1758

Demonstratio nonnullarum insignium proprieatatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita

Leonhard Euler

tamen prima eius quasi fundamenta adhuc inter desiderata sint referenda. Quanquam enim nunc equidem ista fundamenta in lucem protraxisse arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria sunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonstrationibus adhuc destitui, quae ideo potissimum hic proponenda duxi, vt alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes inuestigandas; quibus inuentis nullum plane est dubium, quin Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehatur.

DEMONSTRATIO NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM, QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA SVNT PRAEDITA.

Auct. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inuestigari solet, certas quasdam habent proprietates generales ac notissimas, veluti quod numerus angulorum aequalis sit numero laterum, et quod summa angulorum aequalis sit bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus similes proprietates solidorum hedris planis inclusorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aeque merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, seu Geometria proprie sic dicta, ita similia Stereometriae principia stabilire in mentem venit, ex quibus

bus formatio ſolidorum conſequatur, eorumque praecipue proprietates demonſtrari queant. In quo negotio maxime mirum viſum eſt, quod cum Stereometria iam a tot ſeculis aeque ac Geometria ſit exculta, eius tamen prima quaſi elementa adhuc eſſent incognita, neque quisquam in tam longo temporis interuallo ſit inuentus, qui ea inueſtigare, atque in ordinem redigere ſit conatus. Hoc autem labore ſuſcepto, cum plures inſignes proprietates, quae omnibus corporibus hedris planis contentis ſunt communes, detexiſſem, et quae omnino ſimiles videbantur earum, quae inter elementa figurarum planarum rectilinearum referri ſolent, non ſine ſumma admiratione deprehendi, praecipuas earum tantopere eſſe reconditas, vt tum temporis omne ſtudium in earum demonſtratione eruenda fruſtra impendiſſem. Neque etiam ab amicis in his rebus alias verſatiſſimis, quibuscum illas proprietates communicaueram quicquam luminis mihi eſt accenſum, vnde has demonſtrationes deſideratas haurire potuisſem. Contemplatione enim plurium corporum generum eo ſum deductus, vt proprietates, quas in illis deprehenderam, ad omnia plane corpora patere intellexiſſem, etiamſi id mihi rigida demonſtratione oſtendere non licuiſſet; ſicque iſtas proprietates in eam veritatum claſſem referendas cenſebam, quas nobis quidem agnoſcere, non vero demonſtrare eſſet conceſſum.

Solidorum autem proprietates generales, quae demonſtratione adhuc indigent, ab vna pendent, ita vt ſi hanc demonſtrare liceret, cuncta, quae exhibui, Stereometriae elementa aeque eſſent firmata, atque elementa Geometriae. Proprietas vero iſta nondum demonſtrata, quae plures alias in se complectitur, hac continetur propositione:

In omni solido hedris planis incluso numerus angulorum solidorum vna cum numero hedrarum binario superat numerum acierum.

Hinc aliam deriuaui non minus insignem proprietatem omnibus huius generis solidis communem, quae ita se habet:

In omni solido hedris planis incluso summa omnium angulorum planorum, quibus anguli solidi constituuntur, aequalis est quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo.

Haecque propositio ita cum praecedente cohaeret, vt si altera demonstrari posset, simul alterius demonstratio haberetur; vnde defectus elementorum Stereometriae, quae in medium protuli, supplebitur, si harum duarum propositionum alterutrius demonstratio reperietur.

Cum autem hoc argumentum denuo perpendissem, desideratas harum propositionum demonstrationes tandem sum adeptus, ad quas simili fere modo perueni, quo in Geometria propositio analoga de summa angulorum figurae cuiusuis rectilineae demonstrari solet. Quemadmodum enim in Geometria figura quaecunque rectilinea resecandis continuo angulis tandem ad triangulum reducitur, ita proposito quocunque solido hedris planis incluso, obseruaui, inde continuo angulos solidos resecari posse, vt tandem pyramis triangularis remaneat, quae cum sit figura inter solida simplicissima, ex cognitis eius proprietatibus hoc modo perspexi, vicissim ad proprietates omnivm solidorum ascendi posse. In pyramide enim trigonali numerus angulorum solidorum est $= 4$, nume-

rus

rus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, cuius duplum 12 dat numerum angulorum planorum, quorum ſumma aequalis eſt 8 angulis rectis.

Sumto quidem puncto quocunque intra ſolidum, ſi inde ad ſingulos angulos ſolidos lineae rectae ductae concipiantur, ſolidum hoc modo in totidem pyramides dividetur, quot ſunt hedrae, quippe quae ſingulae baſes pyramidum conſtituent, dum earum vertices in illo puncto vniuntur. Atque hae pyramides, niſi ſint triangulares, porro facile in triangulares diſſecabuntur. Verum hic modus ſolidum quodcunque in pyramides triangulares reſoluendi ad praeſens inſtitutum parum confert; alterum ergo modum, quo quoduis ſolidum reſecandis ſucceſſiue eius angulis ſolidis tandem ad pyramidem triangularem redigitur, hic exponam, vnde deinceps demonſtratio memoratarum propoſitionum facile concinnabitur.

