1758

De constructione aptissima molarum alatarum

Leonhard Euler

DE CONSTRVCTIONE
APTISSIMA MOLARVM ALATARVM

AVCT. L. EVLERO.

Nemo eſt qui ignoret, alas molarum alatarum venti directioni oblique exponi ſolere, vt hoc modo vis lateralis excipiatur qua alae in gyrum agantur, id quod non eueniret, ſi ventus normaliter in alas incideret. Hac de re iam prideme quaeſtio inter Geometras eſt agitata, ſub quonam angulo alae venti impulſionem recipere debeant, vt vi maxima circumagantur, ſicque maximum effectum praeſtare valeant. Plerique quidem hunc angulum conſtituerunt $54°, 45'$, qui etiamnunc fere vbique in praxi obſeruari ſolet; verum notandum eſt ex hoc angulo tum ſolum maximum oriri effectum, quando alae adhuc ſunt in quiete, ac demum ad motum ſunt impellendae. Cum vero machina iam in motu verſatur quoniam ob motum alarum tam vis quam directio venti immutatur, angulus ille hanc praerogatiuam prorſus amittit, atque experientia iam docuit, maiorem effectum obtineri, ſi angulus ille maior quam $54°, 45'$ ſtatuatur. Pendet ergo determinatio huius anguli quoque a motu alarum, qui quo fuerit velocior non difficulter colligere licet, eo maiorem quoque ſumi debere angulum, quem directio venti cum planitie alarum conſtituat. Verum etiam in ipſa alarum celeritate maximi quaedam proprietas locum habet; ſatis enim perſpicuum eſt, ſiue mola nimis celeriter circumagatur, ſiue nimis tarde, vtroque casu effectum produci debiliorem: ex quo intelligitur, dari certum quendam celeritatis gradum, qua si alae circumagantur, maximus inde effectus proficiscatur. Aestimatur autem quantitas effectus ex momento actionis vis impellentis, quod momentum definitur producto ex vi impellente in celeritatem qua machinam mouet; hincque etiam gradus ille celeritatis maxime idoneus vicissim ab obliquitate qua ventus in alas incidit, pendet; vnde duplex nascitur quaestio, qua tam obliquitas alarum ratione directionis venti, quam celeritas motus, quo alae in gyrum aguntur, determinanda proponitur, vt effectus maximus inde obtineatur, seu vt momentum actionis vis impellentis maximum valorem nanciscatur. Quae disquisitio quo latius pateat, eam ita instituam, vt alarum superficiem non planam, sed vtcunque incuruatam sim consideraturus; qua feliciter ad finem perducta concludere tandem licebit, quomodo superficies alarum vbique ad venti directionem comparata esse et quanta celeritate alae gyrari debeant, vt maximum a machinae actione effectum expectare queamus. Vtcunque autem alarum superficies sit incuruata, minima eius elementa pro planis haberi possunt, ex quo inuestigationem hanc a superficiebus planis inchoabo.

PROBLEMA I.

1. *Si ventus data celeritate in superficiem planam quiescentem sub quocunque angulo impingat, definire vim, qua haec superficies a vento sollicitabitur.*

SO-

SOLVTIO.

Sit aa area ſuperficiei planae, quae vim venti excipit, et Φ angulus, quem venti directio cum hoc plano facit: tum vero ſit k altitudo debita celeritate venti. Iam ſi ventus perpendiculariter impingeret, foret eius vis aequalis ponderi columnae aereae, cuius baſis ſit $= aa$ et altitudo $= k$; ſeu haec vis eſſet aequalis ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= aak$. Verum propter obliquitatem impulſus haec vis diminui debet in ratione ſinus totius ad ſinum anguli Φ: poſito ergo ſinu toto $= 1$, vis venti in ſuperficiem propoſitam aa celeritate altitudini k debita, et ſub angulo $= \Phi$ incidentis aequabitur ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= aak$ ſin. Φ^2, huiusque vis directio perpetuo ad planum propoſitum eſt normalis. Q. E. I.

SCHOLION.

2. Etſi ſolutio huius problematis ſatis ſuperque eſt nota, tamen ab eo initium ducere eſt viſum, vt menſuras abſolutas, quibus in ſequentibus vtar diſtinctius explicare liceat. Primum igitur grauitate ſpecifica aeris cognita haec vis ad cognitam ponderum menſuram reducitur; tametſi vero denſitas aeris valde eſt variabilis, ea plerumque octingenties minor aeſtimatur, quam denſitas aquae; vnde ſi formula aak ſin. Φ^2 per 800 diuiditur, reperitur volumen aquae, cuius ponderi vis inuenta aequatur; quod ſi in pedibus cubicis exprimitur, facile ad libras reducitur tribuendo 70 ℔ ſingulis pedibus cubicis aquae. Quod deinde ad celeritatem venti attinet, ea per ſpa-

F 2 tium

tium definiri solet, quod ventus singulis minutis secundis percurrit, quae mensura, quo facilius ad illam altitudinem k reuocari possit, omnes longitudines per datam mensuram metiri conuenit; pro qua assumam pedem Rhenanum. Si igitur venti celeritas sit $= e$ pedum vno minuto secundo, quoniam graue hoc tempore delabitur per spatium 15, 625 pedum et celeritate acquisita spatium duplum 31, 25 ped: conficere valet, erit $\sqrt{15,625} : \sqrt{k} = 31,25 : e$ vnde reperitur $e = 2\sqrt{15,625\,k} = 250\sqrt{\frac{k}{1000}} = 25\sqrt{\frac{1}{10}k}$ et $k = \frac{ee}{62\frac{1}{2}} = \frac{2ee}{125}$ sicque celeritates vtroque modo expressae facile inter se conferri possunt.

PROBLEMA II.

Tab. I. 3. *Si ventus celeritate data secundum datam directionem in elementum superficiei cuiuscunque quiescentis impingat, inuenire vim, qua hoc elementum sollicitabit.*

SOLVTIO.

Fig. 1. Referatur elementum superficiei propositum ad planum quoddam fixum, quod plano tabulae repraesentetur, sitque elementum in sublimi vtcunque positum in Z, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum ZY. Iam cum elementum hoc pro plano haberi possit, sit eius area infinite parua $= dS$; continuetur hoc planum donec planum tabulae intersecet, sit intersectio recta EF, ita vt planum EZF superficiem propositam in puncto Z tangat. Ex Y ad EF ducatur perpendicularis

YT

YT, iunctaque ZT in eam normalis ducatur YO, quae simul erit normalis in planum EZF; ipsi OY agatur parallela ZN occurrens ipsi TY productae in N, erit NZ tam ad rectam ZT quam ad planum EZF normalis. His positis angulus ZTY erit mensura inclinationis plani EZF ad planum tabulae, ac ponatur huius anguli complementum seu angulus YZT $= \Phi$; et rectae YZ $= z$ et YT $= t$; erit $t = z$ tangens Φ; et YO z sin. Φ, itemque YN $= \frac{zz}{t} = z$ cos. Φ et ZN $= \frac{z}{sin.\Phi}$. Exprimat nunc recta ZV directionem venti, cuius celeritas debita sit altitudini k, ita scilicet, vt si ventus per elementum Z penetraret, sit secundum directionem ZV progressurus; ac manifestum est totum negotium huc redire, vt rectae ZV inclinatio ad planum EZF inuestigetur, posita enim hac inclinatione $= \omega$ erit vis venti in elementum Z $= k d S$ sin. ω^2, quia angulus ω exhibet inclinationem directionis venti ZV ad planum elementi EZF. Verum ad hunc angulum ω inueniendum ex V in planum EZF ducatur perpendiculum VS, iunctaque ZS, erit VZS iste angulus quem vocauimus $= \omega$, ideoque sin. $\omega = \frac{VS}{ZV}$. Ex V ducatur ad EF normalis VR, eritque triangulum RVS simile triangulo TYO; Hinc si YP ad YT normalis agatur, et ex P ducatur PQ ipsi YO parallela, erit PQ normalis in planum EZF, et ob TP $=$ RV habebitur PQ $=$ VS. Quare si vocetur YV $= v$ et angulus TYV $= \zeta$, quibus positio puncti V continetur, erit PY $= v$ cos. ζ, ideoque TP $= z$ tangens $\Phi - v$ cos. ζ atque PQ $=$ TP cos $\Phi = z$ sin. $\Phi - v$ cos ζ cos $\Phi =$ VS. Ergo ob ZV $= \sqrt{(zz + vv)}$ erit sin. $\omega = \frac{z\, sin.\Phi - v\, cos.\zeta\, cos.\Phi}{\sqrt{(zz+vv)}}$, vnde

vnde dicitur vis venti in elementum propositum $Z = \frac{k\,ds\,(z\,\text{fin.}\,\Phi - v\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{zz + vv}$ qua expressione volumen aeris indicatur, cuius pondus vi quaesitae est aequale. Huius autem vis directio est recta Z N normalis ad planum E Z F, existente Y N $= z$ cof. Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

4. In hac solutione assumsimus elementum Z a vento planum tabulae versus impelli, ita vt inde vis nascatur punctum Z secundum directionem Z N vrgens. Hoc autem non erit nisi sit z fin. $\Phi > v$ cof. ζ cof. Φ seu z tang. $\Phi - v$ cof. $\zeta =$ T P > 0 nam si fuerit z fin. $\Phi - v$ cof. ζ cof. Φ quantitas negatiua etiamsi eius quadratum, quo vis inuenta exprimitur, aeque sit affirmatiuum, tamen vis directio in contrarium mutatur. Quia enim hoc casu z tang. $\Phi - v$ cof. ζ seu T P valorem sortitur negatiuum manifestum est venti directionem vltra Z productam Z V supra planum E Z F prominere, ideoque ventum a regione tabulae in elementum Z incurrere, vnde eius vis in plagam contrariam tendet. Ita quanquam hoc discrimen per formulam inuentam non indicatur, tamen tenendum est expressionem vis venti $\frac{k\,ds\,(z\,\text{fin.}\,\Phi - v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi)^2}{zz + vv}$ valorem habere affirmatiuum si fuerit z fin. $\Phi > v$ cof. ζ cof. Φ, sin autem sit z fin. $\Phi < v$ cof. ζ cof. Φ illam expressionem vis negatiue assumi debere.

COROLL. 2.

5. Si fiat z fin. $\Phi = v$ cof. ζ cof. Φ, seu z tang. $\Phi = v$ cof. ζ, vis venti omnino euanescit; id quod manifestum

festum est quia tum interuallum P T ideoque et V R in nihilum abit; Cadet ergo punctum V in rectam EF, atque directio venti Z V in ipso plano E Z F erit sita, vnde elementum Z a vento tantum stringetur neutiquam vero impelletur, quia angulus incidentiae V Z S euanesci. Ex quo casu eo clarius perspicitur, si sit z tang. $\Phi > v$ cos. ζ elemento Z planitiem superiorem seu eam, quae a plano tabulae est auersa venti impulsionem recipere, sin autem z tang. $\Phi < v$ cos. ζ planitiem inferiorem quae planum tabulae respicit, a vento impelli, sicque effectum plane contrarium produci debere.

COROLL. 3.

6. Si celeritas venti non per altitudinem ipsi debitam k detur, sed spatium exhibeatur, quod ventus vno minuto secundo percurrat, vis venti aeque facile exprimi poterit. Sit enim spatium a vento vno minuto secundo percursum $= e$ pedum Rhen. atque reliquae quantitates in eadem mensura exprimantur, erit vti vidimus (2), $k = \frac{2}{125} e e$, ita vis qua elementum $Z = d S$ secundum directionem Z N impelletur, aequalis erit ponderi voluminis aeris, quod est $= \frac{2}{125} e e d S . \frac{(z \sin . \Phi - v \cos . \zeta \cos . \Phi)^2}{z z + v v}$ seu posita ratione grauitatis specificae aeris ad aquam vt 1 ad 800, vis haec ponderi voluminis aquae aequabitur, quod est $= \frac{e e d S (z \sin . \Phi - v \cos . \zeta \cos . \Phi)^2}{50000 (z z + v v)}$ ped. cub.

