1758

Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent

Leonhard Euler

RECHERCHES
PLUS EXACTES SUR L'EFFET DES MOULINS À VENT.

PAR M. EULER.

I.

Lorsque je traitai cette matiere, il y a quelques années, j'ai fondé mes calculs ſur l'hypotheſe commune, que l'effet d'un fluide, qui heurte contre une ſurface, eſt en raiſon composée du quarré de la viteſſe, & du quarré du ſinus de l'angle d'incidence : non que je croyois, que cette hypotheſe étoit entierement conforme à la vérité, mais plutôt, puisque la veritable loi de ces forces eſt encore inconnue. Je conviens même que, dans la détermination de la force du vent, cette hypotheſe peut s'ecarter très conſidérablement de la verité, à cauſe de la grande force de la preſſion de l'atmoſphère, qui peut être fort dérangée par l'impulſion du vent, tandis que la même hypotheſe, lorsqu'il s'agit de déterminer l'impulſion de l'eau, ſe trouve plus d'accord avec les expériences; quoique les aberrations y deviennent auſſi ſouvent aſſés remarquables. Donc, ſi j'ai employé cette hypotheſe defectueuſe dans mes recherches ſur l'effet des moulins à vent, c'eſt uniquement à elle qu'il faudra attribuer les erreurs, que la comparaiſon du calcul avec les expériences nous donnera à connoitre.

II. Or il eſt certain, qu'un corps en repos, qui reçoit l'impulſion d'un fluide, en eſt également frappé, que ſi ce même corps ſe mouvoit dans le fluide avec la même viteſſe : & partant ce qu'on nomme impulſion dans le premier cas, ne differe point de ce qu'on nomme réſiſtance dans l'autre. C'eſt donc une complette connoiſſance de la réſiſtance, qui nous manque encore dans ces ſortes de recherches ; & avant qu'on parvienne à cette connoiſſance, on ne ſauroit eſpérer, que la théorie ſur les effets des machines, qui ſont agitées par l'impulſion de quelque fluide, ſoit parfaitement d'accord avec l'expérience. Il y a longtems qu'on a remarqué, que l'hypotheſe commune de la réſiſtance ſatisfait fort peu à quantité d'expériences, qu'on a faites ſur la réſistance des fluides : cependant on n'en a pu decouvrir jusqu'ici la veritable théorie, qui ſemble même demander des recherches trop profondes, pour que nous puiſſions eſpérer d'y arriver ſi tôt. On ne doit donc pas être ſurpris, ſi dans le calcul on s'arrête encore à cette hypotheſe, qu'on n'ignore pas être inſuffiſante.

III. Pour peu qu'on examine auſſi les fondemens, ſur lesquels cette hypotheſe eſt établie, on les trouve d'abord très foibles & entierement chimériques. On s'eſt repréſenté la réſiſtance comme l'effet d'un choc, qu'un corps éprouve à chaque inſtant, en traverſant un fluide : & afin que chaque partie du fluide, qui a déjà eſſuyé le choc, ne trouble pas le ſuivant, on s'imagine, comme ſi elle étoit ſubitement anéantie, & que le corps rencontre à chaque inſtant une nouvelle couche du fluide en repos, contre laquelle il choque avec ſa viteſſe entiere. Or on voit d'abord que toute cette repréſentation eſt chimérique, & que lorsqu'un corps ſe meut dans un fluide, celui-ci en eſt d'abord mis dans un certain mouvement, par lequel le corps pouſſe le fluide devant lui, qui découle enſuite autour du corps pour remplir l'eſpace, qu'il laiſſe vuide derriere lui. Dans cet état le fluide exerce tout autour du corps une certaine preſſion ſur lui, & la réſiſtance n'eſt autre choſe, que l'excés de la preſſion du fluide ſur la partie antérieure, ſur celle que la poſtérieure ſoutient ; d'où il eſt evident que la reſisréſiſtance eſt fort mal repréſentée par une continuelle répétition d'un choc, que le corps exerce ſur les parties du fluide.

IV. Cependant il faut convenir que, quelque contraires que ſoient ces fondemens de l'hypotheſe commune à la vérité, il y a pourtant des cas, où elle ne s'écarte pas beaucoup de la vérité, & où l'on s'en peut ſervir ſans tomber dans des erreurs trop énormes. Cela arrive à peu près, lorsque la preſſion naturelle du fluide ſur le corps eſt fort petite, comme ſi la queſtion roule ſur la réſiſtance qu'un corps, qui nage ſur l'eau, ou qui n'y eſt pas profondement ſubmergé, éprouve. Mais, quand un corps eſt jetté dans l'air, la diverſe preſſion de l'atmosphere peut cauſer de ſi grands deſordres, que la réſiſtance devienne très différente de celle que l'hypotheſe commune indique. On n'a qu'à concevoir le cas, où le corps ſe meut plus vite, que l'air ne ſauroit occuper ſubitement les lieux, que le corps vient de quitter, de ſorte qu'il ſe trouve toujours derriere le corps un eſpace vuide d'air, & on verra qu'outre la réſiſtance ordinaire il s'oppoſe au mouvement du corps toute la preſſion de l'atmosphere; qui agiſſant ſur la partie antérieure du corps, & n'étant pas contrebalancée par une ſemblable preſſion ſur la partie poſtérieure, doit très conſidérablement augmenter la réſiſtance.

V. Auſſi voit-on par les Expériences que Mr. *Robins* a faites ſur le mouvement des boulets à canon, que la réſiſtance eſt de beaucoup plus grande, qu'elle devroit être ſelon l'hypotheſe commune. Car, quand même leur viteſſe n'eſt pas ſi grande, qu'ils laiſſent après eux un eſpace vuide, l'air y doit toujours être moins denſe que devant le corps; & alors, pour avoir la réſiſtance entiere, il y faut encore ajouter l'excès de la preſſion d'avant ſur celle de derriere. Il eſt auſſi clair que, plus le mouvement du corps eſt lent, plus petit auſſi doit être cet excés: & il y a apparence que cet excés croit dans une raiſon moindre que celle des quarrés de la viteſſe, puisqu'il devient enfin conſtant. D'où il s'enſuit que la réſiſtance totale eſt compoſée de deux parties, dont l'une eſt proportionelle au quarré de la viteſſe,

mais

mais l'autre à une fonction des vitesses, qui croit moins que leur quarré. Par conséquent la véritable résistance des corps mûs dans l'air, sera non seulement plus grande que l'hypothese commune l'indique, mais encore, en augmentant la vitesse, elle croitra suivant une raison moindre que celle des quarrés de la vitesse.

VI. Or, si la résistance qu'un corps jetté dans l'air éprouve, est plus grande que selon l'hypothese commune, il s'ensuit nécessairement, qu'un corps exposé à l'impulsion du vent, en est poussé par une plus grande force que si on l'estimoit conformément à la même hypothese. Ou bien il souffrira, outre la force qu'on attribue communément au choc, encore l'excés de la pression de l'atmosphere que la partie exposée au vent soutient sur celle de derriere. Car si un corps, comme une voile, est opposé à la force du vent, on conçoit aisément, que derriere ce corps la densité, & partant aussi la pression de l'air, ne sauroit être si grande, que si l'air étoit en repos; & cela par la même raison, qu'un corps lancé dans l'air avec une fort grande vitesse laisse après lui un espace vuide. On pourroit s'assurer de cet effet en plaçant derriere la voile pendant un grand vent un barometre, qui montreroit infailliblement une moindre hauteur, que s'il étoit assés eloigné de la voile. Plusieurs expériences de cette espece fourniront aussi le plus sur moyen de nous donner à connoitre cet effet: puisque la théorie est encore trop peu developée pour nous conduire à cette connoissance.

VII. Lorsque je déterminai dans le VIII. Volume de ces Mémoires la quantité d'eau, qu'un moulin à vent est capable d'elever à une hauteur donnée, je n'ai eu égard qu'à la partie de la force, qu'on attribue à l'impulsion, ayant fondé mes calculs uniquement sur l'hypothese ordinaire. Mais, dans un Mémoire inséré au IX. Volume sur le mouvement des bombes, j'ai observé que la résistance actuelle est environ trois fois plus grande, que si on la déterminoit par l'hypothese commune. Donc, puisqu'il est à présumer, que la force actuelle du vent reçoit une pareille augmentation à peu près, il n'y a aucun doute

que

que l'effet des moulins à vent ne surpasse très considérablement celui que je leur avois assigné, & qu'il ne puisse devenir jusqu'à trois fois plus grand : lorsqu'on observe tous les avantages, dont ces machines sont susceptibles. Cependant, puisque la théorie nous manque, je n'oserois prononcer rien de précis là dessus : & il n'y a d'autres moyens pour nous éclaircir sur cet article que les expériences, lesquelles étant faites avec toutes les précautions possibles, & sous des circonstances assez différentes, pourroient bien suppléer au defaut de la théorie.

VIII. Mr. *Lulofs*, très célébre Professeur de l'Université de Leyde, & Membre de notre Académie, vient de me communiquer des expériences faites sur des moulins à vent, dont on se sert en Hollande pour mettre à sec les lieux marécageux. Il me marque qu'un tel moulin, lorsque le vent parcourt environ 30 pieds par seconde, est capable d'élever 1500 pieds cubiques d'eau par minute à la hauteur de 4 pieds, la rouë étant garnie de 4 ailes, dont chacune avoit 43 pieds de longueur sur $5\frac{1}{2}$ de largeur. Ces ailes n'étoient pas partout également inclinées à la direction du vent, qui donnoit presque perpendiculairement sur les extrémités. Or prenant un milieu, il estime l'angle d'incidence moyen du vent sur les ailes de 73°. Il ne me marque pas le tems d'une révolution de la roüe; mais, si ce tems avoit été de $3\frac{3}{4}$ secondes, qui produiroit selon ma théorie le plus grand effet, cette machine n'auroit dû élever que 757 pieds cubiques d'eau dans une minute. Donc, puisqu'elle a actuellement élevé 1500 pieds cubiques, ce qui est presque le double, il s'ensuit que l'impulsion du vent est plus que deux fois plus grande, que je ne l'avois estimée par l'hypothese commune; vû que je n'ai pas tenu compte du frottement, & que la vitesse de la roüe n'etoit peut être pas telle, que le plus grand avantage exigeoit.

IX. Mr. *Lulofs* remarque outre cela, que l'effet de ces moulins à vent ne suit pas la raison des cubes de la vitesse absolue du vent, comme la théorie fondée sur l'hypothese commune montre; mais que la raison de l'effet, ou de la quantité d'eau élevée dans un tems donné, ne ne ſurpaſſe guéres celle des quarrés de la viteſſe du vent. De là on pourroit conclure, ce qui étoit déjà très probable, que la force de l'impulſion du vent croit ſuivant une moindre raiſon que celle des quarrés de la viteſſe. Cependant, pour mieux juger de la raiſon, que l'effet de ces machines tient à la viteſſe du vent, il faut principalement avoir égard au frottement de ces machines : article que j'ai négligé dans mes recherches ſur cette matiere, & qui augmente encore davantage la force de l'impulſion du vent, ſur celle qui convient à l'hypotheſe commune. Car, ſi une telle machine, nonobſtant le frottement, produit un effet deux fois plus grand, que la théorie indique : il faut bien que l'impulſion ſoit encore plus que deux fois plus grande, que celle de la théorie, où le frottement eſt négligé.

X. Après ces obſervations, je me propoſe de traiter de nouveau cette matiere ſur l'effet des moulins à vent, en ayant égard à cette augmentation de la force du vent, que l'expérience nous fait remarquer. Car, quoique la loy de cette augmentation ſoit inconnue, je l'introduirai en ſorte dans le calcul, qu'elle demeure indéterminée, afin qu'en comparant enſuite le calcul avec pluſieurs expériences, on en puiſſe trouver la quantité ; ce qui ſemble le plus ſûr moyen pour parvenir à une théorie de ces ſortes de machines, tandis que les veritables loix de l'impulſion du vent nous ſont cachées. Enſuite j'aurai auſſi égard au frottement, qui conſtitue dans ces machines un article très eſſentiel, puisqu'il entre dans l'arrangement le plus avantageux, auquel répond le plus grand effet. Car j'ai fait voir, que ſans conſidérer le frottement, l'effet des moulins à vent n'auroit point de bornes, & qu'il ſeroit toujours ſuſceptible de nouvelles augmentations en approchant davantage d'un angle droit l'angle d'incidence du vent ſur les ailes, pourvu qu'on augmentât conformément au calcul la viteſſe des ailes. Mais, puisqu'alors le moment du frottement devient plus grand, on conçoit aiſément, que c'eſt le frottement qui doit mettre des bornes au plus grand effet poſſible.

XI.

XI. Je commencerai donc par établir une formule convenable pour exprimer la force de l'impulsion, que le vent exerce sur une surface plane; puisque celle des ailes est telle, ou peut être considérée comme telle. Soit donc une surface plane $AB = aa$, en repos, qui reçoive perpendiculairement selon les directions aA, bB l'impression du vent, dont la vitesse soit duë à la hauteur $= c$; & puisqu'on peut considérer la force, dont le vent agit sur le plan, comme composée de deux parties, dont la premiere est celle qu'on attribuë communément au choc, & l'autre qui résulte de la raréfaction de l'air derriere le plan: la premiere sera la même qu'on trouve par l'hypothese commune. Elle sera donc égale au poids d'une masse d'air, dont le volume est $= aac$: ou bien, si nous voulons exprimer les forces par des volumes d'eau dont les poids leur sont égaux, en posant la gravité specifique de l'air m fois plus petite que celle de l'eau, cette force sera $= \frac{1}{m} aac$, dont la direction est perpendiculaire au plan; ce qui est une régle générale pour toutes les pressions. Fig. 1.

XII. L'autre partie de l'impulsion du vent résulte de ce que la pression de l'atmosphère est diminuée derriere le plan. Pour mieux comprendre cette diminution, nous n'avons qu'à concevoir, que l'air étant en repos, le plan AB s'y meuve avec une pareille vitesse, selon les directions Aa & Bb: & alors il est clair, que l'air ne sauroit parfaitement remplir les espaces derriere le plan: le mouvement de l'air chassé par avant, seroit bien détourné derriere le plan à peu près selon les directions $A\alpha$ & $B\beta$, d'où il se répandroit à cause de son ressort par l'espace $A\alpha B\beta$; mais il est évident que sa densité y sera moindre, & cela d'autant plus, plus le mouvement est rapide. On conviendra aussi, que cette raréfaction ne sauroit être la même partout derriere le plan; elle sera sans doute plus grande vers le milieu C que vers les bords A & B, autour desquels l'air se répand plus promtement. Mais si derriere le plan AB par toute l'étendue l'air est en repos, il se remettra d'abord au même degré de denſité & d'elaſticité ; qui ſera par conſéquent moindre qu'avant le plan, ou à des diſtances, qui en ſont aſſez éloignées.

XIII. Suppoſons donc que la preſſion naturelle de l'atmoſphère ſoit égale au poids d'une colonne d'eau, dont la hauteur $= k$; mais que derriere le plan AB, la preſſion de l'air ſoit équivalente à celle d'une colonne d'eau, dont la hauteur ſoit $= q$, & il eſt certain qu'il y aura $q < k$. Or pour déterminer au juſte valeur de q, c'eſt en quoi la théorie nous abandonne, de ſorte que nous ſommes obligés de nous en tenir à quelques eſtimations, dans lesquelles il conviendra d'introduire quelque quantité indéterminée, par la détermination de laquelle on puiſſe enſuite mettre d'accord le calcul avec les expériences. Pour cet effet je remarque, que cette hauteur q doit être d'autant plus petite, plus la viteſſe du vent, ou la hauteur c qui lui eſt duë, ſera grande ; d'où je conclus que q eſt exprimée par une certaine fonction de c, dont nous connoiſſons ces deux qualités : 1°. qu'au cas de $c = 0$, où le vent ceſſe entierement, il ſoit $q = k$: & 2°. qu'au cas de $c = \infty$, la hauteur q ſoit réduite à zero, puisqu'il ſe trouvera alors un vuide parfait derriere le plan.

XIV. Ayant donc ces deux conditions à remplir, que

I. poſant $c = 0$ il ſoit $q = k$

II. poſant $c = \infty$ il ſoit $q = 0$

il ſera aiſé d'imaginer une infinité de formules qui ſatisfaſſent. Les plus ſimples ſeront :

$$q = \frac{\alpha k}{\alpha + k}, \quad q = \frac{k}{1 + \alpha c + \beta cc}; \quad q = k e^{-c:b}$$

dont la premiere ne renferme qu'une indéterminée α, la ſeconde deux α & β, de même que la troiſième, où e pourroit marquer un nombre quelconque, poſitif & plus grand que l'unité, pendant que b marqueroit une ligne quelconque poſitive. Or de laquelle de ces formules, qu'on qu'on veuïlle faire uſage, on peut ſe promettre un aſſez bon ſuccès, pourvu qu'on fixe la valeur des indéterminées par des expériences bien conſtatées.

XV. Or, quelque valeur qu'on choiſiſſe pour la hauteur q, la preſſion de l'atmoſphère ſur la face poſtérieure du plan AB étant $= aaq$, pendant que la preſſion ſur la face antérieure eſt $= aak$, la ſeconde partie de l'impulſion du vent ſera $= aa\,(k-q)$: d'où l'on tire la force entiere de l'impulſion $= \frac{1}{m}\,aac + aa\,(k-q)$ $= aa\,(\frac{c}{m} + k - q)$. On pourroit ici objecter, que la preſſion de l'atmoſphère ſur la face antérieure devroit être augmentée par la même raiſon, que celle de la face poſtérieure a été diminuée ; je conviens aiſément de cette augmentation, mais je dis qu'elle eſt déjà préciſément compriſe dans le terme $\frac{c}{m}$. Car, puiſqu'il ne ſe fait point de choc proprement ainſi dit, tout l'effet du vent conſiſte uniquement dans la différence des preſſions ſur les deux faces du plan : & partant $k + \frac{c}{m}$ répond à la preſſion entiere du vent ſur la face antérieure.

