes les lignes Halleyennes sont du troisième ordre, & que chacune ne s'éloigne du pôle qu'à une certaine distance, il fera bon de déterminer pour chaque déclinaison la plus grande distance du pôle arctique, afin qu'on sache jusqu'à quelle latitude chaque degré de déclinaison s'étend. Ce sera le sujet du problème suivant.

PROBLEME XV.

XCVII. *Pour chaque déclinaison proposée déterminer la distance, à laquelle la ligne Halleyenne, qui lui répond, s'éloigne du pôle boreal de la Terre.*

SOLUTION.

Ayant trouvé entre p & q cette équation :

$$\text{tang } \delta \sin d \sin p + (\text{tang } \delta \cos d \cos q - \cos c \sin q) \cos p = \text{tang } \delta \cos c \cos q - \cos d \sin q$$

il s'agit de déterminer la plus grande valeur de p , laquelle se trouve par la différentiation en supposant $dp = 0$, en sorte

$$(\text{tang } \delta \cos d \sin q + \cos c \cos q) \cos p = \text{tang } \delta \cos c \sin q + \cos d \cos q$$

multiplions la première par $\cos q$ & celle-cy par $\sin q$, pour avoir leur somme.

$$\text{tang } \delta \sin d \sin p \cos q + \text{tang } \delta \cos d \cos p = \text{tang } \delta \cos c$$

$$\text{ou } \sin d \sin p \cos q = \cos c - \cos d \cos p$$

Multiplions aussi la première par $\sin q$ & la seconde par $-\cos q$; & alors leur somme donnera

$$\text{tang } \delta \sin d \sin p \sin q - \cos c \cos p = -\cos d$$

ou



$$\text{ou } \sin d \sin p \sin q = \frac{\text{col } c \text{ col } p - \text{col } d}{\text{tang } \delta}.$$

Ajoutons ensemble les quarrés de ces deux formules pour éliminer q , & nous aurons

$$\text{tang } \delta^2 \sin d^2 \sin p^2 = \text{tang } \delta^2 (\text{col } c - \text{col } d \text{ col } p)^2 + (\text{col } c^2 \text{ col } p^2 - \text{col } d)^2$$

qui se réduit à celle-cy :

$$\begin{aligned} \sin \delta^2 \sin d^2 \sin p^2 = & \sin \delta^2 \text{col } c^2 - 2 \sin \delta^2 \text{col } c \text{ col } d \text{ col } p + \sin \delta^2 \text{col } d^2 \text{col } p^2 \\ & + \text{col } \delta^2 \text{col } d^2 - 2 \text{col } \delta^2 \text{col } c \text{ col } d \text{ col } p + \text{col } \delta^2 \text{col } c^2 \text{col } p^2 \end{aligned}$$

& posant pour $\text{col } \delta^2$ sa valeur $1 - \sin \delta^2$, on parvient à

$$\sin \delta^2 \sin c^2 \sin p^2 = (\text{col } d - \text{col } c \text{ col } p)^2$$

par conséquent :

$$- \sin \delta \sin c \sin p + \text{col } p = \text{col } d$$

dont la résolution est très aisée en cherchant un angle g , que $\text{tang } g = \sin \delta \text{ tang } c$, & on aura

$$\text{col } (p + g) = \frac{\text{col } d \text{ col } g}{\text{col } c},$$

d'où l'on trouve p doublement.

Pour la longitude q à laquelle répond cette plus grande valeur de p , à cause de $\text{col } c \text{ col } p - \text{col } d = \pm \sin \delta \sin c \sin p$, on obtiendra

$$\sin d \sin p \sin q = \pm \text{col } \delta \sin c \sin p, \text{ ou } \sin q = \pm \frac{\text{col } \delta \sin c}{\sin d}$$

& partant tous ces lieux les plus éloignés du pôle P ne tombent pas dans un même méridien, mais plus la déclinaison δ approche de 90° , l'angle q sera plus petit : qui évanouïra, si $\delta = 90^\circ$.

COROLL. I.

XCVIII. Si l'on pose $\frac{\text{col } d \text{ col } g}{\text{col } c} = \text{col } h$, on aura $p + g = \pm h$

& les deux valeurs de p seront $p = g \pm h$. Car puisque pour chaque

que



que déclinaison δ il y a deux lignes Halleyennes, l'une boréale, l'autre méridionale, dans les hémisphères opposés, la plus petite valeur de p sert pour la boréale, & la plus grande pour la méridionale.

COROLL. 2.

XCIX. Les deux valeurs de q répondent aussi à ces deux lignes, de sorte que la positive convient à celle qui est dans l'hémisphère supérieur; & la négative pour l'inférieur. Nous avons déjà observé que si δ est positif, ou la déclinaison orientale, la ligne boréale est dans l'hémisphère supérieur & la méridionale dans l'inférieur.

COROLL. 3.

C. Si la déclinaison δ évanouit, on aura $g = 0$, & partant $\cos h = \frac{\cos d}{\cos c}$, & de là $p = \pm h$, ce qui est la distance du parallèle, où il n'y a point de déclinaison au pôle P. Alors, quoique tous les points de cette ligne soient également éloignés du pôle, on trouve pourtant $\sin q = \pm \frac{\sin c}{\sin d}$, & cet angle convient aux déclinaisons extrêmement petites.

COROLL. 4.

CI. Pour de plus grandes déclinaisons la longitude q devient plus petite, & si $\delta = 90^\circ$, on aura $q = 0$, dans ce cas les points les plus éloignés des pôles de la Terre seront dans les pôles magnétiques, par lesquels toutes les lignes Halleyennes passent.

EXEMPLE.

CII. Soit $PA = a = 10^\circ$ & $PB = b = 20^\circ$; donc $c = 90^\circ - \frac{1}{2}a - b = 75^\circ$ & $d = 85^\circ$: & calculons pour chaque déclinaison tant la plus grande distance p au pôle P que l'angle $CPL = q$.



Déclinaison	Ligne boreale		Ligne méridionale	
	distance p	angle q +	distance p	angle q -
0°	70°, 19'	75°, 51'	70°, 19'	75°, 51'
5°	53, 19	75, 0	89, 21	75, 0
10	40, 38	72, 43	106, 32	72, 43
15	31, 58	69, 29	120, 0	69, 29
20	26, 6	65, 40	129, 56	65, 40
25	21, 59	61, 30	137, 15	61, 30
30	19, 2	57, 7	142, 40	57, 7
35	16, 51	52, 35	146, 47	52, 35
40	15, 10	47, 58	149, 56	47, 58
45	13, 54	43, 17	152, 24	43, 17
50	12, 54	38, 27	154, 20	38, 27
55	12, 6	33, 47	155, 52	33, 47
60	11, 29	29, 0	157, 5	29, 0
70	10, 37	19, 22	158, 47	19, 22
80	10, 9	9, 42	159, 43	9, 42
90	10, 0	0, 0	160, 0	0, 0

REMARQUE.

CIII. On voit par ce calcul, que les intervalles entre les lignes Halleyennes deviennent d'autant plus petits, plus la déclinaison augmente : ainsi dans les lignes boréales, celle qui répond à 5° est éloignée de 17° de la ligne sans déclinaison ; or de 5° à 10° il n'y a que 12°, 41' d'intervalle, & de 10° à 15° l'intervalle est 8°, 40' & ainsi de suite. Dans les lignes méridionales les intervalles sont plus grands, puisque la distance des poles du Sud est plus grande : car en général plus les poles magnétiques sont éloignés des poles de la Terre, plus les lignes Halleyennes s'éloignent aussi des poles ; & si les poles magnétiques se trouvoient effectivement dans un même méridien, par quelques observations des grandes déclinaisons il ne seroit pas difficile d'estimer la vraie distance des poles magnétiques aux poles de la Ter-



re ; mais, comme il n'est pas probable que cela arrive, & quand même il arriveroit, il ne sauroit durer long tems à cause de leur variabilité, il ne vaut pas la peine que je m'y arrête. Cependant le cas où les deux distances $AP = a$ & $Bp = b$ sont égales, semble en lui même si remarquable, qu'il mérite bien un développement particulier, ce que je ferai dans le problème suivant.

