1758

Elementa doctrinae solidorum

Leonhard Euler

ELEMENTA
DOCTRINAE SOLIDORVM.
AVCT. L. EVLERO.

§. 1.

Quemadmodum Geometria in contemplatione figurarum planarum versatur, et quae de lineis et angulis in ea traduntur, ad eius prolegomena referenda sunt; ita Stereometria in contemplatione solidorum occupatur, et quae ibi de inclinatione planorum angulisque solidis explicantur, eius quoque tanquam prolegomena sunt spectanda.

§. 2. Solidum est extensum trium dimensionum vndique terminatum, perinde atque superficies definitur per extensum duarum tantum dimensionum. Duae autem solidorum constituendae sunt classes, prout eorum ambitus figuris siue planis, siue conuexis concauisue includitur.

§. 3. Hic eam tantum classem solidorum, quae vndique figuris planis includuntur, contemplari constitui; perinde atque Geometria a figuris rectilineis exorditur; et quemadmodum figurarum rectilinearum in genere plures insignes proprietates sunt annotatae; ita solidorum huius classis non nullas proprietates generales eruere conabor.

§. 4. Quanquam autem Stereometria iam satis diligenter elaborata videtur, in eaque praeter theoriam inclinationis planorum et angulorum ſolidorum, formatio plurium ſolidorum ac potiſſimum corporum regularium doceri ſolet; tamen vbique firma huius de ſolidis doctrinae fundamenta deſiderantur, ex quibus huiusmodi ſolidorum natura in genere intelligi poſſit.

§. 5. Solidorum igitur contemplatio ad ambitum eorum dirigi debet: cognito enim ambitu, quo ſolidum vndique includitur, ipſum ſolidum cognoſcitur ſimili modo, quo cuiusque figurae planae indoles ex eius perimetro definiri ſolet.

§. 6. Ad ambitum autem cuiusque ſolidi figuris planis incluſi pertinent 1^{mo} ipſae figurae planae eius ambitum conſtituentes, quae hedrae vocantur; 2^{do} binarum hedrarum ſecundum latera concurſus, quibus termini lineares ſolidi oriuntur: hos terminos, quoniam apud ſcriptores Stereometriae nullum nomen proprium reperio, acies vocabo; 3^{tio} puncta, in quibus tres pluresue hedrae concurrunt, quae puncta anguli ſolidi appellantur.

§. 7. Triplicis igitur generis termini in quouis ſolido ſunt conſiderandi; ſcilicet 1.) puncta; 2.) lineae, 3.) ſuperficies; vel nominibus ad hoc inſtitutum propriis vtendo. 1.) Anguli ſolidi; 2.) acies; et 3.) hedrae. Hisque triplicis generis terminis totum ſolidum determinatur. Figura autem plana duplicis tantum generis terminos habet, quibus determinatur; 1. ſcilicet puncta, ſeu anguli, 2. lineae ſeu latera.

§. 8.

§. 8. Instar exempli propositum sit corpus cuneiforme A B C D E F, cuius termini primi generis, seu anguli solidi sunt sex: A, B, C, D, E, F. Termini secundi generis lineares, seu acies sunt numero nouem: A B, B C, C D, D A, A E, D E, B F, C F, E F. Termini denique tertii generis, seu hedrae sunt quinque, nimirum: A B C D, A B F E, A D E, C D E F, B C F. Tab. II. Fig. 2.

§. 9. Omnis ergo solidorum diuersitas cum ex numero angulorum solidorum, tum ex numero acierum, tum vero ex numero hedrarum nascitur. Vsitatae autem solidorum denominationes ex numero hedrarum peti solent, vnde nota sunt nomina tetraedri, hexaedri, octaedri, dodecaedri et icosaedri, etsi ea corporibus tantum regularibus tribui solent. In genere enim nomine polyedri indicatur corpus quodcunque siue regulare, siue irregulare, quod certo hedrarum numero includitur.

§. 10. Simili modo si diuersa solidorum genera ex numero angulorum solidorum definire velimus, eorum nomina erunt tetragonum, pentagonum, hexagonum, heptagonum etc. Atque corpus cuneiforme ante consideratum hoc modo erit hexagonum appellandum, quod secundum hedrarum numerum est pentaedrum.

§. 11. Quoniam vero solida, quae pari hedrarum numero includuntur, ratione numeri angulorum solidorum inter se differre possunt, ad ea inter se diligentius distinguenda, conueniet cuiusque denominationem tam a numero hedrarum, quam a numero angulorum solidorum

petere

petere. Ita ſolidum cuneiforme ante conſideratum vocabitur *pentaedrum hexagonum*; Pyramis triangularis erit *tetraedrum tetragonum*; Priſma triangulare *pentaedrum hexagonum*; Parallelepipedum vero *hexaedrum octogonum* et ita porro.

§. 12. Etſi ergo ad genus figurae planae rectilineae deſignandum ſufficit laterum numerum, quibus includitur, commemoraſſe, quoniam angulorum numerus ſemper eſt aequalis numero laterum; tamen in ſolidis numerus angulorum ſolidorum admodum diſcrepare poteſt a numero hedrarum, vnde vtrumque numerum nominare opus eſt. Sic pyramis quadrangularis aeque includitur quinque hedris, ac priſma triangulare, ſed illa quinque tantum habet angulos ſolidos, dum hoc habet ſex.

§. 13. Ad ſolidorum vero genera conſtituenda ſuperfluum foret praeter hedrarum et angulorum ſolidorum numeros inſuper numerum acierum adiicere, quoniam vti deinceps monſtrabo, acierum numerus ſemper ex numero hedrarum et angulorum ſolidorum determinatur, ita vt, ſi datus fuerit tam numerus hedrarum, quam numerus angulorum ſolidorum, cuiuſque ſolidi inde ſimul numerus acierum ſit cognitus.

§. 14. Vlteriores vero ſolidorum differentiae petendae ſunt cum ex indole hedrarum, ſeu numero laterum, quibus quaeque hedra includitur; tum vero ex indole angulorum ſolidorum, prout quisque vel ex tribus, pluribusue angulis planis fuerit formatus. Angulus enim ſolidus ex paucioribus, quam tribus angulis planis conſtare nequit;

nequit; plures autem quotcunque ad angulum solidum constituendum concurrere possunt, dummodo eorum omnium summa fuerit quatuor rectis minor.