XVI. Puiſque la colonne d'eau, qui meſure la preſſion de l'atmoſphère ſur la face antérieure, eſt $= k\left(1 + \frac{c}{mk}\right)$; au lieu de cette formule on pourroit bien ſe ſervir de celle-ci $k\,e^{\frac{c}{mk}}$ en prenant pour e le nombre, dont le logarithme hyperbolique eſt $= 1$. Car tant que c eſt beaucoup plus petit que mk, la valeur de $e^{\frac{c}{mk}}$ ne diffé-

re

re pas ſenſiblement de $1 + \frac{c}{mk}$: car, comme $k = 32$ pieds à peu près, & $m = 700$, la hauteur mk devient $= 22400$ pieds, à laquelle répond une viteſſe, qui feroit 1182 pieds par ſeconde : d'où il n'y a aucun doute que la viteſſe du vent ne ſe trouve toujours fort au deſſous de ce nombre. Maintenant, ſi $k\,e^{\frac{c}{mk}}$ exprime la preſſion en avant, la reſſemblance nous fait conjecturer, que celle de derriere pourroit bien être exprimée par cette formule $k\,e^{\frac{-c}{mk}}$, qui ſatisfait auſſi aux deux propriétés réquiſes. De là nous aurions pour toute la force de l'impulſion du vent $aak\left(e^{\frac{c}{mk}} - e^{\frac{-c}{mk}}\right)$ qui ne s'écartera peut-être pas ſenſiblement de la vérité. Cependant je ne veux rien décider là deſſus, puiſque les vrais principes, d'où il faudroit puiſer ces éclairciſſemens, nous ſont encore trop inconnus.

XVII. Cette augmentation de la force du vent eſt donc uniquement cauſée par la moindre preſſion de l'atmoſphère derriere le plan. Or on voit que ce n'eſt qu' immédiatement prés du plan, que la preſſion eſt ſi petite : à quelque diſtance de là, comme en α, β la preſſion ne différera plus de la naturelle. Donc, ſi l'on attachoit au plan AB un corps A$\alpha\beta$B, convergent en arriere, à peu près comme la pouppe d'un vaiſſeau, il y éprouveroit partout l'entiere preſſion de l'atmoſphère ; & partant la force du vent ſur la face antérieure AB en ſeroit conſidérablement diminuée, & à peu près conforme à l'hypotheſe commune. De là nous pouvons tirer une remarque fort importante touchant la figure de la pouppe d'un vaiſſeau, pour diminuer la réſiſtance. Car il eſt clair, que ſi la prouë étoit terminée en arriere par un plan, la force de l'eau ſur la face d'avant, ou la réſiſtance, ſeroit pareillereillement augmentée par la diminution de la preſſion de l'eau en arriere. D'où l'on voit, qu'une pouppe bien allongée & façonnée eſt fort propre à diminuer la réſiſtance d'un vaiſſeau ; de ſorte qu'elle ne dépend point uniquement de la figure de la prouë, comme on s'imagine ordinairement. De plus, puisque la hauteur k entre dans cette détermination, il s'enſuit, que plus un vaiſſeau a de profondeur, & plus la figure de la pouppe peut concourir à la diminution de la réſiſtance.

XVIII. Ayant établi des formules propres à marquer la force du vent, lorsqu'un plan en eſt frappé perpendiculairement, il reſte à voir, combien cette force ſera diminuée, quand le vent vient frapper obliquement le même plan. Soit comme auparavant la ſurface du plan A B $= a\,a$, & c la hauteur duë à la viteſſe du vent, le plan étant ſuppoſé en repos ; or que ϕ ſoit l'angle, que fait la direction du vent avec la ſurface. Cela poſé, on ſoutient que la premiere partie de l'impulſion eſt diminuée en raiſon du quarré du ſinus de l'angle ϕ : donc Fig. 2.

cette force ſera $= \frac{1}{m}\, a\,a\,c \sin \phi^2$, prenant l'unité pour marquer le ſinus total. Pour la diminution de la preſſion en arriere, on voit auſſi qu'elle ſera diminuée par l'obliquité : car, ſi l'angle ϕ évanouïſſoit entierement, la denſité de l'air ne ſouffriroit aucune diminution derrière le plan, & partant la ſeconde partie de la force d'impulſion deviendra auſſi d'autant plus petite, plus l'angle ϕ ſera petit. Cependant il eſt incertain, ſi cette diminution ſuit la raiſon du quarré du ſinus de l'angle ϕ, ou quelqu'autre fonction.

XVIIII. Donc l'autre partie de l'impulſion du vent, qui étoit pour l'impulſion perpendiculaire $= a\,a\,(k-q)$, deviendra auſſi d'autant plus petite, plus l'angle d'incidence ϕ s'écarte d'un droit, & puisqu'il faut multiplier la premiere partie par $\sin \phi^2$, il ſemble fort probable que l'autre partie doit être diminuée ſelon la même raiſon. De là nous aurons pour la force du vent, qui frappe obliquement, cette formule $a\,a\,(\frac{c}{m} + k - q) \sin \phi^2$, où il faut donner à q une valeur

con-

convenable décrite cy-dessus. Donc, si nous prenons selon la premiere formule $q = \frac{b\,k}{b+c}$, la force du vent sera $= a\,a\left(\frac{c}{m} + \frac{c\,k}{b+c}\right)\sin\Phi^2$, or posant selon la troisième formule $q = k\,e^{\frac{-c}{b}}$, nous aurons pour la force du vent $a\,a\left(\frac{c}{m} + k - k\,e^{\frac{-c}{b}}\right)$: laquelle ne diffère pas sensiblement de la premiere, lorsque c est beaucoup plus petite que b. Or b est ici une quantité indéterminée, qu'il conviendra laisser telle, pour pouvoir accorder la théorie avec quelques expériences: dans cette vuë j'employerai la formule $a\,a\left(\frac{c}{m} + \frac{c\,k}{b+c}\right)\sin\Phi^2$, ou $a\,a\,c\left(\frac{1}{m} + \frac{k}{b+c}\right)\sin\Phi^2$, comme la plus simple.

XX. Mais, puisque le vent ne rencontre pas les ailes du moulin en repos, il faut voir, combien le mouvement des ailes change la Fig. 3. force du vent, ce qui se pourra faire sans le secours de la théorie, qui étoit insuffisante pour les recherches précédentes. Soit donc VC la direction du vent, qui représente en même tems sa vitesse $= \sqrt{c}$; & que le plan AB $= a\,a$ se meuve d'un mouvement parallele selon la direction CU, qui en représente aussi la vitesse $= \sqrt{u}$: or je supose que le plan AB soit perpendiculaire au plan représenté par les deux directions CV & CU, puisque cela arrive dans les moulins à vent. Qu'on conçoive imprimé à tout l'espace un mouvement contraire & egal à celui du plan AB, afin que ce plan soit réduit en repos, & ce mouvement imaginaire se fera selon la direction Cu, avec la vitesse Cu = CU = $\sqrt{u}$. Par là le mouvement du vent selon Cv sera réduit au mouvement représenté par la diagonale Cs du parallelogramme formé des deux côtés Cv = $\sqrt{c}$, & Cu = $\sqrt{u}$.

XXI.

XXI. Qu'on prenne $CS = Cs$ dans la même direction, & la droite SC donnera la direction & la vitesse du vent, qui produiroit sur le plan AB en repos le même effet, que le vent proposé produit sur le plan AB mû, comme je viens de le supposer. Pour trouver cette force, posons l'angle $VCU = vCu$ que fait la direction du vent VC avec celle du plan $CU = \alpha$, & l'angle Cvs étant $= 180 - \alpha$, & les côtés $Cv = \sqrt{c}$ & $vs = Cu = \sqrt{u}$, nous aurons la diagonale

$$Cs = \sqrt{(c + u + 2 \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{cu})}$$

qui exprime la vitesse du vent SC, & sa direction, dont il faut concevoir, qu'il frappe le plan AB en repos. L'angle d'incidence sera donc $= BCS$, & pour trouver son sinus, soit l'angle $BCV = \omega$, pour avoir $BCS = \omega - VCS$, &

$$\operatorname{sin} BCS = \operatorname{sin} \omega \operatorname{cos} VCS - \operatorname{cos} \omega \operatorname{sin} VCS.$$

Mais $$\operatorname{cos} VCS = \operatorname{cos} vCs = \frac{2c + 2 \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{cu}}{2\sqrt{c(c + u + 2 \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{cu})}}$$

$$\operatorname{sin} VCS = \operatorname{sin} vCs = \frac{\operatorname{sin} \alpha . \sqrt{u}}{\sqrt{(c + u + 2 \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{cu})}}$$

d'où il s'ensuit :

$$\operatorname{sin} BCS = \frac{\operatorname{sin} \omega (\sqrt{c} + \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{u}) - \operatorname{cos} \omega \operatorname{sin} \alpha . \sqrt{u}}{\sqrt{(c + u + 2 \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{cu})}}$$

XXII. Donc, si le vent, qui souffle dans la direction VC avec la vitesse $= \sqrt{c}$, frappe sous l'angle $BCV = \omega$ le plan $AB = aa$, qui se meut lui-même avec la vitesse $= \sqrt{u}$ selon la direction CU, qui fait avec celle du vent un angle $VCU = \alpha$, l'effet du vent sur ce plan mû sera le même, que si le plan étoit en repos, & que le vent vint frapper là dessus avec une vitesse $= \sqrt{(c + u + 2 \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{cu})}$, & sous une telle obliquité dont le sinus fut :

$$\frac{\operatorname{sin} \omega (\sqrt{c} + \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{u}) - \operatorname{cos} \omega \operatorname{sin} \alpha . \sqrt{u}}{\sqrt{(c + u + 2 \operatorname{cos} \alpha . \sqrt{cu})}}$$

 d'où

d'où l'on pourra estimer la force par la régle donnée cy-dessus. Ayant ainsi réduit le cas à celui, où le plan seroit en repos, il est évident que la résistance, que le plan rencontre de l'autre côté, y est déjà comprise, & qu'il seroit hors de saison, d'en vouloir encore tenir compte dans le calcul. Mais il faut bien remarquer, que le plan AB est supposé ici perpendiculaire au plan determiné par les deux directions VC & CU: & si le plan AB y étoit incliné, il en faudroit tenir compte, ce qui rendroit la derniere formule plus compliquée; mais nous n'avons point besoin de ce cas dans nos recherches sur les moulins à vent.

XXIII. Après avoir établi ces principes, considérons l'aile d'un
Fig. 4. moulin à vent OGGHH, étendue autour du rayon OEF, que nous supposons perpendiculaire à l'axe du moulin, autour duquel cette aile tourne. Qu'on conçoive cette aile partagée en des parallelogrammes infiniment petits MmmM par des droites MM, mm perpendiculaires au rayon OF; & posant la distance OP $= x$, soit la largeur de l'aile MM $= y$, & partant l'aire MmmM $= y\,dx$. Comme l'aile tourne autour de l'axe O, soit à l'extrémité F la vitesse $= \sqrt{v}$, ou bien v la hauteur duë à cette vitesse; & la distance OF $= f$. De là nous aurons la vitesse dont le point P tourne autour de l'axe O, $= \frac{x\sqrt{v}}{f}$. Puisque l'axe du moulin doit toujours être tourné vers le vent, la direction du vent sera partout parallele à cet axe: posons donc que la direction du vent fasse avec le plan du parallelogramme MmmM un angle $= \omega$, que je regarderai comme variable par raport à la distance OP $= x$, de même que la largeur de l'aile MM $= y$. Cependant cette variabilité de l'angle ω n'empêchera pas, qu'on ne puisse regarder la surface entiere de l'aile comme l'intégrale $\int y\,dx$.

XXIV. Qu'on conçoive un plan parallele à l'axe du moulin,
Fig. 5. qui passe par la section MM, & que la planche (fig. 5) représente ce plan, sur lequel la droite VP marque la direction du vent, dont la vitesse $= \sqrt{c}$, qui fasse avec MM l'angle VPM $= \omega$. Or le plan

plan MM aura un mouvement ſelon la direction PU perpendiculaire à VP, avec la viteſſe $= \frac{x\sqrt{v}}{f}$; de ſorte que ce qui a été nommé ci-deſſus $\sqrt{u}$, eſt maintenant $= \frac{x\sqrt{v}}{f}$, & l'angle α ſera ici droit, enfin pour aa il faudra mettre ici ydx. Donc le vent produira ſur cet élément de l'aile MM $= ydx$ le même effet, que ſi cet élément étoit en repos, & que la viteſſe du vent fût $= \sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}$ à cauſe de $\alpha = 90°$ & $u = \frac{xxv}{ff}$, & qu'il y tombât ſous un angle, dont le ſinus ſeroit

$$\frac{\text{ſin}\,\omega.\ \sqrt{c} - \frac{x\sqrt{v}}{f}\ \text{coſ}\,\omega}{\sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}}$$

On doit donc mettre cette derniere valeur à la place de ſin ϕ, & l'autre à la place de $\sqrt{c}$.

XXV. Or nous avons trouvé ci-deſſus (19) cette formule pour exprimer la force du vent, $aac\left(\frac{1}{m} + \frac{k}{b+c}\right)$ ſin ϕ^2; où nous devons mêttre les valeurs ſuivantes

ydx	au lieu de	aa
$c + \frac{xxv}{ff}$	au lieu de	c
$\left(\text{ſin}\,\omega.\sqrt{c} - \text{coſ}\,\omega.\frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2$	au lieu de	c ſin ϕ^2

& partant la force du vent ſur l'elément $MmmM$ de l'aile ſera égale au poids d'une maſſe d'eau, dont le volume eſt

$$y\,dx\left(\text{ſin}\,\omega.\sqrt{c}-\text{coſ}\,\omega.\frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{ff\,k}{(b+c)ff+xxv}\right)$$

Mais la direction de cette force étant perpendiculaire au plan ſelon PN, il la faut décompoſer ſelon la direction Pv parallele à l'axe, & la direction du mouvement PU: or l'angle NPU étant égal à l'angle MPV $=\omega$, la force qui agit ſelon la direction du mouvement PU ſera

$$y\,dx\,\text{coſ}\,\omega\left(\text{ſin}\,\omega.\sqrt{c}-\text{coſ}\,\omega.\frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{ff\,k}{(b+c)ff+xxv}\right)$$

XXVI. Si nous multiplions cette force par la viteſſe de l'élément MmmM, qui eſt $=\frac{x\sqrt{v}}{f}$, nous aurons l'élément du moment d'impulſion qui repond à l'élément de l'aile MmmM, & partant le moment d'impulſion ſur l'aile entiere ſera

$$\int\frac{xy\,dx\sqrt{v}}{f}\,\text{coſ}\,\omega\left(\text{ſin}\,\omega.\sqrt{c}-\text{coſ}\,\omega.\frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{ff\,k}{(b+c)ff+xxv}\right).$$

Dans cette intégration la quantité y & l'angle ω doivent être regardés comme des fonctions de x, pendant que les autres quantités f, v, k, b, c, & m ſont conſtantes ; & après avoir trouvé l'intégrale, il faut l'etendre par toute la ſurface de l'aile. Enſuite il faut la multiplier par 4, puiſque les moulins ſont ordinairement garnis de quatre ailes, & alors on obtiendra l'entier moment d'impulſion, que le vent exerce ſur les ailes, & auquel le moment d'effet, que la machine eſt capable de produire, ſera égal. Or, pour faciliter cette intégration, on pourra regarder le terme $\frac{ff\,k}{(b+c)ff+xxv}$ comme conſtant, attendu que dans le dénominateur la partie xxv eſt extrémement petite par rapport à la partie $(b+c)ff$: car l'indéterminée b eſt apparemment fort grande.

XXVII. Poſons donc le dernier facteur de notre formule, puiſque nous le pouvons regarder comme conſtant,

$\frac{1}{m}$

$$= \frac{1}{m} + \frac{ffk}{(b+c)ff+xxv} = \frac{n}{m}$$

de forte qu'au lieu de l'indéterminée b nous ayons à déterminer le nombre n, d'où enfuite il fera aifé de connoitre la conftante b, ayant à peu près $\frac{b+c}{k} = \frac{m}{n-1}$ ou $b = \frac{mk}{n-1} - c$. Cela pofé, fi le moulin eft garni de 4 ailes femblables, le moment entier d'impulfion du vent fera

$$\frac{4n\sqrt{v}}{mf} \int xydx \operatorname{cof}\omega \left(\operatorname{fin}\omega . \sqrt{c} - \operatorname{cof}\omega . \frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2$$

ou bien

$$\frac{4nc\sqrt{v}}{mf} \int xydx \operatorname{cof}\omega \left(\operatorname{fin}\omega - \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}} \operatorname{cof}\omega\right)^2$$

auquel le moment d'effet de la machine eft égal, pourvu qu'on y tienne compte du frottement. Confidérons d'abord la figure des ailes comme connue, de même que fon inclinaifon à la direction du vent, & voyons quel effet la machine fera capable de produire; enfuite nous chercherons les arrangemens les plus avantageux pour obtenir le plus grand effet, ce qui fera le fujet des problèmes fuivans.

PROBLEME I.

XXVIII. *Les ailes étant partout de la même largeur & également inclinées à la direction du vent ; fi l'on connoit tant la viteffe du vent, que celle dont les ailes tournent, trouver le moment d'impulfion.*

SOLUTION.

Soit la largeur conftante de chaque aile $GG = MM = HH = h$, de forte que $y = h$; & la longueur $OF = f$; que v marque la hauteur duë à la viteffe, dont l'extrémité F tourne autour de l'axe O, & c celle qui eft duë à la viteffe du vent, dont la direction faffe un angle Fig. 4.

conftant

constant $= \omega$ avec les faces des ailes. Donc, puisque l'angle ω est constant, notre expression pour le moment d'impulsion

$$\frac{4nch\operatorname{cos}\omega.\sqrt{v}}{mf}\int xdx\left(\operatorname{sin}\omega - \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}\operatorname{cos}\omega\right)^2$$

s'intégrera aisément : car l'intégrale étant

$$\frac{4nch\operatorname{cos}\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}xx\operatorname{sin}\omega^2 - \frac{2x^3\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\operatorname{sin}\omega\operatorname{cos}\omega + \frac{x^4 v}{4ffc}\operatorname{cos}\omega^2\right)$$

Si nous posons $x = f$, le moment d'impulsion sur toutes les quatre ailes sera exprimé en sorte :

$$\frac{4ncfh\operatorname{cos}\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sin}\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\operatorname{sin}\omega\operatorname{cos}\omega + \frac{v}{4c}\operatorname{cos}\omega^2\right).$$

COROLL. 1.

XXIX. C'est donc à cette quantité que sera égal le moment d'effet de la machine, ou bien le produit de la résistance par la vitesse dont elle sera vaincue, pourvû qu'on y comprenne aussi le frottement. Car c'est une regle générale pour toutes les machines que le moment d'impulsion est égal au moment d'effet.