PROBLEME XVI.

fig. 12.

CIV. Si les deux poles magnétiques A & B sont dans le même méridien également éloignés des poles de la Terre P & p, déterminer les lignes Halleyennes, pour tous les degrés de déclinaison.

SOLUTION.

Puisqu'ici $b = a$, on aura $c = 90^\circ - a$, & $d = 90^\circ$: donc à l'endroit L déterminé par l'arc $PL = p$, & l'angle $CL = q$, la déclinaison δ sera déterminée en sorte :

$$\text{tang } \delta = \frac{\sin a \cos p \cos q}{\sin a \cos q + \sin p}.$$

Et partant, si la déclinaison δ est donnée, on aura entre p & q cette équation : $\text{tang } \delta \sin p - \sin a \sin q \cos p = \text{tang } \delta \sin a \cos q$,

pour la construire posons $\text{tang } r = \frac{\text{tang } \delta}{\sin a \sin q}$,

& nous aurons $-\cos(p+r) = \sin a \cos q \sin r$. Soit donc s un tel angle que $\cos s = \sin a \cos q \sin r$, & puisque $p+r = 180^\circ \pm s$, nous aurons les deux valeurs suivantes p :

$$p = 180^\circ - r - s \quad \& \quad p = 180^\circ - r + s.$$

La ligne sans déclinaison sera donc, outre les méridiens PCp & Pcp , l'équateur même de la Terre, & les déclinaisons orientales se trouveront tant sur l'hémisphère supérieur vers le nord, que sur l'inférieur vers le sud : le contraire arrive à l'égard des déclinaisons occidentales. Toutes ces lignes Halleyennes appartiennent au troisième ordre, & si



si l'on veut savoir seulement leur plus grand éloignement des poles, le problème précédent fournit une règle bien facile. Car, à cause de $c = 90 - a$ & $d = 90$, la plus grande distance de la ligne Halleyenne pour la déclinaison δ au pole étant posée $= p$, sera exprimée par cette égalité

$$\sin \delta \cos a \sin p - \sin a \cos p = 0, \text{ ou } \operatorname{tang} p = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin \delta},$$

& la longitude q , à laquelle cette plus grande distance p se trouve, en sorte : $\sin q = \cos \delta \cos a$.

COROLL. I.

CV. On peut rendre le calcul des lignes Halleyennes plus commode, en cherchant les arcs r & s en sorte que

$$\operatorname{tang} r = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin a \sin q} \quad \& \quad \cos s = - \sin a \cos q \sin r,$$

car alors les deux valeurs de p seront

$$p = s - r \quad \& \quad p = -s - r.$$

COROLL. 2.

CVI. En prenant δ positif, si l'on donne à q successivement toutes les valeurs depuis 0° jusqu'à 180° , l'arc r sera toujours moindre que 90° , & tant que q est $< 90^\circ$, l'arc s sera plus grand que 90° , & partout la première valeur $p = s - r$ positive, & l'autre $p = -s - r$ négative plus grande que 90° , qui s'étendra dans l'hémisphère inférieur au delà de l'équateur.

COROLL. 3.

CVII. Si l'on pose $q = 90^\circ + \phi$, on aura pour r la même valeur que posant $q = 90^\circ - \phi$, mais alors au lieu de s on trouvera $180^\circ - s$: donc les deux valeurs de p seront :

$$p = 180^\circ - s - r \quad \& \quad p = -180^\circ + s - r$$

dont la première est positive & l'autre négative.



COROLL. 4.

CVIII. Il suffit donc de pousser le calcul seulement jusqu'à $q = 90$, & puisque les lignes Halleyennes dans les quatre quartiers de la Terre sont semblables entr'elles, il suffit de les calculer pour un seul quartier, car alors

$$q = 90^\circ - \phi \text{ donne } p = s - r$$

$$\& \quad q = 90^\circ + \phi \text{ donne } p = 180 - s - r$$

$$\text{prenant } \operatorname{tang} r = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin a \operatorname{csc} \phi} \quad \& \quad \operatorname{csc} s = - \sin a \sin \phi \sin r.$$

COROLL. 5.

CIX. Si l'on prend $\phi < \delta$, on trouvera la seconde valeur de p négative, qui répond à la longitude $q = 90^\circ + \phi$: il en sera donc marqué un point dans l'hémisphère inférieur, où la déclinaison n'est pas δ , mais $180^\circ + \delta$: qui convient avec la déclinaison occidentale de $180^\circ - \delta$, cette ligne étant la continuation de celle qui répond à la déclinaison orientale δ .

REMARQUE.

CX. La manière dont je me sers ici pour déterminer les lignes courbes tracées sur une surface sphérique, par une équation entre l'angle $CPL = q$ & l'arc $PL = p$, peut indiquer le même point en plusieurs manières. Ainsi l'angle q demeurant le même comme les arcs $p, \pm 360^\circ + p, \pm 720^\circ + p$ &c. marquent le même point de la sphère, les deux coordonnées p & q ensemble peuvent varier pour le même point: car on peut aussi rapporter le point L à la longitude $180^\circ + q$, ou à cette négative $-(180 - q)$, en prenant au lieu de p l'arc négatif $-p$, ou $360^\circ - p$. Une telle différence dans nos formules ne change donc rien dans les courbes mêmes.



QUATRIÈME SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant placés en deux méridiens différens.

PROBLÈME XVII.

CXI. *Les deux poles magnétiques A & B étant placés en deux méridiens différens PAp & PBp, déterminer la déclinaison magnétique pour un lieu quelconque L de la Terre.* Fig. 15.

SOLUTION.

Soient les distances des poles magnétiques aux poles de la Terre $AP = a$, $Bp = b$, & l'angle que font les deux méridiens des poles magnétiques, $APB = \gamma$. Qu'on tire par les poles magnétiques l'arc de grand cercle ACB dont le milieu soit en C , & posons $CA = CB = c$, & on aura à cause de $PB = 180^\circ - b$;

$$\cos 2c = \sin a \sin b \cos \gamma - \cos a \cos b.$$

Tirons par C le méridien PC , & au lieu des trois élémens principaux a , b , γ , introduisons dans le calcul ces trois dérivés déterminables par ceux-là :

$$CA = CB = c; \quad CP = d; \quad \text{\& l'angle } ACP = e.$$

Maintenant soit proposé un lieu quelconque L de la Terre, où $L\delta$ représente la direction magnétique, auquel ayant tiré l'arc du grand cercle CL , soit comme dans le problème septième $CL = m$ & l'angle $ACL = n$; & on aura $\text{tang } CL\delta = \frac{\text{tang } n (1 - \cos c \cos m)}{\cos c - \cos m}$.