COROLL. 4.

7. Potest etiam ad calculum contrahendum coefficiens iste numericus penitus omitti, atque vis venti in elemen-

elementum Z ſimpliciter hac formula $\frac{eedS(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{zz+vv}$ exprimi, dummodo meminerimus, quando hanc vim ad menſuram abſolutam reducere voluerimus, iſtam expreſſionem vel per $\frac{2}{125}$ vel per $\frac{1}{50000}$ multiplicari oportere, prout quantitatem huius vis vel per pondus voluminis aeris vel per pondus voluminis aquae expreſſam deſideremus: Tum vero quantitates, vt iam monui, ex pede Rhen. pro vnitate aſſumta definiri debent.

COROLL. 5.

8. Vis a vento ſecundum directionem ZN elemento Z impreſſa $= \frac{eedS(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{zz+vv}$ commodiſſime reſoluitur in binas vires, quarum altera vrgeat ſecundum directionem Z Y ad planum tabulae normalem, altera vero agat ſecundum directionem ipſi Y N parallelam. Nam ob angulum $YNZ = YZT = \Phi$, erit

vis ſecundum $ZY = \frac{eedS(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{zz+vv}\,\text{ſin.}\,\Phi$

vis ſecundum $YN = \frac{eedS(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{zz+vv}\,\text{coſ.}\,\Phi$

Id quod intelligendum eſt ſi fuerit $z\,\text{ſin.}\,\Phi > v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$; ſin autem ſit $z\,\text{ſin.}\,\Phi < v\,\text{coſ}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$, expreſſiones iſtae inuentae negatiuae capi debebunt.

PROBLEMA. III.

9. *Si ſuperficies quaecunque circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti ſit ipſi axi parallela, ſecundum quam in ſuperficiem data celeritate incurrat, inuenire vim, qua quoduis ſuperficiei elementum a vento impelletur.*

SOLV-

SOLVTIO.

Transſeat axis per punctum C ſitque ad planum tabulae normalis, ita vt etiam directio venti in planum tabulae ſit perpendicularis, cuius celeritas debita ſit altitudini $= k$, ſeu ſingulis minutis ſecundis ſpatium e pedum abſoluat, ita vt ſit $k = \frac{2}{125} e e$ pedum. Iam motus gyratorius ſuperficiei propoſitae circa axem C tantus ſit, vt eius punctum ab axe diſtans interuallo $= f$ percurrat ſpatium u pedum ſingulis minutis ſecundis, ita vt u exprimat hanc celeritatem, ſi celeritas venti exponatur ſpatio e, quod pariter minuto ſecundo conficitur. Sit iam elementum quodcunque ſuperficiei Z in ſublimi poſitum, cuius area ſit $= dS$, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum $ZY = z$: iungatur recta $CY = s$, quae puncti Z diſtantiam ab axe praebebit, et puncti Z motus circa axem conueniet cum motu puncti Y circa eundem axem. Cum autem diſtantiae f ab axe celeritas ſit $= u$, ob motum angularem diſtantiae $CY = s$ celeritas conueniet $= \frac{us}{f}$, quia celeritas motus angularis ſunt diſtantiis ab axe proportionales. Habebit ergo punctum Y celeritatem $= \frac{us}{f}$ ſecundum directionem Yq ad CY in plano tabulae normalem, eique aequalis erit celeritas puncti Z et ſecundum directionem ipſi Yy parallelam. Venti autem in Z incurrentis directio erit ZY normalis in planum tabulae quippe directioni axis C parallela, atque ſecundum hanc directionem in elementum Z impingeret, ſi hoc elementum quieſceret; verum cum id ipſum ſit in motu, tam celeritas venti, quam eius directio, qua elementum percutit, inde mutabitur. Ad quam mutationem inueniendam Fig. 2.

 conci-

concipiatur tam elemento quam vento insuper motus aequalis et contrarius ei, quo elementum Z mouetur, imprimi, vt hoc modo ipsum elementum ad quietem reducatur, atque venti motus relatiuus in elementum obtineatur. Ducatur ergo Zz ipsi Yy parallela, capiaturque Zz ad ZY in ratione celeritatis $\frac{us}{f}$ ad celeritatem e, vt sit $Zz = \frac{usz}{ef}$, ac repraesentante ZY veram venti celeritatem e, eius motus relatiuus componetur ex motu secundum ZY et motu secundum Zz. Compleatur ergo parallelogrammum $ZYVz$, erit $YV = \frac{usz}{ef}$ et cum Yy in directum iacebit; quo facto diagonalis ZV referet directionem venti relatiuam in elementum Z, atque celeritas relatiua erit ad celeritatem veram e, vt est ZV ad ZY, ita vt celeritas relatiua sit $= \frac{ZV}{ZY} \cdot e$: Quodsi ergo tantisper angulum, quem directio ZV cum planitie elementi constituit, ponamus $= \omega$ erit vis elemento impressa $= \frac{ZV^2}{ZY^2}\, ee\, dS$ sin. ω^2; seu cum sit $ZV^2 = ZY^2 + YV^2 = zz + \frac{uusszz}{eeff}$ erit haec vis $= (ee + \frac{uuss}{ff})\, dS$ sin. ω^2, quae in planitiem elementi est normalis. Ponamus iam hanc planitiem seu planum tangens superficiem in puncto Z plano tabulae occurrere in recta EF, ad quam ex Y perpendiculam ducatur YT, et ex Y in ductam ZT normalis agatur YO, erit haec in ipsam planum perpendicularis, cui si parallela ducatur ZN rectae TY productae occurrens in N, erit haec ZN directio secundum quam elementum Z a vento impelletur. Porro ex V in TY perpendiculum VP demittatur, itemque ex P in ZT perpendiculum PQ, atque vt in solutione praecedentis problematis vidimus

vidimus, praebebit $\frac{PQ}{ZV}$ sinum anguli, quo directio venti ZV in planum EZF est inclinata, ita vt sit: sin. $\omega = \frac{PQ}{ZV}$. Hinc vis venti in elementum $Z = dS$ exerta fiet $= \frac{PQ^2}{ZY^2} eedS = PQ^2 \cdot \frac{ee}{zz} dS$. Iam ad PQ commode exprimendum, ponatur inclinatio elementi seu plani EZF ad directionem venti veram ZY, seu angulus $YZT = \Phi$, erit $YT = z$ tang. Φ; $YN = z$ cot. Φ; et $YO = z$ sin. Φ. Praeterea vocetur angulus $FEY = \zeta$, cui aequalis erit angulus VYP, vnde ob $YV = \frac{usz}{ef}$, fiet $YP = \frac{usz}{ef}$ cos. ζ, hincque habebitur $TP = z$ tang. $\Phi - \frac{usz}{ef}$ cos. ζ, ex quo tandem elicitur $PQ = z$ sin. $\Phi - \frac{usz}{ef}$ cos. ζ cos. $\Phi = \frac{z}{e}(e \text{ sin } \Phi - \frac{us}{f} \text{ cos.} \zeta \text{ cos.} \Phi)$. Quam ob rem vis, qua elementum $Z = dS$ a vento sollicitabitur, erit $= dS\,(e \text{ sin. } \Phi - \frac{us}{f} \text{ cos. } \zeta \text{ cos. } \Phi)^2$, cuius vis directio est recta ZN normalis ad superficiem EZF, existente $YN = z$ cot. Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

10. Si ergo haec expressio per fractionem $\frac{2}{125}$ multiplicetur, et pes rhenanus pro communi mensura sumatur, prodibit volumen aeris, cuius ponderi haec vis aequatur. Vel si eadem expressio per $\frac{1}{50000}$ multiplicetur, obtinebitur volumen aquae, cuius pondus huic vi est aequale, si quidem aer octingenties leuior sit quam aqua: Ad hoc autem notandum est, celeritates per spatia vno minuto secundo confecta, haecque spatia pariter in pedibus exprimi debere, quem celeritates exprimendi modum in posterum retinebo.

COROLL. 2.

11. Hic iterum tenendum eſt elementum Z non in directione ZN impelli, niſi ſit e ſin. $\Phi > \frac{us}{f}$ coſ. ζ, coſ. Φ, vel e tangens $\Phi > \frac{us}{f}$ coſ ζ. Si enim fuerit e tangens $\Phi < \frac{us}{f}$ coſ. ζ, vis euadit negatiua, etiam, ſi id formula inuenta non declaret, atque elementum in plagam oppoſitam NZ vrgebitur; a parte ſcilicet tum poſtica impulſum aeris excipiet. Perinde ac tabula vento velocius ſecundum eandem plagam mota non ſolum a vento nullam impulſionem accipit, ſed etiam ab aere poſteriori repellitur.

COROLL. 3.

12. Vis haec elementum Z ſecundum directionem ZN ſollicitam commode reſoluitur ſecundum directiones ZY et YN. Hinc autem orietur vis ſollicitans

ſecundum directionem $ZY = dS(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{ſin.}\,\Phi$

ſecundum directionem $YN = dS(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\Phi$

Haec autem poſterior vis ſecundum directiones Yy et CY reſoluta dabit vim ſollicitantem

ſecundum directionem $Yy = dS(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$

ſecundum directionem $CY = dS(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$

ex quibus effectus vis venti ad motum gyratorium ſuperficiei perturbandum colligi poteſt.

COROLL. 4.

13. Perſpicuum autem eſt vires ſecundum directiones ZY et CY vrgentes nihil ad motum gyratorium conferre, quia vtraque ad directionem motus eſt normalis;

lis; Prior enim vis elementum Z tantum ſecundum venti directionem ſollicitat, altera vero id ab axe motus C directe reuellere conatur; Sicque ſola vis in directione Yy, ſecundum quam punctum Z re vera mouetur, reſtat qua motus totius ſuperficiei afficiatur.

COROLL. 5.

14. Momentum huius vis ad motum gyratorium accelerandum ergo inuenietur, ſi vis per longitudinem vectis CY in quem ſecundum Yy normaliter agit, multiplicetur. Cum igitur ſit $CY = s$ erit momentum vis venti ad motum gyratorium accelerandum quatenus ex elemento $Z = dS$ reſultat $s\,dS\,(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2$ $\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$

COROLL. 6.

15. Simili modo momentum actionis huius vis venti definietur. Si vis, quae punctum Z ſecundum motus ſui directionem propellens, quae eſt ea, quam ſecundum Yy agere inuenimus, per celeritatem puncti, Z, quae eſt $= \frac{us}{f}$, multiplicetur. Hanc ob rem vis venti elementum $Z = dS$ impellens praebebit hoc momentum actionis

$$\frac{us\,dS}{f}\,(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$$

quod ergo reperitur, ſi momentum illud ſtaticum per $\frac{u}{f}$ multiplicetur.

SCHOLION.

16. Non opus eſſe duco id, quod hic momentum actionis appello, etiamſi haec denominatio noua ſit,

 pecu-

peculiari definitione declarare; cum vis huius denominationis ex applicatione, quam feci, ſponte appareat. Quodſi enim machina quaecunque a vi quacunque in motu conſeruetur, ſpectari debet punctum machinae cui haec vis eſt applicata, huiusque inſuper puncti celeritas et directio ſecundum quam mouetur, tum niſi directio vis ſollicitantis in hanc ipſam directionem incidat, ea per notas reſolutionis regulas ad hanc directionem eſt reducenda, vt obtineatur vis punctum iſtud machinae ſecundum motus ſui directionem ſollicitans, quae etiam tota ad motum machinae accelerandum inſumeretur, niſi obſtacula accelerationem motus impedirent. Tum iſta vis, ſi per celeritatem puncti, cui eſt applicata, multiplicetur, productum erit id, quod hic momentum actionis appello. Vſus autem huius momenti actionis ampliſſimus eſt in diiudicandis omnis generis machinis, nam ſi omnium virium, quibus machina quaepiam incitatur, hoc modo momenta actionis capiantur, atque in vnam ſummam coniiciantur, huic ſummae ſemper aequalis eſt effectus, quem machina producere valet, quocunque demum modo machina ſit ex machinis ſimplicibus compoſita. Quare ſi machina viriumque applicatio ita inſtituatur, vt omnium iunctim ſumtarum momentum actionis fiat maximum, machina quoque maximum edet effectum, quo maior ab iisdem viribus nullo modo obtineri queat. In praeſenti quidem caſu momentum actionis venti in elementum Z impingentis, ita eſt comparatum, vt pluribus modis maximum valorem adipiscatur. Primo enim celeritas u ita definiri poteſt, vt momentum maximum euadat. Deinde tam angulus ζ quam

angulus

angulus ϕ, quibus inclinatio elementi reſpectu venti continetur, certos valores obtinere poſſunt, vt momentum actionis fiat maximum; atque ſi litteris u, ζ, et ϕ ſimul valores ex natura maximi eruti tribuantur, momentum actionis erit maximum maximorum. Verum huiusmodi inueſtigationem hic, vbi adhuc de viribus elementaribus ſermo eſt, ſuſcipere non conuenit, ſed eam differam, donec ad vires finitas ſimus peruenturi.

