1758

Expériences pour déterminer la réfraction de toutes sortes de liqueurs transparentes

Leonhard Euler

EXPÉRIENCES

POUR DÉTERMINER LA RÉFRACTION DE TOUTES SORTES DE LIQUEURS TRANSPARENTES.

PAR M. EULER.

I.

Ce que j'ai eu l'honneur de propoſer ſur la loi de réfraction à l'egard de la diverſe réfrangibilité des rayons, montre ſuffiſamment, combien peu la maniere ordinaire de faire ces expériences eſt propre pour nous éclaircir ſur la veritable quantité de réfraction, que les rayons de diverſes couleurs ſouffrent en paſſant d'un milieu tranſparent dans un autre. Car, ayant détruit une proportion, ſur laquelle le grand Newton doit avoir fondé la loi de réfraction des rayons de diverſes couleurs, en faiſant voir qu'elle implique une contradiction ouverte, quoiqu'elle parut d'accord avec les expériences, il faut bien que ces expériences ne ſoient pas ſuffiſantes pour nous découvrir exactement la veritable quantité de réfraction. J'ai auſſi remarqué que la véritable proportion, que j'ai établie à la place de celle-là, en differe ſi peu, que les expériences ordinaires ne ſont pas capables de nous montrer la différence; car il ne s'agit ici qu'environ d'une millième partie dans la raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction, dont la véritable proportion différe de l'autre, que j'ai démontrée contradictoire.

II. Cependant, quelque petite que paroiſſe cette différence, elle a néanmoins une influence trop eſſentielle, tant dans la théorie de la réfraction, que dans la pratique qui en découle, pour qu'on la puiſſe négliger. Car, ſi la proportion Newtonnienne que Mr. *Dollond* m'avoit oppoſée, étoit la véritable, toute la théorie, ſur laquelle j'ai fondé la perfection des verres objectifs, feroit fauffe; & il ne feroit pas abfolument poffible, de quelque maniere qu'on combinât plufieurs matieres transparentes, de diminuer l'effet de la diverfe réfrangibilité des rayons: & l'intervalle entre l'image rouge & violette tiendroit perpétuellement le même rapport à la diftance de foyer. Mais, fuivant la proportion véritable, il eft poffible de conftruire de tels verres objectifs, en employant deux ou plufieurs matieres transparentes, qui réuniffent parfaitement les images formées par les rayons de toutes les couleurs différentes.

III. Pour rendre cela plus fenfible, qu'on envifage un verre objectif ordinaire, dont la diftance de foyer foit environ 28 pieds, & on fait par l'expérience, que l'image formée par les rayons rouges en eft d'un pied plus éloignée, que celle qui eft formée par les rayons violets. Qu'on confidére à préfent un objectif compofé de verre & d'eau, qui ait la même diftance de foyer: & fi la proportion Newtonnienne étoit conforme à la vérité, on auroit toujours le même intervalle d'un pied entre l'image rouge & la violette: or, felon la proportion, que j'ai démontrée la véritable, il eft poffible d'arranger l'eau avec le verre en forte, que l'intervalle entre les images rouge & violette évanouiffe tout à fait: & même fi l'on vouloit, que l'image rouge tombât d'un pied, ou d'autant qu'on voudroit, plus proche de l'objectif, que l'image violette. D'où l'on voit, que la différence entre les deux proportions, quelque petite qu'elle foit en elle-même, eft de la derniere importance dans la théorie de la réfraction, & dans la construction des verres dioptriques, qui y eft fondée.

IV. Un tel verre compofé donc, qui étoit le fujet de mon Mémoire fur la perfection des objectifs, doit décider très fenfiblement fur cette petite différence, qui fe trouve entre les deux proportions rapportées, & que les expériences ordinaires, par lesquelles on eft accoutumé d'examiner les différentes réfractions, ne fauroient jamais découvrir. Car, qu'on prenne un tel objectif, dont j'ai enfeigné la conftruction, qui ait environ 28 pieds de foyer; & fuivant la pro-

por-

portion Newtonienne, le foyer des rayons rouges devroit être éloigné d'un pied de celui des rayons violets, pendant que, suivant ma proportion, ces deux foyers se doivent réunir. Donc, quoique la différence entre ces deux proportions se réduise seulement à moins d'une millieme partie dans la raison de réfraction, l'effet de cette petite différence, qui doit échaper à toutes les expériences ordinaires, devient par le moyen d'un tel objectif si sensible, qu'il monte à un intervalle d'un pied: & il sera aisé de construire d'autres verres composés de telle sorte, que l'effet devienne encore plus considérable.

V. Quand je fis travailler quelques ménisques, selon les mesures que j'avois trouvées par la théorie pour, en remplissant d'eau la cavité entr'eux, obtenir la perfection que j'avois en vuë: il fut aisé d'appercevoir, que la confusion causée ordinairement par la diverse réfrangibilité des rayons, étoit bien diminuée, quoique l'ouvrier n'ait pas trop bien exécuté les mesures prescrites, & que de l'autre côté la confusion causée par la trop grande ouverture du verre fût très considérable. Mais une autre circonstance me frappa: qui me fournit les premieres idées du sujet, que je traite présentement. Car, ayant rempli d'eau deux de ces ménisques, la distance de foyer étoit environ de 8 pieds: ensuite, ayant rempli ces mêmes ménisques d'esprit de vin, la distance de foyer se réduisoit subitement à 5 pieds. Je fus bien surpris d'une si grande différence, pendant que la réfraction de l'esprit de vin différe si peu de celle de l'eau; car les Auteurs marquent la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction de l'air dans l'esprit de vin comme 100 à 73, tandis que de l'air dans l'eau cette même raison est comme 4 à 3, ou comme 100 à 75.

VI. Ce seul exemple suffit pour nous convaincre, que deux ménisques peuvent fournir le plus propre instrument, pour découvrir la quantité de réfraction de toutes sortes de liqueurs transparentes, puisque la plus petite différence, qui se puisse trouver dans leur qualité réfractive, se manifeste par une si grande différence dans la distance du foyer. Pour cet effet on n'a pas besoin d'employer précisément les

les ménisques, que j'avois recommendés pour perfectionner les verres objectifs, puisque le dessein est ici tout à fait différent, & on déterminera aisément tels autres ménisques, qui étant remplis de diverses liqueurs produisent des différences encore plus grandes dans la distance du foyer. Tels instrumens seront aussi fort propres à nous découvrir beaucoup plus exactement la diverse réfrangibilité des rayons à l'égard de toutes les liqueurs transparentes; cependant on pourra bien se passer de cette recherche, vû qu'ayant déjà connu la réfraction d'une espece des rayons, on en peut aisément conclure celle des autres especes à l'aide de la proportion, que j'ai demontrée être nécessairement vraye.

VII. Cela non-obstant, je ne voudrois pas abandonner entierement cette derniere recherche, & je crois plûtot, que la théorie en pourroit tirer de grands secours. Car ce que nous savons de la diverse réfrangibilité des rayons, ne regarde proprement que les rayons du Soleil: ceux-cy renfermant toutes les especes des couleurs, on a conclu par les expériences du prisme, que dans le passage de l'air dans le verre le sinus d'incidence est à celui de réfraction pour les rayons rouges comme 77 à 50, & pour les violets comme 78 à 50. Mais cette différence entre les rayons solaires ne constitue pour ainsi dire que l'intervalle d'une octave, de sorte que les rayons les moins réfrangibles du Soleil soient à comparer au plus haut son d'une octave, pendant que les plus réfrangibles répondent au plus bas de la même octave; & peut-être même que les divers rayons solaires ne remplissent pas à cet égard une octave entiere, puisque les rayons extrémes ne représentent pas la même couleur, comme les sons, qui différent entr'eux d'une ou quelques octaves, peuvent être regardés à peu prés comme le même son.