Considérons PC comme le premier méridien, & ayant tiré par L le méridien PLp , soit la longitude comptée vers l'occident ou l'angle $CPL = q$, & l'arc $PL = p$. Maintenant le triangle sphérique CPL fournira $\cos CL = \cos m = \cos d \cos p + \sin d \sin p \cos q$

$$\text{tang } PCL = \text{tang } (n - e) = \frac{\sin p \sin q}{\sin d \cos p - \cos d \sin p \cos q}$$

F f 3 tang



$$\text{tang CLP} = \frac{\sin d \sin q}{\cos d \sin p - \sin d \cos p \cos q} = \text{tang} (\text{CL}\delta + \delta)$$

posant la déclinaison en L entant qu'elle est orientale, ou l'angle PL $\delta = \delta$. Posons comme dans le problème huitième pour abrégier:

$$\cos d \cos p + \sin d \sin p \cos q = A; \quad \sin d \cos p - \cos d \sin p \cos q = B$$

& nous aurons :

$$\cos m = A; \quad \text{tang} (n - e) = \frac{\sin p \sin q}{B} = \frac{\text{tang} n - \text{tang} e}{1 + \text{tang} e \text{ tang} n}$$

$$\& \quad \text{tang} (\text{CL}\delta + \delta) = \frac{\sin d \sin q}{C} = \frac{\text{tang} \text{CL}\delta + \text{tang} \delta}{1 - \text{tang} \delta \text{ tang} \text{CL}\delta}$$

$$\text{d'où nous tirons:} \quad \text{tang} \delta = \frac{\sin d \sin q - C \text{ tang} \text{CL}\delta}{C + \sin d \sin q \text{ tang} \text{CL}\delta}$$

$$\text{Or de là nous avons} \quad \text{tang} n = \frac{B \text{ tang} e + \sin p \sin q}{B - \text{tang} e \sin p \sin q}$$

$$\& \text{ partant} \quad \text{tang} \text{CL}\delta = \frac{1 - A \cos c}{\cos c - A} \cdot \frac{B \text{ tang} e + \sin p \sin q}{B - \text{tang} e \sin p \sin q}$$

Donc substituant cette valeur il proviendra

$$\text{tang} \delta = \frac{\sin d \sin q (\cos c - A) (B - \text{tang} e \sin p \sin q) - C (1 - A \cos c) (B \text{ tang} e + \sin p \sin q)}{C (\cos c - A) (B - \text{tang} e \sin p \sin q) + \sin d \sin q (1 - A \cos c) (B \text{ tang} e + \sin p \sin q)}$$

ou bien

$$\text{tang} \delta = \frac{-\sin q (AB \sin d + C \sin p) + \cos c \sin q (AC \sin p + B \sin d) + \text{tang} e (A \sin d \sin p \sin q^2 - BC) + \cos c \text{ tang} e (ABC - \sin d \sin p \sin q^2)}{\sin d \sin p \sin q^2 - ABC - \cos c (A \sin d \sin p \sin q^2 - BC) + \text{tang} e \sin q (AC \sin p + B \sin d) - \cos c \text{ tang} e \sin q (AB \sin d + C \sin p)}$$

Or nous avons vu cy-dessus §. LV. que

$$AC \sin p + B \sin d = (1 - AA) \cos p; \quad AB \sin d + C \sin p = (1 - AA) \cos d$$

$$A \sin d \sin p \sin q^2 - BC = (1 - AA) \cos q; \quad \sin d \sin p \sin q^2 - ABC = (1 - AA)$$

$$(\sin d \sin p + \cos d \cos p \cos q)$$

donc



donc, puisque le numérateur & dénominateur est divisible par $1 - AA$, on trouvera par cette réduction

$$\text{tang } \delta = - \frac{cf / \sin \gamma + cf \cdot cf \cdot \sin \gamma + \text{tang } e \cdot cf \gamma - cf \cdot \text{tang } (\sin \delta \sin \rho + cf / cf \cdot cf \gamma)}{\sin \delta \sin \rho + cf / cf \cdot cf \gamma - cf \cdot \cos \gamma + \text{tg } e \cdot \cos \rho \sin \gamma - cf \cdot cf \cdot \text{tg } e \sin \gamma}$$

d'où l'on peut déterminer la déclinaison magnétique pour tous les lieux de la Terre par les trois élémens donnés c , d & e .

COROLL. 1.

CXII. Des trois élémens principaux a , b , γ , les trois autres c , d , e , que nous avons introduits dans le calcul, sont déterminés en sorte

$$\cos 2c = \sin a \sin b \cos \gamma - \cos a \cos b$$

$$\cos d = \frac{\cos a - \cos b}{2 \cos c} \quad \& \quad \text{tang } e = \frac{\sin a \sin b \sin \gamma}{(\cos a + \cos b) \cos c}$$

& de là

$$\text{tang } APC = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin a + \sin b \cos \gamma} \quad \& \quad \text{tang } BPC = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin b + \sin a \cos \gamma}$$

COROLL. 2.

CXIII. Donc, pour le lieu proposé L si l'on prend $\text{tang } \eta = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin b + \sin a \cos \gamma}$ le méridien PLP passe par le pole

magnétique B ; & si l'on prend $\text{tang } \eta = - \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin a + \sin b \cos \gamma}$ le méridien PLP passera par le pole magnétique A .

COROLL. 3.

CXIV. Réciproquement si les élémens c , d , e sont regardés comme donnés, les primitifs a , b , γ en sont déterminés en sorte :

$$\cos a = \sin c \sin d \cos e + \cos c \cos d$$

$$\cos b = \sin c \sin d \cos e - \cos c \cos d$$

$$\text{tang } APC = \frac{\sin c \sin e}{\cos c \sin d - \sin c \cos d / \cos e} : \text{tang } BPC = \frac{\sin c \sin e}{\cos c \sin d + \sin c \cos d / \cos e}$$

d'où



$$\text{d'où } \operatorname{tang} \gamma = \frac{2 \sin c \operatorname{cof} c \sin d \sin e}{\sin d^2 - \sin c^2 - \sin c^2 \sin d^2 \sin e^2}.$$

COROLL. 4.

CXV. Pour faciliter ce calcul, on peut chercher un angle f de sorte que $\operatorname{tang} f = \operatorname{tang} c \operatorname{cof} e$, & alors on aura

$$\operatorname{cof} a = \frac{\operatorname{cof} c \operatorname{cof}(d-f)}{\operatorname{cof} f}; \quad \operatorname{cof} b = \frac{\operatorname{cof} c \operatorname{cof}(d+f)}{\operatorname{cof} f}$$

$$\operatorname{tang} \text{APC} = \frac{\operatorname{tang} c \sin e \operatorname{cof} f}{\sin(d-f)}; \quad \operatorname{tang} \text{BPC} = \frac{\operatorname{tang} c \sin e \operatorname{cof} f}{\sin(d+f)}$$

& $\gamma = \text{APC} + \text{BPC}$.

PROBLEME XVIII.

CXVII. *Sous chaque méridien de la Terre déterminer les endroits, où la déclinaison magnétique est d'une quantité donnée ou vers l'Est ou vers l'Ouest.*

SOLUTION.

Ayant établi les élémens c, d, e , qui déterminent la position des poles magnétiques sur la Terre, soit δ la déclinaison magnétique proposée, & dirigée vers l'Est, si δ est un angle positif. Prenons PC pour le premier méridien, duquel soit éloigné le méridien proposé PL p vers l'Ouest de l'angle CPL = q , & il s'agit de trouver l'arc PL = p par le moyen de l'équation trouvée dans le problème précédent, que je représente de cette façon

$$\begin{aligned} & \sin d (\operatorname{tang} \delta + \operatorname{cof} c \operatorname{tang} e) \sin p \\ + & [\operatorname{cof} d (\operatorname{tag} \delta + \operatorname{cof} c \operatorname{tag} e) \operatorname{cof} q - (\operatorname{cof} c - \operatorname{tag} \delta \operatorname{tag} e) \sin q] \operatorname{cof} p = \\ & (\operatorname{tang} e + \delta \operatorname{cof} c) \operatorname{cof} q - \operatorname{cof} d (1 - \operatorname{tag} \delta \operatorname{cof} c \operatorname{tag} e) \sin q \end{aligned}$$

Pofons pour abrégier

$$A = \sin d (\operatorname{tang} \delta + \operatorname{cof} c \operatorname{tang} e)$$

$$B = \operatorname{cof} d (\operatorname{tang} \delta + \operatorname{cof} c \operatorname{tang} e)$$

$$C = \operatorname{cof} c - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} e$$

$$D = \operatorname{tang} e + \operatorname{tang} \delta \operatorname{cof} c$$

$$E = \operatorname{cof} d (1 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{cof} c \operatorname{tang} e)$$

pour

fournit pour avoir à résoudre cette équation :