PROBLEMA IV.

17. *Si ſuperficies quaepiam circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti ad hunc axem ſit vtcunque inclinata, ſecundum quam in ſuperficiem data celeritate impingat, inuenire vim, qua quoduis ſuperficiei elementum a vento impelletur.*

SOLVTIO.

Transeat axis per punctum C ſitque is ad planum tabulae normalis, venti autem directio ſit vbique rectae H C parallela, ad cuius poſitionem inueniendam ex eius puncto quopiam H ad planum tabulae demittatur perpendiculum H G, quod axi erit parallelum, et angulus C H G exhibebit inclinationem venti ad axem. Tum ducatur G C in plano tabulae ac directio venti H C determinabitur per angulum C H G et poſitionem rectae G C ſuper plano tabulae. Vocetur ergo angulus CHG $= \theta$, quo directio venti ad axem inclinatur. Deinde conſideretur ſuperficiei elementum quodcunque Z in ſublimi poſitum, cuius area ſit $= dS$, indeque ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y iunctaque C Y, cuius reſpectu poſitionem rectae G C noſſe oportet, Fig. 3.

vocen-

vocentur $ZY = z$: $CY = s$, et angulus $YCG = \rho$. Porro planum tangens ſuperficiem in Z ſecet planum tabulae recta EF, ſitque angulus $YEF = \zeta$, et inclinatio plani EZF ad rectam ZY ſit $= \phi$ ad quem angulum repraeſentandum ducatur vt ante YT normalis ad EF, iunctaque ZT, erit angulus $YZT = \phi$ ideoque $YT = z$ tang. ϕ. Tum recta YO ex Y in TZ perpendiculariter ducta erit ſimul in planum tangens EZF perpendicularis, eritque $YO = z$ ſin. ϕ, ac ſi ZN pariter ad hoc planum ſit normalis, fiet $YN = z$ cot. ϕ, et angulus $YNZ = YZT = \phi$. His poſitis ſit ZS directio venti in elementum Z impingentis producta, erit ZS ipſi HC parallela, itemque YS ipſi GC parallela, hinc ergo habentur angulo : $YZS = GHC = \theta$, et $CYS = YCG = \varrho$. Ergo ob angulum ZYS rectum erit $YS = z$ tang. θ et $ZS = \frac{z}{cof.\theta}$, item ob angulum $EYT = 90° - \zeta$ erit $TYS = \varrho + \zeta - 90°$, vnde ſi ex S ad TY perpendicularis SR ducatur erit $YR = z$ tang. θ cof. $(\varrho + \zeta - 90°) = z$ tang. θ ſin. $(\zeta + \varrho)$ propter angulum $YSR = 180° - \zeta - \varrho$. Inuenta directione venti vera ZS, ſecundum eandem elementum $Z = dS$ feriretur, ſi id quieſceret : motum igitur eius gyratorium conſiderare oportet. Sit igitur u celeritas in diſtantia $= f$ ab axe, eritque celeritas gyratoria puncti $Z = \frac{us}{f}$, cuius directio erit parallela ipſi Yy ad CY normali : Quare ſi celeritas venti vera ſecundum directionem ſuam ZS ponatur $= e$ atque ipſi Yy ducatur parallela SV tanta vt ſit $ZS : SV = e : \frac{us}{f}$, erit $SV = \frac{us}{ef} ZS = \frac{usz}{ef cof.\theta}$. Iam recta ZV praebebit directionem relati-

vam,

vam, qua ventus in elementum Z impinget, eiusque celeritas relatiua erit $= \frac{ZV}{ZS} e$. Superest igitur, vt inclinatio huius directionis Z V ad planum E Z F indagetur; ad hoc ducatur V P ipsi Y T normalis, et quia V S est ad E Y normalis, quippe ipsi Yy parallela, erit angulus S V P $=$ E Y T $= 90° - \zeta$, vnde fiet P R $=$ V S cos. ζ $= \frac{u s z \cos. \zeta}{e f \cos. \theta}$, et T P $=$ T Y $-$ Y R $-$ P R dabit

$$TP = z \,\text{tang.}\, \Phi - z \,\text{tang.}\, \theta \,\text{sin.}\, (\zeta + \varrho) - \frac{u s z \cos. \zeta}{e f \cos. \theta}$$

Ex P ad ZT ducatur perpendicularis PQ ob ang. PTQ $= 90 - \Phi$, erit PQ $= z \,\text{sin.}\, \Phi - z \,\text{tang.}\, \theta \,\text{sin.}\, (\zeta + \varrho) \cos. \Phi - \frac{u s z \cos. \zeta \cos. \Phi}{e f \cos. \theta}$

At ex praecedentibus patet rationem $\frac{PQ}{ZV}$ dare sinum anguli, quo venti directio Z V ad elementum Z inclinatur, vnde cum celeritas sit $= \frac{ZV}{ZS} e$, erit vis venti in hoc elementum exerta $= dS \cdot \frac{ZV^2}{ZS^2} ee \cdot \frac{PQ^2}{ZV^2} = ee\, dS \cdot \frac{PQ^2}{ZS^2} = dS \left(\frac{e \cdot PQ \cos. \theta}{z} \right)^2$, ob ZS $= \frac{z}{\cos. \theta}$. Quam ob rem vis quaesita erit $= dS (e \cos. \theta . \,\text{sin.}\, \Phi - e \,\text{sin.}\, \theta . \,\text{sin.}\, (\zeta + \varrho) \cos. \Phi - \frac{us}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2$ atque directio huius vis est recta Z N ad planum E Z F normalis, cuius positionem ita inuenimus determinatam, vt sit Y N $= z \cos. \Phi$. Haec autem expressio dat volumen vel aeris vel aquae, cuius pondus isti vi est aequale, prout ea vel per $\frac{2}{333}$ vel per $\frac{1}{50000}$ multiplicetur. Q. E. I.

COROLL. 1.

18. Hic iterum notandum est, vim, qua elementum Z in directione Z N impelli inuenimus, fieri negatiuam, ideoque in regionem oppositam impelli, si fuerit

 e cos.

$e \cos.\theta \sin.\Phi < e \sin.\theta \sin.(\zeta + \varrho)\cos.\Phi + \frac{us}{f}\cos.\zeta \cos.\Phi$ seu $\mathrm{tang.}\Phi < \mathrm{tang.}\theta \sin.(\zeta + \varrho) + \frac{us}{ef}\frac{\cos.\zeta}{\cos.\theta}$. Quare vt vis illa ſit affirmatiua, vti in figura repraeſentatur, atque elementum Z ſecundum directionem Z N ſollicitet, neceſſe eſt, vt ſit

$$e \cos.\theta \sin.\Phi > e \sin.\theta \sin.(\zeta + \varrho)\cos.\Phi + \frac{us}{f}\cos.\zeta \cos.\Phi$$

seu $\frac{ef}{us} > \frac{\cos.\zeta}{\cos.\theta\,\mathrm{tang.}\Phi - \sin.\theta \sin.(\zeta+\varrho)}$; ad quod eo diligentius eſt attendendum, quia hoc diſcrimen per formulam inuentam non indicatur.

COROLL. 2.

19. Reſolutio huius vis ſimili modo inſtituitur, quo in problemate praecedente, oriuntur autem hinc vires

ſecundum $ZY = dS(e\cos.\theta\sin.\Phi - e\sin.\theta\sin.(\zeta+\varrho)\cos.\Phi - \frac{us}{f}\cos.\zeta\cos.\Phi)^2\sin.\Phi$

ſecundum $CY = dS(e\cos.\theta\sin.\Phi - e\sin.\theta\sin.(\zeta+\varrho)\cos.\Phi - \frac{us}{f}\cos.\zeta\cos.\Phi)^2\sin.\zeta\cos.\Phi$

ſecundum $Yy = dS(e\cos.\theta\sin.\Phi - e\sin.\theta\sin.(\zeta+\varrho)\cos.\Phi - \frac{us}{f}\cos.\zeta\cos.\Phi)^2\cos.\zeta\cos.\Phi$

ex quarum vltima obtinetur momentum vis venti ad motum gyratorium accelerandum, quod eſt

$$s\,dS(e\cos.\theta\sin.\Phi - e\sin.\theta\sin.(\zeta+\varrho)\cos.\Phi - \frac{us}{f}\cos.\zeta\cos.\Phi)^2\cos.\zeta\cos.\Phi$$

momentum autem actionis eiusdem vis eſt.

$$\frac{us}{f}dS(e\cos.\theta\sin.\Phi - e\sin.\theta\sin.(\zeta+\varrho)\cos.\Phi - \frac{us}{f}\cos.\zeta\cos.\Phi)^2\cos.\zeta\cos.\Phi.$$

COROLL. 3.

20. Tribus ergo caſibus momentum actionis euaneſcere poteſt, quorum primus eſt ſi $\cos.\zeta = 0$ ſeu angulus ζ rectus, ideoque recta E F ad C Y normalis.

Secun-

Secundo momentum actionis etiam fit $= 0$, si cof. $\Phi = 0$ si $\Phi = 90°$, quod euenit, si planum tangens EZF fuerit ad axem motus normale: Tertio momentum actionis fit nullum, si angulus Φ eiusmodi fuerit vt fit

$$\text{tang.}\,\Phi = \text{tang.}\,\theta\,\text{fin.}\,(\zeta + \varrho) + \frac{us}{ef} \cdot \frac{\text{cof.}\,\zeta}{\text{cof.}\,\theta}.$$

PROBLEMA V.

21. *Si ventus data celeritate secundum directionem quamcunque in alam molae alatae, quae velocitate quacunque circa axem gyretur, impingat, atque superficies alae habeat figuram vtcunque incuruatam, inuenire vim, quam ventus in alam exerit, eiusque momentum actionis.*

SOLVTIO.