§. 15. Datis omnibus hedris, quibus solidum quodpiam includitur, statim cognoscetur numerus omnium laterum cunctas hedras includentium, cui numero aequalis est numerus omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris reperiuntur, quia in qualibet hedra numerus angulorum aequalis est numero laterum.

§. 16. Deinde etiam summa omnium angulorum planorum facile exhiberi potest, propterea quod in quaque hedra summa omnium eius angulorum ex eiusdem numero laterum definitur. Quotcunque enim laterum fuerit hedra quaepiam, summa omnium eius angulorum aequatur, vti constat, bis tot angulis rectis, quot sunt latera, demtis quatuor.

§. 17. Ad solidum ergo definiendum, praeter numeros angulorum solidorum, acierum ac hedrarum, quae res proprie ad ambitum solidi pertinent, commode quoque adhiberi possunt, cum numerus omnium laterum, seu, qui ei est aequalis, numerus omnium angulorum planorum, tum vero etiam summa omnium horum angulorum planorum.

§. 18. Ex collatione harum quinque rerum, quas in quouis solido considerare licet, plures insignes proprietates solidorum generales obtineri possunt, quae similes erunt earum proprietatum, quae de figuris planis rectilineis in genere proferri solent. Maior autem istarum rerum, quas in solidis spectamus, numerus plures etiam proprietates generales suppeditabit, quam in figuris planis locum inueniunt.

§. 19. Quas proprietates, cum nemo eorum, qui Stereometriam tractauerunt, fere attigerit, operam dabo, vt si non omnes, tamen praecipuas in medium afferam, atque demonstrationibus confirmem. Quod eo maiorem vtilitatem habiturum videtur, cum sine harum proprietatum cognitione doctrina solidorum neutiquam cum successu tractari queat.

§. 20. Eo magis igitur merito mirum videbitur, quod cum prima Geometriae planae elementa iam a tam longo temporis interuallo omni cura sint elaborata, ac perspicue exposita, prima quasi Stereometriae elementa tantis adhuc tenebris sint inuoluta, nemoque fuerit inuentus, qui ea in lucem protrahere sit conatus.

PROPOSITIO I.

§. 21. *In quouis solido numerus omnium acierum est semissis numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum eius constituentibus reperiuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quaelibet acies in ambitu solidi formatur a duobus lateribus duarum hedrarum, et cum inter omnia latera cunctarum hedrarum bina coniuncta singulas acies constituant,

tuant, manifestum est numerum acierum omnium esse semissem numeri omnium laterum. At numerus omnium laterum aequalis est numero omnium angulorum planorum, quia quaeuis hedra tot habet angulos quot latera. Ergo numerus acierum quoque semissis est numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum solidi constituentibus reperiuntur. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 22. Cum numerus acierum fractus esse nequeat, perspicuum est, numerum omnium laterum vel omnium angulorum planorum semper parem esse debere; huiusque numeri semissis dabit numerum acierum, quae in ambitu solidi deprehenduntur.

COROLL. 2.

§. 23. Si igitur omnes hedrae ambitum solidi cuiuspiam constituentes fuerint triangula, earum numerus necessario erit par; si enim numerus harum hedrarum esset impar, tum etiam numerus angulorum planorum esset impar; quod euenire non potest. Idem tenendum est de hedris omnibus, quae sunt polygona imparium laterum; scilicet si singulae hedrae fuerint vel triangula, vel pentagona, vel heptagona, vel etc. earum numerus semper debet esse par.

COROLL. 3.

§. 24. Si inter hedras ambitum solidi cuiuspiam constituentes numerus earum, quae sunt vel tetragonae, vel hexagonae, vel octogonae, vel polygonae quaecunque paris laterum numeri, fuerit $= m$, numerus vero earum, quae sunt vel trigonae, vel pentagonae, vel heptagonae, vel polygonae quaecunque imparis laterum numeri $= n$, ita vt numerus omnium hedrarum sit $= m + n$; tum numerus n debet esse par. Quod vero ad numerum m attinet, perinde est siue sit par siue impar.

COROLL. 4.

§. 25. Si ergo ambitus totius solidi constet ex a triangulis, b quadrangulis, c pentagonis, d hexagonis, e heptagonis etc. erit numerus omnium hedrarum $= a + b + c + d + e +$ etc. Numerus vero omnium angulorum planorum, seu laterum erit $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc. Numerus autem omnium acierum in ambitu solidi $= \frac{3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}}{2}$ vnde numerus $a + c + e +$ etc. debet esse par.

PROPOSITIO II.

§. 26. *Numerus omnium angulorum planorum vel aequalis est vel maior numero omnium hedrarum ter sumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor esse potest, quam triplum numeri hedrarum ambitum solidi cuiusquam constituentium*

DEMONSTRATIO.

Omnes hedrae sunt vel triangula vel figurae plurium laterum; si omnes hedrae sunt triangula, numerus laterum

terum ſeu angulorum planorum erit triplo maior, quam numerus hedrarum; ſin autem vel omnes vel aliquae hedrae plures tribus habeant angulos, tum etiam numerus angulorum planorum maior erit quam triplum numeri hedrarum. Semper ergo numerus angulorum planorum vel aequalis eſt vel maior numero hedrarum ter ſumto, ipſoque minor nunquam eſſe poteſt. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 27. Si ergo omnes hedrae fuerint triangulares, numerus angulorum planorum aequalis erit triplo numeri hedrarum; ſin autem non omnes hedrae ſint triangulares, ſed figurae plurium laterum, tum numerus angulorum planorum maior erit, quam triplum numeri hedrarum.

COROLL. 2.

§. 28. In ſolido igitur quocunque, ſi numerus hedrarum ponatur $= H$, et numerus acierum $= A$, quia numerus angulorum planorum eſt, $= 2A$, erit vel $2A = 3H$ vel $2A > 3H$. Impoſſibile ergo eſt, vt ſit $2A < 3H$.

COROLL. 3.

§. 29. Retentis his denominationibus nullum datur ſolidum, in quo ſit $A < \frac{3}{2}H$ vel $H > \frac{2}{3}A$. Quanquam autem hinc relatio inter numerum hedrarum et numerum acierum non determinatur, tamen plurimae relationes excluduntur, quae nunquam locum habere poſſunt.

PROPOSITIO. III.

§. 30. *Numerus omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiusque ſolidi exiſtunt vel aequalis eſt vel maior numero angulorum ſolidorum ter ſumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor eſſe poteſt quam triplum numeri angulorum ſolidorum.*

DEMONSTRATIO.

