



1758

Demonstratio nonnullarum insignium propriatatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Demonstratio nonnullarum insignium propriatatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita" (1758).
Euler Archive - All Works. 231.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/231>

tamen prima eius quasi fundamenta adhuc inter desiderata sint referenda. Quanquam enim nunc equidem ista fundamenta in lucem protraxisse arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria sunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonstrationibus adhuc destitui, quae ideo potissimum hic proponenda duxi, ut alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes inuestigandas; quibus inuentis nullum plane est dubium, quin Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehatur.

DEMONSTRATIO
NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM,
QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA
SVNT PRAEDITA.

Auth. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inuestigari solet, certas quasdam habent proprietates generales ac notissimas, veluti quod numerus angulorum aequalis sit numero laterum, et quod summa angulorum aequalis sit bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus similes proprietates solidorum hedris planis inclusorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aequè merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, seu Geometria proprie sic dicta, ita similia Stereometriae principia stabilire in mentem venit, ex quibus

bus formatio solidorum consequatur , eorumque praecipue proprietates demonstrari queant. In quo negotio maxime mirum visum est , quod cum Stereometria iam a tot seculis aequae ac Geometria sit excolta , eius tamen prima quasi elementa adhuc essent incognita , neque quisquam in tam longo temporis interuallo sit inuentus , qui ea inuestigare , atque in ordinem redigere sit conatus. Hoc autem labore suscepto , cum plures insignes proprietates , quae omnibus corporibus hedris planis contentis sunt communes , detexissem , et quae omnino similes videbantur earum , quae inter elementa figurarum planarum rectilinearum referri solent , non sine summa admiratione deprehendi , praecipuas earum tantopere esse reconditas , ut tum temporis omne studium in earum demonstratione eruenda frustra impendissem. Neque etiam ab amicis in his rebus alias versatissimis , quibuscum illas proprietates communicaueram quicquam luminis mihi est accensum , unde has demonstrationes desideratas haurire potuissem. Contemplatione enim plurium corporum generum eo sum deductus , ut proprietates , quas in illis deprehenderam , ad omnia plane corpora patere intellexissem , etiamsi id mihi rigida demonstratione ostendere non licuisset ; sicque istas proprietates in eam veritatum classem referendas censebam , quas nobis quidem agnoscere , non vero demonstrare esset concessum.

Solidorum autem proprietates generales , quae demonstratione adhuc indigent , ab vna pendent , ita ut si hanc demonstrare liceret , cuncta , quae exhibui , Stereometriae elementa aequae essent firmata , atque elementa Geometriae. Proprietas vero ista nondum demonstrata , quae

plures alias in se complectitur, hac continetur propositione:

In omni solido hedris planis incluso numerus angulorum solidorum una cum numero hedrarum binario superat numerum acierum.

Hinc aliam deriuavi non minus insignem proprietatem omnibus huius generis solidis communem, quae ita se habet:

In omni solido hedris planis incluso summa omnium angulorum planorum, quibus anguli solidi constituuntur, aequalis est quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo.

Haecque propositio ita cum praecedente cohaeret, ut si altera demonstrari posset, simul alterius demonstratio haberetur; unde defectus elementorum Stereometriae, quae in medium protuli, supplebitur, si harum duarum propositionum alterutrius demonstratio reperietur.

Cum autem hoc argumentum denuo perpendissem, desideratas harum propositionum demonstrationes tandem sum adeptus, ad quas simili fere modo perueni, quo in Geometria propositio analogae de summa angulorum figurae cuiusvis rectilineae demonstrari solet. Quemadmodum enim in Geometria figura quaecunque rectilinea resecandis continuo angulis tandem ad triangulum reducitur, ita proposito quocunque solido hedris planis incluso, obseruavi, inde continuo angulos solidos resecari posse, ut tandem pyramis triangularis remaneat, quae cum sit figura inter solida simplicissima, ex cognitis eius proprietatibus hoc modo perspexi, vicissim ad proprietates omnium solidorum ascendi posse. In pyramide enim triangulari numerus angulorum solidorum est $= 4$, nume-

rus hedrarum = 4, et numerus acierum = 6, cuius duplum 12 dat numerum angulorum planorum, quorum summa aequalis est 8 angulis rectis.