Transeat axis molae per punctum C fitque normalis ad planum tabulae, venti autem directio fit vbique parallela rectae HC, ex cuius puncto quopiam H in planum tabulae normalis demittatur HG, quae cum axi fit parallela, erit CHG angulus, quem directio venti cum axe constituit: fit ergo vt ante hic angulus CHG $= \theta$. Superficies alae quaecunque fit referatur ad planum tabulae, in quo fumatur recta CA instar axis, ad quem coordinatae accommodentur: quae recta CA fimul cum ala in gyrum agatur: dum recta GCB a venti directione pendens manet immota; fitque angulus BCA $= \eta$, qui dum ala gyratur, continuo fiat maior, vim autem venti indagari oportet, dum ala in loco, quem figura exhibet, haeret, ficque quamdiu vim venti per totam alae fuperficiem colligimus, hunc angulum η Fig. 4.

 tan-

tanquam constantem spectabimus, erit ergo ang. A C G $= 180^\circ - \eta$. Sit venti celeritas $= e$, et posita distantia C A $= f$, sit celeritas motus gyratorii in hac distantia, qua punctum A circa C secundum A α progreditur $= u$. Iam ex puncto quocunque superficiei alae Z ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y et ex Y ad rectam C A ducatur normalis Y X, ponanturque tres coordinatae orthogonales, quibus locus puncti Z definitur C X $= x$, X Y $= y$ et Y Z $= z$; et quia superficies alae tanquam data spectatur, determinabitur z per x et y, seu erit z functio quaepiam ipsarum x et y; sit igitur differentialibus sumendis $dz = p\,dx + q\,dy$. Ducatur recta C Y, erit C Y $= \sqrt{(xx + yy)}$, et sin. XCY $= \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$, cos. XCY $= \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Hinc applicatione ad problema praecedens facta, erit CY $= s = \sqrt{(xx+yy)}$ et angulus YCG $= \varrho = 180^\circ - \eta -$ XCY, vnde sin. $\varrho =$ sin. $(\eta +$ XCY$) = \frac{x \sin. \eta + y \cos. \eta}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et cos. $\varrho = \frac{y \sin. \eta - x \cos. \eta}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Sit D Z F planum tangens superficiem alae in puncto Z existente Y D rectae C A parallela, et ex natura tangentium erit Y F $= \frac{z\,dy}{dz}$ posito x constante, et Y D $= \frac{z\,dx}{dz}$ posito y constante. Cum igitur priori casu sit $dz = q\,dy$, et posteriori $dz = p\,dx$ erit Y F $= \frac{z}{q}$ et Y D $= \frac{z}{p}$, vnde DF $= \frac{z}{pq}\sqrt{(pp+qq)}$ Hinc porro erit sin. F D Y $= \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}$ et cos. F D Y $= \frac{q}{\sqrt{(pp+qq)}}$ Iam quia supra posuimus angulum Y E F $= \zeta$ erit $\zeta =$ F D Y + X C Y, vnde obtinebimus: sin. $\zeta = \frac{px + qy}{\sqrt{(xx+yy)(pp+qq)}}$ et cos. $\zeta = \frac{qx - py}{\sqrt{(xx+yy)(pp+qq)}}$.

Prae-

Praeterea vero erit $\zeta + \varrho = 180 - \eta + \mathrm{FDY}$, vnde colligitur fin. $(\zeta + \varrho) =$ fin. $(\eta - \mathrm{FDY}) = \frac{q \sin. \eta - p \cos. \eta}{\sqrt{(pp+qq)}}$, ficque iam omnes valores fumus confecuti, qui in expreffiones virium quaefitarum ingrediuntur, praeter angulum Φ, ad quem inueniendum ex Y ad DF normalis ducatur YT, iunctaque ZT, erit angulus $\mathrm{YZT} = \Phi$. At ob DF : FY = DY : YT erit $\mathrm{YT} = \frac{z}{\sqrt{(pp+qq)}}$, ideoque tang. $\Phi = \frac{\mathrm{YT}}{\mathrm{YZ}} = \frac{1}{\sqrt{(pp+qq)}}$, ac propterea fin. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+pp+qq)}}$ et cof. $\Phi = \frac{\sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}}$. His valoribus fubftituendis habebimus:

$e \cos. \theta \sin. \Phi = \frac{e \cos. \theta}{\sqrt{(1+pp+qq)}}$; $e \sin. \theta \sin. (\zeta + \varrho) \cos. \Phi = \frac{e \sin. \theta (q \sin. \eta - p \cos. \eta)}{\sqrt{(1+pp+qq)}}$ et $\frac{us}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi = \frac{u(qx-py)}{f\sqrt{(1+pp+qq)}}$. Ponatur ad abbreuiandum $\mathrm{V} = e \cos. \theta - e \sin. \theta (q \sin. \eta - p \cos. \eta) - \frac{u}{f}(qx - py)$, eritque $e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \varrho) \cos. \Phi - \frac{us}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi = \frac{\mathrm{V}}{\sqrt{(1+pp+qq)}}$. Si iam areola elementi fuperficiei in Z, quae pofita eft $= dS$ in plano tabulae elemento $dx\,dy$ immineat, erit $dS : dx\,dy = \mathrm{ZT} : \mathrm{YT} = 1 : \sin. \Phi$ ideoque $dS = dx\,dy \sqrt{(1+pp+qq)}$: vnde vis, qua elementum Z fecundum directionem normalem ZN vrgetur, erit $= \frac{\mathrm{VV}\,dS}{1+pp+qq} = \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1+pp+qq)}} \cdot \mathrm{VV}$. Hinc porro oritur vis fecundum directionem $\mathrm{ZY} = \frac{dx\,dy}{1+pp+qq} \cdot \mathrm{VV}$; et vis fecundum directionem CY feu $\mathrm{YI} = \frac{(px+qy)\,dx\,dy}{(1+pp+qq)\sqrt{(xx+yy)}} \cdot \mathrm{VV}$; et vis fecundum $\mathrm{Y}y = \frac{(qx-py)\,dx\,dy}{(1+pp+qq)\sqrt{(xx+yy)}} \cdot \mathrm{VV}$. Ex hac vltima vi oritur momentum potentiale, ad motum alae accelerandum $= \frac{(qx - py)dxdy}{1 + pp + qq}$. V V, et momentum actionis erit $= \frac{u(qx - py)dxdy}{f(1 + pp + qq)}$. V V, quod reperitur si momentum potentiale per $\frac{u}{f}$ multiplicatur. Vt autem ex viribus his elementaribus eliciantur vires finitae ex tota alae superficie oriundae, ponatur primo x constans, et quaerantur integralia ex sola variabilitate ipsius y resultantia, tumque y ad totam alae latitudinem abscissae C X respondentem extendatur, quo facto formula denuo integretur ex variabilitate ipsius x, tumque x ad totam alae longitudinem extendatur, sicque tam vires quam earum momenta pro tota alae superficie inuenientur. Q. E. I.

C O R O L L. 1.

22 Vires, quae secundum directiones ZY et YI alam sollicitant, nihil conferunt ad motum alae vel accelerandum vel retardandum, sed prior ad alam ab axe abrumpendam, altera vero ad alam euellendam conatum exerit; vnde alam satis firmiter axi infixam esse oportet, vt his viribus resistere valeat. In hunc finem sufficit istas vires proxime saltem nosse, neque operae pretium foret earum quantitatem nimis studiose per integrationes acquirere, nisi calculus facile expediri possit.

C O R O L L. 2.

23. Totum ergo integrationis opus ad inuentionem momentorum redit, quae duplicem integrationem requirit. Erit nimirum momentum potentiale $=$ $\int dx \int \frac{VV(qx - py)dy}{1 + pp + qq}$, quo inuento erit momentum actionis

nis $= \frac{u}{f} \int dx \int \frac{VV(qx - py)dy}{1 + pp + qq}$, ideoque totum negotium duplici hac integratione abſoluitur. Perinde autem eſt ab vtra variabili x et y conſtanti aſſumenda prima integratio inſtituatur, quin etiam alias nouas variabiles introducere licet, atque tum in hoc tantum eſt elaborandum, vt duplex integratio perficiatur, quae nullo diſcrimine inter variabiles habito hoc modo indicari poteſt $\iint \frac{VV(qx - py)dxdy}{1 + pp + qq}$.

COROLL. 3.

24. De his viribus et momentis iterum notandum eſt eorum valores tum tantum eſſe affirmatiuos et aſſignatas directiones habere, quando valor ipſius V fuerit affirmatiuus, ſin autem V obtineat valorem negatiuum tum etiam ipſas vires earumque momenta in plagam contrariam agere. Quae conditio huc redit, vt quadrato V V idem ſignum tribuatur, quod conuenit ipſi quantitati V, ita vt ſi valor ipſius V fiat negatiuus, etiam quadrato V V ſignum negationis praefigatur.

COROLL. 4.

25. Quando igitur quaeſtio circa figuram alae ita inſtituatur, vt vis venti plurimum conferat ad eius motum promouendum, figuram alae ita comparatam eſſe oportet, vt nusquam ſeu pro nullo alae elemento valor ipſius V fiat negatiuus. Si enim pro quapiam parte valor ipſius V fieret negatiuus, ab ea motus alae impediretur, atque expediret illam partem reſcindi. Quae cautio eo magis eſt

eſt obſeruanda, quod calculus nullam huiusmodi diminutionem indicat, etiamſi vsquam V valorem negatiuum ſortiatur.

COROLL. 5.

26. Cum valor ipſius V ita determinetur, vt ſit $V = e \operatorname{cof.} \theta - e \operatorname{fin.} \theta (q \operatorname{fin.} \eta - p \operatorname{cof.} \eta) - \frac{u}{f}(qx - py)$; hinc apparet, quomodo iſte valor ab obliquitate venti reſpectu axis C pendet, hoc eſt tum ab angulo $CHG = \theta$ et ab angulo $ACB = \eta$. Quare ſi obliquitas iſta euaneſcat, ventusque ſecundum directionem axis in alam impingat, erit $\theta = 0$, ideoque $\operatorname{cof.} \theta = 1$ et $\operatorname{fin.} \theta = 0$, vnde fiet $V = e - \frac{u}{f}(qx - py)$.

COROLL. 6.

27. Sin autem directio venti ſit ad axem C normalis, ideoque plano tabulae parallela, ita vt ſecundum directionem GCB in alas incurrat, ob angulum θ rectum fiet $V = e(p \operatorname{cof.} \eta - q \operatorname{fin.} y) - \frac{u}{f}(qx - py)$

SCHOLION.

28. Quia iam innui poſſe, ſitum cuiusuis elementi Z per alias coordinatas determinari, non abs re erit, hanc determinationem alio modo inſtituere, qui ſaepenumero calculum multo faciliorem reddet. Definiatur ſcilicet interuallum $YZ = z$ ex diſtantia $CY = s$ et angulo ACY, quem ponam $= v$, ita vt iam z ſit functio quantitatum s et v, ex cuius differentiatione naſcatur

ſcatur $dz = P\,ds + Q\,dv$. Iam primo valores praecedentium coordinatarum x et y itemque quantitatum p et q per s, v, P et Q definiri oportet. Erit autem $x = s\,\text{coſ.}\,v$, $y = s\,\text{ſin.}\,v$, ideoque $dx = ds\,\text{coſ.}\,v - s\,dv\,\text{ſin.}\,v$ et $dy = ds\,\text{ſin.}\,v + s\,dv\,\text{coſ.}\,v$ quibus valoribus in forma praecedenti $dz = p\,dx + q\,dy$ ſubſtitutis fiet

$$dz = p\,ds\,\text{coſ.}\,v + q\,ds\,\text{ſin.}\,v - p\,s\,dv\,\text{ſin.}\,v + q\,s\,dv\,\text{coſ.}\,v$$

eritque ergo

$$P = p\,\text{coſ.}\,v + q\,\text{ſin.}\,v \text{ et } Q = q\,s\,\text{coſ.}\,v - p\,s\,\text{ſin.}\,v$$

vnde colligitur $P\,\text{coſ.}\,v - \frac{Q}{s}\,\text{ſin.}\,v = p$ et $P\,\text{ſin.}\,v + \frac{Q}{s}\,\text{coſ.}\,v = q$. Hincque porro fit $qx - py = Q$ et $1 + pp + qq = 1 + PP + \frac{QQ}{ss}$. atque $q\,\text{ſin.}\,\eta - p\,\text{coſ.}\,\eta = \frac{Q}{s}\,\text{ſin.}\,(\eta + v) - P\,\text{coſ.}(\eta + v)$: Vnde obtinetur:
$V = e\,\text{coſ.}\,\theta + e\,P\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}(\eta + v) - \frac{eQ}{s}\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}(\eta + v) - \frac{uQ}{f}$. ita vt caſu $\theta = 0$ fit $V = e - \frac{uQ}{f}$. Iam elementum in plano tabulae elemento $Z = dS$ ſubiectum eſt $= s\,ds\,dv$ quod loco $dx\,dy$ ſcribi debet: vnde colligitur

vis ſecundum $ZY = \frac{s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

vis ſecundum $YI = \frac{P\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

vis ſecundum $Yy = \frac{Q\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

hincque erit vis venti momentum potentiale $= \frac{Q\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$, et momentum actionis $= \frac{uVV}{f} \cdot \frac{Q\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss}$ ex quibus per duplicem integrationem vires et momenta ex tota alae ſuperficie nata eliciuntur.