Similis autem haec operatio eſt eius, qua quaelibet figura rectilinea, dum eius anguli ſucceſſiue reſecantur, tandem in triangulum redigi ſolet. Si enim habeatur figura plana quotcunque laterum ABCDEFGA, ſi ab ea per rectam CE triangulum CDE reſecetur, remanebit figura ABCEFGA, cuius numerus angulorum vnitate erit minor. Si iam denuo recta CF triangulum CFE reſecetur, figura remanebit ABCFGA; vnde ſi porro triangulum BCF, tumque triangulum BGF abſcindatur, relinquetur tandem triangulum ABG. Tab. III. Fig. 1.

Ex hac reſolutione facile ambae palmariae figurarum planarum proprietates demonſtrantur: Sit enim figurae ABCDEFG numerus laterum $= L$, et numerus angulorum $= A$; ac ſi ducenda recta CE inde

angulus

angulus D resecetur, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - 1$; numerus autem laterum, quia duo latera C D, et D E sunt sublata, eorum autem loco nouum latus C E accessit, erit $= L - 1$. Hinc patet, si denuo vnus angulus resecetur, numerum angulorum fore $= A - 2$, numeromque laterum $= L - 2$; atque si iam hoc modo n anguli fuerint resecti, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - n$, et numerus laterum $= L - n$. Sit iam haec figura residua triangulum, erit $A - n = 3$, et $L - n = 3$; vnde sequitur fore $L = A$, seu in quauis figura rectilinea numerum laterum aequalem esse numero angulorum.

Deinde sit R numerus angulorum rectorum, quibus omnes anguli figurae propositae A B C D E F G simul sumti sunt aequales, atque resecto angulo D, seu triangulo C D E, ab angulis figurae auferantur tres anguli trianguli C D E, qui cum aequales sint duobus rectis, summa angulorum figurae residuae A B C E F G aequabitur $R - 2$ angulis rectis, numero angulorum existente iam $= A - 1$. Si denuo angulus resecetur, vt numerus angulorum sit $= A - 2$, eorum summa erit $= R - 4$ rectis; atque si iam n angulos absciderimus, vt figurae residuae numerus angulorum sit $= A - n$, eorum summa aequabitur $R - 2n$ angulis rectis. Sit nunc ista figura residua triangulum, seu $A - n = 3$, quia summa angulorum est $= 2$ rectis, erit $R - 2n = 2$; inde vero est $2A - 2n = 6$, a qua, si ista aequatio auferatur, erit $2A - R = 4$, seu $R = 2A - 4 = 2L - 4$: sicque constat, in quouis polygono summam omnium angulorum aequalem esse bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor.

Simili

Simili igitur modo, quo ex tali figurarum rectilinearum sectione duas praecipuas huiusmodi figurarum proprietates elicui, pro solidis inuestigationem instituam, dum omnia solida hedris planis inclusa successiua angulorum solidorum resectione tandem ad pyramides triangulares sum reducturus; quorsum cum peruenero, numerus angulorum solidorum, numerus hedrarum, numerus acierum, et summa angulorum planorum omnium erunt cognita. Quae quo fiant planiora, totam rem sequentibus propositionibus complectar.

PROPOSITIO I. PROBLEMA

1. *Proposito solido quocunque hedris planis incluso inde datum angulum solidum ita resecare, vt in solido residuo numerus angulorum solidorum vnitate sit minor.*

SOLVTIO.

Sit O angulus solidus obtruncandus, in quo coeant acies AO, BO, CO, DO, EO, FO, ita, vt is formatus sit ab angulis planis AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA, atque puncta A, B, C, D, E, F repraesentent angulos solidos vicinos corporis, qui cum angulo O cohaerent rectis AO, BO, CO, DO, EO, FO. Cum iam eiusmodi pars a solido abscindi debeat, vt angulus solidus O inde penitus auferatur, reliqui vero omnes relinquantur, neque tamen nouus angulus solidus efformetur, prima sectio instituatur per angulum quempiam vicinum B, secundum planum ABC, donec pertingat ad angulos A et C, tum ex O fiat sectio AOC; quo pacto a so- Fig. 2.

 lido

lido resecabitur pyramis triangularis OABC. Tum cultro ad AC applicato sectio dirigatur ad angulum F per planum AFC, et ex O alia sectio FOC fiat, vt separetur pyramis triangularis OACF. Porro secetur solidum secundum planum CDF, et ex O alia sectio ad DF vsque instituatur, vt hoc modo rescindatur pyramis triangularis OCDF. Denique sectio secundum DEF facta resecabit pyramidem triangularem ODEF; sicque angulus solidus O omnino erit obtruncatus, et quia reliqui anguli solidi manent, nullusque nouus per sectiones factas est formatus, numerus angulorum solidorum in corpore residuo vnitate erit diminutus. Q. E. E.