Sumto quidem puncto quocunque intra solidum, si inde ad singulos angulos solidos lineae rectae ductae concipiantur, solidum hoc modo in totidem pyramides dividetur, quot sunt hedrae, quippe quae singulae bases pyramidum constituent, dum earum vertices in illo puncto uniantur. Atque hae pyramides, nisi sint triangulares, porro facile in triangulares diffecabuntur. Verum hic modus solidum quodcunque in pyramides triangulares resoluendi ad praesens institutum parum confert; alterum ergo modum, quo quoduis solidum resecandis successive eius angulis solidis tandem ad pyramidem triangularem redigitur, hic exponam, unde deinceps demonstratio memoratarum propositionum facile concinnabitur.

Similis autem haec operatio est eius, qua quaelibet figura rectilinea, dum eius anguli successive rescantur, tandem in triangulum redigi solet. Si enim habeatur figura plana quocunque laterum ABCDEFGA, si ab ea per rectam CE triangulum CDE rescetur, remanebit figura ABCEFGA, cuius numerus angulorum unitate erit minor. Si iam denuo recta CF triangulum CFE rescetur, figura remanebit ABCFGA; unde si porro triangulum BCF, tumque triangulum BGF abscindatur, relinquetur tandem triangulum ABG.

Ex hac resolutione facile ambae palmariae figurarum planarum proprietates demonstrantur: Sit enim figurae ABCDEFG numerus laterum = L, et numerus angulorum = A; ac si ducenda recta CE inde
angulus

TAB. III.

Fig. 1.

angulus D refecetur, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - 1$; numerus autem laterum, quia duo latera CD , et DE sunt sublata, eorum autem loco novum latus CE accessit, erit $= L - 1$. Hinc patet, si denuo vnus angulus refecetur, numerum angulorum fore $= A - 2$, numerumque laterum $= L - 2$; atque si iam hoc modo n anguli fuerint refecti, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - n$, et numerus laterum $= L - n$. Sit iam haec figura residua triangulum, erit $A - n = 3$, et $L - n = 3$; vnde sequitur fore $L = A$, seu in quavis figura rectilinea numerum laterum aequalem esse numero angulorum.

Deinde sit R numerus angulorum rectorum, quibus omnes anguli figurae propositae $ABCDEF G$ simul sumti sunt aequales, atque refecto angulo D , seu triangulo CDE , ab angulis figurae auferantur tres anguli trianguli CDE , qui cum aequales sint duobus rectoris, summa angulorum figurae residuae $ABCEFG$ aequabitur $R - 2$ angulis rectoris, numero angulorum existente iam $= A - 1$. Si denuo angulus refecetur, vt numerus angulorum sit $= A - 2$, eorum summa erit $= R - 4$ rectoris; atque si iam n angulos absciderimus, vt figurae residuae numerus angulorum sit $= A - n$, eorum summa aequabitur $R - 2n$ angulis rectoris. Sit nunc ista figura residua triangulum, seu $A - n = 3$, quia summa angulorum est $= 2$ rectoris, erit $R - 2n = 2$; inde vero est $2A - 2n = 6$, a qua, si ista aequatio auferatur, erit $2A - R = 4$, seu $R = 2A - 4 = 2L - 4$: sicque constat, in quouis polygono summam omnium angulorum aequalem esse bis tot angulis rectoris, quot sunt latera demtis quatuor. Simili

Simili igitur modo, quo ex tali figurarum rectilinearum sectione duas praecipuas huiusmodi figurarum proprietates elicui, pro solidis inuestigationem instituiam, dum omnia solida hedris planis inclusa successiua angulorum solidorum resectione tandem ad pyramides triangulares sum reducturus; quorum cum peruenero, numerus angulorum solidorum, numerus hedrarum, numerus scierum, et summa angulorum planorum omnium erunt cognita. Quae quo fiant planiora, totam rem sequentibus propositionibus complectar.

PROPOSITIO I. PROBLEMA

x. Proposito solido quocunque hedris planis incluso inde datum angulum solidum ita resecare, ut in solido residuo numerus angulorum solidorum unitate sit minor.

S O L V T I O.