COROLL. 2.

XXX. Cette égalité étant fondée sur l'état d'équilibre suppose l'uniformité dans l'action de la machine. Or au premier instant, où la machine est encore en repos, il faut bien que l'impulsion soit plus forte que la résistance, pour mettre la machine en mouvement, mais ensuite le mouvement devient de plus en plus uniforme, & ce n'est qu'alors, que les deux momens mentionnés deviennent égaux.

COROLL. 3.

XXXI. La formule que je viens de trouver pour le moment d'impulsion dépend principalement de la vitesse des ailes $\sqrt{v}$, & elle deviendroit même infinie, si l'on augmentoit cette vitesse à l'infini ; puisque

que le dernier facteur $\frac{1}{4}$ ſin $\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}$ ſin ω coſ $\omega + \frac{v}{4c}$ coſ ω^2 ne ſauroit jamais évanouir, ou devenir négatif.

SCHOLIE.

XXXII. Cependant il eſt très certain que le moment d'impulſion ne ſauroit jamais ſurpaſſer de certaines limites, de ſorte que l'augmentation de la viteſſe $\sqrt{v}$ eſt néceſſairement reſtrainte à quelque détermination. Il eſt donc bien important d'examiner cette détermination, que la conſidération de notre analyſe nous découvrira d'abord. Car puisque le vent, qui frappe ſur les ailes miſes en mouvement, y exerce la même force, que ſi les ailes étoient en repos, & que le vent y frappât avec une viteſſe $= \sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}$ ſous un angle dont le ſinus ſeroit

$$= \frac{\text{ſin}\ \omega - \frac{x\sqrt{v}}{f}.\ \text{coſ}\ \omega}{\sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}},$$

il eſt clair que, ſi ce ſinus devenoit négatif, la force du vent repouſſeroit les ailes en arriere. Or, puisque le quarré de ce ſinus entre dans notre formule, il ſemble que l'effet devoit être le même, ſoit que ce ſinus ſoit négatif ou poſitif; & on ſe tromperoit énormement ſi l'on vouloit appliquer notre formule à des cas, où le ſinus d'incidence deviendroit négatif: car alors il faudroit abſolument regarder l'impulſion comme négative. Donc, pour que notre formule ſoit conforme à la verité, il faut que l'expreſſion ſin $\omega . \sqrt{c} - \frac{x\sqrt{v}}{f}.$ coſ ω, ne devienne nulle part négative; donc notre théorie ſuppoſe abſolument, que pour tous les élémens des ailes cette condition ait lieu, qu'il ſoit tang $\omega > \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$; d'où l'on voit que

la

la vitesse $\sqrt{v}$ ne sauroit être augmentée à volonté. Donc, notre formule trouvée pour le moment d'impulsion ne sauroit subsister, à moins qu'il ne fût pour tous les élémens des ailes tang $\omega > \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$: & s'il arrivoit que pour quelque partie des ailes la quantité $\frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ devint plus grande que tang. ω, il en résulteroit une force contraire au mouvement des ailes, quoique le calcul ne le montrât point. Voilà donc une condition très essentielle, & sans laquelle le moment d'impulsion trouvé ne seroit jamais juste, qui exige que la quantité $\frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ ne surpasse nulle part tang ω. Et partant dans le cas de notre probleme, où l'angle ω est constant, la valeur de $\frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ sera toujours moindre que tang ω, pourvû que $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ ne surpasse point tang ω, d'où il est évident que dans le cas présent la formule donnée pour le moment d'impulsion exige nécessairement qu'il soit $\sqrt{v} < \text{tang } \omega . \sqrt{c}$ & que sans cette condition elle seroit infailliblement fausse. La vitesse des ailes $\sqrt{v}$ obtient par là un terme qu'elle ne doit jamais passer, & le dernier degré étant $\sqrt{v} = \text{tang } \omega . \sqrt{c}$ donne le moment d'impulsion $= \frac{ncfh\sqrt{c}}{3\,m}$ sin ω^3, qui est encore juste. Mais, si l'on augmentoit la vitesse $\sqrt{v}$ au delà, l'impulsion diminueroit certainement, quoique le calcul la montrât plus grande.

PROBLEME II.

XXXIII. *Les ailes étant partout de la même largeur & également inclinées à la direction du vent, si l'on connoit la structure de la machine, & la résistance qui doit être vaincue, déterminer l'action de la machine, qui sera produite par un vent donné.*

SOLU-

SOLUTION.

Soit comme auparavant la largeur des ailes MM $= h$, leur longueur OF $= f$, & l'inclinaison de leurs faces à la direction du vent $= \omega$, dont la viteſſe ſoit dûe à la hauteur $= c$. Maintenant, de quelque maniere que la machine ſoit conſtruite, on la peut toujours réduire à l'action d'un tambour RSRS, fixé ſur l'axe des ailes OO, autour duquel paſſe une corde TZ, qui éléve un poids P, pendant que les ailes tournent. Soit donc le rayon de ce tambour $= r$, & le poids P égal à celui d'une maſſe d'eau, dont le volume $= p^3$; de ſorte que la lettre r renferme la conſtruction de la machine, & p^3 la réſiſtance qu'il faut ſurmonter. Suppoſons que la machine ſoit déjà parvenue à l'uniformité de mouvement, & que les extrémités des ailes F tournent avec la viteſſe $= \sqrt{v}$, & la viteſſe, dont le poids P monte, ſera $= \frac{r\sqrt{v}}{f}$: donc le moment d'effet de la machine doit être eſtimé $= \frac{p^3 r \sqrt{v}}{f}$: lequel étant égal au moment d'impulſion trouvée ci-deſſus donnera l'équation ſuivante, après avoir diviſé par $\sqrt{v}$: Fig. 6

$$\frac{4ncfh\,\text{cof}\,\omega}{m}\left(\frac{1}{2}\,\text{ſin}\,\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\,\text{ſin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega + \frac{v}{4c}\,\text{cof}\,\omega^2\right) = \frac{p^3 r}{f}.$$

Mais, avant que la machine puiſſe parvenir à l'état d'uniformité, il faut que d'abord, lorſque la machine eſt encore en repos, l'impulſion ſoit plus forte que la réſiſtance: il faut donc qu'il ſoit

$\frac{2ncfh}{m}\,\text{ſin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega > \frac{p^3 r}{f}$, ou $c > \frac{m\,p^3\,r}{2nffh\,\text{ſin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega}$, & tant que la viteſſe du vent ſeroit moindre, la machine demeureroit en repos. Or, par les raiſons alleguées dans le §. préc: il faut auſſi qu'il ſoit $\sqrt{v} < \text{tang}\,\omega.\sqrt{c}$, puiſqu'ailleurs le calcul ſeroit contraire à la vérité. Ayant donc bien remarqué ces deux circonſtances, nous pourrons trouver la viteſſe des ailes $\sqrt{v}$, qui conviendra au mouvement unifor-

 me:

me : pour rendre cette recherche plus aisée, posons $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z \tang \omega$, & notre équation prendra cette forme :

$$\frac{4ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}{m}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} z + \tfrac{1}{4} zz\right) = \frac{p^3 r}{f}$$

d'où nous tirons

$$zz - \tfrac{8}{3} z + 2 = \frac{m p^3 r}{n c f f h \sin\omega^2 \cos\omega}$$

$$\& \quad z = \tfrac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \sin\omega^2 \cos\omega} - \tfrac{2}{9}\right)}$$

par conséquent

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \tfrac{4}{3} \tang \omega \pm \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \cos\omega^3} - \tfrac{2}{9} \tang \omega^2\right)}.$$

Mais il faut qu'il soit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} < \tang \omega$, d'où il est évident que le signe $+$ devant le radical ne sauroit avoir lieu, & le signe $-$ ne sauroit subsister, à moins qu'il ne fût

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \tfrac{4}{3} \tang \omega - \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \cos\omega^3} - \tfrac{2}{9} \tang \omega^2\right)} < \tang \omega$$

$$\text{ou} \qquad \tfrac{1}{3} \tang \omega < \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \cos\omega^3} - \tfrac{2}{9} \tang \omega^2\right)}$$

& partant prenant les quarrés :

$$\tfrac{1}{3} \tang \omega^2 < \frac{m p^3 r}{n c f f h \cos\omega^3} \qquad \text{ou bien}$$

$$c < \frac{3 m p^3 r}{n f f h \sin\omega^2 \cos\omega}$$

Or la premiere condition exige, qu'il soit

$$c > \frac{m p^3 r}{2 n f f h \sin\omega^2 \cos\omega}.$$

Donc

Donc, à moins que la viteſſe du vent ne ſoit entre ces deux limites, le mouvement uniforme ne ſauroit avoir lieu ; car, ſi elle étoit au deſſous de la moindre limite, la machine ne produiroit aucune action, & ſi elle étoit au deſſus de la plus grande, le mouvement de la machine ſeroit continuellement accéléré, ſans qu'il parvint jamais à l'état d'uniformité. Or, tant que la viteſſe du vent ſubſiſte entre ces deux limites, la formule irrationelle trouvée ſera toujours réelle, & on pourra aſſigner la viteſſe, dont les ailes tourneront dans l'état d'uniformité : d'où l'on connoitra auſſi la viteſſe du fardeau, & partant le moment d'effet de la machine.

COROLL. I.

XXXIV. Il eſt d'abord clair que le vent doit avoir quelque force, avant qu'il ſoit en état de mettre la machine en mouvement. Si nous poſons pour abréger $\frac{p^3\ r}{ffh \sin\omega^2 \cos\omega} = u$, la hauteur düe à la viteſſe du vent c doit être plus grande que $\frac{mu}{2n}$, & tant que le vent eſt plus foible, la machine demeure ſans action.

COROLL. 2.

XXXV. Cette quantité u dépend donc 1°. de la longueur f, de la largeur h, & de l'inclinaiſon des ailes, ou de l'angle ω, ſuppoſé que tant la largeur que l'inclinaiſon ſoit par tout la même : 2°. de la ſtructure de la machine, qui eſt renfermée dans la quantité r : & 3°. de la grandeur du fardeau, qu'il faut élever p^3, ou en général de la réſiſtance qu'il faut vaincre.

COROLL. 3.

XXXVI. Donc, pour que le vent ſoit capable de mettre la machine en action, il faut qu'il ſoit $c > \frac{mu}{2n}$: & alors ayant $z =$

$\frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{mu}{nc} - \frac{2}{9}\right)}$, la viteſſe des ailes à leur extrémité ſera $\sqrt{v} = z \tang \omega . \sqrt{c}$; ou bien

$$\sqrt{v} = \tang \omega \left(\frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{mu}{nc} - \frac{2}{9}\right)}\right) \sqrt{c}$$

De là on connoitra la viteſſe $\frac{r\sqrt{v}}{f}$, dont le fardeau ſera élevé.

COROLL 4.

XXXVII. Il eſt auſſi évident, que plus la viteſſe du vent augmente, plus auſſi la quantité z, & partant à plus forte raiſon la viteſſe des ailes $\sqrt{v}$, deviendra grande. Cependant notre formule n'a lieu, que tandis que la hauteur duë à la viteſſe du vent c eſt moindre que $\frac{3mu}{n}$; lorsqu'elle devient plus grande, la valeur de $\sqrt{v}$ ne ſera plus conforme à notre formule.

COROLL 5.

XXXVIII. Or, ſi $c = \frac{3mu}{n}$, qui contient la plus grande force du vent, à laquelle notre formule puiſſe être appliquée, nous aurons $z = \frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right)} = 1$. & partant on aura pour la viteſſe des ailes $\sqrt{v} = \tang \omega . \sqrt{c} = \tang \omega . \sqrt{\frac{3mu}{n}}$: & pour la viteſſe du fardeau $\frac{r\sqrt{v}}{f} = \frac{r \tang \omega}{f} \sqrt{\frac{3mu}{n}}$.

SCHOLIE.

XXXIX. Quand le vent augmente au delà de ce degré, notre formule ne ſauroit plus avoir lieu; car, puisque alors le mouvement des ailes devient plus rapide, ou $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} > \tang \omega$, l'effet du vent ſur

les

les extrémités des ailes ſera négatif, ou les ailes y ſeront frappées du côté oppoſé, ce qui diminuera la force d'impulſion, au lieu que notre calcul change cette diminution en augmentation. La force de l'impulſion étant donc dans ces cas plus petite, que notre calcul l'indique, l'effet de la machine en ſera auſſi diminué. Et partant un vent plus fort, en faiſant tourner plus vite les ailes, produira bien un plus grand effet, mais cet effet ſera de beaucoup moindre, que ſelon le calcul; ce qui eſt ſans doute le cas que Mr. *Lulofs* a en vuë, quand il dit avoir obſervé que les effets des vent plus rapides ne croiſſent pas dans la raiſon du cube de leur viteſſes, & pas même dans celle de leurs quarrés. Cela n'eſt donc pas contraire à ce que j'avois avancé, que l'effet du vent croiſſoit dans la raiſon du cube de ſa viteſſe; car je parlois alors des plus grands effets, que chaque vent eſt capable de produire; or cet avantage exige pour chaque viteſſe du vent un arrangement particulier dans la diſpoſition de la machine. Mais, lorsque l'arrangement demeure le même, il eſt également vray, que l'effet des vents les plus forts ſuive une raiſon beaucoup plus petite que celle des cubes de leur viteſſe, quoiqu'il fût poſſible en changeant la diſpoſition de la machine, ou la quantité r, d'en tirer un effet, qui ſeroit à peu près proportionnel au cube de la viteſſe. Dans le problème préſent j'ai ſuppoſé l'arrangement de la machine, ou la quantité r, la même pour tous les degrés du vent; & il eſt clair que cet arrangement ne ſauroit être le plus avantageux que pour un ſeul degré de viteſſe; & par la raiſon alléguée il eſt clair, que lorsque $c > \frac{3mu}{n}$, on perd principalement beaucoup ſur l'effet que la machine ſeroit capable de produire, ſi l'on y changeoit convenablement la quantité r, d'où depend celle de u.

PROBLEME III.

XL. *Si dans le cas du problème précédent la viteſſe du vent eſt ſi grande, que notre calcul n'y ſauroit plus être appliqué, déterminer l'action de la machine, qu'un tel vent ſera capable de produire.*

SOLUTION.

Dans ce cas toute la difficulté revient à ce que les ailes tournent ſi vite, qu'une partie vers leurs extremités eſt frappée en derriere par le vent, dont l'effet par conſéquent eſt contraire au mouvement de la machine. Soit donc la viteſſe des ailes à leur extrémité $F = \sqrt{v}$, & Fig. 4. que la partie TTHH reçoive le choc du vent par la face de derriere, tandis que la partie GGTT le reçoit par avant : poſons la diſtance $OS = s$, & le moment d'impulſion pour la partie GGTT ſera

$$\frac{4nchss\cos\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2s\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\sin\omega.\cos\omega + \frac{ssv}{4ffc}\cos\omega^2\right).$$

Or la partie TTHH fournira, pour ainſi dire, un moment de répulſion, qui ſera

$$+\frac{4ncfh\cos\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\sin\omega.\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2\right)$$

$$-\frac{4nchss\cos\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2s\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\sin\omega.\cos\omega + \frac{ssv}{4ffc}\cos\omega^2\right).$$

Retranchant celui-ci de celui-là, il reſtera le moment de l'impulſion actuelle, qui ſera :

$$+\frac{8nchss\cos\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2s\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\sin\omega\cos\omega + \frac{ssv}{4ffc}\cos\omega^2\right)$$

$$-\frac{4ncfh\cos\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\sin\omega\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2\right)$$

Or, puiſque en TT eſt la ſéparation des impulſions poſitives & négatives, il y aura $\sin\omega\ \sqrt{c} - \frac{s\sqrt{v}}{f}\cos\omega = 0$, ou $s = f\tan\omega.\sqrt{\frac{c}{v}}$, & cette valeur étant ſubſtituée à la place de s, on aura le vray moment d'impulſion des cas en queſtion

$$\frac{ncfh\sin\omega^2\cos\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\frac{2c\sin\omega^2}{3v\cos\omega^2} - 2 + \frac{8\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\cdot\frac{\cos\omega}{\sin\omega} - \frac{v\cos\omega^2}{c\sin\omega^2}\right)$$

&

& cette formule aura lieu toutes les fois que $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} > \text{tang}\,\omega$. C'est donc à cette formule qu'il faut égaler le moment d'effet $\frac{p^3 r \sqrt{v}}{f}$, lorsqu'il y aura $c > \frac{3mp^3 r}{nffh \sin\omega^2 \cos\omega^2}$. Posons comme auparavant pour abréger $\frac{p^3 r}{ffh \sin\omega^2 \cos\omega} = u$, de sorte que nous ayons à considérer les cas où $c > \frac{3mu}{n}$ & l'équation d'où il faut tirer la vitesse des ailes $\sqrt{v}$ sera

$$\frac{mu}{nc} = \frac{2c \sin\omega^2}{3v \cos\omega^2} - 2 + \frac{8\sqrt{v}}{3\sqrt{c}} \cdot \frac{\cos\omega}{\sin\omega} - \frac{v \cos\omega^2}{c \sin\omega^2}$$

Soit encore $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\cos\omega}{\sin\omega} = z$ ou $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z \,\text{tang}\,\omega$, pour avoir

$$\frac{mu}{nc} = \frac{2}{3zz} - 2 + \tfrac{8}{3} z - zz$$

d'où l'on voit qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$ ou $\frac{mu}{nc} = \frac{1}{3}$, il y aura $z = 1$. Soit donc $c > \frac{3mu}{n}$, & partant $\frac{mu}{nc} < \frac{1}{3}$; & voyon quelle sera la valeur de z. Posons pour cet effet $\frac{mu}{nc} = \frac{1}{3} - \nu$, & $z = 1 + \xi$, en regardant ν & ξ comme des fractions fort petites, de sorte que $\frac{1}{zz} = 1 - 2\xi$ & $zz = 1 + 2\xi$, & nous aurons :

$$\tfrac{1}{3} - \nu = \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3}\xi - 2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{8}{3}\xi - 1 - \xi = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}\xi$$

donc $\xi = \frac{3}{2}\nu$ ou $z = \frac{3}{2} - \frac{3mu}{2nc}$ Par conséquent, lorsque la vitesse du vent surpasse tant soit peu la limite marquée, ou qu'il y

$c =$ a

$c = \frac{3mu}{(1-3\nu)n}$, marquant par ν une fraction extrèmement petite, nous aurons $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\cos\omega}{\sin\omega} = 1 + \frac{3}{2}\nu = \frac{3}{2} - \frac{3mu}{2nc}$, donc

$$\sqrt{v} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \omega \left(\sqrt{c} - \frac{mu}{n\sqrt{c}}\right) \text{ à peu près.}$$

Ou bien si $c = \frac{3mu}{(1-3\nu)n} = \frac{3mu}{n}(1 + 3\nu)$, nous aurons

$$\sqrt{v} = \operatorname{tang} \omega \, (1 + 3\nu) \sqrt{\frac{3mu}{n}}.$$

COROLL. 1.