COROLL. 1.

2. Si solidum ipsum fuerit pyramis triangularis, per huiusmodi sectionem tota remouebitur, vt nihil relinquatur. Verum quia hanc sectionem ideo instituimus, vt tandem ad pyramidem triangularem corpus reducamus, si iam fuerit huiusmodi pyramis, sectione plane non erit opus.

COROLL. 2.

3. Si angulus solidus O, a corpore resecandus, a tribus tantum angulis planis formetur; seu si tres tantum acies in eo concurrant, tum vnica sectione a corpore abscindetur, hocque modo vnica pyramis triangularis auferetur.

COROLL. 3.

4. Si angulus solidus O a quatuor angulis planis formetur,

formetur, totidemque acies in eo concurrant, tum ad eum obtruncandum duae pyramides triangulares resecari debent. Hoc autem duplici modo fieri poterit; nam Fig. 20 duae pyramides resecandae erunt vel OABC et OACD, vel OABD et OBCD. Ac nisi puncta A, B, C, D fuerint in eodem plano, inde solidum residuum diuersam accipiet figuram.

COROLL. 4.

5. Si angulus solidus a quinque angulis planis formetur, rectaeque in eo coeuntes ad quinque alios angulos solidos porrigantur, tum angulus O resecabitur tribus pyramidibus triangularibus abscindendis, hocque quinque diuersis modis fieri poterit, qui diuersa quoque residua relinquant, nisi quinque anguli solidi vicini fuerint in eodem plano siti.

COROLL. 5.

6. Cum igitur ista vnius anguli solidi resectio in quolibet corporis propositi angulo suscipi queat, eaque nisi tres tantum anguli plani ad angulum solidum formandum concurrant, pluribus modis institui possit, patet, quodlibet corpus solidum, nisi iam sit pyramis triangularis, pluribus modis vno angulo solido mutilari posse.

COROLL. 6.

7. Quotcunque ergo corpus propositum habuerit angulos solidos, dum hoc modo eorum numerus continuo vnitate diminuitur, tandem cum quatuor tantum an-

guli solidi superfuerint, id in pyramidem triangularem
erit redactum, et quoniam singulae partes abscissae sunt
pyramides triangulares, hoc modo totum corpus in py-
ramides triangulares dissecabitur.

SCHOLION.

8. Si in solido proposito numerus angulorum so-
lidorum sit $= S$, postquam modo indicato vnus eorum
fuerit resectus, in corpore residuo numerus angulorum
solidorum erit $= S - 1$. In qua diminutione cum vis
propositionis contineatur, ea pluribus casibus exceptione
indigere videtur; si enim corpus propositum fuerit py-
Fig. 4 ramis triangularis, resecto vno angulo simul tota pyra-
mis aufertur, ita, vt nihil relinquatur. Sectione enim
facta secundum planum A B C, quod basin pyramidis
O A B C constituit simul tota pyramis rescinditur. Ve-
rum hoc casu res ita concipi potest, ac si basis A B C
relinquatur, quae etsi est figura plana nulla crassitie prae-
dita, tamen instar solidi tribus tantum angulis constantis
spectari potest, quod duas hedras, tresque acies habere
censendum est; referet scilicet prisma triangulare altitu-
dinis euanescentis, in quo hedrae laterales in nihilum ab-
eant, et basis superior cum suis angulis in basin inferio-
rem incidat. Hoc autem modo ambae supra memora-
tae solidorum proprietates in saluo manent; quia enim
numerus angulorum solidorum hoc casu fit $S = 3$, nu-
merus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = 3$,
patet, esse $S + H = A + 2$. Tum vero summa an-
gulorum planorum in vtraque hedra contentorum aequa-
tur