Sit O angulus solidus obtruncandus, in quo coeant Fig. 2.
 acies AO, BO, CO, DO, EO, FO , ita, ut is formatus sit ab angulis planis $AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA$, atque puncta A, B, C, D, E, F repraesentent angulos solidos vicinos corporis, qui cum angulo O cohaerent rectis AO, BO, CO, DO, EO, FO . Cum iam eiusmodi pars a solido abscindi debeat, ut angulus solidus O inde penitus auferatur, reliqui vero omnes relinquantur, neque tamen nouus angulus solidus efformetur, prima sectio instituat per angulum quempiam vicinum B , secundum planum ABC , donec pertingat ad angulos A et C , tum ex O fiat sectio AOC ; quo pacto a solido

Tom. IV. Nou. Com. T lido

lido: refecabitur pyramis triangularis $OABC$. Tum cull-
tro: ad AC applicato: sectio: dirigatur ad: angulum F per:
planum: AFC , et ex O alia: sectio: FOC fiat, vt: sepa-
retur: pyramis: triangularis $OACF$. Porro: secetur: folia-
dum: secundum: planum: CDF , et: ex O alia: sectio: ad:
 DF vsque: instituat, vt: hoc: modo: rescindatur: pyra-
mis: triangularis: $OCDF$. Denique: sectio: secundum:
 DEF facta: refecabit: pyramidem: triangularem: $ODEF$;;
sicque: angulus: solidus: O omnino: erit: obtruncatus, et:
quia: reliqui: anguli: solidi: manent, nullusque: novus: per:
sectiones: factas: est: formatus, numerus: angulorum: solido-
rum: in: corpore: residuo: unitate: erit: diminutus: **Q. E. E.**

C O R O L L E. 1.

2. Si: solidum: ipsum: fuerit: pyramis: triangularis, per: liti-
gsmodi: sectionem: tota: remouebitur, vt: nihil: relinqua-
tur. Verum: quia: hanc: sectionem: ideo: instituimus, vt:
tandem: ad: pyramidem: triangularem: corpus: reducamus, si:
iam: fuerit: huiusmodi: pyramis, sectione: plane: non: erit:
opus.

C O R O L L E. 2.

3. Si: angulus: solidus: O , a: corpore: refecandus, a:
tribus: tantum: angulis: planis: formetur, seu: si: tres: tan-
tum: acies: in: eo: concurrant, tum: vnica: sectione: a: cor-
pore: abscindetur, hocque: modo: vnica: pyramis: triangula-
ris: auferetur.

C O R O L L E. 3.

4. Si: angulus: solidus: O a: quatuor: angulis: planis:
formetur,

formetur, totidemque acies in eo concurrant, tum ad eum obtruncandum duae pyramides triangulares refecari debent. Hoc autem duplici modo fieri poterit; nam Fig. 3. duae pyramides refecandae erunt vel $OABC$ et $OACD$, vel $OABD$ et $OBCD$. Ac nisi puncta A, B, C, D fuerint in eodem plano, inde solidum residuum diuersam accipiet figuram.

COROLL. 4.

5. Si angulus solidus a quinque angulis planis formetur, rectaeque in eo coeuntes ad quinque alios angulos solidos porrigantur, tum angulus O refecabitur tribus pyramidibus triangularibus abscindendis, hocque quinque diuersis modis fieri poterit, qui diuersa quoque residua relinquant, nisi quinque anguli solidi vicini fuerint in eodem plano siti.

COROLL. 5.

6. Cum igitur ista vnus anguli solidi resectio in quolibet corporis propositi angulo suscipi queat, eaque nisi tres tantum anguli plani ad angulum solidum formandum concurrant, pluribus modis instari possit, patet, quodlibet corpus solidum, nisi iam sit pyramis triangularis, pluribus modis vno angulo solido mutilari posse.

COROLL. 6.

7. Quotcunque ergo corpus propositum habuerit angulos solidos, dum hoc modo eorum numerus continuo unitate diminuitur, tandem cum quatuor tantum anguli

guli solidi superfuert, id in pyramidem triangularem
 erit redactum, et quoniam singulae partes abscissae sunt
 pyramides triangulares, hoc modo totum corpus in py-
 ramides triangulares diffecabitur.

S C H O L I O N.