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

Cherchons comme cy-dessus §. LXI. deux arcs r & s , de sorte que

$$\operatorname{tang} r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q} \quad \& \quad \cos s = \frac{(D \cos q - E \sin q) \sin r}{A}$$

& nous aurons pour p cette double valeur $p = r \pm s$.
Mais, pour rendre ce calcul plus commode, cherchons deux arcs m & n

tels que
$$\operatorname{tang} m = \frac{B}{C} \quad \& \quad \operatorname{tang} n = \frac{D}{E}$$

d'où nous aurons :

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} r &= \frac{A \cos m}{C \sin(m - q)} = \frac{A \sin m}{B \sin(m - q)} \\ \operatorname{tang} s &= \frac{E \sin r \sin(n - q)}{A \cos n} = \frac{D \sin r \sin(n - q)}{A \sin n} \end{aligned}$$

Il ne reste donc que de calculer commodement les valeurs des lettres A, B, C, D & E. Pour cet effet cherchons deux angles f & g tels

que
$$\operatorname{tang} f = \operatorname{tang} e \cos c \quad \& \quad \operatorname{tang} g = \frac{\operatorname{tang} e}{\cos c},$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin d \sin(f + \delta)}{\cos \delta \cos f}; & B &= \frac{\cos d \sin(f + \delta)}{\cos \delta \cos f}; & D &= \frac{\cos c \sin(g + \delta)}{\cos \delta \cos g} \\ C &= \frac{\cos c \sin(g + \delta)}{\cos \delta \cos g}; & E &= \frac{\cos d \cos(f + \delta)}{\cos \delta \cos f} \end{aligned}$$

Si nous substituons ces valeurs, nous revient à calculer les angles f , g , m , n , r , & s par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} f &= \operatorname{tang} e \cos c \quad ; \quad \operatorname{tang} g = \frac{\operatorname{tang} e}{\cos c} \\ \operatorname{tang} m &= \frac{\cos d \cos g \sin(f + \delta)}{\cos c \cos f \cos(g + \delta)}; & \operatorname{tang} n &= \frac{\cos c \cos f \sin(g + \delta)}{\cos d \cos g \cos(f + \delta)} \end{aligned}$$



$$\text{tang } r = \frac{\text{tang } d \sin m}{\sin (m - q)}; \quad \& \text{ enfin } \text{cof } s = \frac{\sin r \sin (n - q)}{\text{tang } d \text{ tang } (f + \delta) \text{ cof } n},$$

d'où l'on déduit $p = r + s$.

COROLL. 1.

CXVIII. Il faut ici remarquer, que les deux premiers arcs f & g ne dépendent, ni de la déclinaison proposée δ , ni de la longitude q : mais uniquement de la position des poles magnétiques, ou des élémens c, d, e . Ces deux arcs demeurent donc les mêmes pour toutes les déclinaisons δ & toutes les longitudes.

COROLL. 2.

CXIX. Les deux arcs suivans m & n renferment outre les élémens c, d, e la déclinaison magnétique proposée δ ; mais, comme ils ne dépendent pas de q , ils demeurent les mêmes pour toutes les longitudes: & ce ne sont que les deux derniers arcs r & s qu'on est obligé de calculer pour chaque longitude.

COROLL. 3.

CXX. On peut aussi observer que $\text{tang } m \cdot \text{tang } n = \text{tang } (f + \delta) \text{ tang } (g + \delta)$, d'où le calcul de ces deux arcs sera facilité, quoiqu'il soit sans cela assez prompt, puisque la même quantité $\frac{\text{cof } e \text{ cof } f}{\text{cof } d \text{ cof } g}$ entre dans l'un & l'autre.

COROLL. 4.

CXXI. Par ces formules on calculera aisément toutes les lignes Halleyennes, qui passent par tous les endroits, où la déclinaison est la même. Pour la ligne sans déclinaison les arcs m & n seront déterminés plus simplement en sorte

$$\text{tang } m = \frac{\text{cof } d}{\text{cof } c} \text{ tang } f = \text{cof } d \text{ tang } e \quad \& \quad \text{tang } n = \frac{\text{tang } e}{\text{cof } d}$$

& de là on aura

$$\text{tang } r = \frac{\text{tang } d \sin m}{\sin (m - q)} \quad \& \quad \text{cof } s = \frac{\sin r \sin (n - q)}{\text{cof } c \sin d \sin n}$$

PRO.



P R O B L E M E XIX.

CXXII. *Entre toutes les lignes Halleyennes déterminer celle qui est du second ordre, dont les branches forment un point d'intersection.*

S O L U T I O N.

Pour trouver la déclinaison δ à laquelle répond cette ligne du second ordre, ayant représenté notre équation générale en cette forme :

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

la solution de ce problème est déjà donnée dans le problème X, & ses corollaires, d'où celle-cy nous fournira la plus simple :

$$\operatorname{tang}^2 q = \frac{2(BC - DE)}{-BB + CC + DD - EE} \quad \& \quad \operatorname{tang} q^2 = \frac{AA + BB - DD}{AA + CC - EE}$$

Or les valeurs de A, B, C, D, E exposées dans le problème précédent donnent

$$BC - DE = -\cos d \sin c^2 \operatorname{tang} e (1 + \operatorname{tang} \delta^2)$$

$$BB + EE = \cos d^2 (1 + \cos c^2 \operatorname{tang} e^2) (1 + \operatorname{tang} \delta^2)$$

$$CC + DD = (\cos c^2 + \operatorname{tang} e^2) (1 + \operatorname{tang} \delta^2)$$

& partant

$$\operatorname{tang}^2 q = \frac{-2 \cos d \sin c^2 \operatorname{tang} e}{\cos c^2 + \operatorname{tang} e^2 - \cos d^2 (1 + \cos c^2 \operatorname{tang} e^2)} = \frac{2 \operatorname{tang} q}{1 - \operatorname{tang} q^2}$$

où la déclinaison δ n'entre plus. Mais pour l'autre formule nous trouvons

$$AA + BB - DD = \sin c^2 (\operatorname{tang} \delta^2 - \operatorname{tang} e^2)$$

$$AA + CC - EE = \sin d^2 (1 + \operatorname{tang} e^2) (\operatorname{tang} \delta^2 + \cos c^2) \\ - \cos d^2 \sin c^2 (1 - \operatorname{tang} \delta^2 \operatorname{tang} e^2)$$

& partant

$$\operatorname{tang} q^2 = \frac{\sin c^2 (\operatorname{tang} \delta^2 - \operatorname{tang} e^2)}{\sin d^2 (1 + \operatorname{tang} e^2) (\operatorname{tang} \delta^2 + \cos c^2) - \cos d^2 \sin c^2 (1 - \operatorname{tang} \delta^2 \operatorname{tang} e^2)}$$



ou bien

$$\frac{\text{tang } q^2}{\text{fin } c^2 (\text{tang } \delta^2 - \text{tang } e^2)} = \frac{(\text{tang } \delta^2 + \text{cof } c^2) - \text{cof } d^2 (\text{tang } e^2 + \text{cof } c^2 \text{tang } \delta^2)}{(\text{tang } \delta^2 + \text{cof } c^2) - \text{cof } d^2 (\text{tang } e^2 + \text{cof } c^2 \text{tang } \delta^2)}$$

d'où l'on tire

$$\frac{1 - \text{tang } q^2}{(\text{cof } c^2 + \text{tang } e^2) (\text{tang } \delta^2 + \text{cof } c^2) - \text{cof } d^2 (\text{tang } e^2 + \text{cof } c^2 \text{tang } \delta^2)} = \frac{1 - \text{tang } q^2}{(\text{tang } \delta^2 + \text{cof } c^2) - \text{cof } d^2 (\text{tang } e^2 + \text{cof } c^2 \text{tang } \delta^2)}$$