tur 4 angulis rectis, qui numerus est $= 4S - 8$. Idem euenit in omnibus pyramidibus, si angulus verticalis O inde resecatur, vbi tota pyramis simul tollitur, tunc autem sola basis relinqui concipienda est, quae si sit polygonum n laterum, spectari poterit instar solidi, in quo numerus angulorum solidorum sit $S = n$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = n$, ita vt denuo sit $S + H = A + 2$. Deinde cum vtraque hedra sit polygonum n laterum, omnes anguli in ambabus contenti aequabuntur $4n - 8 = 4S - 8$ angulis rectis, vti alterum Theorema postulat. Etsi autem hi casus veritati non aduersantur, tamen in praesenti negotio non opus est ad eos attendere; cum enim propositum sit omnia solida ad pyramides triangulares reuocare, si solidum iam fuerit istiusmodi pyramis, resectione cuiuspiam anguli penitus erit supersedendum; sin autem sit pyramis basin habens plurium laterum, tum non angulum verticalem, sed quempiam angulorum ad basin sitorum inde abscindi conveniet, qui tribus tantum angulis planis formantur; hoc modo semper post resectionem pyramis relinquetur, cuius angulorum solidorum numerus vno erit minor, quam ante. Atque generatim quodcunque proponatur solidum, semper conueniet resectionem incipi ab angulo solido, qui quam paucissimis angulis planis sit formatus, vt semper quaedam solidi portio sit remansura, donec ad pyramidem triangularem perueniatur. Interim tamen vis sequentium demonstrationum ab hac limitatione non pendet, quippe quam tantum eum in finem adieci, vt incommodum apparens non verum euitetur.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

9. *Si a corpore proposito angulus quispiam solidus modo ante exposito resecetur, sicque numerus angulorum solidorum vnitate diminuatur, determinare in corpore relicto tam numerum hedrarum, quam numerum acierum, itemque summam omnium angulorum planorum.*

SOLVTIO.

Pro solido proposito sit numerus angulorum solidorum $= S$, numerus hedrarum $= H$, numerus acierum $= A$, et omnium angulorum planorum summa aequetur Fig. 2. R angulis rectis. Sit iam O angulus solidus resecandus, ita, vt eo resecto in solido reliquo numerus angulorum solidorum futurus sit $= S - 1$; atque vt reliquas solidi remanentis affectiones cognoscamus, contemplemur primo summam angulorum planorum, quam in solido integro ponimus $= R$ angulis rectis. Primo autem resectione anguli O ex computo angulorum planorum egrediuntur omnes anguli in triangulis AOB, BOC, COD, DOE, EOF, et FOA contenti, quoniam haec triangula a superficie corporis abscinduntur. Sit n numerus horum triangulorum, seu angulorum vicinorum A, B, C, D, etc; atque summa angulorum ablatorum erit $= 2n$ angulis rectis. At abscissis his triangulis eorum loco superficies corporis iam terminabitur triangulis ABC, ACF, CFD, et DFE, quorum numerus illo est binario minor, ideoque $= n - 2$. Cum nunc horum triangulorum anguli superaccedant, eorumque summa sit $= 2n - 4$ angulis rectis, manifestum est, per resectionem anguli

anguli solidi O summam angulorum planorum R primo imminui $2n$ angulis rectis, tum vero iterum augeri $2n-4$ angulis rectis, ex quo diminutio erit 4 ang. rect. Hinc in solido residuo summa omnium angulorum planorum aequabitur $R-4$ rectis, sicque quouis angulo solido resecto summa omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis.

Si omnes hedrae in O concurrentes fuerint triangula, abscissione anguli O cunctae istae hedrae resecantur, quarum numerus si dicatur n; hinc numerus hedrarum H diminuetur numero n; at loco harum hedrarum novae ex sectione ortae hedrae triangulares in superficie corporis apparebunt, scilicet ABC, ACF, CFD, DFE, quarum numerus est $= n-2$; hinc numerus hedrarum, qui ante erat H, nunc erit $H-n+(n-2)=H-2$. Verum si eueniat, vt horum triangulorum duo pluraue in eodem plano sint sita, veluti si triangula ABC, et ACF sint in eodem plano constituta, ea iam non duas, sed vnicam hedram quadrilateram exhibere censentur, ita vt numerus hedrarum futurus sit $= H-3$; ac si huius modi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, numerus hedrarum erit $= H-2-\mu$. At si hedrarum in O concurrentium non omnes fuerint triangulares, sed vna veluti AOFQP pluribus lateribus constet, manifestum est, resectione trianguli AOF non totam hedram auferri, sed partem reliquam AFQP etiam nunc in censum hedrarum ingredi; ita numerus hedrarum erit $= H-2-\mu+1$; atque si inter hedras in O coeuntes reperiantur ν hedrae non triangulares, numerus hedrarum reliquarum erit $= H-2-\mu+\nu$.