Quilibet angulus ſolidus vel a tribus angulis planis formatur vel a pluribus, pauciores enim quam tres anguli plani angulum ſolidum conſtituere nequeunt. Hinc ſi omnes anguli ſolidi a tribus planis formantur, numerus angulorum planorum triplo maior eſſe debet quam numerus angulorum ſolidorum; ſin autem ad quosdam angulos ſolidos conſtituendos plures anguli plani coniunguntur, numerus angulorum planorum quoque maior erit quam numerus angulorum ſolidorum, minor autem nunquam eſſe poteſt. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 31. Si numerus angulorum ſolidorum ponatur $= S$, numerus vero acierum $= A$ pro ſolido quocunque, quia numerus omnium angulorum planorum eſt $= 2A$, ſemper erit vel $2A = 3S$ vel $2A > 3S$.

COROLL. 2.

§. 32. Fieri ergo nequit, vt vnquam ſit $2A < 3S$, ſeu $A < \frac{3}{2}S$, ſeu $S > \frac{2}{3}A$. Quare ſi praeterea numerus hedra-

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior esse potest quam $\frac{2}{3}A$.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur vt hactenus:
numerus angulorum solidorum $= S$
numerus acierum - - - - $= A$
numerus hedrarum - - - $= H$
demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non potuisse; interim tamen eius veritas pro omnibus solidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoscetur, ita vt sequens inductio vicem demonstrationis gerere queat.

1. Consideremus ergo primo pyramidem quamcunque super basi A B C D E F G quotcunque laterum constitutam et in apicem H desinentem. Sit numerus laterum basis $= m$, totidemque triangula a basi ad apicem vsque assurgent. Includitur ergo haec pyramis $m + 1$ hedris, quarum m sunt triangula, vna vero polygonum m angulorum seu laterum. Erit itaque numerus hedra- Fig. 3.

rum

rum $H = m + 1$, atque numerus angulorum ſolidorum pariter eſt $S = m + 1$. Deinde numerus omnium angulorum planorum eſt $= 3m + m = 4m$, vnde numerus acierum erit $A = 2m$. Cum igitur ſit $H + S = 2m + 2$ erit vtique hoc caſu $H + S = A + 2$.

Fig. 2. 2. Sit ſolidum cuneiforme a baſi quocunque laterum ABCD in aciem EF deſinens. Sit baſis polygonum m laterum, erit numerus angulorum ſolidorum binario maior ſeu $S = m + 2$. Deinde praeter ipſam baſin tot aderunt hedrae, quot latera habet baſis, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 1$, ex his hedris vna nempe baſis eſt polygonum m laterum, reliquae erunt triangula duabus exceptis, quae eſſe debent quadrilatera, ſuoque concurſu aciem EF conſtituunt; praeter baſin ergo m laterum, habentur $m - 2$ triangula et 2 quadrilatera, ex quo numerus omnium laterum ſeu angulorum planorum erit $= m + 3(m-2) + 2 . 4 = 4m + 2$, hincque prodit numerus acierum $A = 2m + 1$. Cum ergo ſit $H + S = 2m + 3$ erit $H + S = A + 2$.

Fig. 4. 3. Sit ſolidum arcae ſeu ciſtae ſimile, intra duas baſes ABCD et EFGH contentum, vtraque autem baſis eundem habeat laterum numerum $= m$, eritque numerus angulorum ſolidorum $S = 2m$. Deinde praeter has duas baſes reliquae hedrae erunt quadrilaterae, earumque numerus $= m$, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 2$. Angulorum autem planorum numerus ob duas hedras m laterum et m hedras quadrilateras erit $= 2m + 4m = 6m$, hincque acierum numerus conclu-

concluditur $A = 3m$. Quare, cum sit $H + S = 3m + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

4. Habeat denuo solidum duas bases A B C D E, et F G H, quae autem non eodem gaudeant laterum numero. Sit ergo pro altera basi A B C D E numerus laterum maior $= m + n$, pro altera vero basi F G H numerus laterum $= m$, eritque numerus angulorum solidorum $= m + n + m$, seu $S = 2m + n$. Tum praeter duas bases tot erunt hedrae, quot latera habet altera basis, quae maiori laterum numero gaudet, scilicet $m + n$, vnde omnium hedrarum numerus est $H = m + n + 2$; quarum cum altera basis habeat latera $m + n$, altera m, inter reliquas vero hedras, quarum numerus est $m + n$, tot esse debeant quadrilaterae, quot basis F G H habet latera, nempe m, ceterae vero, quarum numerus est n, sint triangulares, omnium angulorum planorum numerus est $= m + n + m + 4m + 3n = 6m + 4n$, erit numerus acierum $A = 3m + 2n$. Cum igitur sit $H + S = 3m + 2n + 2$, erit iterum $H + S = A + 2$. Fig. 5.

5. Sit corpus denuo in duas bases A B C D et L M N terminatum, circa medium autem habeat angulos solidos E, F, G, H, I, K. Sit numerus laterum basis A B C D $= m$, basis L M N $= n$, numerus autem angulorum solidorum circa medium sit $= p$, qui sit maior, quam m et quam n. Erit ergo numerus omnivm angulorum solidorum $S = m + n + p$. Tum ab angulis solidis mediis ad basin A B C D dirigentur hedrae numero $= p$, quarum m erunt quadrilaterae, reliquae Fig. 6.

$p-m$ triangulares; simili modo ad alteram basin L M N dirigentur hedrae quoque numero $= p$, quarum n erunt quadrilaterae, reliquae vero $p-n$ triangulares, sic cum duabus basibus numerus omnium hedrarum erit $= 2+p+p$ seu $H = 2p+2$. Quarum cum vna habeat m latera, alia n latera, et quadrilaterarum numerus sit $= m+n$, trigonalium $= 2p-m-n$, erit omnium angulorum planorum numerus $= m+n+4(m+n)+3(2p-m-n)$ $= 6p+2m+2n$, ideoque numerus acierum prodit $A = 3p+m+n$. Quare cum sit $H+S = 3p+m+n+2$, erit denuo $H+S = A+2$.