& partant

$$\frac{\text{tang } q}{1 - \text{cof } d \text{ fin } c^2 \text{ tang } e (\text{tang } \delta^2 + \text{cof } c^2)} = \frac{\text{tang } q}{(\text{tang } \delta^2 + \text{cof } c^2) - \text{cof } d^2 (\text{tang } e^2 + \text{cof } c^2 \text{tang } \delta^2)}$$

qui se réduisent à celles - cy

$$\text{tang } q = \frac{\text{fin } c^2 \text{ cof } d \text{ fin } e \text{ cof } e}{1 - \text{cof } d^2 (\text{cof } e^2 + \text{cof } c^2 \text{ fin } e^2) - \text{cof } \delta^2 \text{ fin } c^2} \quad \&$$

$$\text{tang } q^2 = \frac{\text{fin } c^2 (\text{fin } \delta^2 \text{ cof } e^2 - \text{cof } \delta^2 \text{ fin } e^2)}{1 - \text{cof } d^2 (\text{cof } e^2 + \text{cof } c^2 \text{ fin } e^2) - \text{cof } \delta^2 \text{ fin } c^2}$$

& de là nous parvenons à cette équation

$$\text{cof } \delta^4 \text{ fin } c^2 - \text{cof } \delta^2 [1 + \text{fin } c^2 \text{ cof } e^2 - \text{cof } d^2 (\text{cof } e^2 + \text{cof } c^2 \text{ fin } e^2)] + \text{fin } d^2 \text{ cof } e^2 = 0$$

ou à celle - cy

$$\text{cof } \delta^4 \text{ fin } c^2 - \text{cof } \delta^2 (\text{fin } c^2 + \text{fin } d^2 - \text{fin } c^2 \text{ fin } d^2 \text{ fin } e^2) + \text{fin } d^2 \text{ cof } e^2 = 0$$

dont la résolution nous découvre la déclinaison δ , pour laquelle la ligne Halleyenne aura des interfections. De là il est évident, que la déclinaison δ peut être prise positivement & négativement.

COROLL. I.

CXXIII. La résolution de cette équation quarré-quarrée donne

$$\text{cof } \delta^2 = \frac{\text{fin } c^2 + \text{fin } d^2 - \text{fin } c^2 \text{ fin } d^2 \text{ fin } e^2 \pm \sqrt{[(\text{fin } c^2 + \text{fin } d^2 - \text{fin } c^2 \text{ fin } d^2 \text{ fin } e^2)^2 - 4 \text{fin } c^2 \text{ fin } d^2 \text{ cof } e^2]}}{2 \text{ fin } c^2}$$

$$\frac{\text{fin } c^2 + \text{fin } d^2 - \text{fin } c^2 \text{ fin } d^2 \text{ fin } e^2 \pm \sqrt{[(\text{fin } c^2 + \text{fin } d^2 - \text{fin } c^2 \text{ fin } d^2 \text{ fin } e^2)^2 - 4 \text{fin } c^2 \text{ fin } d^2 \text{ cof } e^2]}}{2 \text{ fin } c^2}$$

&

& ensuite $\text{cof } \delta =$

$$\frac{\sqrt{(\text{fnc}^2 + \text{fnd}^2 - \text{fnc}^2 \text{fnd}^2 \text{fnc}^2 + 2 \text{fnc} \text{fnd} \text{cfc})} + \sqrt{(\text{fnc}^2 + \text{fnd}^2 - \text{fnc}^2 \text{fnd}^2 \text{fnc}^2 - 2 \text{fnc} \text{fnd} \text{cfc})}}{2 \text{fin } c}$$

ou

$$\text{cof } \delta = \frac{\sqrt{[(1 + \text{fnc} \text{fnd} \text{cfc})^2 - \text{cfc}^2 \text{cfd}^2]} + \sqrt{[(1 - \text{fnc} \text{fnd} \text{cfc})^2 - \text{cfc}^2 \text{cfd}^2]}}{2 \text{fin } c}$$

COROLL. 2.

CXXIV. Mais, pour calculer cette valeur, qu'on cherche les angles h , k & l par ces formules :

$$\text{tang } h = \text{fnc} \text{fnd} \text{fnc}; \quad \text{cof } k = \frac{\text{cot. } c \text{ cot. } d \text{ fin } h}{\text{fin}(e+h)}; \quad \text{cof } l = \frac{\text{cot. } c \text{ cot. } d \text{ fin } h}{\text{fin}(e-h)}$$

& alors on aura
$$\text{cof } \delta = \frac{\text{cof } c \text{ cof } d \text{ fin}(k+l)}{2 \text{fin } c \text{ cof } k \text{ cof } l}.$$

EXEMPLE I.

CXXV. Supposons pour la position des poles magnétiques

$$AP = a = 15^\circ; \quad Bp = b = 25^\circ; \quad \& \quad APB = \gamma = 40^\circ$$

& on trouvera les élémens dérivés :

$$CA = CB = c = 71^\circ, 10'; \quad CP = d = 84^\circ, 43'; \quad ACP = e = 6^\circ, 38'$$

$$\& \text{ de là les angles } \quad APC = 25^\circ \quad \& \quad BPC = 15^\circ.$$

Ensuite pour la ligne du second ordre l'équation quarré-quarrée devient $\text{cof } \delta^4 = 2,09367 \text{ cof } \delta^2 - 1,09210$ & de là $\delta = 6^\circ, 52'$.

REMARQUE.

CXXVI. Par cet exemple on comprend, que l'angle e sera toujours fort petit, & que l'arc $CP = d$ approchera fort d'un angle droit. De là on peut tirer une approximation pour la valeur de δ :

car, si $e = 0$, on a ou $\text{cof } \delta = 1$, ou $\text{cof } \delta = \frac{\text{fin } d}{\text{fin } c}$: donc, puisque la dernière est imaginaire dans notre supposition, ou $d > c$, la



premiere doit fournir l'approximation. Or, posant $1 - \sin \delta^2$ pour $\text{cof } \delta^2$ notre équation sera

$$\text{cof } c^2 \sin d^2 \sin e^2 = \sin \delta^2 (\sin d^2 - \text{fin } c^2 - \text{fin } c^2 \sin d^2 \sin e^2) + \sin \delta^4 \text{fin } c^2$$

$$\text{d'où l'on tire à peu près } \sin \delta^2 = \frac{\text{cof } c^2 \sin d^2 \sin e^2}{\sin d^2 - \text{fin } c^2}$$

& encore plus exactement :

$$\sin \delta^2 = \frac{\text{cof } c^2 \sin d^2 \sin e^2}{\sin d^2 - \text{fin } c^2} - \frac{\text{fin } c^2 \text{cof } c^2 \sin d^4 \text{cof } d^2 \sin e^4}{(\sin d^2 - \text{fin } c^2)^3}$$

Mais la premiere donne déjà la valeur de δ à un ou deux minutes près, de sorte qu'on peut prendre $\sin \delta = \frac{\text{cof } c \sin d \sin e}{\sqrt{(\sin d^2 - \text{fin } c^2)}}$.

EXEMPLE 2.

CXXVII. Supposons $a = 15^\circ$, $b = 30^\circ$, & $\gamma = 45^\circ$, & on aura

$$c = 69^\circ, 4', 48''; d = 81^\circ, 57', 30''; \& e = 7^\circ, 57', 48''$$

ensuite les angles $APC = 30^\circ$, $BPC = 15^\circ$; & pour la ligne Halleyenne du second ordre

$$\text{cof } \delta^4 - 2,10487 \text{cof } \delta^2 + 1,10217 = 0, \& \delta = 8^\circ, 25'.$$

REMARQUE

CXXVIII. Si les deux distances a & b étoient égales, d seroit de 90° ; & plus la distance b surpasse a , l'arc d devient plus petit: ainsi dans le dernier exemple d est plus petit que dans le premier. L'arc c dépend principalement des distances a & b , & son complé-

ment est un peu plus petit que $\frac{a+b}{2}$. En considérant la Carte de

Halley, il semble que la ligne pour la déclinaison de 10° étoit à peu près celle du second ordre, d'où l'on peut convenablement déterminer les élémens c , d , e . Or il paroît aussi que la distance b étoit beaucoup plus grande que a , & partant d bien au dessous de 90° .