Pro

Pro numero acierum, quae poſt reſectionem anguli O ſupererunt, inueſtigando, ponamus primo vt ante, omnes hedras in O conuenientes eſſe triangula; ac primo quidem ex acierum numero recedent acies O A, O B, O C, O D, etc. quarum numerus eſt $= n$, earum vero loco de nouo accedent acies A C, C F, F D, quarum numerus eſt $= n - 3$; ſicque acierum numerus erit $= A - n + (n - 3) = A - 3$, ſi quidem nouae hedrae A B C, A C F, etc. fuerint inuicem inclinatae: At ſi duae earum A B C, et A C F in eodem plano ſint ſitae, vt vnicam hedram conſtituere cenſeantur, euaneſcet acies A C, eritque acierum numerus $A - 3 - 1$: ac ſi huiusmodi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, vt ante poſuimus, numerus acierum erit $= A - 3 - \mu$. Deinde ſi quaepiam hedrarum angulum O formantium non ſit trigonalis, videlicet hedra AOFQP, tum abſciſſione trianguli AOF noua acies exiſtit AF, quae ante non aderat, vnde numerus acierum hoc caſu vnitate augebitur. Ac ſi, vt ante poſuimus, inter hedras in O coeuntes ν hedrae non triangulares reperiantur, numerus acierum in corpore propopoſito poſt reſectionem anguli O erit $= A - 3 - \mu + \nu$, cum ante fuiſſet $= A$. Q. E. I.

COROLL. 1.

10. Quod ſi ergo ſolidum hedris planis incluſum vno angulo ſolido mutiletur, vt angulorum ſolidorum numerus nunc ſit $= S - 1$, cum ante eſſet $= S$, ſumma omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis, ſeu cum ante fuiſſet $= R$ angulis rectis, nunc erit $= R - 4$ angulis rectis.

COROLL.

COROLL. 2.

11. Cum numerus hedrarum, qui ante erat $=H$, nunc post detruncationem anguli O fit $= H - 2 - \mu + \nu$, patet, fieri posse, vt numerus hedrarum maior euadat, id quod eueniet, si fit $\nu > 2 + \mu$, vbi μ et ν eos obtinent valores, qui in solutione sunt assignati.

COROLL. 3.

12. Idem patet euenire posse in numero acierum, qui cum ante mutilationem anguli O esset $= A$, nunc repertus est $= A - 3 - \mu + \nu$; qui numerus illo maior est, si $\nu > 3 + \mu$; hoc ergo casu multo magis numerus hedrarum augetur.

COROLL. 4.

13. Cum in expressionibus $H - 2 - \mu + \nu$, et $A - 3 - \mu + \nu$ litterae μ et ν idem significent, patet, decrementum numeri acierum A vnitate maius esse, quam decrementum numeri hedrarum. Ita si numerus hedrarum post obtruncationem vnius anguli solidi fiat $= H - \alpha$, numerus acierum fiet $= A - \alpha - 1$.

COROLL. 5.

14. Hinc ergo differentia inter numerum hedrarum, et numerum acierum, quae initio erat $= A - H$, nunc post remotionem vnius anguli solidi erit $= A - H - 1$. Haec scilicet differentia semper vnitate fit minor, vtcunque corpus ratione litterarum μ et ν fuerit comparatum.

SCHOLION.

15. Ex his iam facillime Theorematum supra memoratorum demonstrationes concinnare licebit, quae nulla re inferiores sint demonstrationibus in Geometria

vſitatis, niſi quod hic ob ſolidorum indolem plus imaginationi ſit tribuendum, ſiquidem ſolida ſuper plano depingantur: at ſi huiusmodi figurae corporeae formarentur, omnia aeque clara eſſent futura. Ceterum quae in ſolutione iſtius problematis aſſumſi, per ſe ſunt manifeſta; ſi enim habeatur polygonum A B C D E F, n lateribus terminatum, leuiter attendenti mox patebit, ſi ea figura diagonalibus ducendis in triangula diſſecetur, numerum horum triangulorum fore $= n - 2$, numerumque diagonalium hoc modo ductarum $= n - 3$: quadrilaterum enim vna diagonali in dua triangula, pentagonum duabus diagonalibus in tria triangula, et hexagonum tribus diagonalibus in quatuor triangula diſpertitur, et ita porro.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

16. *In omni ſolido hedris planis incluſo ſumma omnium angulorum planorum, qui in eius hedris exiſtunt, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot ſunt anguli ſolidi, demtis octo; ſeu ſi numerus angulorum ſolidorum ſit* $= S$, *ſumma omnium angulorum planorum aequatur* $4 S - 8$ *angulis rectis.*

DEMONSTRATIO.

In ſolido quocunque ſit numerus angulorum ſolidorum $= S$, ſumma autem omnium angulorum planorum aequetur R angulis rectis, ita vt demonſtrari oporteat, eſſe $R = 4 S - 8$. Iam modo ante indicato abſcindatur a ſolido vnus angulus ſolidus, vt numerus angulorum ſolidorum, quos habebit, ſit $= S - 1$, et ſumma angulorum

lorum planorum erit $= R - 4$ angulis rectis. Si denuo angulus solidus resecetur, vt reliquorum numerus sit $S - 2$, angulorum planorum summa erit $= R - 8$, atque ita pergendo patebit, pro quouis angulorum solidorum numero summam omnium angulorum planorum fore, vt tabella sequens indicat.