PROBLEMA VI.

29. *Si superficies alae fuerit figura plana quaecunque ad axem vtcunque inclinata, quae circa axem motu quocunque gyretur, atque ventus in eam data celeritate secundum directionem quamcunque impingat, inuenire vim eiusque momentum, quo ala a vento sollicitabitur.*

SOLVTIO.

Fig. 5. Insistat axis plano tabulae normaliter, transeatque per eius punctum C; venti autem directio vbique parallela sit rectae HC ex cuius puncto quopiam H in planum tabulae demisso perpendiculo HG axi parallelo, sit angulus CHG $= \theta$, quo definitur inclinatio axis ad directionem venti, cuius celeritas sit vt hactenus $= e$. Deinde cum alae superficies sit plana, sit recta DEF eius intersectio cum plano tabulae, ad quam ex C ducatur normalis CD, sitque CD $= c$; et ducta CK ipsi DF parallela ponatur angulus BCK $= \eta$, qui dum ala motu angulari promouetur, continuo crescat; alae autem in distantia f ab axe celeritas sit $= u$. Iam consideretur alae punctum quoduis Z vnde in planum tabulae demittatur perpendiculum ZY, et ex Y ad DF ducatur normalis YT, iunctaque ZT, erit TZY angulus, quo planum alae ad axem C inclinatur, qui angulus supra positus est $= \Phi$. Quodsi ergo quasi coordinatae pro figura alae ponantur, DT $= t$, et TZ $= y$, erit TY $= y$ sin. Φ, et ZY $= y$ cos. Φ: elementum autem alae erit $= dt\,dy$, quod supra per dS indicauimus. Ducatur recta CY, et solutione *Probl. IV.*

huc

huc translata, erit $YEF = \zeta$, $CY = s$, et $YCG = \varrho$, ac $dS = dt\,dy$. Fiet autem ex praecedentibus denominationibus $s = \sqrt{(tt + (c + y \text{ fin. } \Phi)^2)}$, ac posito tantisper angulo $ECD = \omega$, vt sit $\text{fin. } \omega = \frac{t}{s}$; $\text{cos. } \omega = \frac{c + y \text{ fin. } \Phi}{s}$, erit angulus $\zeta = 90° - \omega$, ideoque $\text{fin. } \zeta = \frac{c + y \text{ fin. } \Phi}{s}$ et $\text{cos. } \zeta = \frac{t}{s}$: deinde vero erit $YCG = \varrho = 180° - \eta - \zeta$ ideoque $\zeta + \varrho = 180° - \eta$ et $\text{fin. } (\zeta + \varrho) = \text{fin. } \eta$, tum vero $s \text{ cos. } \zeta = t$. Hinc prodit vis venti in elementum alae $Z = dt\,dy$ secundum directionem normalem ZN exerta $= dtdy(e \text{ cos. } \theta \text{ fin. } \Phi - e \text{ fin. } \theta \text{ fin. } \eta \text{ cos. } \Phi - \frac{ut}{f} \text{ cos. } \Phi)^2$ posito alam in plagam Yy gyrari. Ex quo colligitur

vis secundum $ZY = dtdy(e \text{ cos. } \theta \text{ fin. } \Phi - e \text{ fin. } \theta \text{ fin. } \eta \text{ cos. } \Phi - \frac{ut}{f} \text{ cos. } \Phi)^2 \text{ fin. } \Phi$

vis secundum $CY = \frac{c + y \text{ fin. } \Phi}{s} dtdy(e \text{ cos. } \theta \text{ fin. } \Phi - e \text{ fin. } \theta \text{ fin. } \eta \text{ cos. } \Phi - \frac{ut}{f} \text{ cos. } \Phi)^2 \text{ cos. } \Phi$

vis secundum $Yy = \frac{t\,dt\,dy}{s}(e \text{ cos. } \theta \text{ fin. } \Phi - e \text{ fin. } \theta \text{ fin. } \eta \text{ cos. } \Phi - \frac{ut}{f} \text{ cos. } \Phi)^2 \text{ cos. } \Phi$

Hinc ita elicitur momentum potentiale ad motum alae accelerandum $= t\,dtdy(e \text{ cos. } \theta \text{ fin. } \Phi - e \text{ fin. } \theta \text{ fin. } \eta \text{ cos. } \Phi - \frac{ut}{f} \text{ cos. } \Phi)^2 \text{ cos. } \Phi$, quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Consideretur primo t tanquam constans, atque integrale erit $= ytdt(e \text{ cos. } \theta \text{ fin. } \Phi - e \text{ fin. } \theta \text{ fin. } \eta \text{ cos. } \Phi - \frac{ut}{f} \text{ cos. } \Phi)^2 \text{ cos. } \Phi$ quo exprimitur momentum ex areola alae ydt ortum Repraesentetur iam tota ala in plano tabulae sitque ea EMFME, quae a plano ad axem normali secetur recta DF, vt in figura praecedente, sitque Cc huic alae plano oblique insistens, ita vt iam sit angulus $CcD = \Phi$, Fig. 6.

et linea CD tam ad axem cC quam ad rectam DF normalis. Sic cum sit $CD = c$, erit $Dc = \frac{c}{\text{sin.}\,\Phi}$ sicque punctum c in plano alae reperitur, in quo axis hoc planum traiicit. Quod si iam vocetur $DT = t$, et tota ordinata $MPM = v$, posito v pro y, erit momentum vis venti in alae partem MEM impingentis ad motum alae gyratorium accelerandum

$$= \int v\,t\,dt\left(e \cos\theta \sin.\Phi - e \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi - \frac{ut}{f} \cos.\Phi\right)^2 \cos.\Phi$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Manifestum autem est hoc integrale ita capi oportere, vt id euanescat posito $t = DE$, quo facto si ponatur $t = DF$ prodibit momentum ex tota ala ortum. Integratio autem pendet a natura figurae alae, qua definitur, qualis functio v sit ipsius t, sicque pro quouis casu tam momentum potentiale reperitur, quam momentum actionis, quod habebitur si illud per $\frac{u}{f}$ multiplicetur. Ceterum hic notandum est omnes quantitates quae in hanc formulam ingrediuntur, praeter binas t et v esse constantes, et in integratione pro talibus haberi debere. Q. E. I.

COROLL. I.

30. Quia linea CD, quam posuimus $= c$, et quae distantiam axis a recta DF designat non in expressionem momenti ingreditur, momentum semper idem manebit, per quodcunque rectae Dc ad DF normalis punctum axis cC transeat, dummodo sibi maneat parallelus. Vel quod eodem redit, nihil refert, per quodnam rectae Dc punctum linea DF ducatur, dummodo fuerit ad Dc perpendicularis et in plano alae sita.

COROLL.

COROLL. 2.

31. Data igitur alae figura EMFME in plano tabulae descripta vbicunque axis Cc hoc planum traiiciat, semper eiusmodi planum per axem transiens dabitur, quod simul erit ad planum alae normale, cuius notetur intersectio cD, ita vt planum CcD sit ad planum alae normale, ex quo cognoscetur angulus $CcD = \Phi$, quo axis ad planum alae inclinatur. Tum inuenta recta cD tota alae figura rectis MM, mm isti cD parallelis in elementa $MmmM$ resoluatur, eritque quaeuis ordinata $MM = v$, eiusque distantia a recta cD, nempe $DT = t$; atque momentum pendebit ab aequatione, qua relatio inter t et v exprimitur.

COROLL. 3.

32. Cognita aequatione inter t et v, dummodo pro quauis distantia $DT = t$ a recta cD, ordinata MM fuerit $= v$, vbicunque etiam in recta ipsi cD parallela existat, siue sit in MM, vt figura exhibet, siue magis dextrorsum sinistrorsumue promota, momentum vis venti semper erit idem. Ideoque vna aequatio inter t et v data ad innumerabiles alae figuras erit accommodata.

COROLL. 4.

33. Si elementum areae alae $MmmM$ ponatur $= dS$, erit $dS = v\,dt$, et momentum elementare ex vi venti in areolam $MmmM$ impingentis, erit $=$ $t\,dS(e \text{ cos. } \theta \text{ sin. } \Phi - e \text{ sin. } \theta \text{ sin. } \eta \text{ cos. } \Phi - \frac{u\,t}{f} \text{ cos. } \Phi)^2 \text{ cos. } \Phi$

I 3 quod

quod ad motum alae accelerandum confert, nisi eius valor fuerit negatiuus. Quare vt motus alae a vi venti promoueatur, primum necesse est vt t habeat valorem affirmatiuum, sicque tota ala ad easdem partes rectae c D sita esse debet. Si enim quaepiam alae pars ad alteram partem huius rectae c D extenderetur, a vi venti in eam impingentis oriretur momentum contrarium, quo motus alae retardaretur, sicque machina in motu suo impediretur.

COROLL. 5.

34. Praeterea vero ne vis venti motui alae vsquam aduersetur, necesse est, vt haec quantitas

$$e \operatorname{cos.} \theta \operatorname{sin.} \Phi - e \operatorname{sin.} \theta \operatorname{sin.} \eta \operatorname{cos.} \Phi - \frac{ut}{f} \operatorname{cos.} \Phi$$

vbique valorem obtineat affirmatiuum; seu vt membra eius negatiua semper sint minora quam membrum primum affirmatiuum $e \operatorname{cos.} \theta \operatorname{sin.} \Phi$. Vltimum autem membrum $\frac{ut}{f} \operatorname{cos.} \Phi$ semper est negatiuum, fitque maximum, vbi ad alae partem F a recta c D maxime remotam peruenitur. Quod si ergo haec distantia D F ponatur $= f$, ita vt puncti F celeritas gyratoria sit $= u$, oportet vt posito $t = f$, sit haec quantitas $e \operatorname{cos.} \theta \operatorname{sin.} \Phi - e \operatorname{sin.} \theta \operatorname{sin.} \eta \operatorname{cos.} \Phi - u \operatorname{cos.} \Phi$ affirmatiua, tum enim, si fuerit $t < f$, ea multo magis erit affirmatiua.

COROLL. 6.

35. Dum ala gyratur angulus $\eta =$ B C K continuo mutatur, ideoque ne superior formula vnquam negatiuum obtineat valorem tantum efficiendum est, vt quando secundus terminus maximum sortitur valorem negatiuum,

vum, quod fit fi angulus η erit rectus, feu fin. $\eta = 1$, tamen illa formula non fiat negatiua. Debebit ergo valor huius formulae

e cof. θ fin. $\Phi - e$ fin. θ cof. $\Phi - u$ cof. Φ feu huius e fin. $(\Phi - \theta) - u$ cof. Φ effe affirmatiuus.

COROLL. 7.

36. Quod fi ergo tota ala EMFME ad eandem partem rectae c D fuerit pofita, ita vt abfciffa t nusquam fiat negatiua, infuperque fuerit e fin. $(\Phi - \theta) - u$ cof. Φ, feu celeritas alae in diftantia DF $= f$, non fit maior quam $\frac{e \text{ fin. } (\Phi - \theta)}{\text{cof. } \Phi}$, tum femper et vbique vis venti ad alam promouendam impendetur. Hinc igitur patet, fi directio venti cum directione axis, circa quem ala gyratur, non conueniat, fed ab ea declinet angulo θ, hunc angulum minorem effe debere angulo Φ, quo axis ad fuperficiem alae inclinatur.

SCHOLION.