Si



Si nous posons $c = 70^\circ$, & $d = 82^\circ$, afin que pour la ligne du second ordre il devienne $\delta = 10^\circ$, il faudroit prendre $e = 9^\circ, 10'$. Faisons donc sur cette hypothese, qui selon toute apparence ne s'écarte pas beaucoup de l'état magnétique représenté dans la Table de *Halley*, le calcul, pour en construire une Carte, par laquelle on pourra juger, si deux poles magnétiques sont suffisans pour expliquer les phénomènes de la déclinaison.

HYPOTHESE.

CXXIX. Faisons donc les positions suivantes :

$AC = BC = c = 70^\circ$; $CP = d = 82^\circ$ & $\angle CP = e = 9^\circ, 10'$ afin que la ligne du second ordre réponde à la déclinaison de 10° .

Pour en déduire les premiers élémens a, b, γ , cherchons un angle i , de sorte que $\text{tang } i = \text{tang } c \text{ cof } e$, & l'on aura

$$\text{cof } a = \frac{\text{cof } c \text{ cof}(d-i)}{\text{cof } i}; \quad \text{cof } b = - \frac{\text{cof } c \text{ cof}(d+i)}{\text{cof } i}$$

$$\text{tang } APC = \frac{\text{tang } e \sin i}{\sin(d-i)}; \quad \text{tang } BPC = \frac{\text{tang } e \sin i}{\sin(d+i)}$$

& $\gamma = APC + BPC$; d'où l'on trouve

$$i = 69^\circ, 46'; \quad d-i = 12^\circ, 14'; \quad d+i = 151^\circ, 46' = 180^\circ - 28^\circ, 14'$$

$$a = 14^\circ, 53'; \quad APC = 35^\circ, 33'; \quad \& \quad \gamma = 53^\circ, 18'$$

$$b = 29^\circ, 23'; \quad BPC = 17^\circ, 45';$$

Maintenant pour faire le calcul, qu'on commence par les angles f & g qu'on trouve: $f = 3^\circ, 10'$ & $g = 25^\circ, 15'$

de là on aura pour le calcul suivant en logarithmes

$$l \text{ tang } m = 9,56656 + l \sin(f+\delta) - l \text{ cof}(g+\delta)$$

$$l \text{ tang } n = 10,43344 + l \sin(g+\delta) - l \text{ cof}(f+\delta)$$

Passons donc en particulier aux Lignes Halleyennes.

Pour



Pour la Ligne sans déclinaison.

CXXX. Posant $\delta = 0$ on aura $m = 1^{\circ}, 17'$ & $n = 49^{\circ}, 13'$

& delà $l \operatorname{tang} r = 9,20463 - l \sin (m - q)$

$l \operatorname{cof} s = 10,58984 + l \sin r + l \sin (n - q)$

d'où l'on fera le calcul pour tous les degrés de longitude en comptant depuis le premier méridien PC vers l'occident.

Longitude q	Les deux valeurs de p		
$17^{\circ}, 45'$	$150^{\circ}, 37'$	$150^{\circ}, 37'$	<p>Dans les méridiens depuis 0°, jusqu'à $17^{\circ}, 45'$, de même que depuis $144^{\circ}, 27'$, jusqu'à 180° les valeurs de p sont imaginaires.</p> <p>Les valeurs négatives de p doivent être prises dans les méridiens opposés : & par cette raison il n'est pas nécessaire de pousser le calcul au delà de 180.</p>
$20, \text{ —}$	$121, 26$	$\text{—}174, 28$	
$30, \text{ —}$	$95, 27$	$\text{—}132, 19$	
$40, \text{ —}$	$84, 32$	$\text{—}113, 16$	
$50, \text{ —}$	$77, 20$	$\text{—}101, 44$	
$60, \text{ —}$	$71, 41$	$\text{—}92, 55$	
$70, \text{ —}$	$66, 44$	$\text{—}86, 14$	
$80, \text{ —}$	$62, 3$	$\text{—}80, 37$	
$90, \text{ —}$	$57, 13$	$\text{—}75, 25$	
$100, \text{ —}$	$52, 0$	$\text{—}70, 24$	
$110, \text{ —}$	$\text{—}45, 56$	$\text{—}65, 8$	
$120, \text{ —}$	$\text{—}35, 57$	$\text{—}56, 39$	
$130, \text{ —}$	$\text{—}27, 53$	$\text{—}51, 5$	
$140, \text{ —}$	$9, 46$	$\text{—}37, 4$	
$144, 27$	$\text{—}14, 53$	$\text{—}14, 53$	



Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison 5° Est.

CXXXI. Posant $\delta = 5^\circ$, on trouve $m = 3^\circ, 28'$ & $n = 54^\circ, 5'$

& de là $l \operatorname{tang} r = 9,63372 - l \operatorname{fin} (m - q)$

$l \operatorname{cof} s = 10,22257 + l \operatorname{fin} r + l \operatorname{fin} (n - q)$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
13°, 42'	112°, 27'	112°, 27'
15, —	97, 34	132, 18
20, —	84, 46	162, 12
30, —	74, 17	—162, 7
40, —	67, 54	—139, 38
50, —	62, 49	—124, 9
60, —	58, 12	—112, 46
70, —	53, 39	—203, 55
80, —	48, 58	—96, 42
90, —	43, 52	—90, 30
100, —	38, 7	—84, 57
110, —	31, 21	—79, 41
120, —	22, 58	—74, 20
130, —	11, 59	—68, 19
140, —	—4, 0	—60, 2
145, —	—16, 22	—52, 58
148, 35	—41, 12	—41, 12



Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison 5° Ouest.

CXXXII. Posant $\delta = 5^\circ$, on trouve: $m = 0^\circ, 43'$
& $n = 43^\circ, 13'$ & de là

$$l \operatorname{tang} r = 8,95151 - l \sin (q - m)$$

$$l \operatorname{cof} s = 10,77994 + l \sin r + l \sin (q - n)$$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes :

Longitude q	Les deux valeurs de p	
$13^\circ, 43'$	$-160^\circ, 14'$	$-160^\circ, 14'$
$15, \text{ —}$	$-134, 58$	$+171, 30$
$20, \text{ —}$	$-111, 24$	$+139, 46$
$30, \text{ —}$	$-93, 49$	$+113, 41$
$40, \text{ —}$	$-84, 50$	$+100, 26$
$50, \text{ —}$	$-78, 44$	$+91, 54$
$60, \text{ —}$	$-73, 56$	$+85, 38$
$70, \text{ —}$	$-69, 44$	$+80, 34$
$80, \text{ —}$	$-65, 48$	$+76, 10$
$90, \text{ —}$	$-61, 55$	$+72, 7$
$100, \text{ —}$	$-57, 37$	$+68, 1$
$110, \text{ —}$	$-52, 42$	$+63, 38$
$120, \text{ —}$	$-46, 41$	$+58, 33$
$130, \text{ —}$	$-38, 27$	$+51, 55$
$140, \text{ —}$	$-25, 2$	$+41, 8$
$145, \text{ —}$	$-13, 25$	$+31, 27$
$148, 35$	$+9, 58$	$+9, 58$

;

Pour



Pour la Ligne Malleyenne de la déclinaison 10° Est.