Numerus angulorum solidorum	Summa omnium angulorum planorum
S	R angulis rectis
$S - 1$	$R - 4$
$S - 2$	$R - 8$
$S - 3$	$R - 12$
:	:
:	:
$S - n$	$R - 4n$

Cum igitur hac continua mutilatione peruenerimus ad $S - n$ angulos solidos, summa angulorum planorum erit $= R - 4n$ angulis rectis. At hoc modo tandem peruenietur ad 4 angulos solidos, quo casu corpus abibit in pyramidem triangularem, in qua constat, summam omnium angulorum planorum esse aequalem 8 angulis rectis: hoc est, si sit $S - n = 4$, erit $R - 4n = 8$, seu $R = 4n + 8$. At inde est $n = S - 4$, quo valore hic substituto fiet $R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8$, ita vt in quouis solido summa angulorum planorum aequetur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo. Q. E. D.

SCHOLION.

17. Quanquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, vt cum hoc fuerit demonstratum, simul illius veritas sit euicta, tamen ex problemate praemisso etiam alterius Theorematis demonstratio confici potest sequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

18. *In omni solido hedris planis incluso numerus hedrarum vna cum numero angulorum solidorum, binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Sit in solido quocunque proposito:

numerus angulorum solidorum $= S$
numerus hedrarum - - - $= H$
numerus acierum - - - $= A$

atque ante vidimus, si resectione vnius anguli solidi numerus S vnitate minuatur, vt sit $S - 1$, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram esse $= A - H - 1$. Continuata ergo hac mutilatione,

si numerus angulorum solidorum sit,	Excessus numeri acierum super numerum hedrarum erit
S	$A - H$
$S - 1$	$A - H - 1$
$S - 2$	$A - H - 2$
$S - 3$	$A - H - 3$
⁚	⁚
⁚	⁚
$S - n$	$A - H - n$

Quando

Quando ergo hoc modo ad pyramidem triangularem deuenietur, in qua numerus angulorum solidorum est $= 4$, numerus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, ita vt excessus numeri acierum supra numerum hedrarum futurus sit $= 2$; euidens est, si fiat $S - n = 4$, fore $A - H - n = 2$. Inde ergo est $n = S - 4$, hinc vero $n = A - H - 2$; sicque habetur $S - 4 = A - H - 2$, seu $H + S = A + 2$; vnde constat, in omni solido hedris planis incluso numerum hedrarum H vna cum numero angulorum solidorum S binario superare numerum acierum A. Q. E. D.

SCHOLION.

19. Demonstratis ergo his Theorematibus, elementa Stereometriae, quae ante aliquod tempus explicaui, firmissimis demonstrationibus sunt munita, ita vt elementis Geometriae nihil plane concedant. Verum prima tantum Stereometriae elementa sic in medium attulisse fateor, quibus haec scientia vlterius excolenda superstrui debeat: quippe quae plurimas praeclaras corporum affectiones in se complectitur, quas adhuc omnino ignoramus. Cum autem cuiusque solidi propositi soliditas quaeri soleat, coronidis loco modum tradam, soliditatem cuiusuis pyramidis triangularis inueniendi; cum enim puncto quocunque intra solidum hedris planis inclusum assumto, solidum in tot pyramides resoluatur, quot habet hedras, dum quaelibet hedra basin pyramidis constituit, quaeuis autem pyramis, cuius basis non est triangularis, facile in pyramides triangulares resoluatur; sufficit, pyramidis triangularis soliditatem inuenisse. Quae cum obtineatur, si basis per tertiam

partem altitudinis multiplicetur, ostendam, quem ad modum, si latera pyramidis fuerint data, ex iis soliditas definiri queat; perinde ac area trianguli ex datis tribus lateribus determinari solet.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

20. *Datis sex lateribus seu aciebus pyramidis triangularis, eius soliditatem inuenire.*

SOLVTIO.

Fig. 5. Sit A B C D pyramidis triangularis, cuius basis triangulum A B C, et vertex D; ac ponantur eius latera: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$. Iam in hedris ADB, et ADC ex D ad bases oppositas demittantur perpendicula D P, et D Q, et in basi A B C ex punctis P, et Q educantur ad latera A B, et A C normales P O, et Q O se mutuo secantes in O, erit recta D O perpendicularis ex vertice D in basin A B C, vnde soliditas pyramidis erit $= \frac{1}{3} DO \times$ aream ABC; at ducta A O, erit $DO = \sqrt{(AD^2 - AO^2)} = \sqrt{(AD^2 - AP^2 - PO^2)}$. Iam ex elementis Geometriae constat, esse, $AP = \frac{aa + dd - ee}{2a}$. et $AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}$ Hinc producta Q O in S, si angulus B A C vocetur $= \alpha$, erit $QS = AQ \text{ tang. } \alpha$, et $AS = \frac{AQ}{\cos. \alpha}$, hinc $PS = \frac{AQ}{\cos. \alpha} - AP$. At cum sit $QS : AQ : AS = PS : PO : OS$, erit $PO = \frac{AQ \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\text{tang.} \alpha} = \frac{AQ}{\sin. \alpha} - \frac{AP}{\text{tang.} \alpha}$, seu $PO = \frac{AQ - AP \cos. \alpha}{\sin. \alpha}$; tum vero $OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\sin. \alpha} = \frac{AQ}{\sin. \alpha \cos. \alpha} - \frac{AP}{\sin. \alpha}$, ideoque $QO = QS - OS = AQ \text{ tang. } \alpha$