VIII. Il est très probable, & je crois l'avoir suffisamment prouvé ailleurs, que les diverses couleurs ne différent entr'elles que par rapport au nombre de vibrations, dont l'ether est agité de chacune en même tems, & que si r marque le nombre des vibrations que les rayons rouges du Soleil rendent dans une seconde, & v le nombre des vibrations rendues en même tems par les rayons violets du Soleil, la différence des nombres r & v eſt la cauſe de la diverſe réfrangibilité de ces rayons. Or les différens ordres des couleurs, que nous appercevons dans les bulles de ſavon, & dans les lames minces transparentes, ſur lesquelles j'eus l'honneur l'année paſſée de lire un Mémoire, qu'on a daigné d'inſerer dans le huitieme volume de l'Academie; ces différens ordres me font conclure, que non ſeulement les rayons contenus dans les nombres r ou v ſont rouges ou violets, mais auſſi ceux, dont le nombre de vibrations rendües dans une ſeconde, eſt $2r$, $4r$, $8r$ &c. ou $2v$, $4v$, $8v$ &c. & encore $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{8}r$ &c. ou $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{4}v$, $\frac{1}{8}v$ &c. tout comme dans les ſons.

IX. Donc, ſi les rayons ſolaires, qui répondent au nombre v ſouffrent une plus grande réfraction que ceux, auxquels convient le nombre r, puisque le nombre v eſt différent du nombre r; par la même raiſon les rayons des autres corps, auxquels répondent des nombres ou $2r$, $4r$, $8r$ &c. & $2v$, $4v$, $8v$ &c. ou bien $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{8}r$ &c. & $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{4}v$, $\frac{1}{8}v$ &c. devroient ſouffrir différentes réfractions. Par conſéquent différentes couleurs rouges, entant qu'elles ſont ſemblables à des ſons, qui différent entr'eux d'une ou de quelques octaves, devroient produire dans leur réfraction une différence plus grande, que celle qu'on découvre entre les rayons rouges & violets du ſoleil. Le défaut de telles obſervations eſt ſans doute un grand argument contre cette conjecture; mais peut être ne s'eſt-on pas donné aſſez de peine pour examiner cette diverſité, s'il y en a une: ou peut-être la différence a-t-elle été trop petite, pour être découverte par les expériences, qu'on aura faites dans cette vüe. Cependant cet article me paroit aſſés important, pour qu'on ſe donne toutes les peines poſſibles pour s'éclaircir là deſſus: car, ſoit que ma conjecture ſoit fondée ou non, la théorie ne manquera pas d'en retirer des éclairciſſement très conſidérables.

X. Je me propoſe donc de décrire deux ſortes d'expériences, dont les unes peuvent ſervir à examiner très exactement la force réfracfractive de toutes les diverſes liqueurs transparentes, où il faut bien remarquer, que les concluſions, qu'on tirera des expériences, ne ſe rapportent qu'à une ſeule couleur, ſavoir celle dont l'objet, d'où l'on reçoit les rayons, eſt teint; car il eſt clair de ſoi-même, que diverſes couleurs meneroient à des concluſions différentes. Pour cet effet je propoſerai tels ménisques, qui rendent les plus petites différences très ſenſibles. L'autre ſorte eſt deſtinée pour la recherche de la réfraction de toutes les couleurs ſimples, qui ſe puiſſent trouver dans les corps: & dans cette vûe je chercherai tels ménisques, qui étant remplis d'une certaine liqueur découvrent d'une maniere très ſenſible les différences dans la réfraction, qui peuvent provenir de la diverſe couleur de l'objet; & c'eſt de là que ma conjecture mentionnée ſera aiſément, ou confirmée, ou détruite.

XI. Je conſidére donc en général un verre objectif compoſé de deux ménisques, entre lesquels la cavité ſoit remplie d'une liqueur quelconque transparente: & j'ai déjà remarqué qu'ayant deux tels ménisques, dont les bords s'uniſſent parfaitement enſemble, il eſt aiſé d'y enfermer toutes les liqueurs ſans le ſecours d'aucun autre inſtrument: car, après avoir rempli la cavité, on n'a qu'à preſſer bien les ménisques l'un contre l'autre, & ils demeureront aſſez fermes enſemble, pour qu'on n'ait point à craindre, que la liqueur s'en écoule. De cette maniere on peut aiſément changer de liqueurs à volonté, & faire des expériences avec les mêmes ménisques ſur toutes ſortes de liqueurs.

Fig. 1. Soient donc les rayons de courbure des quatre faces de ces deux ménisques

le rayon de la face MAM $= f$
le rayon de la face NBN $= g$
le rayon de la face NCN $= h$
le rayon de la face MDM $= k$

Or je ſuppoſe ces faces ſphériques, puisqu'une très petite ouverture peut ſuffire pour faire les expériences dont il s'agit.

XII.

XII. Soit de plus la raiſon du ſinus d'incidence au ſinus de réfraction pour le paſſage des rayons

de l'air dans le verre comme m à 1

& de l'air dans la liqueur comme n à 1

Or je parle ici des rayons d'une certaine eſpece, ſur lesquels on fait les expériences, de ſorte que, ſi les rayons ſont rouges, les nombres m & n approchent un peu plus de l'unité, que s'ils étoient violets. Enſuite je regarde d'abord l'épaiſſeur de ce verre objectif AD comme evanouïſſante par rapport aux rayons de courbure, & à la diſtance tant de l'objet que de l'image du verre, pour avoir des formules plus ſimples. Cependant j'enſeignerai après, quelles corrections doivent être employées à l'egard de l'epaiſſeur du verre dans les concluſions, qu'on aura tirées des expériences: & on verra que ces corrections ſont pour la plûpart ſi petites, qu'on les peut bien négliger, attendu que les erreurs qu'on ne ſauroit éviter en faiſant des expériences, ſont ordinairement beaucoup plus grandes.

XIII. Soit donc la droite EF l'axe de cet objectif, ſur laquelle ſont ſitués les centres des quatre faces: & qu'un objet Ee ſoit placé ſur cet axe à la diſtance $EA = a$ du verre. Cela poſé, les rayons transmis par le verre formeront l'image après le verre en Ff dans une ſituation renverſée, & j'ai fait voir que la diſtance DF après le verre ſera déterminée par cette équation:

$$\frac{1}{DF} = (m-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{k}\right) - (m-n)\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{a}$$

Pour la grandeur de l'image Ff par rapport à l'objet Ee, on ſait qu'elle eſt déterminée par la droite ef, tirée depuis le bout de l'objet e par le milieu du verre, puisque nous regardons l'epaiſſeur du verre AD comme infiniment petite. On auroit donc $Ee : Ff = AE : DF$, ou bien $Ff = \frac{DF}{AE}.\, Ee$, mais dans les Expériences que je vai décrire, la grandeur de l'image n'entrera pas en conſidération. On voit

donc

donc par la formule donnée, comment la distance DF est déterminée par les deux nombres m, n, & par les quatre rayons f, g, h, k, avec la distance a.