XLI. Donc, si la vitesse du vent surpasse infiniment peu la limite trouvée $c = \frac{3mu}{n}$, de sorte que $c = \frac{3mu}{n}(1 + 3\nu)$, la vitesse des ailes à leur extrémité sera

$$\sqrt{v} = \frac{c \operatorname{tang} \omega}{\sqrt{\frac{3mu}{n}}}$$

COROLL. 2.

XLII. Or on trouve le même rapport, si la vitesse du vent est tant soit peu plus petite que ladite limite, de sorte que près de cette limite la vitesse des ailes, & partant aussi celle du fardeau, ou l'effet de la machine, est proportionelle au quarré de la vitesse du vent.

COROLL. 3.

XLIII. Mais, si la vitesse du vent surpasse considérablement cette limite, l'effet ne croitra plus dans la même raison. Posons $c = \frac{6mu}{n}$, ou que la vitesse du vent soit à celle de la limite comme $\sqrt{2}$ à 1, ou le le quarré deux fois plus grand, & on aura à résoudre l'équation, $\frac{1}{6} = \frac{2}{3zz} - 2 + \frac{8}{3}z - zz$ ou celle cy

$$z^4 - \frac{8}{3}z^3 + \frac{13}{6}zz - \frac{2}{3} = 0$$

d'où l'on tire à peu près $z = \frac{4}{3}$ & $\sqrt{v} = \frac{4}{3}$ tang $\omega \sqrt{\frac{6mu}{n}}$

COROLL 4.

XLIV. Or dans le cas $c = \frac{3mu}{n}$, on a $\sqrt{v} =$ tang $\omega . \sqrt{\frac{3mu}{n}}$: donc, lorsque le quarré de la vitesse du vent devient deux fois plus grand, la vitesse des ailes, ou l'effet, sera augmenté dans le rapport de 1 à $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ ou de 1 à $\sqrt{\frac{32}{9}}$; & cette augmentation est moindre que si elle suivoit la raison du quarré des vitesses du vent.

COROLL 5.

XLV. Posons la vitesse du vent deux fois plus grande que dans la limite, ou soit $c = \frac{12mu}{n}$, & l'équation à résoudre sera

$\frac{1}{12} = \frac{2}{3zz} - 2 + \frac{8}{3}z - zz$, ou $z^4 - \frac{8}{3}z^3 + \frac{25}{12}zz - \frac{2}{3} = 0$, d'où l'on trouve à peu près $z = \frac{16}{11}$, & partant $\sqrt{v} = \frac{16}{11}$ tang $\omega \sqrt{\frac{12mu}{n}}$. Donc l'effet sera $\frac{32}{11}$ ou 3 fois plus grand, qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$ quoique le quarré de la vitesse soit 4 fois plus grand.

COROLL 6.

XLVI. De la même maniere on trouvera, que quand même la vitesse du vent deviendroit 100 fois plus grande qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$, l'effet ne feroit que $\frac{11}{7}$. 100 ou 157 fois plus grand; de sorte qu'enfin les effets ne suivront que la raison simple de la vitesse du vent.

SCHOLION.

XLVII. Si l'on donne l'exclusion à ces cas où $c > \frac{3\,mu}{n}$, la machine décrite ne peut servir que lorsque la vitesse du vent est renfermée entre ces deux limites, $c = \frac{mu}{2\,n}$ & $c = \frac{3\,mu}{n}$, de sorte que la vitesse du plus fort ne surpasse celle du plus foible que dans la raison de $\sqrt{6}$ à 1. Or, quand le vent se trouve entre ces deux limites, il est aisé de déterminer la vitesse des ailes $\sqrt{v}$, & partant aussi celle que le vent imprimera à la machine. Il sera donc bon de calculer les cas principaux, afin qu'on les puisse mieux comparer avec ceux que je viens de déveloper ici, quand $c > \frac{3\,mu}{n}$.

$c = \frac{mu}{2\,n}$	$\sqrt{v} = 0$
$c = \frac{mu}{n}$	$\sqrt{v} = 0{,}44141 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$
$c = \frac{3\,mu}{2\,n}$	$\sqrt{v} = 0{,}66666 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$
$c = \frac{2\,mu}{n}$	$\sqrt{v} = 0{,}80628 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$
$c = \frac{5\,mu}{2\,u}$	$\sqrt{v} = 0{,}91170 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$
$c = \frac{3\,mu}{n}$	$\sqrt{v} = \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$
$c = \frac{6\,mu}{n}$	$\sqrt{v} = \frac{4}{3} \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$
$c = \frac{12\,mu}{n}$	$\sqrt{v} = \frac{16}{11} \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$
$c = \frac{30000\,mu}{n}$	$\sqrt{v} = \frac{11}{7} \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$

Com-

Comparons ensemble les cas $c = \frac{3mu}{2n}$ & $c = \frac{3mu}{n}$, où la raison des quarrés des vitesses du vent est 1 : 2, & celle des effets $\frac{8}{5} : \sqrt{2}$, qui est un peu plus grande que celle-là ; & nous verrons, que l'observation de Mr. *Lulofs* est assez bien d'accord avec ce calcul : par lequel nous voyons aussi, que la disposition de la Machine demeurant la même, les effets sont à peu près dans la raison du quarré de la vitesse du vent, pourvu qu'on on excepte les cas, où le vent est, ou très foible, ou extrémement fort. Or, ce nonobstant, je soutiens qu'il est possible d'augmenter l'effet en raison du cube de la vitesse du vent : mais alors il faut changer la disposition de la machine, représentée par la quantité r, & pour chaque vitesse du vent on pourra déterminer une valeur de r, qui produise le plus grand effet : quoique je suppose, que les ailes demeurent les mêmes, & qu'on ait le même fardeau p^3 à élever, ou en général la même résistance à vaincre. Ce sera le sujet du problême suivant.

PROBLEME IV.

XLVIII. *La largeur des ailes, & leur inclinaison à la direction du vent étant par tout les mêmes & données, de même que la résistance, qui doit être vaincuë, trouver la disposition de la machine, pour que le plus grand effet soit produit, pour chaque vitesse du vent, en faisant abstraction du frottement.*

SOLUTION.

Les choses données sont donc la longueur de chaque aile $OF = f$, Fig. 4.
la largeur $HH = h$, l'inclinaison à la direction du vent $= \omega$: ensuite la résistance à vaincre, représentée par le poids d'un volume d'eau $= p^3$, & enfin la vitesse du vent, qui soit duë à la hauteur $= c$. Or nous cherchons la disposition de la machine, qui, quelque composée qu'elle soit, se réduit au rapport entre les vitesses du fardeau & de la force, qui étant supposé comme r à f, tout revient à la détermination

 de

de la quantité r, que nous avons représentée par le rayon du tambour RRSS (fig. 5) Or cette quantité r dépend de la vitesse $\sqrt{v}$, dont les ailes tournent à leurs extrémités ; & puisque le moment d'effet est égal au moment d'impulsion, nous n'avons qu'à chercher la vitesse $\sqrt{v}$, pour que le moment d'impulsion devienne le plus grand. Or le moment d'impulsion étant trouvé

$$\frac{4ncfh \cos\omega . \sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\sin\omega\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2\right)$$

posons pour abréger $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z \tang\omega$, & l'expression suivante

$$\frac{4ncfhz \sin\omega^3 . \sqrt{c}}{m}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3}z + \tfrac{1}{4}zz\right)$$

doit être reduite à un *maximum*, par la détermination de la variable z. Nous aurons donc à égaler à un *Maximum* cette formule $2z - \frac{8}{3}zz + z^3$. d'où nous tirons

$$2 - \tfrac{16}{3}z + 3zz = 0 \text{ \& partant}$$

$$z = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} . \operatorname{cotang}\omega = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{9}$$

Mais, pour que notre expression du moment d'impulsion ait lieu, il faut que $\sqrt{v} < \tang\omega . \sqrt{c}$ ou $z < 1$, d'où l'on voit que l'ambiguité des signes se réduit au signe $-$, de sorte que nous ayons

$$\sqrt{v} = \frac{8 - \sqrt{10}}{9} \tang\omega . \sqrt{c}$$

Et substituant cette valeur, le moment d'impulsion sera

$$\frac{ncfh \sin\omega^3 \sqrt{c}}{m} . \frac{8 - \sqrt{10}}{9} . \frac{44 + 8\sqrt{10}}{81}$$

ou $$\frac{ncfh \sin\omega^3 . \sqrt{c}}{m} . \frac{272 + 20\sqrt{10}}{729}$$

Posons

Posons pour abréger ces facteurs irrationnels

$$\frac{8 - \sqrt{10}}{9} = \lambda = 0,537514$$

$$\frac{44 + 8\sqrt{10}}{81} = \mu = 0,855544$$

$$\frac{272 + 20\sqrt{10}}{729} = \nu = 0,459873$$

de sorte que $\nu = \lambda\,\mu$, & la vitesse des ailes sera

$$\sqrt{v} = \lambda \operatorname{tang} \omega . \sqrt{c}$$

& le moment d'impulsion, qui est le plus grand

$$\frac{\nu n c f h \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m}$$

auquel doit être égal le moment d'effet $\frac{p^3 r \sqrt{v}}{f}$, d'où nous tirons

$$\frac{\lambda p^3 r \operatorname{tang} \omega . \sqrt{c}}{f} = \frac{\nu n c f h \sin \omega^3 . \sqrt{c}}{m}$$

ou $p^3 r = \frac{\mu n c f f h \sin \omega^2 . \operatorname{cos} \omega}{m}$,

donc $r = \frac{\mu n c f f h \sin \omega^2 . \operatorname{cos} \omega}{m p^3}$,

d'où l'on connoit la disposition de toute la machine.

COROLL. I.

XLIX. Donc, pour qu'une telle machine produise le plus grand effet, il faut que pour chaque vitesse du vent on donne à la quantité r une valeur particuliere : laquelle est proportionnelle au quarré de la vitesse du vent.

COROLL 2.

L. La diſpoſition de la machine doit donc être telle, que le rapport entre les viteſſes du fardeau & de la rouë principale, ou le rapport entre f & r, puiſſe être changé : ou bien que le rayon du tambour r puiſſe être augmenté & diminué dans la raiſon doublée de la viteſſe du vent.

COROLL 3.

LI. Donc, ſi le tambour a une grandeur fixe, comme nous l'avons ſuppoſé dans les propoſitions précédentes, il n'y a qu'un ſeul degré du vent, où la machine produiſe le plus grand effet, ce qui arrive lorsque $c = \frac{mp^3 r}{\mu nffh \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega}$. Tous les autres vents produiront un moindre effet, qu'ils ne feroient capables de produire, l'on pouvoit changer la diſpoſition de la machine, ou la quantité r.

COROLL 4.

LII. Or, ſi l'on donne à r pour chaque vent ſa valeur convenable $r = \frac{\mu ncffh \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega}{mp^3}$, la machine produira le plus grand effet, dont le moment ſera $= \frac{\nu ncfh \text{ ſin } \omega^3 \sqrt{c}}{m}$. Cet effet eſt donc proportionnel au cube de la viteſſe du vent ; pendant qu'il en ſuit à peine la raiſon du quarré, ſi la valeur de r demeure fixe.

COROLL 5.

LIII. On voit auſſi que ce plus grand effet eſt proportionnel à la ſurface des ailes, ou à fh, & outre cela auſſi au cube du ſinus de l'angle d'incidence du vent ω. D'où il eſt evident, qu'il eſt fort avantageux d'approcher ce angle ω autant d'un droit, qu'il eſt poſſible.

SCHOLION. I.

LIV. $\sqrt{c}$ entre dans nos formules, entant qu'il exprime la viteſſe du vent, & il ſera aiſé d'introduire à ſa place l'eſpace que le vent parcourt dans une ſeconde. Que g marque la hauteur, par laquelle un un corps tombe dans une ſeconde, & $2\sqrt{gc}$ ſera l'eſpace, que le vent parcourt dans une ſeconde : poſant maintenant $2\sqrt{gc}$ à la place de $\sqrt{c}$, l'expreſſion $\frac{2\nu ncfh \sin\omega^3 . \sqrt{gc}}{m}$ donnera l'effet de la machine produit dans une ſeconde, ou bien la réſiſtance multipliée par l'eſpace, par lequel elle avance dans une ſeconde. Et ſi la machine eſt employée à élever de l'eau, cette même expreſſion définit la quantité d'eau élevée par ſeconde, multipliée par la hauteur, à laquelle l'eau eſt élevée. Soit donc a la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée, & M la maſſe d'eau élevée dans une ſeconde, qu'il faut exprimer en pieds cubiques, ſi les quantités c, f, h, & g, ſont données en pieds, & on aura $Ma = \frac{2\nu ncfh \sin\omega^3 \sqrt{gc}}{m}$, d'où l'on aura la quantité d'eau M, qui ſera élevée par ſeconde à la hauteur donnée a.

$$M = \frac{2\nu ncfh \sin\omega^3 . \sqrt{c}}{ma.}$$

Pour en donner un exemple, ſuppoſons ſelon le cas propoſé par Mr. *Lulofs*

$f = 43$ pieds, $h = 5\frac{1}{2}$ pieds, $a = 4$ pieds, & l'angle $\omega = 73°$ enſuite $2\sqrt{gc} = 30$ pieds : donc à cauſe de $g = 15\frac{5}{8}$ pieds, il y aura $c = \frac{72}{5}$ pieds, d'où nous obtiendrons,

$\sin\omega^3 = \frac{7}{8}$ & $M = \frac{30 . 72 . 43 . 11 . 7}{4 . 5 . 2 . 8} . \frac{\nu n}{m}$ pieds cubiques,

ou $M = \frac{89497}{4} . \frac{\nu n}{m} = 10289 . \frac{n}{m}$ pieds cubiques.

Prenons $m = 700$, & nous aurons $M = 14\frac{7}{10}\, n$. Donc dans une minute cette machine élevera $882\, n$ pieds cubiques d'eau à la hauteur de 4 pieds. Donc, ſi cette machine élevoit 1500 pieds cubiques, il faudroit mettre $n = \frac{1500}{882}$: d'où il eſt evident que la valeur de n eſt encore plus grande, puiſque d'un côté j'ai négligé ici le frottement, & d'un autre côté il n'eſt pas probable, que la diſpoſition de la machine

chine ait été conforme au plus grand avantage. J'ai ſuppoſé ici la gravité ſpecifique de l'air 700 fois plus petite que celle de l'eau, au lieu que dans mes premiers calculs je l'avois priſe 850 fois moindre, & c'eſt la raiſon que j'ai trouvé ici le nombre 882 au lieu de 757, que j'ai rapporté cy deſſus (§. 8). Cependant je ne voudrois encore rien décider ſur la véritable valeur de la lettre n, puisque le cas de l'expérience n'eſt pas aſſez d'accord avec celui, auquel j'ai appliqué ici le calcul. Car Mr. *Lulofs* a marqué exprès, que l'inclinaiſon des ailes au vent n'étoit pas par toute leur longueur la même; mais que l'angle ω étoit moindre près de l'axe, & plus grand vers les extrémités, que 73°, & qu'il avoit pris un milieu. Or il eſt encore fort douteux, ſi un tel milieu eſt équivalent; je différerai donc la déciſion, jusqu'à ce que j'aurai examiné le cas, où l'angle ω eſt variable par la longueur des ailes.

LV. Il eſt ici fort remarquable que l'effet de ces machines eſt proportionnel au cube du ſinus de l'angle d'inclinaiſon ω, d'où il s'enſuit que, pour produire le plus grand effet, il faudroit rendre cet angle droit. Cependant il eſt très certain qu'alors le vent n'exerceroit plus aucune force ſur les ailes; & qu'il ne ſeroit pas capable de vaincre la moindre réſiſtance: auſſi trouvons-nous pour ce cas $r = 0$ à cauſe de $\cos \omega = 0$, de ſorte que le moment de la réſiſtance évanouïroit tout à fait, & la viteſſe des ailes $V v$ deviendroit infinie. Par cette raiſon on voit bien que ce cas eſt impoſſible, puisque les ailes rencontrent toujours par leur tranchant une réſiſtance de la part de l'air, laquelle croiſſant dans la raiſon des quarrés de la viteſſe arrêteroit bientôt l'accélération ulterieure des ailes, quand même la réſiſtance de la machine évanouïroit. Mais, quoiqu'il fut $r = 0$, où la force de la réſiſtance ſeroit réduite à rien, le moindre frottement de la machine rendroit ce cas inutile, & l'arrêteroit en repos. De là il eſt évident qu'on ne ſauroit négliger, ni le frottement, ni la réſiſtance de l'air, que les ailes ſouffrent par leur tranchant, dès que l'angle ω approche fort d'un droit, & que la viteſſe des ailes devient fort rapide: puisqu'alors ces deux

deux circonstances fournissent les principales déterminations de la machine & de son mouvement. Il est donc de la derniere importance, qu'en traitant ce problème on ait égard tant au frottement qu'à la résistance de l'air, & ce sera de là qu'on pourra déterminer, jusqu'à quel point on puisse augmenter l'angle ω, afin que le véritable effet devienne le plus grand. Or le seul frottement mettra déjà de telles bornes à la vitesse des ailes, qu'on pourra se dispenser d'avoir égard à la résistance de l'air, tant puisqu'elle n'est pas fort considérable, quand le mouvement des ailes n'est pas extrémement rapide, que puisque son effet peut être réuni à peu près avec celui du frottement. Car, quoique celui-cy suive la raison simple de la vitesse, & celui-là la doublée, on pourra bien se passer de la petite différence qui en résulteroit.

PROBLEME V.

LVI. *Les mêmes choses étant données que dans le problême précedent, trouver la disposition de la machine, afin qu'elle produise le plus grand effet, en ayant égard au frottement, auquel la machine est assujettie.*

SOLUTION.