8. Si in solido proposito numerus angulorum so-
 lidorum sit $= S$, postquam modo indicato vnus eorum
 fuerit resectus, in corpore residuo numerus angulorum
 solidorum erit $= S - 1$. In qua diminutione cum vis
 propositionis contineatur, ea pluribus casibus exceptione
 indigere videtur; si enim corpus propositum fuerit py-
 ramis triangularis, resecto vno angulo simul tota pyra-
 mis aufertur, ita, vt nihil relinquatur. Sectione enim
 facta secundum planum $A B C$, quod basim pyramidis
 $O A B C$ constituit simul tota pyramis rescinditur. Ve-
 rum hoc casu res ita concipi potest, ac si basis $A B C$
 relinquatur, quae etsi est figura plana nulla crassitie prae-
 dita, tamen instar solidi tribus tantum angulis constantis
 spectari potest, quod duas hedras, tresque acies habere
 censendum est; referet scilicet prisma triangulare altitu-
 dinis euanescentis, in quo hedrae laterales in nihilum ab-
 eant, et basis superior cum suis angulis in basim inferio-
 rem incidat. Hoc autem modo ambae supra memora-
 tae solidorum proprietates in saluo manent; quia enim
 numerus angulorum solidorum hoc casu fit $S = 3$, nu-
 merus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = 3$,
 patet, esse $S + H = A + 2$. Tum vero summa an-
 gulorum planorum in vtraque hedra contentorum aequa-
 tur

tur 4 angulis rectis, qui numerus est $= 4S - 8$. Idem euenit in omnibus pyramidibus, si angulus verticalis O inde refecatur, vbi tota pyramis simul tollitur, tunc autem sola basis relinqui concipienda est, quae si sit polygonum n -laterum, spectari poterit instar solidi, in quo numerus angulorum solidorum sit $S = n$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = n$, ita vt denuo sit $S + H = A + 2$. Deinde cum vtraque hedra sit polygonum n -laterum, omnes anguli in ambabus contenti aequabuntur $4n - 8 = 4S - 8$ angulis rectis, vti alterum Theorema postulat. Etsi autem hii casus veritati non aduersantur, tamen in praesenti negotio non opus est ad eos attendere; cum enim propositum sit omnia solida ad pyramides triangulares reuocare, si solidum iam fuerit istiusmodi pyramis, refectione cuiuspiam anguli penitus erit superedendum; sin autem sit pyramis basin habens plurium laterum, tum non angulum verticalem, sed quempiam angulorum ad basin sitorum inde abscindi conueniet, qui tribus tantum angulis planis formantur; hoc modo semper post refectionem pyramis relinquetur, cuius angulorum solidorum numerus vno erit minor, quam ante. Atque generatim quodcunque proponatur solidum, semper conueniet refectionem incipi ab angulo solido, qui quam paucissimis angulis planis sit formatus, vt semper quaedam solidi portio sit remansura, donec ad pyramidem triangularem perueniatur. Interim tamen vis sequentium demonstrationum ab hac limitatione non pendet, quippe quam tantum eum in finem adieci, vt incommodum apprens non verum euitetur.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

Q. Si a corpore proposito angulus quispiam solidus modo ante exposito refecetur, sicque numerus angulorum solidorum unitate diminuatur, determinare in corpore relicto tam numerum hedrarum, quam numerum acierum, itemque summam omnium angulorum planorum.

S O L V T I O.

Pro solido proposito fit numerus angulorum solidorum $= S$, numerus hedrarum $= H$, numerus acierum $= A$, et omnium angulorum planorum summa aequetur $= R$ angulis rectis. Sit iam O angulus solidus refecandus, ita, ut eo refecto in solido reliquo numerus angulorum solidorum futurus sit $= S - 1$; atque ut reliquas solidi remanentis affectiones cognoscamus, contemplemur primo summam angulorum planorum, quam in solido integro ponimus $= R$ angulis rectis. Primo autem refectione anguli O ex computo angulorum planorum egrediuntur omnes anguli in triangulis $A O B$, $B O C$, $C O D$, $D O E$, $E O F$, et $F O A$ contenti, quoniam haec triangula a superficie corporis abscinduntur. Sit n numerus horum triangulorum, seu angulorum vicinorum A , B , C , D , etc; atque summa angulorum abiatorum erit $= 2n$ angulis rectis. At abscissis his triangulis eorum loco superficies corporis iam terminabitur triangulis $A B C$, $A C F$, $C F D$, et $D F E$, quorum numerus illo est binario minor, ideoque $= n - 2$. Cum nunc horum triangulorum anguli superaccedant, eorumque summa fit $= 2n - 4$ angulis rectis, manifestum est, per resectionem
anguli