37. Data ergo figura alae feu faltem relatione inter t et v qua innumerae alae figurae continentur, determinatio momenti vis venti ab his tribus formulis integralibus $\int v t\, d t$, $\int v t t\, d t$, et $\int v t^3\, d t$ pendet. Capiantur ergo valores horum integralium per totam alae fuperficiem, ponaturque

$\int v t\, d t = A$; $\int v t t\, d t = B$ et $\int v t^3\, d t = C$

erunt A, B, C quantitates conftantes a fola figura alae pendentes. Atque momentum potentiale vis venti in alam

alam totam ad eius motum accelerandum erit:

$$A ee (\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2 B e u}{f} (\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi) \cos.\Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \cos.\Phi^3,$$

hincque momentum actionis vis venti in hanc alam erit

$$\frac{A e e u}{f} (\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2 B e u u}{ff} (\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi) \cos.\Phi^2 + \frac{C u^3}{f^3} \cos.\Phi^3.$$

Quare si directio venti fuerit directioni axis parallela, quemadmodum fere semper molae alatae vento opponi solent, erit momentum potentiale venti ad motum accelerandum tendens

$$A e e \sin.\Phi^2 \cos.\Phi - \frac{2 B e u}{f} \sin.\Phi \cos.\Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \cos.\Phi^3$$

et momentum actionis hinc erit

$$\frac{A e e u}{f} \sin.\Phi^2 \cos.\Phi - \frac{2 B e u^2}{f^2} \sin.\Phi \cos.\Phi^2 + \frac{C u^3}{f^3} \cos.\Phi^3$$

Hoc casu statim colligitur, si ala adhuc sit in quiete vel nunc primum moueri incipiat, momentum fore maximum si fuerit $\sin.\Phi^2 \cos.\Phi$ maximum, quod euenit si per differentiationem fiat

$$2 \sin.\Phi \cos.\Phi^2 = \sin.\Phi^3 \text{ seu } \tang.\Phi = \sqrt{2}$$

vnde anguli Φ prodit valor $54^\circ, 45'$, qui angulus plerumque in molis alatis obseruari solet. Verum hinc iam satis liquet hanc maximi praerogatiuam in istum angulum non competere, nisi molae ala adhuc sit in quiete, atque pro quouis celeritatis gradu quo mouetur, peculiarem prodire valorem anguli Φ, quo momentum vis venti fiat maximum.

PRO-

PROBLEMA VII.

38. *Si ala fuerit plana, atque axis, circa quem mouetur, directioni venti directe opponatur, inuenire inclinationem, sub qua ala ad axem constitui debet, atque celeritatem alae gyratoriam, qua momentum actionis venti fiat maximum.*

SOLVTIO.

Sit E M F M E figura alae data, in plano tabulae exhibita, per cuius punctum quodpiam c axis C c transeat, cuius inclinatio $C c D = \Phi$ quaeritur. Detur tamen planum $C c D$, in quo axis constituitur, ad planum alae normale, ideoque interfectio $c D$, cui parallelae sumantur ordinatae M M, $m m$ in ala, positisque $D T = t$, et $M M = v$, pro tota ala per integrationes quaerantur sequentes valores Fig. 6.

$$\int v t dt = A, \int v t t dt = B \text{ et } \int v t^3 dt = C.$$

Deinde sit maxima alae ab axe elongatio $DF = f$, et celeritas, qua punctum F circa axem gyratur $= u$, quae etiam ita definienda est, vt momentum actionis fiat maximum. Iam vero quia directio venti in directionem axis incidere assumitur, erit momentum actionis:

$$\frac{Aeeu}{f}\,\text{sin.}\,\Phi^2\,\text{cos.}\,\Phi - \frac{2Beu^2}{ff}\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi^2 + \frac{Cu^3}{f^3}.\,\text{cos.}\,\Phi^3.$$

Ponamus primo celeritatem u iam esse datam, et quaeramus angulum Φ, quo hoc momentum fiat maximum, atque manifestum est, eodem casu maximum fieri momentum potentiale:

$$A\,ee\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{2\,B\,e\,u}{f}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 + \frac{C\,u\,u}{f\,f}\,\text{cof.}\,\Phi^3,$$

quod ergo vt fiat maximum, necesse est, vt differentiatione instituta sit

$$2\,A\,ee\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 - A\,ee\,\text{fin.}\,\Phi^3 - \frac{2\,B\,e\,u}{f}\,\text{cof.}\,\Phi^3 + \frac{4\,B\,e\,u}{f}\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{3\,C\,u\,u}{ff}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 = 0,$$

seu diuiso per $\text{cof.}\,\Phi^3$ ob $\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi} = \text{tang.}\,\Phi$, erit

$$A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi^3 - \frac{4\,B\,e\,u}{f}\,\text{tang.}\,\Phi^2 - 2\,A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi + \frac{2\,B\,e\,u}{f} = 0.$$
$$+ \frac{3\,C\,u\,u}{ff}\,\text{tang.}\,\Phi.$$

Pendet ergo inuentio anguli Φ a resolutione huius aequationis cubicae, de qua tamen animaduertendum est, valorem inde erutum non conuenire, nisi sit $e\,\text{fin.}\,\Phi > u\,\text{cof.}\,\Phi$, seu $\text{tang.}\,\Phi > \frac{u}{e}$. Quare si aequatio cubica plures habeat radices, ex iis ea tantum locum habere potest, quae praebet $\text{tang.}\,\Phi > \frac{u}{e}$. At ob A, B, C, quantitates positiuas, trium aequationis radicum duae erunt affirmatiuae, ac tertia negatiua; quae hinc excluditur: atque si neutra affirmatiuarum fuerit maior quam $\frac{u}{e}$, indicio id erit, momentum continuo crescere, crescente angulo Φ, ideoque fore maximum, si capiatur $\text{tang.}\,\Phi = \frac{u}{e}$: quo casu momentum actionis erit $= \left(\frac{A}{f} - \frac{2\,B}{ff} + \frac{C}{f^3}\right) u^3\,\text{cof.}\,\Phi^3$

$$= \left(\frac{A}{f} - \frac{2\,B}{ff} + \frac{C}{f^3}\right)\frac{e^3\,u^3}{(ee+uu)\sqrt{(ee+uu)}}.$$ Videndum ergo est, vtrum minor valor pro tang. Φ ex aequatione cubica inuentus maius producat momentum actionis.

At

At contemplemur nunc alteram conditionem, qua quaeritur celeritas u, vt momentum actionis fiat maximum, pro qua angulum Φ tanquam iam cognitum ſpectemus, atque reperietur.

$\frac{Aee}{f}$ ſin.Φ^2 coſ.Φ $-$ $\frac{4Beu}{ff}$ ſin.Φ coſ.Φ^2 $+$ $\frac{3Cuu}{f^3}$ coſ.$\Phi^3 = 0$, ſiue Aee tang.Φ^2 $-$ $\frac{4Beu}{f}$ tang.Φ $+$ $\frac{3Cuu}{ff} = 0$,

atque haec aequatio cum praecedente aequatione cubica coniuncta determinabit vtrumque valorem quaeſitum Φ et u. Verum ſi haec aequatio per tang. Φ multiplicata ab illa auferatur, remanebit: $-2Aee$ tang. $\Phi + \frac{2Beu}{f} = 0$, ſeu tang. $\Phi = \frac{Bu}{Aef}$. qui ergo valor ſcopo conveniet, dummodo ſit maior quam $\frac{u}{e}$, hoc eſt, ſi fuerit $B > Af$. At cum ſit $B = \int vttdt$, et f ſit maximus valor ipſius t, erit $B < ffvtdt$, hoc eſt $B < fA$; ideoque valor tang. $\Phi = \frac{Bu}{Aef}$ locum habere nequit, neque ergo vtrique aequationi ſimul, naturae quaeſtionis conuenienter, ſatisfieri poteſt. Quod vt clarius perſpiciatur, ponamus tang. $\Phi = \frac{nu}{e}$, vbi requiritur, vt ſit $n > 1$, eritque coſ. $\Phi = \frac{e}{\sqrt{(ee+nnuu)}}$, et momentum actionis erit

$$\left(\frac{Ann}{f} - \frac{2Bn}{ff} + \frac{C}{f^3}\right)\frac{e^3u^2}{(ee+nnuu)^{\frac{3}{2}}}$$

vnde primum patet, creſcente u, hanc quantitatem continuo creſcere, neque maiorem fieri poſſe, quam ſi celeritas

ritas alae u ponatur infinita : ex quo fequitur, hanc celeritatem u tam magnam ftatui debere, quam circumftantiae id permittant. Hinc autem fi celeritas u fuerit determinata, et pro cognita affumatur, angulus Φ ex fuperiori aequatione definietur, vt momentum actionis fiat maximum. Ad hoc fi ponamus breuitatis gratia:

$$B = \beta A f, \text{ et } C = \gamma B f = \beta \gamma A f f,$$

vti nouimus effe β et γ numeros vnitate minores, aequatio illa cubica, ex qua angulus Φ definiri debet, hanc formam induet,

$$ee \,\text{tang.}\, \Phi^3 - 4\beta e u \,\text{tang.}\, \Phi^2 \left. \begin{matrix} - 2ee \\ + 3\beta\gamma uu \end{matrix} \right\} \text{tang.}\, \Phi + 2\beta e u = 0,$$

ac pofito $u = me$, erit

$$\text{tang.}\, \Phi^3 - 4\beta m \,\text{tang.}\, \Phi^2 \left. \begin{matrix} - 2 \\ + 3\beta\gamma m^2 \end{matrix} \right\} \text{tang.}\, \Phi + 2\beta m = 0,$$

vbi notandum eft effe debere tang. $\Phi > m$.

Quodfi autem angulus Φ fuerit datus, celeritas u ita definiri poteft, vt momentum actionis fiat maximum, quod fiet per hanc aequationem quadraticam,

$\frac{3Cuu}{ff} - \frac{4Beu}{f} \,\text{tang.}\, \Phi + A e e \,\text{tang.}\, \Phi^2 = 0,$

feu $3\beta\gamma m m - 4\beta m \,\text{tang.}\, \Phi + \text{tang.}\, \Phi^2 = 0,$

pofito vt ante $u = me$: vnde valor ipfius m eruitur

$$m = \frac{2\beta \,\text{tang.}\, \Phi \pm \text{tang.}\, \Phi \sqrt{(4\beta\beta - 3\beta\gamma)}}{3\beta\gamma}$$

feu $m = \frac{2\beta - \sqrt{(4\beta\beta - 3\beta\gamma)}}{3\beta\gamma}$ tang. Φ. at debet effe $m <$ tang. Φ. Reftitutis pro m, β, γ valoribus affumtis, habebitur $\frac{u}{e} = \frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f \,\text{tang.}\, \Phi,$

qui

qui valor, si fuerit realis et minor quam tang. Φ, substitutus in expressione momenti actionis:

$$\frac{u}{f}\left(Aee\ \mathrm{tang.}\Phi^2 - \frac{2Beu}{f}\ \mathrm{tang.}\Phi + \frac{Cuu}{ff}\right)\mathrm{cos.}\Phi^2$$

ipsi conciliabit maximum valorem, qui erit

$$\frac{2e^3\,\mathrm{sin.}\Phi^2}{27CC}\left[9ABC - 8B^3 + (4BB - 3AC)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Sin autem valor inuentus ipsius $\frac{u}{e}$ fuerit vel imaginarius, vel maior quam tang. Φ. inde colligitur momentum actionis maius fieri non posse, quam si statuatur $\frac{u}{e} =$ tang. Φ. quo casu momentum actionis erit $= \frac{e^3\,\mathrm{sin.}\Phi^2}{f^3}(Aff - 2Bf + C)$. Vnde ex vtroque casu iterum colligitur momentum actionis ratione anguli Φ eo fieri maius, quo maior capiatur angulus Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

39. Si ergo angulus Φ, quo axis ad planum alae est inclinatus, detur, ex eo celeritas alae u definiri potest, qua eius extremitas ab axe interuallo $= f$ distans gyrari debet, vt momentum actionis fiat maximum. Statui scilicet debet $\frac{u}{e} = \frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f$ tang. Φ, siquidem prodeat $\frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f < 1$. Sin autem sit ista quantitas vel vnitate maior vel adeo imaginaria, tum maxime conueniet ponere $\frac{u}{e} =$ tang. Φ. Semper igitur esse debet celeritas gyratoria alae tangenti anguli Φ proportionalis.

COROLL. 2.