Pour vaincre le frottement soit requise la force F, qui étant appliquée à l'extrémité d'une aile, contrebalance précisément le frottement. Cette force étant contraire à la force d'impulsion, son moment, qui est $F\sqrt{v}$, doit être retranché du moment d'impulsion, de sorte que, pour mettre la machine en action, on aura ce moment d'impulsion

$$\frac{4ncfh\,\mathrm{cos}\,\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sin}\,\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\,\mathrm{sin}\,\omega\,\mathrm{cos}\,\omega + \frac{v}{4c}\,\mathrm{cos}\,\omega^2\right) - F\sqrt{v}$$

qu'il faut rendre un *maximum*. Posons comme auparavant pour abréger $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z\,\mathrm{tang}\,\omega$, & nous aurons:

$$\frac{ncfhz\,\mathrm{sin}\,\omega^3\sqrt{c}}{m}\,(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - Fz\,\mathrm{tang}\,\omega.\sqrt{c}$$

Soit

Soit de plus $\frac{m\,\mathrm{F}\,\mathrm{tang}\,\omega}{ncfh\,\mathrm{sin}\,\omega^3} = \Phi$, & il faudra rendre un *maximum*

$2z - \frac{8}{3}zz + z^3 - \Phi z$, d'où nous tirons

$3zz - \frac{16}{3}z + 2 - \Phi = 0$ & partant :

$$z = \frac{8 - V(10 + 27\Phi)}{9}$$

C'eſt donc le nombre Φ, qui renferme l'effet du frottement, ayant ſuppoſé $\Phi = \frac{m\,\mathrm{F}}{ncfh\,\mathrm{ſin}\,\omega^2\,\mathrm{coſ}\,\omega}$, & de là nous aurons pour la viteſſe des ailes :

$$Vv = \frac{8 - V(10 + 27\Phi)}{9}\,\mathrm{tang}\,\omega.\,Vc$$

Enſuite, puiſque $\mathrm{F} = \frac{ncfh\,\mathrm{ſin}\,\omega^2\,\mathrm{coſ}\,\omega}{m}\Phi$, le plus grand moment d'impulſion ſera :

$$\frac{8 - V(10 + 27\Phi)}{9} \cdot \frac{44 - 54\Phi + 8V(10 + 27\Phi)}{81} \cdot \frac{ncfh\,\mathrm{ſin}\,\omega^3.\,Vc}{m}.$$

ou $\frac{272 - 648\Phi + (20 + 54\Phi)V(10 + 27\Phi)}{729} \cdot \frac{ncfh\,\mathrm{ſin}\,\omega^3.\,Vc}{m}$

auquel doit être égal le moment de l'effet $\frac{p^3 r\,Vv}{f}$, d'où l'on tire

$\frac{p^3 r}{f} = \frac{44 - 54\Phi + 8\,V(10 + 27\Phi)}{81} \cdot \frac{ncfh\,\mathrm{ſin}\,\omega^2\,\mathrm{coſ}\,\omega}{m}$, & partant

$$r = \frac{44 - 54\Phi + 8\,V(10 + 27\Phi)}{81} \cdot \frac{ncffh\,\mathrm{ſin}\,\omega^2\,\mathrm{coſ}\,\omega}{mp^3}$$

COROLL. I.

LVII. Donc, après avoir posé $\phi = \frac{m F}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}$, nous venons de trouver $z = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27 \phi)}}{9}$, & de là nous avons la viteſſe des ailes à leurs extrémités $\sqrt{v} = z \tan \omega . \sqrt{c}$, & le moment d'impulſion, ou plûtot celui de l'effet, $= \frac{ncfhz \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m} (2 - \frac{8}{3} z + zz - \phi)$, puiſque nous avons déjà retranché le frottement de l'impulſion actuelle. Enfin, pour la diſpoſition la plus avantageuſe, nous aurons $r = \frac{ncffh \sin \omega^2 \cos \omega}{m p^3} (2 - \frac{8}{3} z + zz - \phi)$, ſi l'on donne à z la valeur trouvée.

COROLL. 2.

LVIII. Sans avoir égard à la diſpoſition la plus avantageuſe, il faut, que la machine étant encore en repos, ou $z = 0$, la force du vent ſoit au moins capable de vaincre le frottement; d'où il faut qu'il ſoit $\phi < 2$. Enſuite, pour qu'elle puiſſe auſſi vaincre la réſiſtance, il faut qu'il ſoit $\frac{ncffh \sin \omega^2 \cos \omega}{m} (2 - \phi) < p^3 r$. Enfin, par la raiſon alléguée cy-deſſus, z doit être moindre que l'unité, ou $z < 1$.

COROLL. 3.

LIX. Donc, puiſque $\phi = \frac{m F}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}$, il eſt abſolument néceſſaire qu'il ſoit $\frac{m F}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega} < 2$, & partant $c > \frac{m F}{2nfh \sin \omega^2 \cos \omega}$ d'où l'on connoit quelle force doit avoir le vent, avant qu'il ſoit capable de vaincre le frottement. Or, pour empêcher que la valeur de ϕ ne devienne trop grande, il eſt évident, que l'angle ω ne ſauroit être ni trop petit, ni trop approchant d'un droit.

COROLL. 4.

LX. Or, ſi $\phi < 2$; on trouve toujours pour z une valeur poſitive moindre que l'unité, par laquelle on déterminera la plus avantageuſe diſpoſition de la Machine, ou la quantité r. Où l'on peut remarquer que la formule trouvée ſe change aiſément dans cette forme.

$$r = \frac{[8-\sqrt{(10+27\phi)}]\,[8+2\sqrt{(10+27\phi)}]}{81} \cdot \frac{ncffh \sin\omega^2 \cos\omega}{mp^3}.$$

Et le moment de l'effet ſera alors

$$\frac{[8-\sqrt{(10+27\phi)}]^2\,[8+2\sqrt{(10+27\phi)}]}{729} \cdot \frac{ncfh \sin\omega^3 \sqrt{c}}{m}.$$

COROLL. 5.

LXI. Ce plus grand moment, dès qu'il commence à devenir réel, ou que $\phi < 2$, augmente avec la viteſſe du vent; & lorſque le vent devenoit infiniment rapide, ce moment, ou l'effet de la machine, ſuivroit encore la raiſon du cube de la viteſſe du vent. Or, ſi la viteſſe du vent diminue, la valeur de ϕ augmente, & rend le coëfficient irrationel plus petit, d'où l'effet décroitra dans une raiſon plus grande que celle des cubes de la viteſſe.

COROLL. 6.

LXII. Or ce coëfficient irrationel $[8-\sqrt{(10+27\phi)}]^2$ $[8+2\sqrt{(10+27\phi)}]$ évanouit lorſque $\phi = 2$, & pendant que la valeur de ϕ décroit, ou que la viteſſe du vent augmente, il deviendra de plus en plus grand, & approchera de $(8-\sqrt{10})^2$ $(8+2\sqrt{10})$, qui eſt ſa valeur pour le cas $\phi = 0$; ou la viteſſe du vent infinie. Donc, puiſque ce coëfficient croit avec la viteſſe du du vent, il eſt clair que le plus grand effet de la machine croit dans une plus grande raiſon, que celle des cubes de la viteſſe du vent.

SCHOLION.

LXIII. Nous avons conſidéré ici l'inclinaiſon des ailes à la direction du vent, ou l'angle ω comme donné; or on voit que le plus grand effet qu'on obtient, ſi l'on donne à la machine la diſpoſition preſcrite, dépend beaucoup de cet angle ω. Car, ſi l'on faiſoit l'angle ω à peu près de 90°, ce qui ſeroit le cas le plus avantageux s'il n'y avoit point de frottement, le facteur $\frac{ncfh \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m}$ deviendroit bien le plus grand, mais le facteur irrationel diminueroit l'effet, à cauſe de la valeur de Φ, qui eſt réciproquement proportionelle à $\sin \omega^2 \cos \omega$: & nous avons vû, que ſi $\Phi = 2$ ou même plus grand que 2, la machine ne ſauroit plus être miſe en mouvement. Il faut donc prendre l'angle ω en ſorte qu'il en réſulte une valeur pour Φ, qui ſoit moindre que 2, & pour cet effet il faut exclure, tant les cas où l'angle ω eſt trop petit, que ceux où il aproche trop d'un angle droit, puiſque l'un & l'autre cas augmente la valeur de Φ. En ne regardant que l'angle ω comme variable, la valeur de Φ devient la plus petite ſi l'on prend $\sin \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$ & $\cos \omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$, ou bien l'angle $\omega = 54^\circ, 44'$, auquel cas on aura $\Phi = \frac{3 m F \sqrt{3}}{2 ncfh}$, qui eſt ſa plus petite valeur. Mais, ſoit qu'on prenne l'angle ω plus grand ou plus petit que $54^\circ, 44'$, la valeur de Φ deviendra plus grande, de ſorte qu'il y a toujours deux angles pour ω, qui donnent la même valeur pour Φ, dont l'un eſt plus grand que $54^\circ, 44'$, & l'autre plus petit. Or il eſt évident que de ces deux valeurs il eſt toujours bon de choiſir la plus grande, puiſque alors $\sin \omega^3$, ou le dernier facteur devient plus grand, le premier irrationel demeurant le même: ainſi ces deux angles $\omega = 45^\circ$, & $\omega = 64^\circ, 5', 11''$ donnent la même valeur $\sin \omega^2 \cos \omega = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, & partant auſſi la même pour Φ. Cependant

dant, en prenant $\omega = 64°, 5', 11''$ au lieu de $\omega = 45°$, l'effet de la machine sera $2\frac{1}{17}$ fois plus grand. On comprend aussi qu'il est plus avantageux de prendre l'angle ω plus grand que $54°, 44'$; car, quoique la valeur de Φ devienne plus grande, & partant le facteur irrationel $\frac{[8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}]^2 \, [8 + 2\sqrt{(10 + 27\Phi)}]}{729}$ plus petit, l'autre facteur $\frac{ncfh \sin \omega^3 \, \sqrt{c}}{m}$, prend en échange une plus grande valeur, de sorte que le produit de ces deux formules devient plus grand : car, si l'on augmente tant soit peu l'angle ω au delà de $54°, 44'$, le nombre Φ, & partant aussi le facteur irrationel, n'en change point, tandis que l'autre facteur en reçoit une augmentation sensible. Il est donc important de déterminer l'angle ω, sous lequel il faut incliner les ailes à la direction du vent, afin que la machine produise le plus grand effet ; ce que nous ferons dans le problème qui suit.

PROBLEME VI.

LXIV. *Quand les ailes sont partout également larges, & également inclinées à la direction du vent, trouver quelle inclinaison il leur faut donner, afin que la machine produise le plus grand effet, en tenant compte du frottement.*

SOLUTION.

Après avoir posé comme ci-dessus $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z \tang \omega$, le moment d'impulsion diminué de celui du frottement est

$$\frac{ncfhz \sin \omega^3 . \sqrt{c}}{m} (2 - \tfrac{8}{3} z + zz) - Fz \tang \omega \sqrt{c}$$

qu'il s'agit de rendre un *maximum*. Or, puisqu'on demande l'angle le plus convenable ω, en supposant qu'on ait déjà donné à z la valeur, que la plus avantageuse disposition de la machine exige, savoir

$z =$

$z = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9}$, ayant posé $\Phi = \frac{mF}{ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}$,
il faut différentier l'expression du moment en supposant tant z que l'angle ω variable. Or le différentiel qui résulte de la variabilité de z évanouit déjà, si l'on donne à z la valeur trouvée ; il ne reste donc qu'à considérer l'angle ω seul comme variable, & posant le différentiel $= 0$ nous aurons cette équation.

$$\frac{3ncfhz \sin\omega^2 \cos\omega \sqrt{c}}{m}(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - \frac{Fz\sqrt{c}}{\cos\omega^2} = 0 \text{ ou}$$

$$\frac{3ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}{m}(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - \frac{F}{\cos\omega^2} = 0$$

Posons pour F sa valeur $\frac{ncfh \sin\omega^2 \cos\omega.}{m}\Phi$ pour avoir

$$3(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - \frac{\Phi}{\cos\omega^2} = 0$$

ou

$$\Phi = 3\cos\omega^2(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) = \frac{\cos\omega^2[8 - \sqrt{(10+27\Phi)}][8 + 2\sqrt{(10+27\Phi)}]}{27}$$

Donc nous aurons

$$\frac{27\Phi}{\cos\omega^2} = 44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}$$

Mais, puisque $\Phi = \frac{mF}{ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}$, posons pour abréger $\frac{mF}{ncfh} = \frac{4\alpha}{27}$, de sorte que $27\Phi = \frac{4\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega}$, & nous aurons

$$\frac{\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega^3} = 11 - \frac{2\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega} + 2\sqrt{\left(10 + \frac{4\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega}\right)}$$

ou

$$\alpha + 2\alpha\cos\omega^2 - 11\sin\omega^2\cos\omega^3 = 2\sin\omega\cos\omega^2\sqrt{(10\sin\omega^2\cos\omega^2 + 4\alpha\cos\omega)}$$

qui

qui étant délivrée des irrationels prendra cette forme

$$\alpha\alpha(1+2\cos\omega^2)^2-2\alpha\sin\omega^2\cos\omega^3(11+30\cos\omega^2)+81\sin\omega^4\cos\omega^6=0$$

où il faut se souvenir que $\frac{4\alpha}{\sin\omega^2\cos\omega}$ doit être moindre que 54, & partant $\sin\omega^2\cos\omega > \frac{4\alpha}{54}$, ou $\sin\omega^2\cos\omega > \frac{2\alpha}{27}$. Tout revient donc à résoudre cette équation, & à en déterminer l'angle ω. Comme elle peut avoir plusieurs racines, il est bon de remarquer, que l'angle satisfaisant est toujours plus grand que 54°, 44′, comme j'ai fait voir ci-dessus.

COROLL. 1.

LXV. La constante $\alpha = \frac{27\,m\,F}{4\,n\,c\,f\,h}$ renferme le frottement F, auquel elle est proportionelle. Et au cas que le frottement évanouir, notre équation nous découvre $\cos\omega = 0$, ou l'angle ω droit, tout comme nous l'avons déjà remarqué.

COROLL. 2.

LXVI. Donc, si le frottement est extrémement petit, nous voyons que l'angle ω doit approcher fort d'un angle droit, de sorte que $\cos\omega$ sera une fraction très petite. Nous pourrons donc supposer $1+2\cos\omega^2=1$ & $11+30\cos\omega^2=11$, & notre équation à résoudre sera

$$\alpha\alpha = 22\,\alpha\sin\omega^2\cos\omega^3 - 81\sin\omega^4\cos\omega^6$$

d'où nous tirons :

$$\alpha = (11\pm\sqrt{40})\sin\omega^2\cos\omega^3 \text{ ou } \sin\omega^2\cos\omega^3 = \frac{\alpha}{11\pm\sqrt{40}}.$$

Et, puisque $\sin\omega$ est à peu près $=1$, on aura $\cos\omega = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{11\pm\sqrt{40}}}$

où

où il faudra prendre le signe $+$, afin que l'angle ω approche plus d'un droit.

COROLL. 3.

LXVII. On pourra aussi déterminer les cas, où un angle donné ω est le plus propre pour procurer le plus grand effet de la machine. Car, prenant pour ω un angle quelconque plus grand que $54°, 44'$, on trouve

$$\alpha = \frac{11 + 30 \cos\omega^2 \pm \sqrt{[(7 + 24 \cos\omega^2)^2 - 9]}}{(1 + 2 \cos\omega^2)^2} . \sin\omega^2 \cos\omega^2$$

& cet angle produira le plus grand effet, lorsque le frottement est $F = \frac{4ncfh\alpha}{27\,m}$. Alors ayant $-z = \frac{8}{9} - \sqrt{\left(\frac{10}{81} + \frac{4\,\alpha}{81 \sin\omega^2 \cos\omega}\right)}$, le plus grand moment d'effet sera,

$$\frac{ncfhz \sin\omega^3 . \sqrt{c}}{m} \left(2 - \tfrac{8}{3} z + zz\right) - Fz \tang \omega \sqrt{c}.$$

EXEMPLE.

LXVIII. *Qu'on cherche les cas, où l'inclinaison des ailes à la direction du vent de 70°, 31', est la plus avantageuse : ou lorsqu'on met* $\cos\omega = \frac{1}{3}$ *&* $\sin\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Posant donc $\cos\omega = \frac{1}{3}$ & $\sin\omega^2 = \frac{8}{9}$, on trouvera

$$\alpha = \frac{43 \pm \sqrt{760}}{121} . \tfrac{8}{9}$$ d'où l'on tire deux valeurs, qui sont

$\alpha = 0,5184$ & $\alpha = 0,1134$, auxquelles répond le frottement $F = 0,0768 . \frac{m}{n} cfh$ & $F = 0,0168 . \frac{m}{n} cfh$.

SCHOLIE.

LXIX. Or, puisque l'inclinaiſon des ailes, comme je viens de la déterminer, dépend de la force du vent, & qu'il la faudroit changer toutes les fois que le vent change, la pratique ne ſauroit tirer aucun avantage de cette détermination, qui demanderoit d'ailleurs un dévelopement plus ſoigneux, auquel il ſeroit ſuperflu de s'arrêter plus longtems. Ce qui nous a jetté dans cet embarras, c'eſt que nous avons donné aux ailes par toute leur étendue la même inclinaiſon à la direction du vent : or il n'y a non ſeulement rien qui nous oblige à cette égalité, mais il eſt même beaucoup plus avantageux de donner aux ailes une inclinaiſon variable, en ſorte que l'angle ω en s'éloignant de l'axe approche de plus en plus de 90°. Auſſi voyons-nous qu'on obſerve actuellement cette maxime dans la pratique ; & quand Mr. *Luloſs* marque, que l'angle ω étoit de 73°, il avertit expreſſément, que le vent tomboit plus obliquement ſur les ailes près de l'axe, & qu'il les frappoit presque perpendiculairement vers les extrémités. Et pour ramener ce cas à celui que j'avois traité, y ayant ſuppoſé l'inclinaiſon uniforme, il avoit pris un milieu entre la plus grande & la plus petite inclinaiſon. Donc, puisqu'il a trouvé ce milieu de 73°, ſi la plus grande a été de 90°, la plus petite ſeroit de 56°. J'examinerai donc combien cette variabilité eſt conforme à la théorie, & combien il y a à gagner de ce côté pour augmenter l'effet de ces ſortes de machines.

PROBLEME VII.