6. Positis iisdem atque in casu praecedente, sit $m > p$ et $p > n$, erit vt ante numerus angulorum solidorum $S = m+n+p$. A basi autem ABCD iam m hedrae ad angulos solidos medios dirigentur, quarum erunt p quadrangulares, et $m-p$ triangulares. Ab angulis autem mediis ad alteram basin L M N dirigentur p hedrae, quarum erunt n quadrilaterae, et $p-n$ trigonales. Hinc ergo omnium hedrarum numerus erit $= 2+m+p$ seu $H = m+p+2$, quarum hedrarum vna est m laterum, alia n laterum, $p+n$ quadrilaterae, et $m-p+p-n$ seu $m-n$ trilaterae. Hanc ob rem omnium angulorum planorum numerus erit $= m+n+4(p+n)+3(m-n) = 4p+4m+2n$, hincque acierum numerus $A = 2p+2m+n$. Vnde cum sit $H+S = 2p+2m+n$, erit $H+S = A+2$.

7. Si angulorum solidorum mediorum numerus p minor sit vtroque numero m et n, erit quidem vt ante angu-

angulorum solidorum numerus $S = m + n + p$. Sed iam a basi A B C D ad angulos medios dirigentur hedrae m, ab altera vero basi hedrae n, et vtrinque erunt p quadrangulares, ex illa vero parte $m-p$, ex hac vero $n-p$ triangulares. Vnde numerus omnium hedrarum erit $= 2 + m + n$ seu $H = m + n + 2$: angulorum autem planorum numerus erit $= m + n + 4 . 2p + 3(m + n - 2p) = 2p + 4m + 4n$. Quare acierum numerus prodit $A = p + 2m + 2n$; et cum sit $H + S = 2m + 2n + p + 2$, erit $H + S = A + 2$.

8. Etsi haec sufficere possent ad veritatem propositionis euincendam, tamen eam praeterea ex corporibus regularibus confirmare lubet. Pro tetraëdro quidem erit numerus hedrarum $H = 4$, quae cum sint triangulares, erit omnium angulorum planorum numerus $= 12$, ideoque acierum numerus $A = 6$, et quia singuli anguli solidi ex tribus planis formantur, erit eorum numerus $S = \frac{12}{3} = 4$: hinc $H + S = 8 = A + 2$. Pro hexaëdro est $H = 6$, et ob singulas hedras quadrilateras angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque acierum numerus $A = 12$: ac dum terni anguli plani vnum solidum constituunt, erit solidorum numerus $S = \frac{24}{3} = 8$, sicque $H + S = 14 = A + 2$. Pro octaëdro est $H = 8$, cuius hedrae cum sint trilaterae, erit omnium angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque numerus acierum $A = 12$, ac dum quaterni anguli plani vnum solidum formant, erit angulorum solidorum numerus $S = \frac{24}{4} = 6$, sicque $H + S = 14 = A + 2$. Pro dodecaëdro est $H = 12$, cuius hedrae cum sint pentagonae, erit numerus angulorum planorum $= 5 \cdot 12$

 $= 60$

$= 60$, ideoque numerus acierum $A = 30$. Deinde quia terni anguli plani ad ſolidum concurrunt, erit numerus angulorum ſolidorum $S = 20$, ergo $H + S = 32 = A + 2$. Pro icoſaedro eſt $H = 20$, cuius hedrae cum ſint trigonales, erit angulorum planorum numerus $= 60$, numerusque acierum $A = 30$. Tum vero quia ſinguli anguli ſolidi conſtant quinis planis, erit eorum numerus $S = 12$, ideoque $H + S = 32 = A + 2$.

Cum igitur veritas propoſitionis in his omnibus caſibus ſibi conſtet, dubium eſt nullum, quin ea in omnibus omnino ſolidis locum habeat, ſicque propoſitio ſufficienter videtur demonſtrata.

COROLL. 1.

§. 34. Si ergo in quopiam ſolido detur numerus angulorum ſolidorum S cum numero hedrarum H, inde ſtatim cognoſcetur numerus acierum A, cum ſit $A = H + S - 2$.

COROLL. 2.

§. 35. Datis autem in ſolido quocunque numero angulorum ſolidorum S cum numero acierum A, inde facile colligitur numerus hedrarum H, cum ſit $H = A - S + 2$.

COROLL. 3.

§. 36. Datis autem in ſolido quocunque numero hedrarum H vna cum numero acierum A, inde facile reperietur numerus angulorum ſolidorum S, quia eſt $S = A - H + 2$.

PROPO-

PROPOSITIO V.

§. 37. *Nullum existere potest solidum, in quo numerus acierum senario auctus maior esset, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum solidorum.*

DEMONSTRATIO

Sit numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum solidorum $= S$, atque supra vidimus, fieri non posse, vt sit vel $3H > 2A$, vel $3S > 2A$, erunt ergo hae formulae $3H > 2A$, et $3S > 2A$ impossibiles. Nunc autem vidimus, esse $H + S = A + 2$, seu $H = A - S + 2$, et $S = A - H + 2$, qui valores in illis formulis impossibilibus substituti dabunt sequentes formulas impossibiles:

$$3A - 3S + 6 > 2A, \text{ et } 3A - 3H + 6 > 2A,$$

quae abeunt in has

$$A + 6 > 3S, \text{ et } A + 6 > 3H.$$

Vnde manifestum est, fieri non posse, vt numerus acierum senario auctus maior sit, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum solidorum Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 38. In omni ergo solido vel est $A + 6 = 3H$, vel $A + 6 < 3H$, similique modo est vel $A + 6 = 3S$, vel $A + 6 < 3S$. Siue si α, β, γ, δ, assumantur

mantur ad numeros positiuos, cyphra non excepta, designandos, erit:

$$A + 6 + \alpha = 3\,H, \text{ et } A + 6 + \beta = 3\,S.$$

COROLL. 2.

§. 39. Tum vero quia semper est vel $A = \frac{3}{2}S$, vel $A > \frac{3}{2}S$; item vel $A = \frac{3}{2}H$, vel $A > \frac{3}{2}H$, erit simili modo

$$A = \tfrac{3}{2}H + \gamma, \text{ et } A = \tfrac{3}{2}S + \delta$$

vbi γ, et δ, vt ante α, et β non possunt esse numeri negatiui.

COROLL. 3.