XIV. Mais, si l'on veut tenir compte de l'epaisseur du verre, laquelle a trois parties AB, BC & CD, & qu'on pose

$$AB = r,\ BC = s\ \&\ CD = t$$

l'équation qui détermine la distance DF sera plus compliquée, & s'exprimera le plus commodément par la fraction continuée suivante :

$$\frac{1}{DF} = \frac{m-1}{k} + \cfrac{1}{-\frac{t}{m} + \cfrac{1}{-\frac{(m-n)}{h} + \cfrac{1}{-\frac{s}{n} + \cfrac{1}{-\frac{(m-n)}{g} + \cfrac{1}{-\frac{r}{m} + \cfrac{1}{\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}}}}}}}$$

D'où, par le calcul des fractions continuées, on tirera en chaque cas aisément la valeur de la distance cherchée DF, & il seroit fort superflu de developer cette formule, qui deviendroit extrémement embarrassée

XV. Cependant, si nous nommons la distance $DF = c$, & que nous posions pour abréger

$$P = \frac{\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}}{1 - \frac{r}{m}\left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}\right)} \ \&\ Q = \frac{\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c}}{1 - \frac{t}{m}\left(\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c}\right)}$$

on parviendra à cette équation

$$P + Q = (m-n)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) + \frac{s}{n}\left(\frac{m-n}{g} - P\right)\left(\frac{m-n}{h} - Q\right)$$

Main-

Maintenant, si les épaisseurs r, s, t sont extrémement petites, puisqu'on aura alors assés exactement

$$P = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} + \frac{r}{m}\left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}\right)^2 \ \& \ Q = \frac{m-1}{k} - \frac{1}{c} + \frac{t}{m}\left(\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c}\right)^2$$

l'équation trouvée se changera en cette forme :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = (m-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k}\right) - (m-n)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) + \frac{r}{m}\left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}\right)^2$$
$$+ \frac{t}{m}\left(\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c}\right)^2$$
$$- \frac{s}{n}\left(\frac{m-n}{g} - \frac{(m-1)}{f} + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{m-n}{h} - \frac{(m-1)}{k} + \frac{1}{c}\right)$$

d'où notre premiere équation se déduit, si l'on fait évanouïr les épaisseurs r, s & t.

XVI. Donc, puisque au cas que $r = s = t = 0$, on a

$$\frac{1}{c} = (m-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k}\right) - (m-n)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) - \frac{1}{a}$$

si nous considérons les épaisseurs r, s & t comme extrémement petites, nous aurons plus exactement

$$\frac{1}{c} = (m-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k}\right) - (m-n)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) - \frac{1}{a}$$
$$+ \frac{r}{m}\left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}\right)^2$$
$$+ \frac{s}{m}\left(\frac{m-n}{g} - \frac{(m-1)}{f} + \frac{1}{a}\right)^2$$
$$+ \frac{t}{m}\left((m-n)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) - \frac{(m-1)}{f} + \frac{1}{a}\right)^2$$

 d'où

d'où l'on voit combien chacune des épaiſſeurs r, s & t, contribue à changer la valeur de la diſtance DF $= c$. On voit évidement que la valeur de $\frac{1}{c}$ en eſt augmentée, & partant celle de la diſtance même DF $= c$ diminuée.

XVII. Ayant donc déterminé par la théorie à quelle diſtance DF $= c$ derriere le verre l'image doit paroitre, ſi l'on conſulte l'expérience, & qu'on obſerve cette même diſtance DF, il faut qu'elle ſe trouve d'accord avec la théorie. Connoiſſant donc cette diſtance DF $= c$ par l'expérience, on aura une équation, d'où l'on pourra tirer la valeur du nombre n, ou bien le rapport $n : 1$, qui exprime la raiſon de réfraction pour la liqueur, dont la cavité entre les ménisques eſt remplie. Pour cet effet il faut qu'on ſache les rayons des quatre courbures f, g, h, & k, lesquels peuvent bien être ſuppoſés connus par les baſſins, où les deux ménisques auront été travaillés; cependant on en pourra auſſi découvrir les valeurs par quelques expériences, qu'on fera avec des liqueurs dont la réfraction eſt déjà connue. Or outre cela il faut qu'on ſache exactement le nombre m, qui contient la réfraction du verre.

XVIII. Or, pour obſerver la diſtance DF $= c$, à laquelle l'image de l'objet ſe preſente derriere le verre, on peut ſe ſervir d'une chambre obſcure, en fixant le verre dans le trou par lequel les rayons y entrent: car alors recevant l'image ſur une ſurface blanche, en l'approchant ou éloignant du verre, jusqu'à ce que la repréſentation paroiſſe la plus diſtincte, on n'aura qu'à meſurer ſa diſtance depuis le verre pour avoir la diſtance cherchée DF $= c$. Or au défaut d'une chambre obſcure on pourra auſſi ſe ſervir du tuyau d'une lunette ordinaire, en y fixant le verre compoſé au lieu de l'objectif, & prenant un oculaire, qu'on jugera le plus convenable; on n'aura qu'à diriger la lunette vers l'objet propoſé, & chercher quelle longueur il faut donner à la lunette, pour qu'on voye l'objet le plus diſtinctement.

Alors

Alors, connoiſſant l'oculaire & la conſtitution de l'oeil, on en conclura aiſément la diſtance DF.

Méthode d'obſerver la réfraction de toutes ſortes de liqueurs tranſparentes.

XIX. Je ſuppoſerai d'abord qu'on ſache exactement les rayons des quatre faces des méniſques, f, g, h, k, de même que la réfraction du verre, ou la raiſon $m : 1$; & l'objet ſe trouvant dans l'axe du verre compoſé à la diſtance $AE = a$, qu'on obſerve, à quelle diſtance derriere le verre l'image ſera préſentée, laquelle ſoit poſée $DF = c$, de ſorte que les valeurs des lettres m, a, c, f, g, h, k, ſoient connues. De là, en négligeant les épaiſſeurs r, s, t, on aura d'abord

$$(m-n)\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\right)=(m-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}$$

d'où l'on tire

$$n=m-\frac{gh}{g+h}\left((m-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$$

Mais, ſi l'on veut tenir compte des épaiſſeurs, en les regardant comme très petites on aura :

$$\begin{aligned}n=m&-\frac{gh}{g+h}\left((m-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\\&-\frac{ghr}{m(g+h)}\left(\frac{m-1}{f}-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{ght}{m(g+h)}\left(\frac{m-1}{k}-\frac{1}{c}\right)^2\\&-\frac{ghs}{n(g+h)^3}\left((m-1)\left(\frac{h}{k}-\frac{g}{f}\right)+\frac{g}{a}-\frac{h}{c}\right)^2\end{aligned}$$

XX. Mais l'avantange de cette méthode ſur les ordinaires conſiſte en ce qu'on peut employer un tel verre compoſé, qu'il en réſulte

 une

une très grande différence dans la diſtance, tandis que la nature de la liqueur, ou le nombre n, change très peu. Pour chercher tels verres avantageux, ſuppoſons que le nombre n croiſſe de ſon différentiel dn, pendant que la diſtance c change en $c + dc$, & la différentiation nous fournira entre ces différentiels dn & dc le rapport ſuivant

$$- dn\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) = \frac{-dn(g+h)}{gh} = \frac{dc}{cc}$$

d'où nous tirons $dc = \frac{-ccdn(g+h)}{gh}$

Il faut donc que le coëfficient de dn ou $\frac{cc(g+h)}{gh}$ devienne très grand, ou ſon réciproque $\frac{gh}{cc(g+h)}$ très petit: & partant en ſubſtituant pour c ou $\frac{1}{c}$ ſa valeur, cette quantité

$$\frac{gh}{g+h}\left((m-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k}\right) - (m-n)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) - \frac{1}{a}\right)^2$$

doit devenir très petite.