LXX. *Trouver la plus avantageuſe inclinaiſon, qu'il faut donner aux ailes d'un moulin à vent, afinqu'on en puiſſe tirer le plus grand effet.*

SOLUTION.

Pour réſoudre ce probléme il faut remonter à la premiere formule intégrale, qui exprime le moment d'impulſion. Or, ſi nous poſons
Fig. 4. la longueur entiere des ailes $OF = f$, leur largeur $MM = y$, qui convient à la diſtance de l'axe $OP = x$, & l'angle ſous lequel l'élément

ment de l'aile MMmm y eſt incliné à la direction du vent $= \omega$, il faut conſidérer cet angle comme variable, & déterminer pour chaque diſtance de l'axe OP $= x$ ſa valeur, afin que le moment d'impulſion devienne le plus grand. Mais nous avons trouvé (27) ce moment exprimé en ſorte :

$$\frac{4ncVv}{mf}\int xy\,dx\,\text{cof}\,\omega\left(\text{fin}\,\omega - \frac{xVv}{fVc}\,\text{cof}\,\omega\right)^2$$

où c marque la hauteur düe à la viteſſe du vent, & v celle qui eſt düe à la viteſſe des ailes à leur extrémité F. De quelque maniere que la largeur des ailes varie, on peut regarder y comme une fonction donnée de x ; & notre formule intégrale ne renfermera que deux variables x & ω, entre leſquelles il faut déterminer le rapport, qui rendra un *maximum* la valeur de notre intégrale. Or on ſait que, ſi Z eſt une fonction quelconque de deux variables x & ω, en ſorte que $dZ = M dx + N d\omega$, la formule intégrale $\int Z\,dx$ obtiendra la plus grande valeur quand on poſe $N = 0$; donc, puiſque dans notre cas on a

$$Z = xy\,\text{cof}\,\omega\,(\text{fin}\,\omega - \frac{xVv}{fVc}\,\text{cof}\,\omega)^2$$

il s'enſuit par la différentiation

$$N = -xy\,\text{fin}\,\omega\,(\text{fin}\,\omega - \frac{xVv}{fVc}\text{cf}\,\omega)^2 + 2xy\,\text{cf}\,\omega\,(\text{fn}\,\omega - \frac{xVv}{fVc}\text{cf}\,\omega)\,(\text{cf}\,\omega + \frac{xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega)$$

d'où, en diviſant par $xy\,(\text{fin}\,\omega - \frac{xVv}{fVc}\,\text{cof}\,\omega)$, nous tirons cette équation :

$$\text{fin}\,\omega^2 - \frac{xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega = 2\,\text{cof}\,\omega^2 + \frac{2xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega$$

ou $\text{fin}\,\omega^2 - 2\,\text{cof}\,\omega^2 = \frac{3xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega.$

Poſons

Posons pour abréger $\frac{3x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}} = 2\varrho$ pour avoir

$$\sin\omega^2 - 2\cos\omega^2 = 2\varrho\sin\omega\cos\omega,$$ où divisant par $\cos\omega^2$

$$\tan\omega^2 = 2\varrho\tan\omega + 2$$ donc

$$\tan\omega = \varrho + \sqrt{(\varrho\varrho + 2)}$$ ou bien

$$\tan\omega = \frac{3x\sqrt{v}}{2f\sqrt{c}} + \sqrt{\left(\frac{9xxv}{4ffc} + 2\right)}$$

D'où l'on connoit pour chaque distance x de l'axe l'inclinaison qu'il faut donner aux ailes, afin que le moment d'impulsion devienne le plus grand qu'il est possible.

COROLL. I.

LXXI. De cette formule il est évident que, plus le point P des ailes est éloigné de l'axe O, & plus l'angle ω y devient grand, ou plus l'inclinaison des ailes à la direction du vent y approche d'un angle droit. Or tout près de l'axe O, ou $x = 0$, on a $\tan\omega = \sqrt{2}$, ou bien l'angle $\omega = 54°, 44'$; & partant plus loin de l'axe O l'angle ω doit être plus grand.

COROLL. 2.

LXXII. A l'extrémité des ailes en F, où $x = f$, l'angle ω sera le plus grand, & on aura $\tan\omega = \frac{3\sqrt{v}}{2\sqrt{c}} + \sqrt{\left(\frac{9v}{4c} + 2\right)}$. Cet angle dépend donc du rapport des vitesses $\sqrt{v}$ & $\sqrt{c}$; & plus la vitesse des ailes est grande par rapport à la vitesse du vent, plus aussi approchera l'angle ω d'un droit. S'il y avoit $\sqrt{v} = \sqrt{c}$, on auroit $\tan\omega = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$, ou bien l'angle $\omega = 74°, 19'$. Or, si l'on met $\sqrt{v} = 2\sqrt{c}$, on aura $\tan\omega = 3 + \sqrt{11}$ ou $\omega = 81°, 1'$;

& pour le cas

$\sqrt{v} = 3\sqrt{c}$, on aura $\tan\omega = \frac{9 + \sqrt{89}}{2}$ ou $\omega = 83°, 49'$.

COROLL. 3.

LXXIII. Posons ce raport $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \nu$, & il faut qu'il demeure toujours le même, quelque changement qu'il arrive au vent, afin que les ailes puissent servir pour tous les degrés du vent : alors on aura

$$\text{tang}\ \omega = \frac{3\nu x}{2f} + \sqrt{\left(\frac{9\nu\nu xx}{4ff} + 2\right)}$$

& à l'extrémité des ailes en F, tang $\omega = \frac{3}{2}\ \nu + \sqrt{\left(\frac{9}{4}\nu\nu + 2\right)}$.

COROLL. 4.

LXXIV. Dans cette disposition des ailes il n'est pas à craindre, que le calcul devienne jamais contraire à la vérité. Car, quelque grande que soit la vitesse du vent, il y a toujours sin $\omega > \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ cos ω, & il n'arrive jamais, comme dans les cas précédens, qu'une partie des ailes éprouve le choc du vent par derriere.

COROLL. 5.

LXXV. Posant $\sqrt{v} = \nu\sqrt{c}$, le moment d'impulsion sera

$$\frac{4\nu nc\sqrt{c}}{mf} \int xydx\ \text{cos}\ \omega^3 \left(\text{tang}\ \omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2$$

& puisque la formule intégrale ne renferme plus la vitesse du vent, le moment d'impulsion sera proportionnel au cube de la vitesse du vent.

PROBLEME VIII.

LXXVI. *Si les ailes sont partout de la même largeur, & qu'on dispose leur inclinaison à la direction du vent, comme il a été enseigné dans le problême précédent, déterminer le moment d'impulsion dont les ailes seront frappées par chaque vent.*

SOLUTION.

Ayant établi un certain rapport entre la viteſſe du vent $V c$ & la viteſſe des ailes à leur extrémité $V v$, en ſorte que $V v = \nu V c$, ſoit la largeur conſtante des ailes HH $= h$, & puiſque $y = h$, il s'agit de trouver l'intégrale de cette expreſſion.

$$\frac{4 \nu n h c V c}{m f} \int x d x \text{ coſ } \omega^3 \left(\text{tang } \omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2$$

en poſant $\text{tang } \omega = \frac{3 \nu x}{2 f} + V \left(\frac{9 \nu \nu x x}{4 f f} + 2\right)$. Or, ſi l'on mettoit cette valeur à la place de tang ω, le coſ ω ſeroit exprimé par une formule ſi embarraſſée, qu'on auroit bien de la peine à en chercher l'intégrale. Il eſt donc à propos de garder dans le calcul la variable ω, & de déterminer l'autre x par celle-ci : doù l'on aura

$$\text{tang } \omega^2 - \frac{3 \nu x}{f} \text{ tang } \omega = 2, \ \& \ \frac{\nu x}{f} = \frac{\text{tang } \omega^2 - 2}{3 \text{ tang } \omega}$$

De là nous obtiendrons :

$$\text{tang } \omega - \frac{\nu x}{f} = \frac{2 \text{ tang } \omega^2 + 2}{3 \text{ tang } \omega} = \frac{2}{3 \text{ ſin } \omega \text{ coſ } \omega}$$

$$\& \ \left(\text{tang } \omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2 = \frac{4}{9 \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega^2}$$

Enſuite ayant

$$x = \frac{f}{3 \nu} (\text{tang } \omega - 2 \text{ coſ } \omega) = \frac{f (\text{ſin } \omega^2 - 2 \text{ coſ } \omega^2)}{3 \nu \text{ ſin } \omega \text{ coſ } \omega}$$

a différentiation donne

$$\text{d}x = \frac{f d\omega}{3 \nu} \left(\frac{1}{\text{coſ } \omega^2} + \frac{2}{\text{ſin } \omega^2}\right) = \frac{f d\omega (\text{ſin } \omega^2 + 2 \text{ coſ } \omega^2)}{3 \nu \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega^2}$$

D'où l'on tirera

$$x d x \text{ coſ } \omega^3 = \frac{f f d\omega (\text{ſin } \omega^4 - 4 \text{ coſ } \omega^4)}{9 \nu \nu \text{ ſin } \omega^3}$$

&

& partant le moment d'impulſion ſera

$$\frac{16nfhcVc}{81\ vm}\int\frac{d\omega\ (\text{ſin}\ \omega^4 - 4\ \text{coſ}\ \omega^4)}{\text{ſin}\ \omega^5\ \text{coſ}\ \omega^2}$$

Poſons $\int\frac{d\omega\ (\text{ſin}\ \omega^4 - 4\ \text{coſ}\ \omega^4)}{\text{ſin}\ \omega^5\ \text{coſ}\ \omega^2} = \Omega$, & nous aurons.

$$d\ \Omega = \frac{d\omega}{\text{ſin}\ \omega\ \text{coſ}\ \omega^2} - \frac{4\ \text{coſ}\ \omega^2}{\text{ſin}\ \omega^5}\ d\omega,\ \text{ou bien}$$

$$d\ \Omega = d\ \omega\left(\frac{\text{ſin}\ \omega}{\text{coſ}\ \omega^2} + \frac{1}{\text{ſin}\ \omega} + \frac{4}{\text{ſin}\ \omega^3} - \frac{4}{\text{ſin}\ \omega^5}\right)$$

où l'on remarque d'abord que $\int\frac{d\omega\ \text{ſin}\ \omega}{\text{coſ}\ \omega^2} = \frac{1}{\text{coſ}\omega}$, & $\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega} = l$ tang $\frac{1}{2}\ \omega$ en prenant les logarithmes hyperboliques. Enſuite, ayant en général $\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega^{\mu}} = \frac{\mu-2}{\mu-1}\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega^{\mu-2}} - \frac{\text{coſ}\ \omega}{(\mu-1)\ \text{ſin}\ \omega^{\mu-1}}$

nous aurons :

$$\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega^3} = \tfrac{1}{2}\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\ \omega} - \frac{\text{coſ}\,\omega}{2\ \text{ſin}\,\omega^2} = \tfrac{1}{2}\ l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \alpha - \frac{\text{coſ}\ \alpha}{2\ \text{ſin}\ \alpha^2}$$

$$\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega^5} = \tfrac{3}{4}\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\ \omega^3} - \frac{\text{coſ}\,\omega}{4\ \text{ſin}\,\omega^4} = \tfrac{3}{8}\ l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \omega - \frac{3\ \text{coſ}\,\omega}{8\ \text{ſin}\ \omega^2} - \frac{\text{coſ}\,\omega}{4\,\text{ſin}\,\omega^4}$$

Raſſemblons toutes ces parties enſemble, & nous trouverons,

$$\Omega = \frac{1}{\text{coſ}\,\omega} + \tfrac{3}{2}\ l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \omega - \frac{\text{coſ}\ \omega}{2\ \text{ſin}\ \omega^2} + \frac{\text{coſ}\ \omega}{\text{ſin}\ \omega^4}$$

ou $\quad \Omega = \frac{2\ \text{ſin}\ \omega^4 + \text{ſin}\ \omega^2\ \text{coſ}\,\omega^2 + 2\ \text{coſ}\,\omega^4}{2\ \text{ſin}\ \omega^4\ \text{coſ}\,\omega} + \tfrac{3}{2}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \omega$

d'où nous tirons le moment d'impulſion :

$$\frac{16nfhcVc}{81vm}\left(\frac{2\,\text{ſin}\ \omega^4 + \text{ſin}\ \omega^2\ \text{coſ}\omega^2 + 2\text{coſ}\omega^4}{2\ \text{ſin}\ \omega^4\ \text{coſ}\ \omega} + \tfrac{3}{2}\ l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \omega - \text{Conſt.}\right)$$

Il faut que cette intégrale évanouïsse au cas $x = 0$, ou tang $\omega = \sqrt{2}$, ce qui donne sin $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$, cos $\omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$ & tang $\frac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ d'où l'on tire cette constante $= \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\, l\, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, pour l'étendre par toute la longueur des ailes, il faut mettre tang $\omega = \frac{3}{2}\nu + \sqrt{(\frac{9}{4}\nu\nu + 2)}$, d'où l'on aura

$$\text{sec. } \omega = \sqrt{[3 + \tfrac{9}{2}\nu\nu + 3\nu\sqrt{(\tfrac{9}{4}\nu\nu + 2)}]} = \frac{1}{\cos\omega}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{[3 + \frac{9}{2}\nu\nu + 3\nu\sqrt{(\frac{9}{4}\nu\nu + 2)}]} - 1}{\frac{3}{2}\nu + \sqrt{(\frac{9}{4}\nu\nu + 2)}}$$

Or, ayant ces valeurs, le moment d'impulsion sera

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{81\,\nu m}\left((1 + \tfrac{3}{2}\cot\omega^2 + \cot\omega^4)\,\text{sec.}\,\omega + \tfrac{3}{2}\, l \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{3}{2}\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\, l\, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

où il faut remarquer que $\cot\omega = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{9}{4}\nu\nu + 2)} - \frac{3}{4}\nu$.

COROLL. I.

LXXVII. Au lieu de la constante ν il sera plus commode d'introduire dans le calcul, l'angle même dont les ailes sont inclinées au vent, à leur extrémité. Soit cet angle $= \theta$, & puisque tang $\theta = \frac{3}{2}\nu + \sqrt{(\frac{9}{4}\nu\nu + 2)}$ on aura tang $\theta^2 - 3\nu$ tang $\theta = 2$, donc $\nu = \frac{\text{tang}\,\theta^2 - 2}{3\,\text{tang}\,\theta} = \frac{1}{3}$ tang $\theta - \frac{2}{3}$ cot θ; & de là on connoitra la vitesse des ailes à leur extrémité $\sqrt{u} = \nu\sqrt{c}$.

COROLL. 2.

LXXVIII. Introduisant cet angle θ dans le calcul, le moment d'impulsion sera,

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{27m(\text{tang}\,\theta - 2\cot\theta)}\left((1 + \tfrac{3}{2}\cot\theta + \cot\theta^4)\,\text{sec.}\,\theta + \tfrac{3}{2}\, l\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \tfrac{3}{2}\, l\, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

Or

Où θ étant l'inclinaiſon extrème, qui répond à la diſtance $x = f$, on ſuppoſe que pour une diſtance quelconque x l'inclinaiſon eſt $= \omega$, en ſorte qu'il ſoit

$$x = \frac{f\,(\text{tang}\ \omega - 2\cot\ \omega)}{\text{tang}\ \theta - 2\cot\ \theta} \quad \text{ou}$$

$$\text{tang}\ \omega = \frac{x(\text{tang}\,\theta - 2\cot\theta)}{f} + \sqrt{\left(\frac{xx(\text{tang}\,\theta - 2\cot\theta)^2}{ff} + 2\right)}$$

COROLL. 3.

LXXIX. Puiſque l'angle θ eſt toujours plus grand que $54°, 44'$, il ſera bon de calculer pour les principaux angles, qui peuvent être pris pour θ, les valeurs ſuivantes en nombres.

θ	$\text{tang}\,\theta - 2\cot\theta$	$(2 + \cot\theta^2 + 2\cot\theta^4)\,\text{ſec.}\,\theta$	l tang $\frac{1}{2}\theta$
54°,44′	0,000000	5, 196152 - -	—0,658479
60	0,577350	5, 111111 - -	—0,549306
65	1,211892	5, 470671 - -	—0,450875
70	2,019537	6, 337560 - -	—0,356378
75	3,196152	8, 044641 - -	—0,264842
80	5,318628	11, 707722 - -	—0,175426
81	5,996983	12, 953311 - -	—0,157730
82	6,834288	14, 518121 - -	—0,140082
83	7,898777	16, 538455 - -	—0,122478
84	9,304156	19, 241562 - -	—0,104912
85	11,255075	23, 036594 - -	—0,087377

COROLL. 4.

LXXX. Poſons $(1 + \frac{1}{2}\cot\theta^2 + \cot\theta^4)\,\text{ſec.}\,\theta + \frac{3}{4}\,l\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta = \Theta$ & ſoit $\Delta = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\,l\,\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$, qui eſt la valeur de Θ, lorsqu'on met $\theta = 54°, 44'$; & conſervant $\frac{\text{tang}\,\theta - 2\cot\theta}{3} = \nu$, le moment d'impulſion étant $= \frac{16 n f h c V c}{81 m} \cdot \frac{\Theta - \Delta}{\nu}$, nous aurons pour les mêmes angles :

θ	Θ	$\Theta - \Delta$	ν	$\frac{\Theta - \Delta}{\nu}$
54°,44'	1,610357	0,000000	0,000000	0,00000
60°	1,731597	0,121240	0,192450	0,62998
65°	2,059024	0,448667	0,403964	1,11065
70°	2,634213	1,023856	0,673179	1,52090
75°	3,625058	2,014701	1,065384	1,89105
80°	5,590722	3,980365	1,772876	2,24510
81°	6,240060	4,629703	1,998994	2,31600
82°	7,048938	5,438581	2,278096	2,38735
83°	8,085511	6,475154	2,632926	2,45935
84°	9,463413	7,853056	3,101385	2,53212
85°	11,387231	9,776874	3,751692	2,60595

COROLL. 5.

LXXXI. Puiſque le moment d'impulſion eſt proportionnel à la quantité $\frac{\Theta - \Delta}{\nu}$, on voit que ce moment croît en augmentant l'angle θ, & s'il étoit poſſible de l'augmenter jusqu'à 90°, la valeur de $\frac{\Theta - \Delta}{\nu}$ deviendroit $= 3$, & le moment ſeroit $\frac{16 n f h c V c}{27 m}$. Or alors le nombre ν étant infini, la viteſſe des ailes deviendroit infinie, ce qui rend ce cas impoſſible.