anguli solidi O summam angulorum planorum R primo imminui $2n$ angulis rectis, tum vero iterum augeri $2n - 4$ angulis rectis, ex quo diminutio erit 4 ang. rect. Hinc in solido residuo summa omnium angulorum planorum aequabitur $R - 4$ rectis, sicque quouis angulo solido reflecto summa omnium angulorum planorum diminitur quatuor angulis rectis.

Si omnes hedrae in O concurrentes fuerint triangulã, abscissione anguli O cunctae istae hedrae resecantur, quarum numerus si dicatur n ; hinc numerus hedrarum H diminuetur numero n ; at loco harum hedrarum novae ex sectione orae hedrae triangulares in superficie corporis apparebunt, scilicet ABC , ACF , CED , DFE , quarum numerus est $= n - 2$; hinc numerus hedrarum, qui ante erat H , nunc erit $H - n + (n - 2) = H - 2$. Verum si eueniat, vt horum triangulorum duo pluraue in eodem plano sint sita, veluti si triangula ABC , et ACF fiat in eodem plano constituta, ea iam non duas, sed vnicam hedram quadrilateram exhibere censentur, ita vt numerus hedrarum futurus sit $= H - 3$; ac si huius modi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, numerus hedrarum erit $= H - 2 - \mu$. At si hedrarum in O concurrentium non omnes fuerint triangulares, sed vna veluti $AOFQP$ pluribus lateribus constet, manifestum est, resectione trianguli AOF non totam hedram auferri, sed partem reliquam $AFQP$ etiam nunc in censum hedrarum ingredi; ita numerus hedrarum erit $= H - 2 - \mu + 1$; atque si inter hedras in O coeuntes reperiantur ν hedrae non triangulares, numerus hedrarum reliquarum erit $= H - 2 - \mu + \nu$.

Pro

Pro numero acierum, quae post resectionem anguli O supererunt, inuestigando, ponamus primo vt ante, omnes hedras in O conuenientes esse triangula; ac primo quidem ex acierum numero recedent acies OA , OB , OC , OD , etc. quarum numerus est $= n$, earum vero loco de nouo accedent acies AC , CF , FD , quarum numerus est $= n - 3$; sicque acierum numerus erit $= A - n + (n - 3) = A - 3$, si quidem nouae hedrae ABC , ACF , etc. fuerint inuicem inclinatae: At si duae earum ABC , et ACF in eodem plano sint sitae, vt vnicam hedram constituere censeantur, euanescet acies AC , eritque acierum numerus $A - 3 - 1$: ac si huiusmodi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, vt ante posuimus, numerus acierum erit $= A - 3 - \mu$. Deinde si quaequam hedrarum angulum O formantium non sit trigonalis, videlicet hedra $AOFQP$, tum abscissione trianguli AOF noua acies existit AF , quae ante non aderat, vnde numerus acierum hoc casu vnitare augebitur. Ac si, vt ante posuimus, inter hedras in O coeuntes ν hedrae non triangulares reperiantur, numerus acierum in corpore proposito post resectionem anguli O erit $= A - 3 - \mu + \nu$, cum ante fuisset $= A$. Q. E. I.

COROLL. I.

10. Quod si ergo solidum hedris planis inclusum vno angulo solido mutiletur, vt angulorum solidorum numerus nunc sit $= S - 1$, cum ante esset $= S$, summa omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis, seu cum ante fuisset $= R$ angulis rectis, nunc erit $= R - 4$ angulis rectis. COROLL.

COROLL. 2.

11. Cum numerus hedrarum, qui ante erat $=H$, nunc post detruncationem anguli O sit $=H - 2 - \mu + \nu$, patet, fieri posse, vt numerus hedrarum maior euadat, id quod eueniet, si sit $\nu > 2 + \mu$, vbi μ et ν eos obtinent valores, qui in solutione sunt assignati.

COROLL. 3.