CXXXIII. Posant $\delta = 10^{\circ}$, on a $m = 5^{\circ}, 52'$ & $n = 58^{\circ}, 7'$

& de là $l \operatorname{tang} r = 9,86190 - l \sin (m - q)$

$l \operatorname{cof} s = 10,05592 + l \sin r + l \sin (n - q)$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes.

Longitude	Les deux valeurs		de p	
q $0^{\circ}, 0'$				
$0^{\circ}, 0'$	$65^{\circ}, 1'$	$+ 98^{\circ}, 59'$	Cette ligne n'est pas tout à fait celle du second ordre, mais il s'en faut fort peu; la raison en est, que je n'ai pas assez exactement déterminé cy-dessus la valeur de l'angle ϵ pour ce but peu important. Cette ligne est déjà du troisième ordre, & dans cette hypothèse la ligne du second ordre répond à la déclinaison de $9^{\circ}, 45', 18'$.	
$10, \text{ —}$	$63, 4$	$+ 128, 14$		
$20, \text{ —}$	$60, 17$	$+ 156, 49$		
$30, \text{ —}$	$57, 12$	$- 178, 32$		
$40, \text{ —}$	$53, 54$	$- 158, 38$		
$50, \text{ —}$	$50, 25$	$- 142, 55$		
$60, \text{ —}$	$46, 39$	$- 130, 29$		
$70, \text{ —}$	$42, 34$	$- 120, 30$		
$80, \text{ —}$	$38, 5$	$- 112, 17$		
$90, \text{ —}$	$33, 2$	$- 105, 24$		
$100, \text{ —}$	$27, 18$	$- 99, 32$		
$110, \text{ —}$	$20, 38$	$- 94, 24$		
$120, \text{ —}$	$12, 43$	$- 89, 15$		
$130, \text{ —}$	$3, 9$	$- 85, 47$		
$140, \text{ —}$	$- 8, 40$	$- 82, 6$		
$150, \text{ —}$	$- 23, 27$	$- 78, 51$		
$160, \text{ —}$	$- 41, 38$	$- 76, 24$		
$170, \text{ —}$	$- 60, 30$	$- 78, 18$		
$172, \text{ —}$	$- 62, 49$	$- 80, 34$		
$175, \text{ —}$	$- 64, 35$	$- 86, 21$		



Pour la Ligne Halleyenne de 10° vers l'Ouest.

CXXXIV. Posant $\delta = -10^\circ$, on a $m = -2^\circ, 36'$ & $n = 35^\circ, 42'$

& de là $l \operatorname{tang} r = 9,50981 - l \sin (q + 2^\circ, 36')$

$l \operatorname{cof} s = 10,15963 + l \sin r + l \sin (q - 35^\circ, 42')$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes.

Longitude q $0^\circ, 0'$	Les deux valeurs de p	
$0^\circ, 0'$	$-64^\circ, 34'$	$-131^\circ, 26'$
10, —	$-65, 17$	$+177, 17$
20, —	$-64, 29$	$+144, 39$
30, —	$-63, 15$	$+125, 13$
40, —	$-61, 46$	$+112, 52$
50, —	$-60, 7$	$+104, 25$
60, —	$-58, 15$	$+98, 17$
70, —	$-56, 9$	$+93, 35$
80, —	$-53, 42$	$+89, 50$
90, —	$-51, 22$	$+87, 16$
100, —	$-47, 30$	$+84, 10$
110, —	$-43, 20$	$+81, 56$
120, —	$-38, 0$	$+80, 0$
130, —	$-30, 53$	$+78, 19$
140, —	$-20, 51$	$+76, 55$
150, —	$-5, 43$	$+75, 55$
160, —	$+18, 11$	$+75, 53$
170, —	$+52, 7$	$+84, 29$
175, —	$+61, 24$	$+103, 34$



Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison de 15° vers l'Est.

CXXXV. Posant $\delta = 15^\circ$, on a $m = 8^\circ, 34'$, & $n = 61^\circ, 32'$
& de là

$$l \operatorname{tang} r = 10,02527 - l \sin(8^\circ, 34' - q)$$

$$l \operatorname{cof} s = 9,95954 + l \sin r + l \sin(61^\circ, 32' - q)$$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes :

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°, 0'	+44°, 29'	+119°, 31'
10, —	+46, 50	+135, 52
20, —	+47, 1	+154, 11
30, —	+45, 48	+172, 16
40, —	+43, 40	—171, 16
50, —	+40, 52	—156, 54
60, —	+37, 32	—144, 42
70, —	+33, 43	—134, 25
80, —	+29, 24	—125, 46
90, —	+24, 30	—118, 28
100, —	+18, 59	—112, 19
110, —	+12, 42	—107, 12
120, —	+5, 53	—103, 1
130, —	—2, 29	—99, 51
140, —	—11, 30	—97, 56
150, —	—21, 15	—97, 49
160, —	—30, 56	—100, 30
170, —	—39, 8	—107, 26



Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison de 15° vers l'Ouest.

CXXXVI. Posant $\delta = -15^\circ$, on a $m = -4^\circ, 23\frac{2}{3}'$;
 $n = 26^\circ, 15'$, & de là

$$l \operatorname{tang} r = 9,73640 - l \operatorname{tang} (q + 4^\circ, 23')$$

$$l \operatorname{cof} s = 9,83368 + l \operatorname{fin} r + l \operatorname{fin} (q - 26^\circ, 15')$$

Longitude q	Les deux valeurs de p	
	0°	$-25^\circ, 22'$
10°	$-34, 29$	$+165, 29$
20	$-40, 32$	$+146, 14$
30	$-44, 15$	$+132, 13$
40	$-46, 22$	$+122, 12$
50	$-47, 22$	$+115, 2$
60	$-47, 33$	$+109, 57$
70	$-47, 4$	$+105, 4$
80	$-46, 0$	$+103, 24$
90	$-44, 17$	$+101, 37$
100	$-41, 55$	$+100, 39$
110	$-38, 44$	$+100, 32$
120	$-34, 32$	$+101, 26$
130	$-29, 0$	$+103, 39$
140	$-21, 40$	$+107, 52$
150	$-12, 5$	$+115, 13$
160	$-0, 5$	$+127, 31$
170	$+13, 12$	$+146, 26$



I REMARQUE.

CXXXVII. Quand on trace ces lignes sur une Carte ou sur un Globe, on y remarquera d'abord une si grande conformité avec les lignes de *Halley*, qu'on puisse attendre dans l'incertitude, où nous sommes encore sur la vraie position des poles magnétiques de la Terre : & l'on ne sauroit presque plus douter, que si nous en avons une connoissance parfaite, l'accord ne devint plus grand, puisque ces lignes sont susceptibles d'une variété infinie en changeant tant les distances des poles magnétiques aux poles de la Terre, que l'intervalle des méridiens qui passent par les poles magnétiques.

II REMARQUE.

CXXXVIII. Cependant je suis obligé d'avoüer, que la Carte de *Halley* renferme quelques circonstances, qu'on ne sauroit jamais mettre d'accord avec l'hypothèse de deux poles magnétiques. La principale est la distance entre les lignes sans déclinaison sur l'équateur : l'une, à la droite de laquelle la déclinaison est occidentale & à la gauche orientale, coupe sur la Carte de *Halley* l'équateur au 17^{me} degré vers l'Oüest du méridien de Londres, & l'autre, où la déclinaison de part & d'autre suit une loi opposée le coupe au 119° vers l'Est du méridien de Londres, de sorte que l'intervalle entre ces deux intersections est 136°. Or, selon le calcul que je viens de faire ici, cet intervalle se trouve de 210°, lequel en changeant les élémens pourroit bien devenir plus petit : mais on ne le sauroit diminuer au delà de 180°, tant qu'on suppose le pole méridional magnétique plus éloigné du pole antarctique que le pole boréal du pole arctique, & plus avancé vers l'Oüest comme les autres phénomènes l'exigent évidemment. Et si l'on pouvoit bien compter sur les intersections, je dois avoüer qu'il faudroit abandonner cette hypothèse de deux poles magnétiques.