COROLL.

COROLL. 6.

LXXXII. Il eſt donc avantageux de prendre l'angle θ auſſi grand qu'il eſt poſſible ; or c'eſt le frottement qui y met des bornes, puisqu'il augmente auſſi en prenant l'angle θ plus grand, & qu'il deviendroit même infini, ſi l'on faiſoit cet angle droit. Si l'on veut que la viteſſe des ailes à leurs extrémités ſoit le double de la viteſſe du vent, il faut mettre l'angle $\theta = 81°$, & alors l'effet ſera déjà aſſez conſidérable étant au plus grand poſſible comme 2,60595 à 3 ou comme 7 à 8.

SCHOLION. I.

LXXXIII. Or, ayant choiſi pour l'angle θ une valeur quelconque, il faut donner aux ailes la figure preſcrite, en ſorte qu'à chaque diſtance de l'axe l'inclinaiſon de l'élément de l'aile $MMmm$ à la direction du vent, ſoit préciſément celle que le calcul ordonne. Mais alors ces ailes duëment conſtruites ne produiſent le plus grand moment d'impulſion, qu'entant que leur mouvement eſt conforme à l'angle θ, ou que la viteſſe de leurs extrémités eſt à celle du vent, comme le nombre ν, qui répond à l'angle choiſi θ, à l'unité. Si ces ailes tournoient ou plus vite ou plus lentement, le moment d'impulſion ſeroit toujours moindre : & c'eſt de là qu'on déterminera la diſpoſition de la machine, ou la quantité r, afin que les ailes puiſſent tourner avec cette viteſſe preſcrite.

SCHOLION. 2.

LXXXIV. Comparons cet effet, que ces ailes, dont l'inclinaiſon variable eſt la plus avantageuſe, produiſent, avec celui que les mêmes ailes produiroient, ſi leur inclinaiſon à la direction du vent étoit partout la même $= \omega$. Or nous avons trouvé ci-deſſus, que le plus grand moment d'impulſion de ces ailes eſt

$$\frac{0,459873\, nfhcVc}{m} \sin \omega^3$$

& que pour cet effet il faut qu'il ſoit $Vv = 0,537514 \tang \omega . Vc$ Ayant donc déterminé ci-deſſus pour ces ailes l'effet au cas de $\omega = 73°$

 il

il faloit qu'il fut $Vv = 1, 758\ Vc$. Il convient donc de comparer ce cas avec celui des ailes parfaites, qui demandent un mouvement également rapide : & partant nous aurons à peu près $\theta = 80°$. Or alors le moment d'impulsion produit par ces ailes parfaites est

$$2, 24510\ \frac{16 nfhcVc}{81 m} = \frac{0, 44344 nfhcVc}{m}$$

& en posant $\omega = 73°$, le moment d'impulsion produit par des ailes semblables, mais par tout également inclinées, n'est que

$$\frac{0, 40239 nfhcVc}{m}$$

d'où l'on voit que donnant aux ailes leur juste figure pour la même rapidité du mouvement, on en obtient un moment d'impulsion plus grand. Donc, puisque dans l'expérience que Mr. *Lulofs* rapporte, les ailes avoient à peu près la figure parfaite, & partant cette machine auroit dû élever dans une minute, non $882 n$, comme j'ai trouvé ci-dessus (54), mais $970 n$ pieds cubiques d'eau, tandis qu'elle a élevé actuellement 1500 : d'où il semble qu'on n'auroit pas besoin de donner à n une valeur double de l'unité. Cependant, si nous considérons 1°, que cette machine n'étoit pas dans la derniere perfection : 2°, que son mouvement n'avoit peut-être pas le juste rapport à celui du vent : 3°. que Mr. *Lulofs* a supposé la vitesse du vent trop grande & l'air trop dense, pour approcher le premier calcul de la vérité : 4°, qu'il dit expressément que ces machines élévent bien une égale quantité d'eau à la hauteur de $4\frac{1}{2}$ pieds : & 5°, qu'enfin je n'ai pas tenu compte du frottement : après ces considérations, dis-je, il n'y a point de doute, que posant $n = 1$, la quantité d'eau élevée par minute auroit dû être bien au dessous de 970 pieds cubiques, & partant que la valeur de n doit être supposée considérablement plus grande que l'unité, ou que la force du vent est plus grande que selon l'hypothese commune. Il est donc evident, qu'il ne sera pas trop de poser $n = 2$; mais ce sera aussi assez. Car, quoique les expériences prouvent, que les boulets de canon éprouvent une résistance trois fois plus grande que selon l'hypol'hypotheſe commune, il faut remarquer que la réſiſtance d'un globe n'eſt que la moitié de celle du grand cercle ; & que la réſiſtance d'une ſurface plane n'en feroit que doublée. D'où l'on peut conclure qu'on ſatisfera aſſez exactement aux expériences, ſi l'on ſuppoſe $n = 2$, & qu'on laiſſe $m = 800$. Remarquons enſuite que, poſant, $\theta = 90^\circ$ & $\omega = 90^\circ$, le moment d'impulſion des ailes également inclinées eſt $0,45987 \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$ qui pour les ailes parfaites eſt $\frac{16}{27} . \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$ qui eſt à celui là comme 9 à 7.

PROBLEME IX.

LXXXV. *Connoiſſant le frottement de la Machine, choiſir entre les figures des ailes trouvées celle qui produiſe le plus grand effet pour une force donnée du vent.*

SOLUTION.

Que F marque la force, qu'il faut appliquer à l'extrémité d'une aile pour vaincre le frottement : & puiſque la viteſſe à cet endroit eſt $= \sqrt{v} = \nu \sqrt{c}$, où c eſt la hauteur duë à la viteſſe du vent qu'on ſuppoſe donnée, le moment de l'effet du frottement eſt $F\nu\sqrt{c}$. Retranchons ce moment de celui d'impulſion trouvé ci-deſſus, & nous aurons pour l'impulſion actuelle ce moment

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{81m} . \frac{\Theta - \Delta}{\nu} - F\nu\sqrt{c}$$

Il s'agit donc de trouver ν afin que cette formule

$$\frac{\Theta - \Delta}{\nu} - \frac{81mF}{16nfhc}\nu$$

devienne la plus grande : pour cet effet il faut qu'il ſoit

$$d. \frac{\Theta - \Delta}{\nu} = \frac{81mF}{16nfhc} d\nu$$

Or je ne m'arrêterai pas à développer cette équation différentielle, car

 après

après avoir donné les valeurs de $\frac{\Theta - \Delta}{y}$ pour les principaux angles θ, on en peut trouver pour chaque angle θ, le frottement F, auquel cet angle convient le mieux. Alors $d. \frac{\Theta - \Delta}{y}$ & dv marqueront les accroissemens, que ces quantités prennent, en augmentant d'un degré l'angle θ. Ainsi l'angle $\theta = 80°$ sera le plus propre dans les cas où

$$0{,}\ 07090 = \frac{81\,mF}{16\,nfhc}\ 0{,}\ 22611$$

c'est à dire lorsque

$$\frac{81\,mF}{16\,nfhc} = \tfrac{5}{16} \text{ ou } F = \tfrac{5}{81}\ \frac{nfhc}{m}$$

De la même maniere le plus convenable angle θ	on trouvera lorsque le frottement est
$\theta = 80°$	$F = 0{,}\ 0617 . \frac{nfhc}{m}$
$\theta = 81$	$F = 0{,}\ 0505 . \frac{nfhc}{m}$
$\theta = 82$	$F = 0{,}\ 0400 . \frac{nfhc}{m}$
$\theta = 83$	$F = 0{,}\ 0307 . \frac{nfhc}{m}$
$\theta = 84$	$F = 0{,}\ 0224 . \frac{nfhc}{m}$

COROLL. I.

LXXXVI. De cette solution il est clair, que plus le frottement de la machine est petit, & plus sera grand l'angle θ, qu'on pourra employer. Ainsi, si le frottement étoit $F = 0{,}0617\ \frac{hfhc}{m}$, on pourroit

roit employer l'angle $\theta = 80^\circ$, & le moment d'impulsion actuel seroit $= 0,3342 \frac{nfhcVc}{m}$. Mais, si le frottement étoit environ deux fois plus petit, ou $F = 0,0307 \frac{nfhc}{m}$, on pourroit faire usage de l'angle $\theta = 83^\circ$, & le moment d'impulsion actuel seroit $0,4050 \frac{nfhcVc}{m}$.

COROLL. 2.

LXXXVII. De là on voit, combien il y a à gagner en diminuant le frottement de la machine, puisque le moment d'impulsion en devient augmenté assez considérablement. Dans le cas précédent, si l'on pouvoit réduire le frottement à la moitié, on obtiendroit un effet presque d'un tiers plus grand.

COROLL. 3.

LXXXVIII. Je suppose ici que dans la disposition de la machine on ait en vuë un certain dégré du vent, & il est evident que le frottement demeurant le même, plus le vent qu'on a en vuë sera grand, & plus devient grand l'angle θ, mais la machine une fois construite perdra ses avantages pour tous les autres vents, tant plus forts que plus foibles.

SCHOLIE. I.

LXXXIX. Appliquons cette détermination au cas que Mr. *Lulofs* a rapporté, & supposons que la machine dont il parle, ait été rangée sur l'angle $\theta = 80^\circ$, & qu'elle ait procuré les plus grands avantages, lorsque le vent achevoit 30 pieds par seconde. Posant donc $m = 800$ $n = 2$, $fh = 200$ pieds quarrés, & $c = 15$ pieds, le frottement y auroit été $F = 0,4628$ pieds cubiques d'eau, ou il auroit falu employer un poids de 30 ℔ à l'extrémité d'une d'une aile pour vaincre le ſeul frottement. D'où le moment d'impulſion diminué du frottement n'auroit été que $0,3342 \frac{nfhcVc}{m}$ lequel, s'il n'y avoit point eu de frottement, auroit été $0,4435 \frac{nfhcV}{m}$ & partant d'un tiers plus grand. Or, ſi le frottement a été moindre, il faut que la machine ait été ajuſtée pour un vent plus foible : & ſi nous ſuppoſons qu'on eut en vuë un vent deux fois plus foible ou $c = \frac{15}{4}$ pieds, le frottement n'auroit été que le quart du précédent, ou de $7\frac{1}{2}$ ℔, qui ſembleroit mieux d'accord avec l'expérience. De là je conclus que la machine n'a été rien moins que parfaite, du moins pour le cas $c = 15$ pieds, & que ſi elle étoit parfaite, elle pourroit élever encore plus que 1500 pieds cubiques d'eau par minute : or alors, pour rendre le calcul d'accord avec l'expérience, il faudroit bien mettre $n = 2$, ce qui me confirme dans mon ſentiment rapporté ci-deſſus, qu'on ne ſauroit donner à n une valeur moindre que deux.

SCHOLIE. 2.

XC. Poſons le cas qu'on veuïlle conſtruire un moulin à vent, dont la longueur de chaque aile ſoit de 40 pieds ſur 5 pieds de largeur, afin qu'elle produiſe le plus grand effet, lorſque la viteſſe du vent eſt de 15 pieds par ſeconde, ou $c = \frac{15}{4}$ pieds, le frottement étant tant, que pour le vaincre, il faille appliquer au bout d'une des ailes une force de 5 ℔, ou qu'il ſoit $F = \frac{1}{12}$ pied cubique. Ayant donc $fh = 200$ & $\frac{n}{m} = \frac{1}{400}$, on aura $\frac{nfhc}{m} = \frac{15}{8}$, & partant $F = \frac{1}{12} = \frac{2}{45} \frac{nfhc}{m} = 0,0444 \frac{nfhc}{m}$: il faudroit donc prendre l'angle θ de 82° à peu près, & conſtruire les ailes conſéquemment, de ſorte que leur inclinaiſon à la direction du vent fut de 54°, 44′ près l'axe & de 82° aux extrémités. Enſuite, lorſque le vent eſt de la force que je viens de ſuppoſer, la viteſſe des ailes doit être telle, que leurs extrémités

mités faſſent $2\frac{1}{4}$. 15 pieds $=$ 34 pieds par ſeconde, ou qu'elles achevent leurs révolutions en 7 ſecondes ; ſi le vent étoit ou plus fort ou plus foible, le mouvement des ailes devroit être augmenté ou diminué dans la même raiſon, de ſorte que la viteſſe des ailes à leur extrémité fût à celle du vent comme $2\frac{1}{4}$ à 1, afin que le moment d'impulſion devint le plus grand, & tel qu'il a été déterminé au §. 80. Mais alors, en retranchant le frottement, on n'auroit plus l'avantage du plus grand : & ſi le mouvement des ailes ne ſuivoit plus le rapport marqué, le moment d'impulſion ne ſeroit plus le plus grand, mais ſe trouveroit au deſſous de la valeur indiquée au §. 80, ces valeurs n'étant juſtes que lorsque la lettre v obtient la valeur correſpondante. Mais il arrive ordinairemenn dans ces machines, qui ſont deſtinées à élever un certain fardeau, ou à vaincre une certaine réſiſtance, qu'on n'eſt pas le maitre de la viteſſe des ailes, vû qu'elle dépend de la diſpoſition de la machine : & on doit ſe contenter, que pour un certain vent, la viteſſe des ailes ſoit conforme à la régle. Pour tous les autres cas, la détermination du moment d'impulſion demande un calcul particulier, que je vais expliquer dans le problème qui ſuit.

PROBLEME X.

XCI. *Les ailes étant conſtruites en ſorte, que lorsque leur viteſſe a le rapport preſcrit à celle du vent, elles produiſent le plus grand moment d'impulſion; trouver le moment d'impulſion, lorsque le mouvement des ailes eſt plus ou moins rapide à l'egard du vent.*

SOLUTION.

Soit θ l'angle ſous lequel l'extrémité des ailes eſt inclinée à la direction du vent, & les ailes étant conſtruites ſelon la regle preſcrite ci-deſſus, ſeront propres à procurer le plus grand moment d'impulſion, lorsqu'elles tournent avec une viteſſe, qui ſoit à celle du vent comme v à 1 ou qu'il ſoit $V u = v\, V c$. Or nous avons vû que le rapport de ce nombre v à l'angle θ eſt exprimé en ſorte, $v = \frac{1}{3}$

 tang

tang θ — $\frac{2}{3}$ cot θ. Enſuite, pour les endroits plus proches de l'axe, l'inclinaiſon eſt plus grande, en ſorte que poſant pour la diſtance OP $= x$ l'inclinaiſon $= \omega$ il ſoit $x = \frac{f(\text{tang}\ \omega - 2\ \text{cot}\ \omega)}{3\nu}$, d'où l'on doit tirer la conſtruction des ailes ; & ces ailes produiroient le moment qui a été aſſigné ci-deſſus, s'il étoit $\sqrt{v} = \nu\sqrt{c}$. Mais ſuppoſons à préſent qu'il ſoit $\sqrt{v} = \mu\sqrt{c}$, & pour chercher le moment d'impulſion qui en réſulte, il faut recourir à la formule intégrale, laquelle ſera :

$$\frac{4\mu n h c\sqrt{c}}{mf} \int x\,dx\ \text{cof}\ \omega^3 \left(\text{tang}\ \omega - \frac{\mu x}{f}\right)^2$$

Or, puiſque $x = \frac{f(\text{tang}\ \omega - 2\ \text{cot}\ \omega)}{3\nu} = \frac{f(\text{ſin}\ \omega^2 - 2\ \text{cof}\ \omega^2)}{3\nu\ \text{ſin}\ \omega\ \text{cof}\ \omega}$

nous aurons

$$x\ d\ x\ \text{cof}\ \omega^3 = \frac{ff\,d\omega\,(\text{ſin}\ \omega^4 - 4\ \text{cof}\ \omega^4)}{9\nu\nu\ \text{ſin}\ \omega^3} \quad \&$$

$$\text{tag}\,\omega - \frac{\mu x}{f} = \text{tag}\ \omega - \frac{\mu}{3\nu}(\text{tag}\,\omega - 2\ \text{cot}\,\omega) = \frac{(3\nu-\mu)\ \text{tag}\,\omega + 2\mu\ \text{cot}\,\omega}{3\nu}$$

$$\text{ou tag}\,\omega - \frac{\mu x}{f} = \frac{(3\nu-\mu)\ \text{ſin}\,\omega^2 + 2\mu\ \text{cof}\,\omega^2}{3\nu\ \text{ſin}\,\omega\ \text{cof}\,\omega} = \frac{2\mu - 3(\nu-\mu)\text{ſin}\,\omega^2}{3\nu\ \text{ſin}\,\omega\ \text{cof}\,\omega} =$$

$$\frac{2}{3\ \text{ſin}\,\omega\ \text{cof}\,\omega} + \frac{(\nu-\mu)\ (\text{ſin}\,\omega^2 - 2\ \text{cof}\,\omega^2)}{3\nu\ \text{ſin}\,\omega\ \text{cof}\,\omega}$$

delà on aura

$$\left(\text{tag}\,\omega - \frac{\mu x}{f}\right)^2 = \frac{4}{9\text{ſ}\,\omega^2\,\text{cſ}\,\omega^2} + \frac{4(\nu-\mu)(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)}{9\nu\ \text{ſin}\,\omega^2\ \text{cof}\,\omega^2} + \frac{(\nu-\mu)^2(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)^2}{9\nu\nu\ \text{ſin}\,\omega^2\ \text{cof}\,\omega^2}$$

& partant le moment cherché ſera

$$\frac{16\mu n f h c\sqrt{c}}{81\nu\nu m}\int \frac{d\omega(\text{ſn}\,\omega^4 - \text{cſ}\,\omega^4)}{\text{ſin}\,\omega^5\ \text{cof}\,\omega^2}\left(1 + \frac{(\nu-\mu)(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)}{\nu} + \frac{(\nu-\mu)^2}{4\nu\nu}(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)^2\right)$$

qui

qui ſe réduit a

$$\frac{16\mu n f h c \sqrt{c}}{81\, \nu^4\, m} \int d\omega \left\{ \frac{(3\nu-\mu)^2 \sin\omega}{\cos\omega^2} + 27(\nu-\mu)^2 \sin\omega - \frac{4(9\nu\nu - 30\mu\nu + 20\mu\mu)}{\sin\omega} + \frac{16\mu(4\mu-3\nu)}{\sin\omega^3}\,\frac{16\mu\mu}{\sin\omega^5} \right]$$

Or, ayant trouvé l'intégrale de chaque partie ci-deſſus, ſi nous poſons après l'intégration $\omega = \theta$, & que nous y ajoutions une telle conſtante, que l'intégrale évanouiſſe en poſant $\sin\omega = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ & $\cos\omega = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ le moment d'impulſion réſultera :

$$\frac{4\mu n f h c \sqrt{c}}{81\, \nu^4\, m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(3\nu-\mu)^2}{\cos\theta} + \frac{2\mu(12\nu-13\mu)}{\sin\theta^2}\cos\theta + \frac{4\mu\mu}{\sin\theta^4}\cos\theta - 27(\nu-\mu)^2\cos\theta - 6(6\nu\nu-16\mu\nu+9\mu\mu)\, l\, \mathrm{tag}\,\tfrac{1}{2}\theta \\ \qquad\qquad - 6\mu(4\nu-3\mu)\sqrt{3} \qquad + 6(6\nu\nu-16\mu\nu+9\mu\mu)\, l\, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{array} \right]$$

d'où, en poſant $\mu = \nu$, l'on obtient le moment d'impulſion trouvé ci-deſſus. Mais, pour que cette formule ſoit d'accord avec la vérité, il faut qu'il ſoit $\mathrm{tang}\,\omega > \frac{\mu x}{f}$ ou $\mathrm{tang}\,\omega > \frac{\mu(\mathrm{tang}\,\omega - 2\cot\omega)}{3\nu}$

donc $\mu < \frac{3\nu\,\mathrm{tang}\,\omega}{\mathrm{tang}\,\omega - 2\cot\omega}$ par conſéquent $\mu < \frac{3\nu\,\mathrm{tang}\,\theta}{\mathrm{tang}\,\theta - 2\cot\theta}$

Or $\nu = \frac{\mathrm{tang}\,\theta - 2\cot\theta}{3}$, donc $\mu < \mathrm{tang}\,\theta$.