12. Idem patet euenire posse in numero acierum, qui cum ante mutilationem anguli O esset $=A$, nunc repertus est $=A - 3 - \mu + \nu$; qui numerus illo maior est, si $\nu > 3 + \mu$; hoc ergo casu multo magis numerus hedrarum augetur.

COROLL. 4.

13. Cum in expressionibus $H - 2 - \mu + \nu$, et $A - 3 - \mu + \nu$ litterae μ et ν idem significant, patet, decrementum numeri acierum A vnitatem maius esse, quam decrementum numeri hedrarum. Ita si numerus hedrarum post obtruncationem vnus anguli solidi fiat $=H - \alpha$, numerus acierum fiet $=A - \alpha - 1$.

COROLL. 5.

14. Hinc ergo differentia inter numerum hedrarum, et numerum acierum, quae initio erat $=A - H$, nunc post remotionem vnus anguli solidi erit $=A - H - 1$. Haec scilicet differentia semper vnitatem fit minor, vtcunque corpus ratione litterarum μ et ν fuerit comparatum.

SCHOLIUM.

15. Ex his iam facillime Theorematum supra memoratorum demonstrationes concinnare licebit, quae nulla re inferiores sint demonstrationibus in Geometria

visitatis, nisi quod hic ob solidorum indolem plus imaginationi sit tribuendum, siquidem solida super plano depingantur: at si huiusmodi figurae corporeae formarentur, omnia aequae clara essent futura. Ceterum quae in solutione istius problematis assumfi, per se sunt manifesta; si enim habeatur polygonum $A B C D E F$, n lateribus terminatum, leuiter attendenti mox patebit, si ea figura diagonalibus ducendis in triangula dissectetur, numerum horum triangulorum fore $= n - 2$, numerumque diagonalium hoc modo ductarum $= n - 3$: quadrilaterum enim vna diagonali in dua triangula, pentagonum duabus diagonalibus in tria triangula, et hexagonum tribus diagonalibus in quatuor triangula dispertitur, et ita porro.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

16. *In omni solido bedris planis incluso summa omnium angulorum planorum, qui in eius bedris existunt, aequalis est quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo; seu si numerus angulorum solidorum sit $= S$, summa omnium angulorum planorum aequatur $4S - 8$ angulis rectis.*

DEMONSTRATIO.

In solido quocunque sit numerus angulorum solidorum $= S$, summa autem omnium angulorum planorum aequetur R angulis rectis, ita vt demonstrari oporteat, esse $R = 4S - 8$. Iam modo ante indicato abscindatur a solido vnus angulus solidus, vt numerus angulorum solidorum, quos habebit, sit $= S - 1$, et summa angulorum

PROPRIETATVM SOLIDORVM 155

lorum planorum erit $= R - 4$ angulis rectis. Si denuo angulus solidus refecetur, vt reliquorum numerus fit $S - 2$, angulorum planorum summa erit $= R - 8$, atque ita pergendo patebit, pro quouis angulorum solidorum numero summam omnium angulorum planorum fore, vt tabella sequens indicat.

Numerus angulorum solidorum	Summa omnium angulorum planorum
S	R angulis rectis
$S - 1$	$R - 4$
$S - 2$	$R - 8$
$S - 3$	$R - 12$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
$S - n$	$R - 4n$

Cum igitur hac continua mutilatione peruenerimus ad $S - n$ angulos solidos, summa angulorum planorum erit $= R - 4n$ angulis rectis. At hoc modo tandem peruenietur ad 4 angulos solidos, quo casu corpus atibit in pyramidem triangularem, in qua constat, summam omnium angulorum planorum esse aequalem 8 angulis rectis: hoc est, si fit $S - n = 4$, erit $R - 4n = 8$, seu $R = 4n + 8$. At inde est $n = S - 4$, quo valore hic substituto fiet $R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8$, ita vt in quouis solido summa angulorum planorum aequetur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo. Q. E. D.

SCHOLION.

17. Quamquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, ut cum hoc fuerit demonstratum, simul illius veritas sit euicta, tamen ex problemate praemisso etiam alterius Theorematis demonstratio confici potest sequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

18. In omni solido hedris planis incluso numerus hedrarum una cum numero angulorum solidorum, binario excedit numerum acierum.

DEMONSTRATIO.