§. 40. His posterioribus valoribus in praecedentibus aequationibus substitutis prodibunt hae aequationes:

$$\tfrac{3}{2}H + 6 + \alpha + \gamma = 3\,H, \text{ et } \tfrac{3}{2}S + 6 + \beta + \delta = 3\,S$$

$$\text{seu } 4 + \tfrac{2}{3}(\alpha + \gamma) = H, \text{ et } 4 + \tfrac{2}{3}(\beta + \delta) = S$$

vnde patet, tam numerum hedrarum, quam numerum angulorum solidorum quaternario minorem esse non posse.

COROLL. 4.

§. 41. Cum sit $H + S = A + 2$, erit hos postremos valores adhibendo, $8 + \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = A + 2$, vnde colligitur, numerum acierum A senario nunquam minorem esse posse. Est igitur pyramis triangularis omnium solidorum simplicissimum, quia tam numerus hedrarum, quam angulorum solidorum est $= 4$, et numerus acierum $= 6$.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

§. 42. *Nullum existere potest solidum, in quo vel numerus hedrarum quaternario auctus, maior sit duplo numero angulorum solidorum, vel in quo numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior, sit duplo numero hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus hedrarum $= H$, numerus angulorum solidorum $= S$, et numerus acierum $= A$, et quoniam supra ostendimus fieri non posse, vt sit vel $3H > 2A$ vel $3S > 2A$, hae duae formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2A, \text{ et } 3S > 2A.$$

Cum iam sit $A = H + S - 2$, hoc valore pro A substituto sequentes formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2H + 2S - 4, \text{ et } 3S > 2H + 2S - 4$$

quae abeunt in has

$$H + 4 > 2S, \text{ et } S + 4 > 2H.$$

Vnde neque numerus hedrarum quaternario auctus maior esse potest duplo numero angulorum solidorum, neque numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior duplo numero hedrarum. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 43. In omni ergo solido vel est $H + 4 = 2S$, vel $H + 4 < 2S$, deinde simili modo est vel $S + 4 = 2H$, vel $S + 4 < 2H$. Si igitur α et β denotent numeros positiuos cyphra non excepta, in omni solido has hae aequationes locum habebunt $H + 4 + \alpha = 2S$, et $S + 4 + \beta = 2H$.

COROLL. 2.

§. 44. Cum sit $S = 2H - 4 - \beta$, et $S = \frac{1}{2}H + 2 + \frac{1}{2}\alpha$, numerus angulorum solidorum S neque maior esse potest, quam $2H - 4$, neque minor quam $\frac{1}{2}H + 2$. Ergo numerus angulorum solidorum S extra hos limites $2H - 4$, et $\frac{1}{2}H + 2$ cadere nequit.

COROLL. 3.

§. 45. Simili modo cum sit $H = 2S - 4 - \alpha$, et $H = \frac{1}{2}S + 2 + \frac{1}{2}\beta$, numerus hedrarum H neque maior esse potest, quam $2S - 4$, neque minor, quam $\frac{1}{2}S + 2$; vnde numerus hedrarum H extra hos limites $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere nequit.

COROLL. 4.

§. 46. Deinde ex superiori propositione intelligitur, numerum acierum A neque extra hos limites $\frac{3}{2}H$, et $3H - 6$, neque extra hos limites $\frac{3}{2}S$, et $3S - 6$ cadere posse; simili modo indidem patet, numerum hedrarum H non extra hos limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$, nec numerum angulorum solidorum S extra hos eosdem limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$ cadere posse.

COROLL. 5.

§. 47. Dato ergo numero hedrarum, tam pro numero angulorum solidorum, quam pro numero acierum, limi-

limites assignari possunt, quos transgredi nequeant, quosque subiecta tabella exhibet:

	Limites, quos transgredi nequit	
Numerus hedrarum	numerus angulorum solidorum	numerus acierum
4	4 - - - - 4	6 - - - - 6
5	6 - - - - $4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$ - - - - 9
6	8 - - - - 5	9 - - - - 12
7	10 - - - - $5\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$ - - - - 15
8	12 - - - - 6	12 - - - - 18
9	14 - - - - $6\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$ - - - - 21
10	16 - - - - 7	15 - - - - 24
11	18 - - - - $7\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$ - - - - 27
12	20 - - - - 8	18 - - - - 30
13	22 - - - - $8\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$ - - - - 33
14	24 - - - - 9	21 - - - - 36
15	26 - - - - $9\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$ - - - - 39
16	28 - - - - 10	24 - - - - 42
17	30 - - - - $10\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$ - - - - 45
18	32 - - - - 11	27 - - - - 48
19	34 - - - - $11\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$ - - - - 51
20	36 - - - - 12	30 - - - - 54
21	38 - - - - $12\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$ - - - - 57
22	40 - - - - 13	33 - - - - 60
23	42 - - - - $13\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$ - - - - 63
24	44 - - - - 14	36 - - - - 66
25	46 - - - - $14\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$ - - - - 69

COROLL. 6.

§. 48. Sin autem numerus angulorum ſolidorum S eſt datus, pro numero acierum iidem prodeunt limites, quos tabula exhibet, pro numero vero hedrarum ii reperiuntur limites, qui in tabula pro numero angulorum ſolidorum ſunt exhibiti.

COROLL. 7.

§. 49. Verum ſi numerus acierum A ſit datus, quoniam neque numerus hedrarum, neque numerus angulorum ſolidorum hos limites $\frac{2}{3}$A, et $\frac{1}{3}$A + 2 excedere poteſt, ſequens tabula limitum conſtruetur:

Numerus acierum	Limites pro numeri H et S	Numerus acierum	Limites pro numeris H et S
6	4 --- 4	20	$13\frac{1}{3}$ --- $8\frac{2}{3}$
7	$4\frac{2}{3}$ --- $4\frac{1}{3}$	21	14 --- 9
8	$5\frac{1}{3}$ --- $4\frac{2}{3}$	22	$14\frac{2}{3}$ --- $9\frac{1}{3}$
9	6 --- 5	23	$15\frac{1}{3}$ --- $9\frac{2}{3}$
10	$6\frac{2}{3}$ --- $5\frac{1}{3}$	24	16 --- 10
11	$7\frac{1}{3}$ --- $5\frac{2}{3}$	25	$16\frac{2}{3}$ --- $10\frac{1}{3}$
12	8 --- 6	26	$17\frac{1}{3}$ --- $10\frac{2}{3}$
13	$8\frac{2}{3}$ --- $6\frac{1}{3}$	27	18 --- 11
14	$9\frac{1}{3}$ --- $6\frac{2}{3}$	28	$18\frac{2}{3}$ --- $11\frac{1}{3}$
15	10 --- 7	29	$19\frac{1}{3}$ --- $11\frac{2}{3}$
16	$10\frac{2}{3}$ --- $7\frac{1}{3}$	30	20 --- 12
17	$11\frac{1}{3}$ --- $7\frac{2}{3}$	31	$20\frac{2}{3}$ --- $12\frac{1}{3}$
18	12 --- 8	32	$21\frac{1}{3}$ --- $12\frac{2}{3}$
19	$12\frac{2}{3}$ --- $8\frac{1}{3}$	33	22 --- 13