40. Vt appareat, quomodo valor pro $\frac{u}{e}$ inuentus plerumque sit comparatus, ponamus esse $v = \alpha t^{n-1}$,

 erit-

eritque area alae totius $\int v dt = \frac{\alpha}{n} f^n$, quae ponatur $= \Delta$; tum erit

$$A = \int v t dt = \frac{\alpha}{n+1} f^{n+1} = \frac{n}{n+1} \Delta f$$
$$B = \int v t t dt = \frac{\alpha}{n+2} f^{n+2} = \frac{n}{n+2} \Delta f f$$
$$C = \int v t^3 dt = \frac{\alpha}{n+3} f^{n+3} = \frac{n}{n+3} \Delta f^3,$$

Atque hinc prodibit momentum actionis

$$n \Delta u \left(\frac{ee}{n+1} \text{tang.}\, \Phi^2 - \frac{2eu}{n+2} \text{tang.}\, \Phi + \frac{uu}{n+3} \right) \text{cof.}\, \Phi^3,$$

quod maximum euadet, fi capiatur

$$\frac{u}{e} = \frac{n+3}{3(n+2)} \left(2 - \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}} \right) \text{tang.}\, \Phi;$$

vnde femper fit $\frac{u}{e} < \text{tang.}\, \Phi$; hincque maximum momentum erit

$$\frac{2}{27} \Delta e^3 \text{fin.}\, \Phi^3 . \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)^2} \left(nn + 4n + 12 + n(n+4) \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}} \right);$$

fi ergo fuerit

$n = 1$ erit $\frac{u}{e} = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$ tang. Φ, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{fin.}\, \Phi^3 . 1{,}5521$

$n = 2$ erit $\frac{u}{e} = \frac{5 - \sqrt{5}}{6}$ tang. Φ, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{fin.}\, \Phi^3 . 1{,}809$

$n = 3$ erit $\frac{u}{e} = \frac{8 - \sqrt{14}}{10}$ tang. Φ, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{fin.}\, \Phi^3 . 1{,}895$

$n = \infty$ erit $\frac{u}{e} = \frac{1}{3}$ tang. Φ, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{fin.}\, \Phi^3 . 2{,}000$

COROLL. 3.

41. Quo maior igitur eft exponens n, eo maius prodit momentum actionis, atque valor $\frac{u}{e}$ eo propius accedet ad $\frac{1}{3}$ tang. Φ: vnde colligimus, pro data area alae $= \Delta$ eo maius futurum effe momentum actionis, quo magis ala ab axe recedendo dilatetur, feu quo arctior

fuerit

fuerit axem versus. Ceterum apparet, quicunque valor tribuatur exponenti n, semper prodire $\frac{u}{e} < \text{tang.}\ \Phi$, vti conditio quaestionis postulat.

COROLL. 4.

42. Sin autem quaeratur, quisnam angulus Φ sit maxime idoneus ad momentum actionis plurimum augendum, respondere oportet, quo magis hic angulus ad rectum accedat, eo maius prodire momentum actionis. Ideoque conueniet, axem tantum non perpendiculariter ad planum alae constituere, vt sit fere $\Phi = 90^\circ$; tum autem ob tang. $\Phi = \infty$, alam maxima celeritate circa axem gyrari oportebit. Vnde patet, non angulum $54^\circ, 45'$ esse aptissimum, sed potius angulum rectum hac praerogatiua gaudere.

SCHOLION.

43. Conclusio haec, qua angulum rectum aptissimum inuenimus ad momentum actionis maximum producendum, non solum valde paradoxa videtur, sed etiam experientiae maxime contraria. Quanquam enim experientia testatur, angulum inclinationis axis ad alas, si maior statuatur quam $54^\circ, 45'$, maiorem producere effectum, hicque angulus interdum ad 72° auctus optimo cum successu reperitur, tamen dubium est nullum, quin effectus magnopere diminuatur, si iste angulus adhuc maior constitueretur; atque adeo manifestum est, si ad 90° vsque augeretur, vim venti ad alam conuertendam plane euanescere, ita vt hoc casu machina ne minimo quidem oneri eleuando par esset. Interim si perpendamus

mus tamen angulo hoc tantum non ad 90° aucto celeritatem gyratoriam quoque maximam esse debere, etsi hoc casu vis ipsa mouens eiusque momentum potentiale fere in nihilum abit. Tamen semper machinam ad onus superandum ita applicari posse nouimus, vt vis ista minima onus eleuare valeat, simulque intelligitur, celeritatem oneris ad alae celeritatem rationem quam minimam habere debere; veruntamen quoniam celeritas alarum est quasi infinita, celeritas oneris inde prodire potest satis magna, ac reuera maior erit, quam si angulus Φ minor esset assumtus. Interim tamen fateri conuenit, successum in praxi longe alium deprehensum iri, atque theoria hic innuit, cuius dissensus causa in sola frictione est posita; ita vt certum sit, si machinam ab omni frictione liberare liceret, summum effectum iure expectari posse, si angulus inclinationis axis ad planum alarum propemodum rectus statuatur. Verum frictio impedit hoc casu, quo minus ab angulo Φ nimis magno effectus per theoriam definitus obtineri queat: si enim vis venti ab ala excepta tam fuerit parua, vt frictionem superare nequeat, tum machina ne ad motum quidem excitari poterit, multoque minus vllum effectum producere valebit. Ex quo manifestum est, frictionis rationem in primis haberi debere, si eam alarum dispositionem ac motum definire velimus, vnde maximus effectus proficiscatur, id quod sequente problemate diligentius examinabo.

PROBLEMA VIII.

44. *Data frictione machinae, quae a vi quacunque moueatur, inuenire eam momenti actionis partem, quae*

quae ad effectum, ad quem machina est destinata, producendum vnice impenditur.

SOLVTIO.

Sit M momentum potentiale vis, a qua machina mouetur, quae vis rotae seu vecti applicata concipiatur, cuius celeritas sit $= u$ in distantia $= f$ ab axe motus, eritque $\frac{M.u}{f}$ momentum actionis. Sit porro momentum frictionis $=$ F, seu ad frictionem superandam opus sit tanta vi, cuius momentum est $=$ F, vbi nota, quando simpliciter de momento loquor, id de momento potentiali esse interpretandum, nulla habita ratione ad celeritatem, quacum vis agit. Denique sit P momentum oneris vel obstaculi, quod superari debet, et cum motus machinae iam ad vniformitatem fuerit perductus, necesse est, vt sit $M - F - P = 0$; nam quamdiu motus machinae acceleratur, acceleratio proportionalis est ipsi $M - F - P$: quare si nulla amplius acceleratio locum habeat, necesse est, vt sit $M - F - P = 0$, seu $P = M - F$. Verum si momentum oneris P per celeritatem angularem $\frac{u}{f}$ multiplicetur, denotabit $\frac{u}{f}$ P momentum actionis oneris, seu onus per motum suum multiplicatum, quo ipso effectus machinae determinatur. Erit ergo effectus machinae $\frac{u}{f} P = \frac{u}{f}(M - F)$, ideoque effectus machinae non producitur a vis mouentis momento actionis toto $\frac{u}{f}$ M, sed ab eius parte $\frac{u}{f}(M - F)$. Quare vt effectus edatur maximus, non ipsius $\frac{u}{f}$ M valor, sed ipsius $\frac{u}{f}(M - F)$ maximus existere debet. Q. E. I.

 COROLL.

COROLL. 1.

45. In casu igitur problematis praecedentis, quo erat momentum potentiale venti in alam ibi definitam impingentis $= (Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos.} \Phi^3$, si momentum frictionis machinae ponatur $= F$, quantitas effectus machinae erit

$$\frac{u}{f} (Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos.} \Phi^3 - \frac{Fu}{f}:$$

vbi ad homogeneitatem conseruandam notari conuenit, si ee, et uu denotent altitudines celeritatibus e, et u debitas, vim frictionis per pondus voluminis aeris exponi debere, ex qua momentum resultans loco F accipi debet.

COROLL. 2.

46. Vt igitur haec machina in motum concitari possit, ante omnia requiritur, vt sit $(Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos.} \Phi^3 > F$, vnde iam casus maximi effectus ante inuentus sponte excluditur, quoniam illo casu momentum potentiale vis sollicitantis fiebat infinite paruum: simulque intelligitur, ad id vt machina effectum praestare possit, angulum Φ non nimis prope ad angulum rectum accedere posse, quia alioquin $\text{cos.} \Phi$ nimis fieret paruus; neque haec diminutio per augmentationem celeritatis u compensari potest, quia esse debet $\frac{u}{e} < \text{tang.} \Phi$.

COROLL. 3.

47. Quo igitur effectus machinae reddatur maximus, maximum efficere oportet valorem huius formulae:

$$\frac{u}{f} (Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos} \Phi^3 - \frac{Fu}{f}$$

Ponatur $u = efz \text{ tang.} \Phi$, atque *maximum* esse debet $e^3 \text{ sin.} \Phi^3 (Az - 2Bzz + Cz^3) - Fez \text{ tang.} \Phi$.

COROLL.

COROLL. 4.

48. Quaeratur primo valor ipſius z, angulo Φ tanquam cognito ſpectato, atque peruenietur ad hanc aequationem: $ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2 \text{coſ.}\,\Phi\,(A - 4Bz + 3Czz) = F$, vnde fit $9CCzz = 12BCz - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi}$;
et $3Cz = 2B - \sqrt{(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi})}$; ideoque $u = \frac{2B\,ef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C} - \frac{ef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C}\sqrt{(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi})}$. Subſtituenti enim hunc valorem in expreſſione effectus facile patebit, ſigno radicali negationem tribui debere, quia affirmatio minimum produceret effectum.

COROLL. 5.

49. Si iam valor ipſius z pro cognito habeatur, et angulus Φ quaeratur ad effectum maximum producendum, peruenietur ad hanc aequationem:

$$3\,ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,(A - 2Bz + Czz) = \frac{F}{\text{coſ.}\,\Phi^2},$$

quae cum aequatione ante inuenta comparata eliminando F, dabit:

$$\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{A - 4Bz + 3Czz}{3(A - 2Bz + Czz)};\ \text{et ſin.}\,\Phi^2 = \frac{2(A - Bz)}{3(A - 2Bz + Czz)},$$

quibus valoribus ſubſtitutis tandem reperietur

$$F = \frac{2ee(A - Bz)(A - 4Bz + 3Czz)\sqrt{(A - 4Bz + 3Czz)}}{3(A - 2Bz + Czz)\sqrt{3(A - 2Bz + Czz)}},$$

ex qua valor ipſius z erui debet, quod quidem reſolutionem aequationis octaui ordinis poſtulat.

COROLL. 6.

50. Inuento autem hinc valore ipſius z, ex anterioribus formulis colligitur angulus Φ: ſicque tam alae ad

 axem

axem inclinatio, quam celeritas gyrationis obtinebitur, vnde maximus effectus proficifcatur. Quod fi autem illa aequatio octaui ordinis plures valores reales pro z exhibeat, vt ex iis recte eligatur, notandum eft; primo effe debere $\frac{u}{e} < \text{tang.}\Phi$, feu $fz < 1$; praeterea vero effe debere $ee\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi\,(A - 2Bz + Czz) > F$, ideoque $F < \frac{2ee(A - Bz)\sqrt{(A - 4Bz + 3Czz)}}{3\sqrt{3}(A - 2Bz + Czz)}$:

vnde neceffe eft, fubftituto pro F valore fupra inuento, vt fit $\frac{A - 4Bz + 3Czz}{A - 2Bz + Czz} < 1$, feu $B > Cz$;

ergo debet effe tam $z < \frac{B}{C}$, quam $z < \frac{1}{f}$. Cum autem fit $C < Bf$, fufficit, vt fit $z < \frac{1}{f}$, cum inde multo magis fiat $z < \frac{B}{C}$.

COROLL. 7.