Si l'angle θ approche fort d'un droit, à cauſe de la petiteſſe de l'angle θ, le moment d'impulſion ſera fort à peu près.

$$\frac{4\mu(3\nu-\mu)^2}{81\nu^4\cos\theta} \cdot \frac{n f h c \sqrt{c}}{m} = \frac{16\nu^3 - 4\lambda\lambda(3\nu-\lambda)}{81\,\nu^3\cos\theta} \cdot \frac{n f h c \sqrt{c}}{m}$$

en poſant $\mu = \nu + \lambda$; d'où l'on voit que, ſoit qu'on prenne pour λ un nombre poſitif ou négatif, le moment d'impulſion eſt toujours moindre, que s'il étoit $\lambda = 0$ ou $\mu = \nu$.

COROLL. I.

XCII. Si les ailes tournent deux fois plus vite par rapport au vent, qu'elles devroient tourner pour produire la plus forte impulſion,

on

on aura $\mu = 2\nu$, & le moment d'impulsion sera $= \frac{8\, nfhc\sqrt{c}}{81\, \nu m \cos\theta}$; qui seroit deux fois plus grand, si les ailes avoient leur juste vitesse.

COROLL. 2.

XCIII. Supposons que la vitesse des ailes ne soit que la moitié de la plus avantageuse, ou que $\mu = \frac{1}{2}\nu$; & alors le moment d'impulsion sera au plus grand comme 25 ad 32 : on perdra donc à peu près le quart sur l'effet.

COROLL 3.

XCIV. Mais il faut bien remarquer que cette formule simple n'a lieu, que lorsque l'angle θ approche fort d'un droit & que le nombre ν surpasse le binaire. Alors il y aura à peu près tang $\theta = 3\nu$ & $\theta = 3\nu = \frac{1}{\cos\theta}$: d'où notre formule pour le moment d'impulsion sera $= \frac{4\mu(3\nu - \mu)^2}{27\nu^3} \cdot \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$.

COROLL 4.

XCV. Soit le poids à élever $= P$, & sa vitesse à celle de l'extrémité des ailes comme ν à f, de sorte que le moment de l'effet soit $= P. \frac{\mu r\sqrt{c}}{f}$. Négligeant donc le frottement, on aura $Pr = \frac{4(3\nu - \mu)^2}{27\nu^3} \cdot \frac{nffhc}{m}$, & partant $(3\nu - \mu)^2 = \frac{27\nu^3 mPr}{4nffhc}$. Donc $3\nu - \mu = \frac{3\nu\sqrt{3\nu mPr}}{2f\sqrt{nhc}}$ & $\mu = 3\nu\left(1 - \frac{\sqrt{3\nu mPr}}{2f\sqrt{nhc}}\right)$, d'où l'on connoitra la vitesse des ailes pour chaque vitesse du vent $\sqrt{c}$:

$$\sqrt{\nu} = 3\nu\left(\sqrt{c} - \frac{\sqrt{3\nu mPr}}{2f\sqrt{nh}}\right).$$

COROLL.

COROLL. 5.

XCVI. Donc, pour que le vent ſoit aſſez fort pour mettre la machine en mouvement, il faut que ſa viteſſe $\sqrt{c}$ ſoit plus grande que $\frac{\sqrt{3\nu m}\,\mathrm{P}r}{2f\sqrt{nh}}$. Et alors le moment d'impulſion ſera :

$$\frac{3\nu\mathrm{P}r\sqrt{c}}{f}\left(1-\frac{\sqrt{3\nu m}\,\mathrm{P}r}{2f\sqrt{nhc}}\right)=\frac{3\nu\,\mathrm{P}r}{f}\left(\sqrt{c}-\frac{\sqrt{3\nu m}\,\mathrm{P}r}{2f\sqrt{nh}}\right).$$

Donc, ſi la viteſſe du vent devient double, l'effet ſera plus que deux fois plus grand.

SCHOLIE.

XCVII. Après ces recherches on ne trouvera plus de doutes dans la comparaiſon de la théorie avec les expériences, que Mr. *Lulofs* a faites ſur l'effet des moulins à vent en Hollande. Car d'abord, en mettant $\nu = 2$, l'effet que la théorie montre ſurpaſſera aſſez celui qu'on obſerve, pour avoir dequoi tenir compte, tant du frottement, que de l'imperfection de la Machine. Enſuite, pour ce que Mr. *Lulofs* rapporte, que l'effet n'étoit pas proportionnel au cube de la viteſſe du vent, & qu'il ſuivoit même quelquefois une raiſon inférieure à celle du quarré, tant s'en faut, que cela ſoit contraire à la théorie, qu'il eſt plutôt admirablement d'accord. Car ce ne ſont que les plus grands effets, qui ſont proportionnels aux cubes de la viteſſe du vent ; & pour produire ces plus grands effets, il faut donner aux machines pour chaque viteſſe du vent une diſpoſition particuliere, en ſorte que la viteſſe du fardeau tienne toujours un certain rapport à celle du vent. Mais, puiſqu' ordinairement on ne change rien dans la diſpoſition de la machine, quoique le vent varie, nous venons de voir que dans ce cas la raiſon des cubes n'a point lieu, & que l'effet de la machine ne croît que dans une raiſon plus grande que celle des viteſſes du vent, la raiſon véritable étant comme la viteſſe même diminuée d'une quantité conſtante, qui dépend de la diſpoſition de la machine. Donc, puiſque la théorie, ſur le pied, que je viens de l'établir satisfait à ces deux principaux phénomenes observés par Mr. *Lulofs*, il n'y a aucun doute, qu'elle ne soit parfaitement d'accord avec toutes les expériences possibles, & que, fondé sur cette théorie, on ne puisse porter la pratique à un plus haut degré de perfection. Pour cet effet j'ai déjà déterminé la figure la plus avantageuse, qu'il faut donner aux ailes, & la disposition de la machine la plus convenable. Mais il semble qu'on y puisse apporter encore de plus grandes perfections en augmentant la surface des ailes ; on leur donne communément la même largeur par toute la longueur, & quand on ne les fait pas plus larges vers les extrémités, la raison en paroit être qu'on doit craindre, que la force du vent n'en rompe leur liaison avec l'axe. Mais, pour prévenir cet accident, ne pourroit-on pas diminuer la longueur pour gagner d'autant plus sur la largeur ? Ou au lieu de quatre ne pourroit-on pas y mettre 6 ou 8 ? Il n'y a aucun doute, qu'on n'ait fait déjà des essais là dessus, & il est difficile de deviner les difficultés, qu'on y a rencontrées. Quoiqu'il en soit, une figure divergente semble être très propre pour les ailes d'un moulin à vent : & quand on auroit peur, qu'une trop grande largeur vers les extrémités nuisit à la fermeté, on pourroit multiplier le nombre des ailes en sorte, qu'elles occupassent presque un espace circulaire, dont leur longueur seroit le rayon. Au moins il vaudra la peine d'examiner les avantages, que la théorie promet d'une telle construction des ailes, sans se mettre en peine sur les difficultés, que la pratique pourroit opposer à leur exécution.

PROBLEME XI.

XCVIII. *Les ailes étant divergentes depuis l'axe vers l'extrémité selon des lignes droites, & ayant à chaque distance de l'axe l'inclinaison à la direction du vent, qui a été déterminée ci-dessus, trouver le moment d'impulsion que ces ailes fourniront, la disposition de la machine étant la plus avantageuse.*

SOLUTION.

Soit la largeur de chaque aile à l'extrémité HH $= h$, qui convient à la diſtance de l'axe OF $= f$: & à une diſtance quelconque OP $= x$, la largeur ſera MM $= y = \frac{hx}{f}$. Soit $\sqrt{v}$ la viteſſe des ailes à leur extrémité, & $\sqrt{c}$ celle du vent; & que l'elément MM ſoit incliné à la direction du vent ſous l'angle $= \omega$. Cela poſé, nous avons vû, que pour rendre la force du vent la plus grande, il faut en poſant $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \nu$, qu'il ſoit $\tang \omega = \frac{3\nu x}{2f} + \sqrt{\left(\frac{9\nu\nu xx}{4ff} + 2\right)}$. Fig. 4.

Enſuite, lorsque le moulin eſt garni de 4 telles ailes, à cauſe de $y = \frac{hx}{f}$, le moment d'impulſion ſera :

$$\frac{4\nu nhc\sqrt{c}}{mff} \int xx\,dx \cos\omega^3 \left(\tang\omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2$$

Or, puisque $\tang\omega = \frac{3\nu x}{2f} + \sqrt{\left(\frac{9\nu\nu xx}{4ff} + 2\right)}$ nous aurons

$$x = \frac{f}{3\nu}(\tang\omega - 2\cot\omega) = \frac{f(\sin\omega^2 - 2\cos\omega^2)}{3\nu\sin\omega\cos\omega} \quad \&$$

$$dx = \frac{f\,d\omega\,(\sin\omega^2 + 2\cos\omega^2)}{3\nu\sin\omega^2\cos\omega^2};$$

D'où nous tirons :

$$\tang\omega - \frac{\nu x}{f} = \frac{2}{3\sin\omega\cos\omega} \quad \&$$

$$x\,dx\cos\omega^3 = \frac{ff\,d\omega\,(\sin\omega^4 - 4\cos\omega^4)}{9\nu\nu\sin\omega^3} \quad \text{donc}$$

$$xx\,dx\cos\omega^3 = \frac{f^3 d\omega\,(\sin\omega^6 - 2\sin\omega^4\cos\omega^2 - 4\sin\omega^2\cos\omega^4 + 8\cos\omega^6)}{27\nu^3\sin\omega^4\cos\omega}$$

&

& partant le moment d'impulſion cherché ſera :

$$\frac{4\nu nhcVc}{mff}\cdot\frac{4f^3}{243\,\nu^3}\int\frac{d\omega(\text{ſn}\,\omega^6-2\,\text{ſn}\,\omega^4\,\text{cſ}\omega^2-4\,\text{ſn}\,\omega^2\,\text{cſ}\omega^4+\text{cſ}\omega^6)}{\text{ſin}\,\omega^6\ \text{coſ}\,\omega^3}$$

ou

$$\frac{16\,nfhcVc}{243\,\nu\nu m}\int d\omega\left(\frac{1}{\text{coſ}\,\omega^3}-\frac{2}{\text{ſin}\,\omega^2\ \text{coſ}\omega}-\frac{4\,\text{coſ}\omega}{\text{ſin}\,\omega^4}+\frac{8\,\text{coſ}\omega^3}{\text{ſin}\,\omega^6}\right).$$

Pour intégrer cette formule, il faut remarquer les réductions ſuivantes,

$$\int\frac{d\omega}{\text{coſ}\,\omega}=l\,\text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,\omega)$$

$$\int\frac{d\omega}{\text{coſ}\,\omega^3}=\frac{\text{ſin}\,\omega}{2\,\text{coſ}\omega^2}+\tfrac{1}{2}\,l\,\text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,\omega)$$

$$\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\omega^2\,\text{coſ}\omega}=l\,\text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,\omega)-\frac{1}{\text{ſin}\,\omega}$$

$$\int\frac{d\omega\ \text{coſ}\omega}{\text{ſin}\,\omega^4}=-\frac{1}{3\,\text{ſin}\,\omega^3}$$

$$\int\frac{d\omega\,\text{coſ}\omega^3}{\text{ſin}\,\omega^6}=-\frac{1}{5\,\text{ſin}\,\omega^5}+\frac{1}{3\,\text{ſin}\,\omega^3}$$

& alors l'intégrale ſe trouvera

$$\frac{16\,nfhcVc}{243\,\nu\nu m}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\text{ſin}\,\omega}{2\,\text{coſ}\omega^2}+\dfrac{2}{\text{ſin}\,\omega}+\dfrac{4}{\text{ſin}\,\omega^3}-\dfrac{8}{5\,\text{ſin}\omega^5}-\tfrac{3}{2}\,l\,\text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,\omega)\\ \qquad\qquad -\dfrac{27\,V3}{5\,V2}\qquad\qquad\qquad\qquad +\tfrac{3}{2}\,l\,\dfrac{V2+V3-1}{V2-V3+1}\end{array}\right]$$

après y avoir ajouté la juſte conſtante, pour que l'intégrale évanouïſſe, quand $x=0$, ou tang $\omega=V2$. Maintenant il ne reſte qu'à poſer $x=f$ ou tang $\omega=\frac{3}{2}\,\nu+V(\frac{9}{4}\,\nu\nu+2)$ pour avoir l'entier moment d'impulſion. Donc, ſi θ marque l'angle, que fait la direc-

tion

tion du vent avec l'extrémité des ailes, de ſorte que $v = \frac{\mathrm{tang}\,\theta - 2\cot\theta}{3}$, le moment d'impulſion ſera :

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{243\,vvm}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\theta^2}{2\sin\theta} + \frac{2}{\sin\theta} + \frac{4}{\sin\theta^3} - \frac{8}{5\sin\theta^5} - \frac{27\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{2}l\,\mathrm{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta) + \frac{3}{2}l\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}\right)$$

COROLL. I.

XCIX. Si l'angle θ, ſous lequel l'extrémité des ailes eſt inclinée à la direction du vent, eſt fort proche de 90°, de ſorte que tang θ eſt un nombre fort grand, par rapport auquel on puiſſe négliger les autres termes, on aura à peu près $v = \frac{1}{3}$ tang θ, & ſin $\theta = 1$; d'où le moment d'impulſion ſera $= \frac{8\,nfhc\sqrt{c}}{27\,m}$.

COROLL. 2.

C. Si les ailes avoient par toute leur longueur la même largeur h, de ſorte que leur ſurface ſeroit deux fois plus grande, nous avons vû ci-deſſus, que le moment d'impulſion ſeroit $= \frac{16nfhc\sqrt{c}}{27m}$, & par conſéquent deux fois plus grand que dans le cas préſent.

COROLL. 3.

CI. De là on comprend, que le moment d'impulſion dépend de la ſurface des ailes, & que leur figure n'y change pas conſidérablement l'effet. Car nous venons de voir que, ſoit qu'on donne aux ailes une figure rectangulaire ou triangulaire, pourvu que leur ſurface ſoit la même, le moment d'impulſion ne varie point.

COROLL. 4.

CII. On ne ſauroit donc produire un plus grand moment d'impulſion, qu'en étendant les ailes jusqu'à remplir l'eſpace circulaire

 dont

dont le rayon eſt $= f$, ce qui arrivera, lorsqu'on prend $4h = 6f$ ou $h = \frac{3}{2}f$ à peu près. Alors le moment d'impulſion ſera $= \frac{4nffc\sqrt{c}}{9m}$.

SCHOLIE.

CIII. Par là on comprend la raiſon de la pratique ordinaire, où l'on donne aux ailes la même largeur par toute leur longueur : puisqu'on y perdroit, ſi l'on diminuoit la largeur vers l'axe. Car, ſuppoſé qu'on donne aux ailes à leur extrémité la plus grande largeur que les circonſtances permettent, il vaut toujours mieux de conſerver la même largeur vers l'axe, que de la diminuer, & cela auſſi bien qu'il eſt possible. Cependant, ſi l'on pouvoit multiplier les ailes, en ſorte que leurs extrémités s'atteigniſſent à peu près, ce ſeroit ſans doute la construction la plus avantageuſe, puisqu'on obtiendroit par ce moyen la plus grande ſurface poſſible pour la même longueur des ailes. Car, puisque le moment d'impulſion eſt proportionnel à la ſurface des ailes, le plus ſûr moyen de l'augmenter eſt de rendre cette ſurface auſſi grande qu'il eſt poſſible ; mais il eſt bien à remarquer, que je ſuppoſe ici l'angle θ fort proche d'un droit ; & parce qu'on a alors $y = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \frac{1}{3}\,\text{tang}\,\theta$, la viteſſe des ailes à leur extrémité doit ſurpaſſer celle du vent. Or, ayant fixé une certaine ſurface, qu'on veut donner aux ailes, il importe peu pour le moment d'impulſion, qu'elle figure on voudra choiſir : mais pour la fermeté de la machine il n'en eſt pas de même, & moins on s'écarte de l'axe, moins elle ſouffrira : d'où la diſpoſition des ailes ſeroit la plus avantageuſe, ſi l'on rempliſſoit de la ſurface donnée un eſpace circulaire autour de l'axe. Mais il faut auſſi remarquer qu'alors le mouvement de rotation des ailes, & partant auſſi de l'axe, deviendroit plus rapide. On fera donc bien de joindre toutes ces conſidérations enſemble, & alors il ne ſera plus difficile de porter la conſtruction des moulins à vent au plus haut degré de perfection, dont ils ſont ſuſceptibles.