Sit in solido quocunque proposito:

numerus angulorum solidorum = S

numerus hedrarum - - - = H

numerus acierum - - - = A

atque ante vidimus, si resectione unius anguli solidi numerus S unitate minuatur, ut sit $S - 1$, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram esse $= A - H - 1$. Continuata ergo hac mutilatione,

si numerus angulorum solidorum sit,	Excessus numeri acierum super numerum hedrarum erit
S	A - H
S - 1	A - H - 1
S - 2	A - H - 2
S - 3	A - H - 3
⋮	⋮
⋮	⋮
S - n	A - H - n

Quando

Quando ergo hoc modo ad pyramidem triangularem deuenietur, in qua numerus angulorum solidorum est $= 4$, numerus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, ita vt excessus numeri acierum supra numerum hedrarum futurus sit $= 2$; euidens est, si fiat $S - n = 4$, fore $A - H - n = 2$. Inde ergo est $n = S - 4$, hinc vero $n = A - H - 2$; sicque habetur $S - 4 = A - H - 2$, seu $H + S = A + 2$; vnde constat, in omni solido hedris planis incluso numerum hedrarum H vna cum numero angulorum solidorum S binario superare numerum acierum A .
Q. E. D.

SCHOLIUM.

19. Demonstratis ergo his Theorematis, elementa Stereometriae, quae ante aliquod tempus explicari, firmissimis demonstrationibus sunt munita, ita vt elementis Geometriae nihil plane concedant. Verum prima tantum Stereometriae elementa sic in medium attulisse fateor, quibus haec scientia vterius excolenda superstrui debeat; quippe quae plurimas praecclaras corporum affectiones in se complectitur, quas adhuc omnino ignoramus. Cum autem cuiusque solidi propositi soliditas quaeri soleat, coronidis loco modum tradam, soliditatem cuiusuis pyramidis triangularis inueniendi; cum enim puncto quocunque intra solidum hedris planis inclusum assumto, solidum in tot pyramides resoluetur, quot habet hedras, dum quaelibet hedra basin pyramidis constituit, quaeuis autem pyramis, cuius basis non est triangularis, facile in pyramides triangulares resoluetur; sufficit, pyramidis triangularis soliditatem inuenisse. Quae cum obtineatur, si basis per tertiam

partem altitudinis multiplicetur, ostendam, quem ad modum, si latera pyramidis fuerint data, ex iis soliditas defini queat; perinde ac area trianguli ex datis tribus lateribus determinari solet.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

20. *Datis sex lateribus seu diebus pyramidis triangularis, eius soliditatem inuenire.*

SOLVTIO.

Fig. 5.

Sit $ABCD$ pyramidis triangularis, cuius basis triangulum ABC , et vertex D ; ac ponantur eius latera: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$. Iam in hedris ADB , et ADC ex D ad bases oppositas demittantur perpendiculara DP , et DQ , et in basi ABC ex punctis P , et Q educantur ad latera AB , et AC normales PO , et QO se mutuo secantes in O , erit recta DO perpendicularis ex vertice D in basin ABC , unde soliditas pyramidis erit $= \frac{1}{3} DO \times \text{aream } ABC$; at ducta AO , erit $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{AD^2 - AP^2 - PO^2}$. Iam ex elementis Geometriae constat, esse, $AP = \frac{aa + dd - ee}{2a}$, et $AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}$. Hinc producta QO in S , si angulus BAC vocetur $= \alpha$, erit $QS = AQ \tan \alpha$, et $AS = \frac{AQ}{\cos \alpha}$, hinc $PS = \frac{AQ}{\cos \alpha} - AP$. At cum sit $QS : AQ : AS = PS : PO : OS$, erit $PO = \frac{AQ \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\tan \alpha} = \frac{AQ}{\sin \alpha} - \frac{AP}{\tan \alpha}$, seu $PO = \frac{AQ - AP \cos \alpha}{\sin \alpha}$; tum vero $OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\sin \alpha} = \frac{AQ}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{AP}{\sin \alpha}$, ideoque $QO = QS - OS = AQ \tan \alpha - \frac{AQ}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{AP}{\sin \alpha}$