$- AQ$

$-\frac{AQ}{\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\alpha}+\frac{AP}{\text{fin.}\,\alpha}=\frac{AP-AQ\,\text{cof.}\,\alpha}{\text{fin.}\,\alpha}$. Hinc erit $AO^2=AP^2+PO^2=\frac{AP^2+AQ^2-2AP.AQ\,\text{cof.}\,\alpha}{\text{fin.}\,\alpha^2}$; ideoque $DO^2=\frac{AD^2\,\text{fin.}\,\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ\,\text{cof.}\,\alpha}{\text{fin.}\,\alpha^2}$. Verum area trianguli A B C eſt $=\frac{1}{2}ab$ fin. α, ex quo erit ſoliditas pyramidis $=\frac{1}{6}ab\surd(AD^2\,\text{in}\,\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ.\text{cof.}\,\alpha)=\frac{1}{6}\surd[aabbdd\,\text{fin.}\,\alpha^2-\frac{1}{4}bb(aa+dd-ee)^2-\frac{1}{4}aa(bb+dd-ff)^2+\frac{1}{2}ab(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\,\text{cof.}\,\alpha]$. Deinde ex triangulo A B C eſt $\text{cof.}\,\alpha=\frac{aa+bb-cc}{2ab}$, ideoque $\text{fin.}\,\alpha^2=1-\frac{1}{4aabb}(aa+bb-cc)^2$, quibus valoribus ſubſtitutis prodibit ſoliditas pyramidis:

$$\frac{1}{12}\surd\left(\begin{array}{c}4aabbdd-dd(aa+bb-cc)^2-bb(aa+dd-ee)^2-aa(bb+dd-ff)^2\\ +(aa+bb-cc)(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\end{array}\right)$$

quae terminis euolutis in ſequentem abit formam:

$$\frac{1}{12}\surd\left(\begin{array}{c}aaccdd+aabbee+aabbff+aaddff+bbccdd+bbddee\\ aaccff+aaeeff+bbccee+bbeeff+ccddee+ccddff\\ -aabbcc-aaddee-bbddff-cceeff\\ -a^4ff-aaf^4-b^4ee-bbe^4-c^4dd-ccd^4\end{array}\right)$$

quae adhuc commodius ita exhiberi poſſe videtur:

$$\frac{1}{12}\surd\left\{\begin{array}{l}+aaff(bb+cc+dd+ee)-aaff(aa+ff)-aabbcc\\ +bbee(aa+cc+dd+ff)-bbee(bb+ee)-aaddee\\ +ccdd(aa+bb+ee+ff)-ccdd(cc+dd)-bbddff\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -cceeff\end{array}\right)$$

Sicque ex datis ſex lateribus a, b, c, d, e, f pyramidis triangularis eius ſoliditas definitur. Q. E. I.

SCHOLION I.

21. Quo ratio, qua in hac expreſſione latera a, b, c, d, e, f inter ſe combinantur, clarius perſpiciatur, notandum eſt, ex iis quatuor formari triangula, ſcilicet

Δ A B C conſtat lateribus a, b, c
Δ A B D - - - - a, d, e
Δ A C D - - - - b, d, f

Δ B C D

$\triangle$ BCD - - - - c, e, f

vnde patet, latus a cum ſingulis reliquorum ad triangula conſtituenda concurrere, praeter quam cum latere f, quamob rem haec latera a et f disiuncta appellabo, quia inter ſe non iunguntur; ſimili modo latera b et e erunt disiuncta, itemque latera c et d.

Occurrunt ergo poſt ſignum radicale primo termini ex lateribus disiunctis formati $aaff$, $bbee$, $ccdd$, qui ſunt multiplicati per ſummam quadratorum reliquorum, deinde iidem termini negatiue ſumti multiplicantur per ſummam ſuorum quadratorum, hincque denique ſubtrahuntur producta ex quadratis ternorum laterum cuiusque trianguli.

SCHOLION 2.

22. Formula quoque pro ſoliditate pyramidis inveniri poteſt aliquanto ſimplicior, ſi tria tantum latera in vno angulo ſolido coeuntia dantur, vna cum angulis planis, quos ibi conſtituunt.