XXI. Afin que la quantité $\frac{cc(g+h)}{gh}$ devienne fort grande, on rendra d'un coté la fraction $\frac{g+h}{gh}$, & de l'autre la diſtance c, auſſi grande que les circonſtances le permettent. Or il eſt évident que plus on fait petits les deux rayons g & h des faces concaves, & plus la fraction $\frac{g+h}{gh}$ deviendra grande; mais il faut bien prendre garde de ne pas les rendre trop petits: puiſqu'on ſeroit obligé de donner au verre une trop petite ouverture. C'eſt pourquoi il ſera toujours bon de faire les deux rayons g & h égaux entr'eux, & de leur donner

une

une telle grandeur, qui ne ſoit jamais trop petite par rapport à la diſtance de l'image DF $= c$: car, plus cette diſtance devient grande, & plus le verre doit admettre d'ouverture. Le cas le plus commode ſera donc de rendre les deux méniſques égaux & ſemblables entr'eux, & partant ſi nous faiſons $k = f$ & $h = g$, notre équation pour la diſtance DF $= c$ ſe réduit à cette forme

$$\frac{1}{c} = \frac{2(m-1)}{f} - \frac{2(m-n)}{g} - \frac{1}{a}$$

d'où nous aurons :

$$n = m - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{2(m-1)}{f} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$$

XXII. Puiſque $\frac{1}{c}$ eſt plus grand que $\frac{2(m-1)}{f}$, pourvû que $n < m$, ce qui arrive toujours, vû qu'on ne connoit point de liqueur, dont la réfraction ſoit plus grande que celle du verre, la diſtance c eſt toujours plus grande que $\frac{f}{2(m-1)}$, ou que f à peu près, à cauſe de $m = \frac{3}{2}$ environ. Il faut donc prendre le rayon des deux convexités $f = k$, ni trop grand, ni trop petit: car ſi on les prenoit trop petits, la différence entre les diſtances c qui répondent à diverſes liqueurs, pourroit devenir trop petite, pour qu'on en pût conclure avec aſſes de préciſion la différence de leur réfraction. Je ne voudrois donc pas prendre ces deux rayons f & k au deſſous d'un pied. Mais une beaucoup plus grande valeur ſeroit également nuiſible, puiſqu'en rempliſſant le verre d'une telle liqueur pour laquelle $m - n$ auroit une valeur conſidérable, la diſtance c pourroit devenir ſi grande, que la chambre obſcure ne ſeroit pas aſſez ſpacieuſe pour la recevoir, ou qu'il y faudroit employer une trop longue lunette. Car, plus la différence $m - n$ ſera grande, & plus la diſtance DF $= c$ excedera la quantité $\frac{2(m-1)}{f}$.

XXIII. Ayant déjà remarqué qu'il n'y a point de liqueurs, qui souffrent une plus grande réfraction, que le verre, je crois pouvoir ajouter qu'il n'y en a point, où la valeur de n soit plus petite que $1\frac{1}{4}$. Toutes les liqueurs donc, qu'on pourra examiner, seront par rapport à leur réfraction comprises entre les deux limites suivantes du nombre n,

$$n = 1,54 \quad \& \quad n = 1,25$$

Or, si la liqueur, dont on remplit le verre étoit telle, que la raison du sinus d'incidence au sinus de réfraction des rayons qui y entrent de l'air fut

$$n : 1 = m : 1 = 1,54 : 1 \text{ ou } m - n = 0$$

la distance DF $= c$ deviendroit la plus courte; que je voudrois donc mettre $=$ 1 pied. Mais, si la liqueur étoit si rare, que pour l'entrée des rayons de l'air, il y eut $n = 1,25$, la distance DF $= c$ deviendroit la plus grande, que je voudrois poser infinie, au cas que la distance de l'objet AE $= a$ est extrémement grande, ou quasi infinie.

XXIV. Ces deux conditions nous fourniront les justes valeurs, qu'il faudra donner, tant au rayon de convexité f, qu'à celui de concavité g de chaque ménisque. Car pour les rayons moyens il y a $m = 1,54$ si la nature de la liqueur donne $n = m$, ou $n = 1,54$, & que nous regardions la distance de l'objet AZ $= a$ comme infinie, il faut que la distance de l'image DF $= c$ provienne d'un pied, d'où nous tirons

$$1 = \frac{f}{2.0,54} = \frac{100f}{108}, \text{ ou } f = \tfrac{27}{25} \text{ pieds},$$

donc les deux faces convexes doivent avoir pour leurs rayons de courbure

$$f = k = \tfrac{27}{25} \text{ pieds, ou } f = k = 1 \text{ pied \& 1 pouce à peu près.}$$

Or

Or, si la liqueur donnoit $n = 1,25$, & qu'on regardât la distance $a = \infty$, à cause de $c = \infty$ on auroit,

$$\frac{2.\,0,54}{f} - \frac{2.\,0,29}{g} = 0$$

& partant $g = \frac{29}{54} f = \frac{29}{50}$ pieds $= 7$ pouces.
De sorte que pour chacun de nos ménisques nous ayons :

le rayon de convexité $f = k = 1,08$ pieds $= 12,96$ pouces
le rayon de concavité $g = h = 0,58$ pieds $= 6,96$ pouces

XXV. Cependant une trop grande précision seroit ici fort mal placée, & on pourra retirer à peu près les mêmes avantages d'une infinité de verres composés, pourvû que les ménisques ne diffèrent pas trop de ceux que je viens d'indiquer. Pour cette raison on pourra employer deux ménisques égaux & semblables, dont

le rayon des faces convexes soit $f = k = 12$ pouces
& le rayon des faces concaves $g = h = 7$ pouces.

Alors, remplissant la cavité entre ces deux ménisques d'une liqueur quelconque, dont la raison de réfraction soit $= n : 1$ pour les rayons qui y entrent de l'air, qu'on mesure la distance de l'image après le verre DF $= c$, de même que celle de l'objet avant AE $= a$, chacune exprimée en pouces, & on aura

$$n = m - \tfrac{7}{12}(m-1) + \tfrac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

ou $n = \frac{5}{12} m + \frac{7}{12} + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$

Et si les rayons sont d'une nature moyenne, qu'il soit $m = 1,54$, on aura en négligeant l'epaisseur :

$$n = 1,225 + \tfrac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

XXVI. Voyons à quel point de précision ce verre composé sera capable de nous indiquer la réfraction d'une liqueur proposée. Que l'obl'objet se trouve à une distance de 100 pieds, ou de 1200 pouces, puisqu'il faut se servir de cette mesure, de sorte que $a = 1200$, & que l'expérience nous donne la distance de l'image $c = 80$ pouces, de là nous conclurons donc :

$$n = 1,225 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{80}\right) = 1,27166$$

Mais, si au lieu de $c = 80$ pouces on s'étoit trompé de 6 pouces & qu'il y eut $c = 74$ pouces, on auroit

$$n = 1,225 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1200} + \tfrac{1}{74}\right) = 1,27520$$

d'où l'on voit qu'une différence de 6 pouces dans le lieu de l'image, n'en produit dans la valeur du nombre n qu'une différence de 0,00354, ou l'erreur qui a influé sur le nombre n seroit environ $\frac{1}{300}$.

Si la liqueur étoit encore plus rare, & que la distance de l'image fût plus grande, savoir $c = 120$ pouces, la distance de l'objet étant $a = 1200$ pouces, on en conclurroit sa réfraction

$$n = 1,225 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1200} + \tfrac{1}{120}\right) = 1,25708$$

& une erreur de 6 pouces dans la distance c n'en produiroit une que de $\frac{1}{550}$ dans la valeur du nombre n.

XXVII. Ce verre composé dont je viens de donner la description, seroit donc très propre à déterminer la réfraction des liqueurs, dont le nombre n se trouveroit au dessous de 1, 30, ou qui causeroient une moindre réfraction que l'eau. Mais, si l'on vouloit par ce même verre examiner la réfraction des liqueurs approchantes de la nature de l'eau, la distance c deviendroit trop courte, pour en pouvoir conclure la réfraction avec autant de sureté. Car, pour que la valeur de n provienne de 1, 33, la distance de l'image c tomberoit au dessous de 3 pieds, & une erreur commise dans cette distance influeroit plus considérablement sur la quantité de réfraction. Pour l'examen de telles liqueurs il conviendroit donc d'employer d'autres ménisques, tels, que si la réfraction de la liqueur étoit environ $n = 1, 28$, ou même $n = 1, 30$ la distance c deviendroit infinie en supposant $a = \infty$; pour cet effet il faudroit qu'il fut

$$\frac{f}{g} = \frac{m-1}{m-n} = \frac{54}{20}, \text{ ou } \frac{f}{g} = \frac{54}{24} = \frac{9}{4}$$

on pourroit donc prendre $f = 13$ pouces, & $g = 6$ pouces.