Num-

Numerus acierum	Limites pro numeris H et S	Numerus acierum	Limites pro numeris H et S
34	$22\frac{2}{3}$ --- $13\frac{1}{3}$	48	32 --- 18
35	$23\frac{1}{3}$ --- $13\frac{2}{3}$	49	$32\frac{2}{3}$ --- $18\frac{1}{3}$
36	24 --- 14	50	$33\frac{1}{3}$ --- $18\frac{2}{3}$
37	$24\frac{2}{3}$ --- $14\frac{1}{3}$	51	34 --- 19
38	$25\frac{1}{3}$ --- $14\frac{2}{3}$	52	$34\frac{2}{3}$ --- $19\frac{1}{3}$
39	26 --- 15	53	$35\frac{1}{3}$ --- $19\frac{2}{3}$
40	$26\frac{2}{3}$ --- $15\frac{1}{3}$	54	36 --- 20
41	$27\frac{1}{3}$ --- $15\frac{2}{3}$	55	$36\frac{2}{3}$ --- $20\frac{1}{3}$
42	28 --- 16	56	$37\frac{1}{3}$ --- $20\frac{2}{3}$
43	$28\frac{2}{3}$ --- $16\frac{1}{3}$	57	38 --- 21
44	$29\frac{1}{3}$ --- $16\frac{2}{3}$	58	$38\frac{2}{3}$ --- $21\frac{1}{3}$
45	30 --- 17	59	$39\frac{1}{3}$ -- $21\frac{2}{3}$
46	$30\frac{2}{3}$ --- $17\frac{1}{3}$	60	40 --- 23
47	$31\frac{1}{3}$ --- $17\frac{2}{3}$		

COROLL. 8.

§. 50. Ad hanc tabulam insuper notari conuenit, quantum numerorum H et S alter limitem minorem superet, tantundem alterum a limite maiore deficere debere. Ita si numerus acierum A est $= 30$, et numerus hedrarum $H = 12 + n$, erit numerus angulorum solidorum $S = 20 - n$, at $20 - n$ non debet esse minus quam 12, vnde n octonarium superare nequit.

PROPOSITIO VII.

§. 51. *Nullum existere potest solidum, cuius omnes hedrae sint hexagonae, vel plurium laterum; neque vllum existere potest solidum, cuius omnes anguli solidi ex sex, pluribusue angulis planis sint formati.*

DEMONSTRATIO.

Sit vt hactenus numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum ſolidorum $= S$. Quod ſi iam omnes hedrae eſſent hexagonae, vel plurium laterum, numerus omnium angulorum planorum eſſet vel $= 6H$, vel $> 6H$; hinc numerus acierum A foret vel $= 3H$, vel $> 3H$. At ſupra vidimus, ſemper eſſe $A = 3H - 6$, vel $A < 3H - 6$; nullo modo ergo fieri poteſt, vt eſſet vel $A = 3H$, vel $A > 3H$; vnde impoſſibile eſt, vt omnes hedrae ſint vel hexagonae, vel plurium laterum. Q. E. Vnum.

Simili modo ſi omnes anguli ſolidi ex ſex pluribusve angulis planis conſtarent, foret omnium angulorum planorum numerus vel $= 6S$ vel $> 6S$, hincque numerus acierum A eſſet vel $= 3S$, vel $> 3S$. At ſupra demonſtrauimus, fieri non poſſe, vt ſit $A + 6 > 3S$, multo minus ergo eſſe poterit $A = 3S$, vel adeo $A > 3S$. Vnde impoſſibile eſt, vt omnes anguli ſolidi ex ſex pluribusue angulis planis conſtent. Q. E. Alterum.

PROPOSITIO VIII.

§. 52. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiuscunque ſolidi reperiuntur, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot vnitates occurrunt in exceſſu numeri acierum ſuper numerum hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus acierum $= A$, numerusque hedrarum $= H$

$= H$, atque demonſtrandum eſt, ſummam omnium angulorum planorum aequalem eſſe $4A - 4H$ rectis. Ad hoc demonſtrandum conſtet ſolidi ambitus

ex	a	hedris	trigonis
ex	b	hedris	tetragonis
ex	c	hedris	pentagonis
ex	d	hedris	hexagonis
ex	e	hedris	heptagonis
			etc.

erit ergo numerus hedrarum $H = a + b + c + d + e +$ etc. et numerus acierum $A = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc.$)$ quia numerus angulorum planorum eſt $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc.

Iam cum ſumma angulorum vnius trianguli ſit	$=$	2	rectis
- - - - - - - - - - - - vnius quadrilateri	$=$	4	rectis
- - - - - - - - - - - - vnius pentagoni	$=$	6	rectis
- - - - - - - - - - - - vnius hexagoni	$=$	8	rectis
- - - - - - - - - - - - vnius heptagoni	$=$	10	rectis
etc.			

erit ſumma omnium angulorum planorum $=$
$2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ etc. angulis rectis,
at eſt $4A = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e +$ etc.
et $4H = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e +$ etc.

ergo $4A - 4H = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ etc.
Conſequenter ſumma omnium angulorum planorum aequalis eſt $4A - 4H$ angulis rectis. Q. E. D.

R 3 COROLL.

COROLL. 1.

§. 53. Cum ſit vel $2A = 3H$, vel $2A > 3H$, ſi ponamus $2A = 3H + \alpha$, erit ſumma angulorum planorum $= 2H + 2\alpha$, ideoque minor eſſe nequit, quam $2H$ anguli recti.

COROLL. 2.

§. 54. Deinde cum ſit $A = 3H - 6 - \alpha$, erit $4A - 4H = 8H - 24 - 4\alpha$. Hinc ſumma omnium angulorum planorum maior eſſe nequit, quam $8H - 24$ anguli recti. Numerus ideoque angulorum rectorum, quibus ſumma omnium angulorum planorum eſt aequalis, extra hos limites $2H$, et $8H - 24$ cadere nequit.