$$-\frac{AQ}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{AP}{\sin \alpha} = \frac{AP - AQ \cos \alpha}{\sin \alpha}. \text{ Hinc erit } AO^2 = AP^2 + PO^2 = \frac{AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}; \text{ ideoque } DO^2 = \frac{AD^2 \sin^2 \alpha - AP^2 - AQ^2 + 2AP \cdot AQ \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Verum area trianguli ABC est $= \frac{1}{2} ab \sin \alpha$, ex quo erit soliditas pyramidis $= \frac{1}{6} abV(AD^2 \sin^2 \alpha - AP^2 - AQ^2 + 2AP \cdot AQ \cos \alpha) = \frac{1}{6} V[aabidd \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} bb(aa+dd-ee)^2 - \frac{1}{2} aa(bb+dd-ff)^2 + \frac{1}{2} ab(aa+dd-ee)(bb+dd-ff) \cos \alpha]$. Deinde

ex triangulo ABC est $\cos \alpha = \frac{aa+bb-cc}{2ab}$, ideoque $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4a^2b^2} (aa+bb-cc)^2$, quibus valoribus substituitur prodibit soliditas pyramidis:

$$\frac{1}{6} V(aabbbd - dd(aa+bb-cc)^2 - bb(aa+dd-ee)^2 - aa(bb+dd-ff)^2 + (aa+bb-cc)(aa+dd-ee)(bb+dd-ff))$$

quae terminis euolutis in sequentem abit formam:

$$\frac{1}{6} V(aaccdd + aabbee + aabfff + aaddff + bbccdd + bbdd ee - aaccff + aaefff + bbcc ee + bbefff + ccdd ee + ccddff - aabbbc - aaddee - bbdfff - ccefff - a^2 ff - aaf^2 - b^2 ee - bbe^2 - c^2 dd - ccd^2)$$

quae adhuc commodius ita exhiberi posse videtur:

$$\frac{1}{6} V \left\{ \begin{array}{l} + aaff(bb+cc+dd+ee) - aaff(aa+ff) - aabbbc \\ + bbee(aa+cc+dd+ff) - bbee(bb+ee) - aaddee \\ + ccd d(aa+bb+ee+ff) - ccd d(cc+dd) - bbdfff \\ - ccefff \end{array} \right.$$

Sicque ex datis sex lateribus a, b, c, d, e, f pyramidis triangularis eius soliditas definitur. Q. E. I.

SCHOLIUM I.

21. Quo ratio, qua in hac expressione latera a, b, c, d, e, f inter se combinantur, clarius perspiciatur, notandum est, ex iis quatuor formari triangula, scilicet

- ΔABC constat lateribus a, b, c
- ΔABD - - - - a, d, e
- ΔACD - - - - b, d, f

ΔBCD

$\triangle BCD$ - - - - e, e, f

vnde patet, latus a cum singulis reliquorum ad triangula constituenda concurrere, praeter quam cum latere f , quamobrem haec latera a et f disiuncta appellabo, quia inter se non iunguntur; simili modo latera b et e erunt disiuncta, itemque latera c et d .

Occurrunt ergo post signum radicale primo termini ex lateribus disiunctis formati $aaff$, $bbee$, $ccdd$, qui sunt multiplicati per summam quadratorum reliquorum, deinde iidem termini negative sumti multiplicantur per summam suorum quadratorum, hincque denique subtrahuntur producta ex quadratis ternorum laterum cuiusque trianguli.

SCHOLIUM 2.

22. Formula quoque pro soliditate pyramidis inveniri potest aliquanto simplicior, si tria tantum latera in vno angulo solido coeuntia dantur, vna cum angulis planis, quos ibi constituunt.

Sint enim tria latera in angulo solido A coeuntia

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = d$$

deinde anguli plani:

$$BAC = p; \quad BAD = q; \quad CAD = r.$$

Atque ex his soliditas pyramidis erit

$$\frac{1}{3} abdV (1 - \cos.p^2 - \cos.q^2 - \cos.r^2 + 2 \cos.p \cdot \cos.q \cdot \cos.r)$$

quae reducitur ad formam sequentem:

$$\frac{1}{3} abdV \sin.\frac{p+q+r}{2} \sin.\frac{p+q-r}{2} \sin.\frac{p+r-q}{2} \sin.\frac{q+r-p}{2};$$

vnde patet, vt area prodeat realis, trium angulorum planorum p , q , et r , in angulo quouis solido coeuntium binos simul sumtos tertio maiores esse debere.

DE MO-