XXVIII. Cependant on pourra bien se servir avec le même succès des ménisques précédens $f = k = 12$ pouces & $g = h = 7$ pouces en approchant davantage l'objet du verre ; car alors la distance de l'image deviendra plus grande, d'où la détermination du nombre n acquerra une plus grande précision. Pour chaque liqueur dont on aura rempli le verre, on approchera de plus en plus l'objet, jusqu'à ce que la distance de l'image devienne si grande qu'on jugera la plus convenable. Ainsi, supposant qu'ayant placé l'objet à la distance de 40 pouces, on ait observé la distance de l'image $c = 120$ pouces, la réfraction de la liqueur sera exprimée par cette valeur du nombre n

$$n = 1,225 + \tfrac{7}{2}\left(\tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{120}\right) = 1,3416$$

où une erreur de 6 pouces commise dans l'observation de la distance c n'en produit qu'une de $\frac{1}{180}$ dans la valeur du nombre n. Et ce degré de précision sera toujours le même tant qu'on fera en sorte, que la distance de l'image tombe à la distance de 120 pouces derriere le verre. A' une telle moindre distance de l'objet on le pourra plus commodément éclairer autant qu'il faut pour rendre assés claire l'image.

XIX. Mais, puisque j'ai négligé jusqu'ici l'épaisseur du verre, voyons à combien la correction qui en résulte, pourra monter. Comme les deux ménisques sont supposés égaux & semblables, on aura non seulement $f = k$ & $g = h$, mais aussi $t = r$, d'où nous aurons pour la juste valeur de n

$$n = m - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{2(m-1)}{f} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) - \frac{gs}{8n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2$$

$$- \frac{gr}{2m}\left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{gr}{2m}\left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{c}\right)^2$$

 &

& partant pour les cas $f = 12$ pouces, & $g = 7$ pouces, la véritable valeur de n sera

$$n = 1,225 + \tfrac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) - \frac{7r}{2m}\left(\frac{m-1}{12} - \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{7r}{2m}\left(\frac{m-1}{12} - \frac{1}{c}\right)^2$$

$$- \frac{7s}{8n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2$$

Faisons-en l'application au dernier exemple $a = 40$, & $c = 120$; & puisque la valeur trouvée auparavant $n = 1,3416$ est assés approchante, les corrections seront à cause de $m = 1,54$

$$n = 1,3416 - 0,004r - 0,00018s$$

Donc, quoiqu'on pose $r = \frac{1}{10}$ pouce & $s = \frac{1}{5}$ pouce, cette correction ne vaudra que $0,0004 + 0,000036 = 0,000436$ à soutraire, & on aura $n = 1,3412$, d'où l'on voit qu'on peut bien négliger cette correction, pourvû que le verre ne soit pas très épais.

XXX. Cependant il sera bon d'avoir quelques paires de tels ménisques, travaillés sur différentes proportions entre f & g, afin qu'on puisse employer pour chaque liqueur proposée tels qu'on jugera les plus convenables. Supposons qu'on ait trois paires de tels ménisques, que j'indiquerai par les lettres A, B, C, & qu'il soit :

pour A$\begin{cases} f = 12 \text{ pouces} \\ g = 7 \text{ pouces} \end{cases}$; pour B$\begin{cases} f = 12 \text{ pouces} \\ g = 6 \text{ pouces} \end{cases}$; pour C$\begin{cases} f = 12 \text{ pouces} \\ g = 5 \text{ pouces} \end{cases}$

& que les bords de tous s'accordent ensemble, en sorte qu'on puisse aussi combiner deux de différentes paires. On en pourra donc faire 6 combinaisons, & chacune fournira les déterminations suivantes du nombre n, en supposant $m = 1,54$

$$A \;\&\; A \;\ldots\; n = 1{,}225 + \tfrac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

$$B \;\&\; B \;\ldots\; n = 1{,}270 + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

$$C \;\&\; C \;\ldots\; n = 1{,}315 + \tfrac{5}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

$$A \;\&\; B \;\ldots\; n = 1{,}2492 + \tfrac{42}{13}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

$$A \;\&\; C \;\ldots\; n = 1{,}2775 + \tfrac{35}{12}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

$$B \;\&\; C \;\ldots\; n = 1{,}2945 + \tfrac{30}{11}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right).$$

XXXI. Mais, ſi l'on veut examiner la réfraction des milieux extrèmement rares, comme de l'air, ou comprimé, ou rarefié, ou même d'un vuide parfait, enfermé entre les deux ménisques, de ſorte qu'il faudroit déterminer la réfraction des rayons, qui paſſent de l'air ordinaire dans un air, ou comprimé, ou rarefié, ou dans le vuide, alors les ménisques expoſés ne ſeront plus propres. Alors il faudra employer de tels ménisques, dont le rayon de convexité eſt un peu plus petit, que le rayon de la concavité: les deux ménisques ſuivans, égaux & ſemblables entr'eux, paroiſſent aſſés propres pour ce deſſein:

Rayon de convexité $f = k =$ 12 pouces

Rayon de convexité $g = h =$ 13 pouces.

Ces ménisques renfermant le milieu propoſé, ſi d'un objet éloigné à la diſtance $AE = a$, on obſerve la diſtance de l'image $DF = c$, la valeur ſuivante du nombre n donnera la réfraction cherchée

$$n = m - \tfrac{13}{12}(m-1) + \tfrac{13}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = 0{,}955 + \tfrac{13}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

& si l'on ne veut pas négliger les épaisseurs $AB = CD = r$ & $BC = s$

$$n = 0{,}955 + \tfrac{13}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) - 4{,}22r\left(0{,}045 - \frac{1}{a}\right)^2 - 4{,}22r\left(0{,}22r - \frac{1}{c}\right)^2$$
$$- 1{,}62s\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2$$

XXXII. Supposons que ce verre composé, & rempli d'un certain air, ait donné la distance $c = 120$ pouces, l'objet étant éloigné à l'infini, & on conclura pour la réfraction de ce milieu

$$n = 0{,}955 + \tfrac{13}{240} = 1{,}009166$$

de sorte que ce milieu soit un air un peu comprimé. Or, si l'on trouvoit la distance c deux fois plus grande, ou $c = 240$ pouce, il en résulteroit

$$n = 0{,}955 + \tfrac{13}{480} = 0{,}982083$$

ce qui marqueroit un air extrémement raréfié : ou bien ce cas ne sera pas même possible, puisqu'on sait que pour le passage de l'air dans le vuide même la valeur de n est plus grande que $1 - \frac{1}{3000}$, ou que $0{,}999666$. Or on trouveroit $n = 1 - \frac{1}{3000}$, si la distance de l'image c étoit $= 146$ pouces ; mais si le verre contenoit de l'air naturel, on trouveroit $c = 144\frac{1}{2}$ pouces, & partant la différence dans la distance c ne monteroit pas à deux pouces. Mais on peut aisément augmenter cette différence en approchant davantage le rayon f du rayon g.

Méthode d'observer la réfraction des rayons de différentes couleurs.