III REMARQUE.

CXXXIX. Examinons donc plus soigneusement sur quoi fonde M. *Halley* la position de ces lignes sans déclinaison pour l'année
1700.



1700. Et d'abord j'observe, que M. *Halley* ne la donne pas lui-même pour fort exacte, tant faute d'un assez grand nombre d'observations, que principalement, puisque la plupart des observations sur lesquelles cette Carte est dressée, ont été faites très longtems avant l'époque de 1700. Or l'on fait que la déclinaison au même endroit change très considérablement avec le tems, & il auroit falu connoitre exactement ce changement annuel pour chaque endroit, avant qu'on ait pu faire usage de ces observations. A Paris par exemple la déclinaison fut nulle en 1666, & en 1756 l'aiguille déclinait de $17^{\circ}, 45'$ vers l'Oüest, d'où il s'ensuit que la ligne sans déclinaison, qui passoit en 1666 par Paris, s'est avancée dans cet intervalle de 90 ans environ par un espace de 100° vers l'Est, ce qui fait plus d'un degré par an. Or il paroît par les observations que M. *Halley* rapporte, qu'à l'Isle de *Helena* la déclinaison étoit $0^{\circ}, 40'$ vers l'Est en 1677; & la Carte montre encore pour 1700 presque la même déclinaison. Ensuite, aux côtes découvertes par Diemen, c'étoit en 1642, que la déclinaison fut observée nulle, & la Carte dressée pour 1700 représente la ligne sans déclinaison à peu près encore au même endroit: quoique par le changement observé à Paris il semble, que cette ligne devoit être avancée dans cet intervalle vers l'Est par 60° , ce qui s'accorderoit fort bien avec l'intervalle de 210° , que mon calcul indique. De là je conclus que cet intervalle a été effectivement en 1700 beaucoup plus grand que la Carte Halleyenne ne le représente.

IV REMARQUE.

CXL. La Carte que Mrs. *Mountaine* & *Dodson* ont publiée pour l'année 1744 s'accorde beaucoup plus à cet égard avec ma Théorie, ledit intervalle y étant de 170° : mais elle renferme d'autres irrégularités, qui sont tout à fait incompatibles. Elle donne à la ligne sans déclinaison un tour si bizarre par les Indes orientales, qu'il ne sauroit être accordé avec aucune Théorie: & il semble que les Auteurs y ont voulu représenter à la fois des observations plus vieilles & plus modernes: d'ailleurs les erreurs auxquelles les observations sont assujet-

ties



ries, ne permettroient jamais de découvrir un tel tour bizarre, quand même il y en auroit un. Après cela, la route qu'ils donnent à cette ligne sans déclinaison, & qu'ils tirent par le Japon, est ouvertement fautive, puisqu'on fait par les observations faites en Sibérie que cette ligne y passe : d'où je conclus qu'elle auroit du être continuée depuis l'équateur, par la Chine, & de là par la Tartarie : & par cette raison les lignes qu'ils ont tirées dans la Mer pacifique, surtout dans la partie septentrionale, doivent manquer de fondement.

V R E M A R Q U E.

CXLI. Au reste le cas que je viens de calculer, ne différera pas beaucoup de l'état magnétique de la Terre pour l'année 1744, si l'on place, autant que je puis conclure des observations qui paroissent les plus certaines, le pôle magnétique septentrional dans le méridien marqué de 250° dans les Cartes : car alors on obtiendra, tant pour l'Europe que pour l'Amérique septentrionale, les déclinaisons qu'on a observées actuellement. Or pour les côtes du Brésil elles deviendroient un peu trop petites ; mais, pour redresser cette erreur, on n'a qu'à augmenter la distance du pôle méridional magnétique, ou à augmenter l'angle γ entre les méridiens tirés par les pôles magnétiques. Je crois qu'il faudroit faire l'un & l'autre à la fois pour expliquer les déclinaisons observées sur les côtes orientales de l'Afrique, & aux Indes orientales, puisqu'ici les grandes déclinaisons s'étendent jusqu'à l'équateur. Comme ici j'ai supposé $a = 14^\circ, 53'$; $b = 29^\circ, 23'$; & $\gamma = 53^\circ, 18'$, il fera bon de calculer encore quelques autres hypothèses, en laissant deux élémens les mêmes, & changeant seulement le troisième : car alors, si l'on dresse sur chacune une Carte en sorte, qu'elle reponde aux déclinaisons de l'Europe, on verra aisément laquelle approche le mieux aux autres parties de la Terre. Par ce moyen, après avoir fait quelques représentations sur des hypothèses différentes, il ne sera pas difficile d'en conclure la vraie situation des pôles magnétiques, qui a eu lieu alors. Après quelques estimés je voudrois croire, qu'en A. 1744. la distance a étoit plus petite que $14^\circ, 53'$, & la



distance b un peu plus grande que $29^{\circ}, 23'$: mais qu'il faudroit augmenter l'angle γ au de là de 60° : ces trois corrections semblent nécessaires pour représenter les grandes déclinaisons dans les mers des Indes orientales.

HYPOTHESE.

CXLII. Pour représenter à peu près les lignes magnétiques pour à présent, j'ai dressé une Carte semblable à celle de *Halley* sur les

élémens suivans : $a = 14^{\circ}$, $b = 35^{\circ}$, & $\gamma = 63$

d'où l'on a $c = 68^{\circ}, 31'$, $d = 78^{\circ}, 5'$, & $e = 10^{\circ}, 41'$

& les lignes qui se croisent, répondent à la déclinaison de $12^{\circ}, 5'$. Si l'on compare cette Carte avec celle qui a été publiée en Angleterre pour l'année 1744. on y remarquera un assez bel accord, sur tout à l'égard des déclinaisons qui paroissent les plus sûres. Et si l'on y découvre quelques aberrationis, il ne sera pas difficile de trouver les corrections qu'il faudra apporter aux élémens supposés. Les réflexions suivantes nous pourront fournir les éclaircissémens nécessaires là dessus.

I. Puisque la déclinaison à l'Isle de S. Helene a surpassé 5° , & qu'à Paris la déclinaison n'a pas été si grande que sur ma Carte, je voudrois d'abord reculer toutes les lignes magnétiques de 10° vers l'ouëst, pour la mettre d'accord avec les observations. Or, si depuis 1744. jusqu'à présent les poles magnétiques étoient avancés vers l'est de 10° , la Carte devroit répondre à l'état présent, ce qui est la raison que je les ai fixés en forte sur la Carte.

II. Maintenant les déclinaisons marquées sur la Carte aux côtes orientales du Brésil, étant parfaitement d'accord avec celles que marque la Carte Angloise pour l'an 1744 : cet accord sera détruit, lorsqu'on avance toutes les lignes de 10° vers l'ouëst : mais
on



on y remédiera en augmentant la distance du pôle magnétique méridional au pôle antarctique. Je voudrois donc mettre $b = 40^\circ$; & par là on s'approcheroit aussi davantage des grandes déclinaisons, qui s'observent vers l'équateur dans la Mer des Indes.

III. Si la déclinaison dans le détroit de Hudson a été de 35° A. 1744, il est clair qu'il faudroit aussi augmenter la distance du pôle magnétique boréal au pôle arctique ; peut être suffira-t-il de poser $a = 17^\circ$. Au reste je ne trouve aucune raison, pourquoi il faudroit changer l'angle γ ; de sorte que supposant ces élémens : $a = 17^\circ$, $b = 40^\circ$, & $\gamma = 63^\circ$, on représentera assez exactement l'état des lignes magnétiques pour l'année 1744. Cependant ces élémens ne sont pas si exacts, qu'il vaudroit la peine d'y fonder un nouveau calcul.