Sint enim tria latera in angulo ſolido A coeuntia

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = d$$

deinde anguli plani:

$$BAC = p; \; BAD = q; \; CAD = r.$$

Atque ex his ſoliditas pyramidis erit

$$\tfrac{1}{6}\, abd \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,p^2 - \text{coſ.}\,q^2 - \text{coſ.}\,r^2 + 2\,\text{coſ.}\,p\,.\,\text{coſ.}\,q\,.\,\text{coſ.}\,r)}$$

quae reducitur ad formam ſequentem:

$$\tfrac{1}{3}\, abd \sqrt{\text{ſin.}\,\tfrac{p+q+r}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{p+q-r}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{p+r-q}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{q+r-p}{2}};$$

vnde patet, vt area prodeat realis, trium angulorum planorum p, q, et r, in angulo quouis ſolido coeuntium binos ſimul ſumtos tertio maiores eſſe debere.

DE MO-

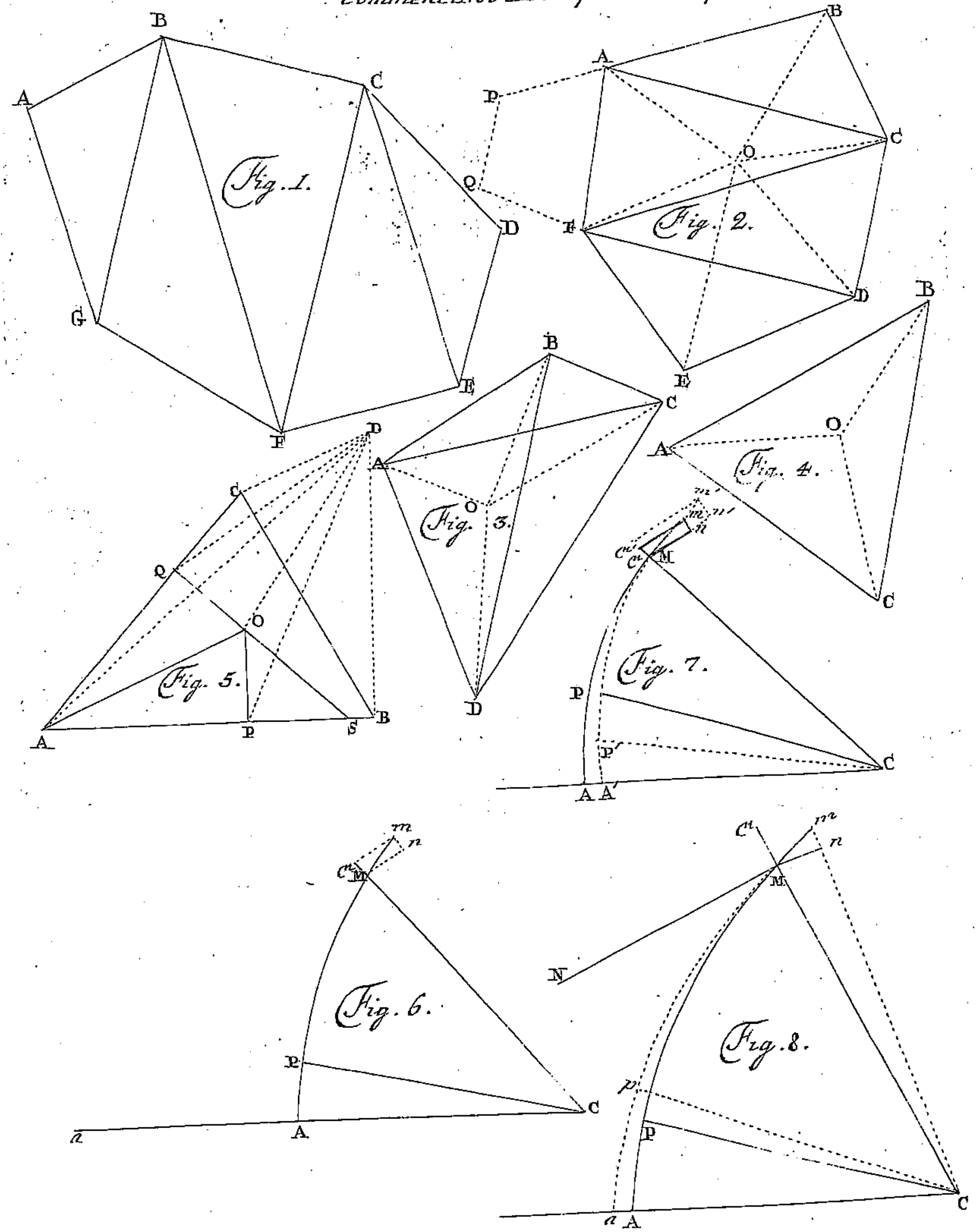
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.