XXXIII. Si l'on met devant le verre objectif à la même distance $AE = a$ successivement des corps teints de diverses couleurs, leurs images seront représentées derriere le verre à diverses distances, selon la diverse réfrangibilité des rayons, à moins que le verre objectif ne soit parfait, ou tel qu'il rassemble tous les rayons également. Ces objecjectifs donc, dont j'ai autrefois enseigné la construction, sont les moins propres à ce présent dessein, parce que, de quelque couleur que l'objet soit teint, ils représentent l'image toujours à la même distance : il faut plutôt employer des objectifs d'une nature diamètralement opposée, qui produisent une grande différence dans le lieu des images, quoique la différence dans la réfraction ne soit que très petite. Les objectifs ordinaires représentent bien les images des objets de diverses couleurs à des distances inégales, & c'est en quoi consiste leur principal défaut : mais, à moins que leur distance de foyer ne soit excessive, la différence n'est pas assés sensible, pour qu'on en puisse conclure, moyennant des expériences, assés exactement la différence qui se trouve dans la réfraction.

XXXIV. Il s'agit donc de trouver tels objectifs, qui par rapport à la diffusion, qui vient de la diverse réfrangibilité des rayons soient encore plus défectueux, que les verres simples & ordinaires. Pour cet effet considérons comme ci-dessus en général un verre composé de deux ménisques, dont la cavité soit remplie d'une liqueur transparentes, & que les rayons des deux faces convexes soient f & k, & des deux faces concaves g & h. Soit de plus pour une certaine espece de rayons, la raison de réfraction dans le passage de l'air dans le verre comme m à 1, & de l'air dans la liqueur comme n à 1. Cela posé, si l'objet se trouve devant le verre à la distance $AE = a$, l'image sera représentée derriere le verre à la distance $DF = c$, en sorte qu'il soit :

$$\frac{1}{c} = (m-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{k}\right) - (m-n)\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{a}$$

en négligeant l'epaisseur du verre.

XXXV. Qu'on mette à présent à la place de l'objet un corps teint d'une autre couleur, dont les rayons souffrent une réfraction différente de celle que je viens de supposer, en passant de l'air tant dans le verre que dans la liqueur. Et j'ai démontré que ces nouvellees raisons

ſons de réfraction, au lieu de $m : 1$ & $n : 1$ ſe peuvent toujours exprimer en ſorte

$$m^{1+\alpha} : 1, \& \, n^{1+\alpha} : 1, \text{ ou } m + \alpha m l m : 1, \& \, n + \alpha n l n : 1$$

puisque α eſt toujours une fraction très petite. Or cette fraction α nous fera connoitre la différence entre la réfraction de ces derniers rayons & les précédens. Soit c' la diſtance à laquelle on appercevra à préſent l'image derriere l'objectif, & nous aurons l'équation ſuivante:

$$\frac{1}{c'} - \frac{1}{c} = \alpha m l m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} - \frac{1}{g} - \frac{1}{h}\right) + \alpha n l n \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) = \frac{c - c'}{c c'}$$

Donc, pour que la moindre différence dans la réfraction devienne fort ſenſible dans la diſtance de l'image, il faut que cette quantité

$$m l m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k}\right) - (m l m - n l n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)$$

obtienne une valeur aſſés conſidérable, & que la diſtance c elle-même provienne auſſi fort grande.

XXXVI. Poſons les deux méniſques égaux & ſemblables entr'eux, de ſorte que $k = f$ & $h = g$, & que la diſtance de l'objet ſoit quaſi infinie; dans ce cas on aura ces deux équations:

$$\frac{1}{c} = \frac{2(m-1)}{f} - \frac{2(m-n)}{g} \quad \& \quad \frac{c-c'}{c c'} = \frac{2 \alpha m l m}{f} - \frac{2 \alpha (m l m - n l n)}{g}$$

dont la premiere donne

$$\frac{2}{f} = \frac{g + 2(m-n)c}{(m-1)cg} \text{ ou } f = \frac{2(m-1)cg}{g + 2(m-n)c}$$

& ſubſtituant cette valeur dans l'autre équation, on en tirera

$$c' = \frac{(m-1)cg}{(m-1)g + \alpha m g l m - 2\alpha c\,[m(n-1) l m - n(m-1) l n]}$$

Or

Or, puisqu'on peut regarder la fraction α comme très petite, il y aura fort à peu près :

$$c' = c - \frac{\alpha m l m}{m-1} c + \frac{2\alpha c c}{g}\left(\frac{m(n-1) l m}{m-1} - n l n\right)$$

D'où l'on connoit la différence entre les distances c, c', qui répond à la différence des réfractions renfermée dans la fraction α.

XXXVII. Je remarque ici d'abord deux cas principaux, l'un où $n = m$, & l'autre où $n = 1$. Dans celui-là, ayant la liqueur également réfractive que le verre, notre objectif revient à un ordinaire, dont les deux faces sont convexes, le rayon de l'une & de l'autre étant $f = k = 2(m-1)c$. Dans l'autre cas où $n = 1$, l'espace entre les deux verres ne contient que de l'air, & nous aurons deux verres simples joints immédiatement ensemble, de sorte que $f = \frac{2(m-1)cg}{g + 2(m-1)c}$.

Or pour l'un & l'autre cas l'expression $\frac{m(n-1) l m}{m-1} - n l n$ évanouït, & partant, lorsque les rayons de l'objet changent de nature, de sorte que les raisons de réfraction $m:1$ & $n:1$ deviennent $m^{1+\alpha}:1$ & $n^{1+\alpha}:1$, la distance de l'image derriere le verre c' différera en sorte de la distance précédente c, qu'il y aura

$$c' = c - \frac{\alpha m l m}{m-1} c$$

Par conséquent la différence $\frac{\alpha m l m}{m-1} c$ dépend uniquement de la distance c, & ne sauroit être, ni augmentée, ni diminuée, tant que la distance c demeure la même.

XXXVIII. Dans tous les autres cas de la liqueur renfermée entre les deux verres, la quantité $\frac{m(n-1) l m}{m-1} - n l n$ n'évanouït

point

point, & alors on pourra prendre le rayon des concavités g tel, que la différence entre les diſtances c & c' devienne beaucoup plus grande. Cependant il faut que la valeur de n n'approche point trop, ni de l'unité, ni de m, dont la valeur peut être priſe $= 1, 54$, pour ne pas tomber dans l'inconvenient des deux cas marqués : or il eſt clair, qu'il doit y avoir une valeur de n entre les deux limites 1 & m, qui rendra ladite quantité la plus grande, qu'il ſoit poſſible : & une telle liqueur, ſi l'on en pouvoit trouver une, ſeroit la plus convenable pour cette eſpece d'expériences. Pour trouver ce *maximum*, différentions ladite quantité en poſant n variable, & en égalant le différentiel égal à zero, nous obtiendrons

$$\frac{m\,lm}{m-1} = ln + 1 \quad \text{\& partant } ln = \frac{m\,lm}{m-1} - 1$$

d'où l'on tirera aiſément la valeur de n.

XXXIX. Or il faut bien remarquer que les logarithmes, que ces formules renferment, ſont des logarithmes hyperboliques, qu'on trouve des logarithmes tabulaires en multipliant ceux-ci par 2, 302585093, ou en les diviſant par 0, 4342944819. Donc, ſi nous voulons prendre pour lm & ln leurs logarithmes tabulaires, nous les devons multiplier par 2, 302585, ou diviſer par 0, 43429448, & de là nous aurons :

$$ln = \frac{m\,lm}{m-1} - 0,43429448.$$

Poſons donc $m = 1, 54$, qui eſt la valeur moyenne qui convient à la réfraction du verre, & de là on tirera

$$\frac{m\,lm}{m-1} = 0,5347833 \quad \text{\& } ln = 0,1004888$$

par conſéquent le nombre $n = 1, 260343$.
Donc, ſi l'on pouvoit trouver une telle liqueur tranſparente, dans laquelle les rayons moyens, qui y entrent de l'air, ſe rompiſſent en ſorte, que le ſinus d'incidence ſeroit au ſinus de réfraction comme 1, 26 à 1,

cet-

cette liqueur feroit fans contredit la plus propre pour cette efpece d'expériences.