PROPOSITIO IX.

§. 55. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu ſolidi cuiuscunque occurrunt, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot adſunt anguli ſolidi, demtis octo.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus angulorum ſolidorum $= S$, ac demonſtrari debet; ſummam omnium angulorum planorum aequalem eſſe $4S - 8$ angulis rectis. Ponatur ad hoc numerus hedrarum $= H$, et numerus acierum $= A$, et quia in praecedente propoſitione demonſtrauimus, ſummam omnium angulorum planorum eſſe $= 4A - 4H$ angulis rectis, ob $H + S = A + 2$, erit $A - H = S - 2$, ideoque $4A - 4H = 4S - 8$. Vnde perſpicuum eſt, ſummam

ſummam omnium angulorum planorum eſſe $= 4S - 8$ rectis, ſeu aequari quater tot rectis, quot ſunt anguli ſolidi demtis octo. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 56. Inſignis ac palmaria haec eſt proprietas ſolidorum, quod ſumma omnium angulorum planorum vnice per numerum angulorum ſolidorum definitur, ſimili modo, quo in quauis figura plana ſumma angulorum ex eorum numero colligitur.

COROLL. 2.

§. 57. Merito igitur deſideratur demonſtratio huius propoſitionis ex ſolo numero angulorum ſolidorum petita, ita vt eam neque numerus hedrarum, neque numerus acierum ingrediatur. Hinc igitur, atque ex propoſitione quarta, cuius ne demonſtrationem quidem apodicticam exhibere potui, eo magis elucet, quam parum etiam nunc elementa Stereometriae ſint exculta.

COROLL. 3.

§. 58. Quoniam ſumma omnium angulorum planorum vnice a numero angulorum ſolidorum pendet, iſte numerus eiusmodi characterem ſolidorum conſtituit, a quo genera ſolidorum deriuanda eſſe videantur. Hinc ergo genera ſolidorum erunt ſecundum numerum angulorum ſolidorum ſequentia: 1. Tetragonum. 2. Pentagonum 3. Hexagonum, 4. Heptagonum etc. quae deinceps per numerum hedrarum magis determinabuntur.

PROBLE-

PROBLEMA I.

§. 59. *Genera notabiliora, ad quae omnia ſolida figuris planis incluſa, ſunt referenda, enumerare, nominibusque idoneis denotare.*

SOLVTIO.

Sit numerus angulorum ſolidorum $= S$, atque ſupra vidimus, numerum hedrarum extra hos limites: $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere non poſſe. Hinc ex tabella (§. 47.) exhibita pro quouis numero angulorum ſolidorum ſequentia ſolidorum genera conſtituentur:

Num. ang. ſol.	numerus hedrarum	numerus acierum	Nomina generum
4	4	6	Tetragonum tetraedrum
5	5	8	Pentagonum pentaedrum.
	6	9	Pentagonum hexaedrum.
6	5	9	Hexagonum pentaedrum.
	6	10	Hexagonum hexaedrum.
	7	11	Hexagonum heptaedrum.
	8	12	Hexagonum octaedrum.
7	6	11	Heptagonum hexaedrum.
	7	12	Heptagonum heptaedrum.
	8	13	Heptagonum octaedrum.
	9	14	Heptagonum enneaedrum.
	10	15	Heptagonum Decaedrum.

Num.

Num. ang. solidor.	numerus hedrarum	numerus acierum	nomina generum
8	6	12	Octogonum hexaedrum.
	7	13	Octogonum heptaedrum.
	8	14	Octogonum octaedrum.
	9	15	Octogonum enneaedrum.
	10	16	Octogonum decaedrum.
	11	17	Octogonum hendecaedrum.
	12	18	Octogonum dodecaedrum.
9	7	14	Enneagonum heptaedrum.
	8	15	Enneagonum Octaedrum.
	9	16	Enneagonum enneaedrum.
	10	17	Enneagonum decaedrum.
	11	18	Enneagonum hendecaedrum.
	12	19	Enneagonum dodecaedram.
	13	20	Enneagonum 13edrum.
	14	21	Enneagonum 14edrum.
10	7	15	Decagonum heptaedrum.
	8	16	Decagonum octaedrum.
	9	17	Decagonum enneaedrum.
	10	18	Decagonum decaedrum.
	11	19	Decagonum hendecaedrum.
	12	20	Decagonum dodecaedrum.
	13	21	Decagonum 13edrum.
	14	22	Decagonum 14edrum.
	15	23	Decagonum 15edrum.
	16	24	Decagonum 16edrum.

etc.

superfluum foret hunc generum solidorum catalogum vlte-

 rius

rius continuare, quoniam ex his progressio sequentium generum sponte perspicitur. Q. E. I.

COROLL. 1.

§. 60. Notari hic conuenit, nullum dari solidum, quod septem habeat acies, cum tamen primum genus tantum sex habeat acies; secundum genus habet octo, sequentia plures, atque in numeris acierum post senarium omnes numeri occurrunt, solo septenario excepto.

COROLL. 2.

§. 61. Ex primo genere patet, omne solidum tetragonon simul esse tetraedrum, et vicissim, quod genus, vti est simplicissimum, ita vnicam speciem continet, quae est pyramis triangularis quatuor triangulis inclusa.

COROLL. 3.

§. 62. Secundum genus habens 16 angulos planos, et 5 solidos, horum quatuor ex tribus planis, vnus ex 4 planis erit formatus, similiterque quinque eius hedrarum quatuor erunt triangula, vna vero quadrilaterum, ex quo hoc genus vnicam speciem, scilicet pyramidem super basi quadrilatera extructam, continet.

COROLL. 4.

§. 63. Tertium genus habens 18 angulos planos, 5 solidos, et 6 hedras includetur sex triangulis, quod vnico modo fieri potest, eritque hoc solidum pyramis trian-

triangularis geminata, ſeu erit ex duabus pyramidibus ſecundum baſes aequales iunctis compoſitum.

COROLL. 5.

§. 64. Quartum genus pariter vnicam ſpeciem continet tribus quadrilateris, et duobus triangulis incluſam, quae priſma triangulare vocatur. Sequentia genera plerumque plures ſpecies comprehendunt, ſed iis enumerandis immorari non licet, propterea quod adhuc aliae proprietates ſolidorum huc ſpectantes nondum ſatis ſunt euolutae.