XL. Mais nous ne connoiffons point de liqueur, qui ait une moindre réfraction que l'eau pure, pour laquelle on peut fuppofer $n = 1\frac{1}{3}$; & partant nous ne faurions mieux arriver à notre but qu'en rempliffant la cavité entre nos deux verres d'eau pure. Pofons donc $m = 1,54$ & $n = 1\frac{1}{3}$: & prenant les logarithmes hyperboliques nous aurons :

$$mlm = 0,664945 \qquad nln = 0,383576$$

& partant $\frac{m(n-1)lm}{m-1} - nln = 0,925884$ & $\frac{mlm}{m-1} = 1,231579$

Donc la diftance de l'image c', qui répond à la réfraction changée, fe trouvera

$$c' = c - 1,231379.\, \alpha c + 0,053768\, \frac{\alpha cc}{g}$$

d'où l'on voit que par un tel verre compofé on peut rendre la différence entre les diftances c & c' beaucoup plus grande que fi l'on fe fervoit de verres fimples ordinaires. Le plus fûr moyen fera de prendre le rayon g fort petit par rapport à la diftance c, & même négatif : mais, ayant donné à g une certaine valeur, celle de f fera

$$f = \frac{3,24cg}{3g + 1,24c} = \frac{324cg}{300g + 124c}$$

XLI. Jusqu'ici j'ai fuppofé la diftance de l'objet a infinie, mais fi elle eft finie, & la même pour les objets de différentes couleurs, nos formules fe changeront dans les fuivantes

$$f = \frac{2(m-1)acg}{g(a+c) + 2(m-n)ac} \quad \&$$

$$c' = c - \frac{\alpha mlm}{m-l}.\, c\left(1 + \frac{c}{a}\right) + \frac{2\alpha cc}{g}\left(\frac{m(n-1)lm}{m-1} - nln\right)$$

 &

& si nous posons pour le verre $m = 1,54$, & pour la liqueur $n = \frac{4}{3}$, nous aurons :

$$f = \frac{324\,acg}{300\,(a+c)\,g + 124\,ac} \quad \&$$

$$c' = c - 1,231379\,\alpha c\left(1+\frac{c}{a}\right) + 0,053768.\ \frac{acc}{g}.$$

d'où l'on voit qu'en approchant l'objet du verre, la différence entre les images deviendra encore plus sensible, supposé qu'on donne aux rayons $g = h$ des valeurs négatives.

XLII. Si l'on se servoit de verres simples, la différence entre les distances c & c' seroit $= 1,231379\,\alpha c\left(1+\frac{c}{a}\right)$, mais, par le moyen des verres composés, on peut faire que cette différence devienne autant de fois plus grande, qu'on voudra. Supposons qu'elle doive devenir λ fois plus grande, de sorte qu'il y eut

$$c' = c - 1,231379\,\lambda\,\alpha c\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

& nous aurons :

$$-1,231379\,(\lambda-1)\left(1+\frac{c}{a}\right) = 0,053768.\ \frac{c}{g}$$

donc $g = -\dfrac{0\ 053768\,ac}{1,231379\,(\lambda-1)\,(a+c)} = -\dfrac{ac}{23\,(\lambda-1)(a+c)}$

& substituant cette valeur dans celle de f,

$$f = -\frac{324\,ac}{-300(a+c)+2852(\lambda-1)(a+c)} = -\frac{ac}{a+c}.\ \frac{324}{2852(\lambda-1)-300}$$

Ces valeurs se réduisent donc aux formules suivantes :

$$f = -\frac{81}{713\,(\lambda-1)-75}\ .\ \frac{ac}{a+c}$$

$$g = -\frac{1}{23\,(\lambda - 1)} \cdot \frac{ac}{a+c}$$

& partant tous les deux rayons f & g deviennent négatifs, ayant entr'eux ce rapport

$$f : g = 1863\,(\lambda-1) : 713(\lambda-1) - 75 = 81 : 31 - \frac{75}{23(\lambda-1)}.$$

XLIII. Les deux verres ſimples ſeront donc auſſi des méniſques, mais qu'il faut joindre en ſorte, que leurs concavités ſoient tournées en dehors, & les convexités en dedans. Le verre compoſé eſt répréſenté dans la 2 figure, où MAMBM & NDNCN ſont les deux méniſques luniformes, égaux & ſemblables entr'eux, entre leſquels l'eſpace MBMNCN doit être rempli d'eau : & puiſque ces deux méniſques ne peuvent être joints par leurs bords, leur jonction ſe doit faire par le moyen d'une boite, ou d'un bout de tuyau MNMN, auquel on puiſſe tellement enfermer les deux méniſques, que l'eau entr'eux ne ſauroit écouler. Les rayons des faces concaves ſont ici plus grands que ceux des faces convexes, & poſant la diſtance de l'objet AE $= a$, ſi l'on veut que l'image formée par les rayons moyens tombe à la diſtance DF $= c$, & que pour les autres couleurs le changement de la diſtance c devienne λ fois plus grand, que ſi l'on ſe ſervoit de verres ordinaires, il faut travailler les faces en ſorte : Fig. 2.

le rayon des faces concaves MAM, NDN $= -\frac{81}{713\,(\lambda-1) - 75} \cdot \frac{ac}{a+c}$

le rayon des faces convexes MBM, NCN $= \frac{1}{23\,(\lambda-1)} \cdot \frac{ac}{a+c}$

D'où l'on voit que, plus ce changement doit être grand, & plus les rayons des faces deviendront petits.

XLIV. Puiſqu'on doit pouvoir changer l'objet à volonté, on ne ſauroit ſuppoſer ſa diſtance a infinie ; poſons la donc de 100 pieds, ou de 1200 pouces, & qu'on veuïlle que l'image formée des rayons ſolaires moyens tombe à la diſtance de 100 pouces, pour avoir $\frac{ac}{a+c} = \frac{1200}{13} = 92\frac{1}{3}$ pouces. Si l'on poſe $\alpha = \frac{1}{67}$, laquelle valeur répond à peu près aux rayons ſolaires extrèmes, le changement qui en réſulte dans la diſtance de l'image, ou la différence $c - c'$ montera à

$$1,231379 \cdot \tfrac{1}{67} \cdot \tfrac{13}{12} \cdot \lambda c = 2\,\lambda \text{ pouces; à cauſe de } c = 100.$$

Donc, ſi l'on ſe ſervoit de verres ordinaires, où $\lambda = 1$, ce changement dans la diſtance ne feroit que de 2 pouces. Voyons donc quels doivent être les rayons de nos méniſques, pour que ce changement devienne 2, 3, 4, 5, & 6 fois, & même 12 fois plus grand

Rayon des faces	ſin $\lambda = 2$	ſin $\lambda = 3$	ſin $\lambda = 4$	ſin $\lambda = 5$	ſin $\lambda = 6$	ſin $\lambda = 12$
concaves	11, 72	5, 53	3, 62	2, 69	2, 14	0, 96
convexes	4, 01	2, 00	1, 34	1, 00	0, 80	0, 36½

XLV. On voit de là qu'on ne ſauroit augmenter trop ce changement, puisque les faces deviendroient trop courbes, & ne permettroient plus une ouverture ſuffiſante. Il ſemble qu'il ne feroit pas à propos de donner à λ une plus grande valeur que 3; & on pourra ſe contenter d'une différence trois fois plus grande, que donnent les verres ordinaires; laquelle ſera aſſés ſenſible pour nous découvrir la différence dans la réfraction des rayons de diverſes couleurs. Ayant donc conſtruit un tel verre, composé de deux méniſques égaux, dont les rayons ſoient

des faces concaves —— $f = 5\frac{53}{100}$ pouces

des faces convexes —— $g = 2$ pouces,

qu'on expoſe ſucceſſivement à une diſtance donnée $= a$ des objets teints de diverſes couleurs unies, & qu'on obſerve exactement les diſtances après les verres, où les images ſe repréſentent le plus diſtincterement. Alors on s'appercevra d'une différence assés sensible dans le lieu des images, selon les diverses couleurs de l'objet. Car, plus les rayons d'un objet seront réfrangibles, & plus l'image sera approchée du verre.

XLVI. On pourra aussi déterminer la différence, qui se trouve parmi la réfraction des rayons de différentes couleurs, par le moyen de l'équation

$$\frac{c-c'}{cc'} = \frac{2\alpha m l m}{f} - \frac{2\alpha(m l m - n l n)}{g}$$

Car, si pour une certaine couleur, dont la réfraction dans le verre soit posée comme $m : 1$, on observe la distance de l'image $= c$ pouces, & pour une autre couleur la distance de l'image $= c'$ pouces, on en trouvera

$$\alpha = \frac{c-c'}{0,0409\,cc'} = 24\tfrac{1}{2}\,\frac{c-c'}{cc}$$

& la réfraction de ces rayons en entrant dans le verre suivra ce rapport $m^{1+\alpha} : 1$ entre le sinus d'incidence & celui de réfraction. Supposons qu'on ait trouvé la distance $c = 100$ pouces, & l'autre $c' = 95$ pouces, & on en conclura $\alpha = 24\frac{1}{2}.\frac{5}{9500} = \frac{1}{77\frac{1}{2}}$, de sorte que la raison de réfraction de ces derniers rayons sera comme $m^{1+\frac{2}{155}}$ à 1, celle des premiers étant comme m à 1.

XLVII. Puisqu'il est difficile d'exécuter ces ménisques si exactement selon les proportions prescrites, & que peut-être ces proportions mêmes ne sont pas exactes au dernier point, il pourroit bien arriver que le multiplicateur $24\frac{1}{2}$ differât considérablement de la vérité. Or, pour remédier à ce défaut, on n'aura qu'à regarder ce multiplicateur comme indéterminé, en posant :

$$\alpha = \mu\,\frac{c-c'}{cc'}$$

&

&|à le déterminer par les obſervations de deux couleurs, dont la différence de réfraction eſt déjà connue. Pour cet effet on pourroit choiſir les deux couleurs extrémes de l'arc en ciel, ou du ſpectre repreſenté par un priſme ſur une ſurface blanchie. Que c ſoit la diſtance de l'image rouge, & c' celle de l'image violette, qui ſera plus petite; & on ſait que la valeur de α eſt $= \frac{1}{33\frac{1}{4}} = \frac{4}{133}$. De là on trouvera donc par l'expérience la juſte valeur du multiplicateur μ, qui ſera $\mu = \frac{4}{133} \cdot \frac{cc'}{c-c'}$.

XLVIII. Or, ayant une fois déterminé cette juſte valeur de μ, on pourra employer le même verre compoſé pour examiner la réfraction de toutes les couleurs ſimples, tant des rayons ſolaires, que des corps opaques. On commencera par une couleur dont la réfraction dans le verre eſt connue, qui ſoit comme m à 1, & on marquera la diſtance de l'image après le verre qui ſoit $= c$; enſuite on placera à la même diſtance devant le verre un objet teint d'une autre couleur quelconque, & ayant auſſi marqué la diſtance de l'image, qui ſoit $= c'$, qu'on cherche la valeur du nombre α par la formule

$$\alpha = \mu \cdot \frac{c-c'}{cc'}$$

mettant pour μ la valeur trouvée par les premieres expériences, & on connoitra la réfraction de ces derniers rayons en entrant dans le verre, qui ſera comme $m^{1+\alpha}$ à 1. Dans ces obſervations on n'a pas beſoin de meſurer la diſtance de l'objet $= a$, pourvû qu'elle ſoit conſervée la même dans les expériences qu'on veut comparer enſemble.

XLIX. Ces objectifs préſentent donc, comme les ordinaires, les images formées par des rayons plus réfrangibles à des moindres diſtan-

ces

ces du verre, mais avec cet avantage, que la différence dans le lieu des images devient beaucoup plus ſenſible. Cependant on pourroit auſſi former de tels objectifs, qui répréſentaſſent dans un ordre renverſé les images des rayons plus réfrangibles à une plus grande diſtance. Car on n'a qu'à poſer le nombre λ négatif, & ſi l'on veut que le changement dans le lieu des images ſoit λ fois plus grand, qu'en ſe ſervant des verres ordinaires, il faut donner aux rayons f & g des faces des méniſques les valeurs ſuivantes :

$$f = \frac{81}{713(\lambda + 1) + 75} \cdot \frac{ac}{a + c} \text{ \& } g = \frac{1}{23(\lambda + 1)} \cdot \frac{ac}{a + c}$$

& ces deux méniſques doivent être joints en ſorte, que leurs faces convexes ſoient tournées en dehors ; mais, pour obtenir un effet auſſi ſenſible qu'avec les précédens, ces rayons deviennent plus petits, & partant leur ouverture trop petite en empêcheroit l'uſage.

L. Dans le deſſein donc, que je me ſuis propoſé ici, les objectifs compoſés de deux méniſques renverſés méritent la préférence, & il ſemble que leur uſage ſe pourra bien exécuter dans une chambre obſcure : où une petite ouverture du verre peut être ſuffiſante pour repréſenter les objets expoſés aſſez clairement, ſurtout lorsqu'ils ſont éclairés par le Soleil. Quand la chambre obſcure eſt aſſez ſpacieuſe, qu'on y puiſſe recevoir les images à une plus grande diſtance qu'à 100 pouces, on pourra donner aux rayons f & g des méniſques de plus grandes valeurs, pourvu qu'on obſerve bien la juſte proportion entr'eux, de ſorte qu'il ſoit $f : g = 553$ à 200. Or, pour que la différence dans le lieu des images devienne plus que deux fois plus ſenſible, qu'en ſe ſervant des verres ordinaires, il faut que $\frac{f}{g}$ ſoit plus petit que $2,92$, mais pourtant plus grand que $2,61$. Mais, plus la valeur de $\frac{f}{g}$ approche de la derniere limite $2,61$, plus les rayons f & g doivent être pris petits, afinque les images ne tombent pas trop loin.

L.I.

LI. Ayant bien réüſſi dans la conſtruction d'un tel verre composé, & préparé une chambre obſcure aſſez profonde pour contenir les images, cet inſtrument ſera fort propre à décider cette importante queſtion ; ſi les rayons des corps opaques colorés ſouffrent la même réfraction que les rayons du Soleil de même couleur ? ou s'il ſe trouve parmi les couleurs une telle reſſemblance, comme dans les ſons : de ſorte qu'il y en ait, par exemple, pluſieurs rouges, qui différent entr'elles par octaves ? car alors ces différentes couleurs rouges devroient ſouffrir de différentes réfractions. On pourroit pour cet effet faire teindre de toutes ſortes de couleurs des feuïlles de papier, & mettre ſur chacune quelque écriture noire, pour être en état de reconnoitre dans la chambre obſcure le vray lieu des images, qui ſera là, où ces écritures ſe préſentent le plus diſtinctement. Il faudroit donc ſucceſſivement expoſer toutes ces feuïlles colorées devant la chambre obſcure, & à une diſtance fixée, ſur l'axe du verre ; & il ſera aiſé d'obſerver pour chacune exactement le lieu de l'image, où elle paroitra le plus diſtinctement préſentée ſur une ſurface blanche. La différence qu'on remarquera entre les diſtances des images du verre, nous découvrira d'abord la différence qui ſe trouve dans la réfraction de toutes les couleurs différentes, en ſuivant la régle que j'ai expoſée cy-deſſus.