SCHOLION.

§. 65. Haec ſunt ergo quaſi prima elementa Stereometriae, quae ſolidorum in genere ſpectatorum affectiones, ac proprietates continent, vnde deinceps ſingularum ſpecierum proprietates ſint deducendae. Propoſitiones ſcilicet hic traditae ſimiles ſunt earum, quae in Geometria plana de proprietatibus generalibus figurarum demonſtrari ſolent, et quae ad has duas reducuntur, vt in omni figura rectilinea primum angulorum numerus aequalis ſit numero laterum, tum vero vt ſumma omnium angulorum aequetur bis tot angulis rectis, quot ſunt latera, demtis quatuor. In ſolidis autem numerus huiusmodi propoſitionum fundamentalium multo eſt maior, quod quidem ob maiorem rerum, quibus determinantur multitudinem, non eſt mirandum. Hoc autem merito maxime mirum videtur, quod cum non ſolum elementa Geometriae planae ad ſummum perſpicuitatis faſtigium ſint promota, ſed etiam Stereometria iam ab antiquiſſimis Geometris ſit exculta, tamen prima eius quasi fundamenta adhuc inter desiderata sint referenda. Quanquam enim nunc equidem ista fundamenta in lucem protraxisse arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria sunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonstrationibus adhuc destitui, quae ideo potissimum hic proponenda duxi, vt alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes inuestigandas; quibus inuentis nullum plane est dubium, quin Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehatur.

DEMONSTRATIO
NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM, QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA SVNT PRAEDITA.

Auct. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inuestigari solet, certas quasdam habent proprietates generales ac notissimas, veluti quod numerus angulorum aequalis sit numero laterum, et quod summa angulorum aequalis sit bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus similes proprietates solidorum hedris planis inclusorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aeque merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, seu Geometria proprie sic dicta, ita similia Stereometriae principia stabilire in mentem venit, ex quibus

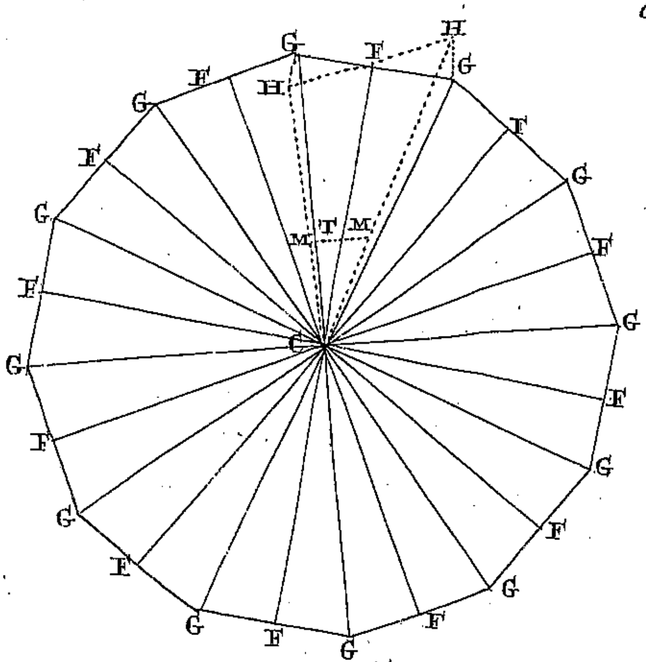

Fig. 1.

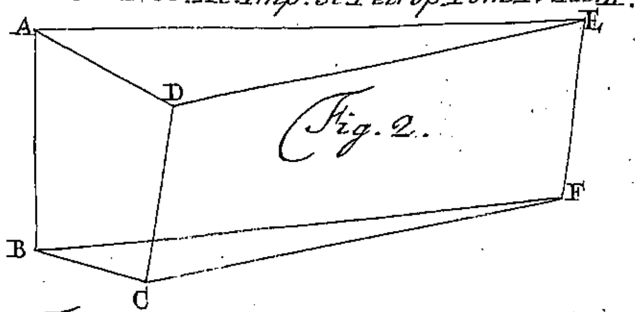

Fig. 2.

Fig. 3.

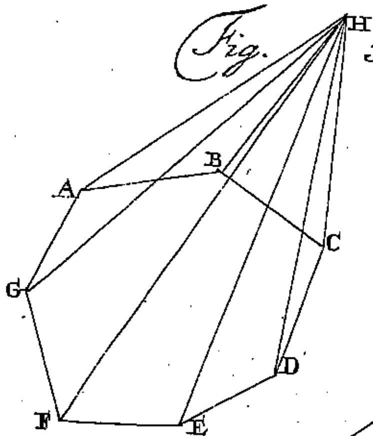

Fig. 5.

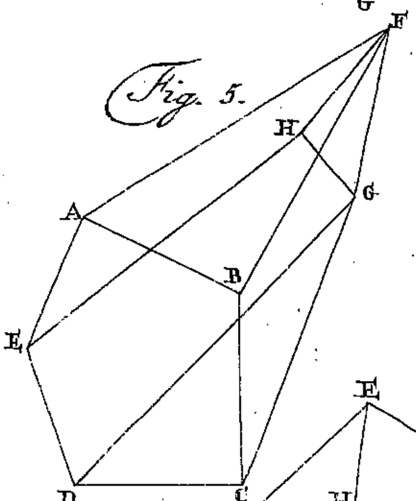

Fig. 4.

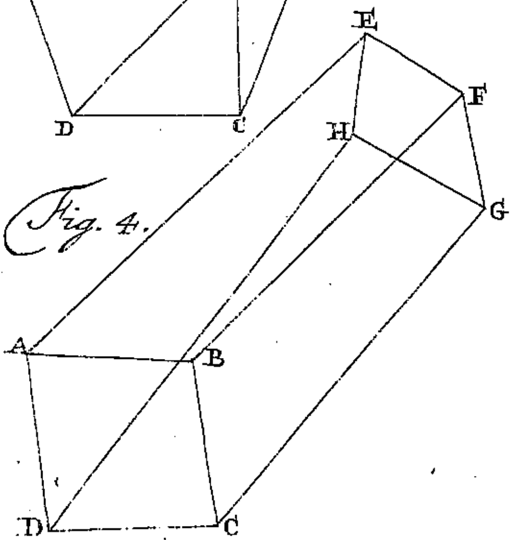

Fig. 6.