51. Quod fi angulus Φ tanquam cognitus affumatur, atque celeritas motus gyratorii u ita definiatur, vt effectus fiat maximus, erit, vti vidimus:

$$u = \frac{2Bef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C} - \frac{ef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C}\sqrt{\left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi}\right)};$$

vnde patet, ob frictionem F hanc celeritatem minorem effe, quam fi frictio effet nulla. Frictio ergo duplicem ob caufam effectum machinae diminuit: primum enim ipfum momentum actionis $\frac{u}{f}M$ minus euadit; deinde infuper ab eo terminus $\frac{u}{f}F$ fubtrahi debet, vt effectus $\frac{u}{f}(M - F)$ obtineatur.

SCHOLION 1.

52. Si ifte valor ipfius u angulo Φ refpondens

in

in expreſſione effectus machinae $\frac{u}{f}(M - F)$ ſubſtituatur, reperitur iſte effectus:

$$\frac{2e^3 \, \mathit{ſin.}\,\Phi^3}{27\,CC}\left[9ABC - 8B^3 - \frac{9BCF}{ee\,\mathit{ſin.}\,\Phi^2\,\mathit{coſ.}\,\Phi} + \left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\mathit{ſin.}\,\Phi^2\,\mathit{coſ.}\,\Phi}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

vnde iam manifeſtum eſt, angulum Φ non nimis magnum accipi poſſe, vt iſte effectus fiat maximus; quia alioquin effectus fieret minor, atque adeo euaneſceret. Primum autem ne valor ipſius u fiat negatiuus, neceſſe eſt, vt ſit $A > \frac{F}{ee\,\mathit{ſin.}\,\Phi^2\,\mathit{coſ.}\,\Phi}$, ſeu ſin. Φ^2 coſ. $\Phi > \frac{F}{Aee}$: Deinde ſi breuitatis gratia ponatur $\sqrt{\left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\mathit{ſin.}\,\Phi^2\,\mathit{coſ.}\,\Phi}\right)} = Q$, vt ſit $u = \frac{ef\,\mathit{tang.}\,\Phi}{3C}(2B - Q)$, erit expreſſio, quantitatem effectus denotans:

$$\frac{2e^3\,\mathit{ſin.}\,\Phi^3}{27\,CC}(2B - Q)^2(B + Q);$$

qui primum eſt $= 0$, ſi ſin. $\Phi = 0$; deinde iterum euaneſcit, ſi $2B = Q$, ſeu ſin. Φ^2 coſ. $\Phi = \frac{F}{Aee}$: vnde pro effectu maximo obtinendo angulus Φ minor eſſe debet, quam is, qui ex aequatione ſin. Φ^2 coſ. $\Phi = \frac{F}{Aee}$ oritur. Verum hic notandum eſt, maximum valorem ipſius ſin. Φ^2 coſ. Φ eſſe $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, ideoque niſi ſit $\frac{F}{Aee} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ſeu niſi momentum frictionis F minus fuerit, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}}Aee$; machinam ne quidem moueri poſſe; vnde celeritas venti minima e cognoſcitur, quae primum machinae motum imprimere valet, quae debita altitudini $ee = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F}{A}$. Quare niſi venti celeritas fuerit maior, machina in quiete perſiſtit. At ſi celeritas venti ſatis fuerit magna, vt ſit $ee > \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F}{A}$, erit quoque $\frac{F}{Aee} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$: hincque duobus casibus euenire poterit, vt fiat sin. Φ^2 cos. $\Phi = \frac{F}{\Lambda e e}$, quorum altero est $\Phi < 54^\circ, 45'$, altero $\Phi > 54^\circ, 45'$: casu enim $\Phi = 54^\circ, 45'$ fit sin. Φ^2 cos. $\Phi = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Post casum ergo $\Phi = 0$, duo insuper casus dantur, quibus effectus machinae euanescit, qui sint $\Phi = 54^\circ, 45' - \mu$, et $\Phi = 54^\circ, 45' + \nu$. et citra quos limites continetur conditio sin. Φ^2 cos. $\Phi > \frac{F}{\Lambda e e}$: ex quo intelligitur, machinam non commoueri posse, nisi angulus Φ intra limites $54^\circ, 45' - \mu$, et $54^\circ, 45' + \nu$ contineatur. Quo circa etiam intra hos limites quaeri debet is angulus Φ, qui maximum effectum producit: manifestum autem est, pro qualibet venti celeritate peculiarem angulum Φ prodire, et quidem pro minimo vento, qui machinae impellendae par est, inuentum iri $\Phi = 54^\circ, 45'$; ex quo sequitur, vt machina etiam a vento maxime debili commoueri queat, hunc angulum esse aptissimum. Quoniam enim pro quouis venti celeritatis gradu angulum Φ immutare non licet, magis expedit, cum ita statuere, vt machina etiam a minimo vento impulsa effectum edat, quam eius effectum pro fortiore vento ita augere, vt tum a vento leniori plane commoueri nequeat. Quod si autem ventum nimis debilem non curemus, machinaque ita instruenda sit, vt a vento satis forti, qui expressionem $\frac{F}{\Lambda e e}$ iam notabiliter minorem praebeat, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, impulsa maximum producat effectum, tum angulum Φ vna cum celeritate u ex aequationibus supra inuentis determinari oportet.

SCHOLION. 2

53. Scilicet cum fuerit $\frac{F}{\Lambda e e} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ponatur eius valor

valor $\frac{F}{A e e} = \frac{v n}{3 \sqrt{3}}$, ita vt fit $m < 1$, et quaeratur valor ipſius z ex hac aequatione $m = \frac{(A - B z)(A - 4 B z + 3 C z z)^{\frac{3}{2}}}{A (A - 2 B z + C z z)^{\frac{3}{2}}}$ $= \frac{A - B z}{A} \left(\frac{A - 4 B z + 3 C z z}{A - 2 B z + C z z} \right)^{\frac{3}{2}}$, cuius aequationis reſolutio cum ſit difficillima, tribuantur ipſi z ſucceſſiue plures valores, ex quibus ſtatim apparebit, quinam valorem producat ipſi m proxime aequalem; quo cognito facile is valor ipſius z eruetur, qui aequationi huic exactius conueniat. Inuento autem valore hoc z, inclinatio axis ad alam Φ elicietur ex alterutra harum formularum:

$\sin.\Phi^2 = \frac{2 (A - B z)}{3 (A - 2 B z + C z z)}$; vel $\cos.\Phi^2 = \frac{A - 4 B z + 3 C z z}{3 (A - 2 B z + C z z)}$, eritque tum celeritas $u = e f z$ tang. Φ. Ad hanc operationem oſtendendam ponamus pro alae figura $v = \alpha t^{n-1}$, ſitque area alae $= \Delta = \frac{\alpha}{n} f^n$, erit:

$A = \frac{n}{n+1} \Delta f$, $B = \frac{n}{n+2} \Delta f f$, et $C = \frac{n}{n+3} \Delta f^3$, ergo $\frac{(n+1) F}{n \Delta e e f} = \frac{2 m}{3 \sqrt{3}}$. Ponatur autem $z = \frac{x}{f}$, vt ſit $u = e x$ tang. Φ, et $x < 1$;

erit $\sin.\Phi^2 = \frac{2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} \right)}{3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3} \right)}$; et $\cos.\Phi^2 = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3} \right)}$:

atque valorem ipſius x erui oportet ex hac aequatione

$$m = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ponamus exempli cauſa $n = 1$, vt figura alae ſit rectangularis, vti vulgo fieri ſolet, cuius area ſit $= \Delta$, erit $m = \frac{3 F \sqrt{3}}{\Delta e e f}$; et $m = \frac{3 - 2x}{3} \left(\frac{6 - 16 x + 9 x x}{6 - 8 x + 3 x x} \right)^{\frac{3}{2}}$; porroque

ſin. Φ^2

$\text{fin.}\,\Phi^2 = \frac{12 - 8x}{18 - 24x + 9xx}$; et $\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{6 - 16x + 9xx}{18 - 24x + 9xx}$.

Cum effe debeat $x < 1$, ponatur $x = \frac{y}{10}$, erit

$m = \frac{15 - y}{15}\left(\frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy}\right)^{\frac{3}{2}}$; et $\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy}$.

Ponantur iam pro y fucceffiue numeri 0, 1, 2, 3 etc. et valores refultantes in fequenti tabula erunt:

y	$m = \frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$	cof. Φ^2	ang. Φ	Celer. ang. $\frac{u}{e}$
$y = 0$	$m = 1,00000$	$\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{1}{3}$	$\Phi = 54°, 45'$	$\frac{u}{e} = 0,0000$
$y = 1$	$m = 0,74242$	$\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{449}{523}$	$\Phi = 57, 40$	$\frac{u}{e} = 0,1580$
$y = 2$	$m = 0,50661$	$\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{316}{452}$	$\Phi = 61, 8$	$\frac{u}{e} = 0,3628$
$y = 3$	$m = 0,29944$	$\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{201}{387}$	$\Phi = 65, 25$	$\frac{u}{e} = 0,6558$
$y = 4$	$m = 0,13093$	$\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{104}{328}$	$\Phi = 71, 2$	$\frac{u}{e} = 1,1639$
$y = 5$	$m = 0,01827$	$\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{25}{275}$	$\Phi = 79, 59$	$\frac{u}{e} = 2,8308$

Si vlterius progrediendo ponatur $y = 6$, valor ipfius m fit imaginarius, neque enim valor ipfius x fuperare poteft hunc limitem $\frac{8 - \sqrt{10}}{9}$, feu y hunc 5,3752; quo cafu fit $\Phi = 90°$, et $\frac{u}{e} = \infty$, atque $m = 0$, pro frictione euanefcente. Patet ergo, quo minor fiat valor ipfius m, eo magis angulum Φ fuperare limitem $54°, 45'$, eoque maiorem fore motum gyratorium. Ita fi frictio tanta effet, vt valor expreffionis $\frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$ fieret $= \frac{1}{2}$, tum inclinatio axis ad alam maxime idonea foret $61°, 8'$ et celeritas $u = 0,3628\,e$, feu propemodum $u = \frac{1}{3}e$. Intelligitur hinc etiam, quo maior fuerit alae fuperficies Δ, fimulque eius longitudo f quia hinc valor ipfius m eo minor prodit, eo maiorem effe debere angulum, quem axis cum alis conftituit, eoque etiam velociorem fieri motum

motum gyratorium alarum. Quod si plures alae simul axi sint affixae, singulaeque ad eum aequaliter inclinatae, facile perspicitur ad valorem ipsius m obtinendum, expressionem $\frac{3 F \surd 3}{\Delta e e f}$ insuper per numerum alarum, diuidi debere, siquidem alae sint inter se similes. Ita si quatuor alae constituantur, quarum quaelibet sit aequalis illi vni, quam sumus contemplati, valor ipsius m erit $= \frac{3 F \surd 3}{4 \Delta e e f}$, et ex hoc valore ipsius m tam angulus maxime conueniens Φ, quo singulae alae ad axem sunt inclinandae, tam celeritas motus u in distantia ab axe $= f$, ex eadem tabella cognoscetur.

PROBLEMA IX.

54. *Si machina instructa sit quatuor alis planis et aequalibus, atque axis a directione venti declinet angulo dato inuenire momentum actionis a vi venti oriundum.*

SOLVTIO.

Sit cuiusque alae longitudo $DF = f$, et extremitatis F celeritas $= u$; figura autem alae exprimatur vt supra aequatione inter abscissam $DT = t$, et ordinatam $MM = v$, vnde sit $\int v t\, dt = A$; $\int v t t\, dt = B$; et $\int v t^3 dt = C$. Tum sit inclinatio axis ad planum cuiusque alae $= \Phi$, et angulus, quem directio venti cum axe constituit $= \theta$; celeritas autem venti sit $= e$. In situ autem alarum quocunque sit pro ala prima angulus $BCK = \eta$; erit hic angulus pro ala secunda $= \eta + 90°$, pro tertia $= \eta + 180°$, et pro quarta Fig. 6. Fig. 5.

 $= \eta$

$= \eta + 270^\circ$. Momentum ergo impulſionis venti erit:

pro ala I. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi$
$- \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi) \cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff} \cos.\Phi^3$

pro ala II. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi$
$- \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi) \cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff} \cos.\Phi^3$

pro ala III. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi + \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi$
$+ \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi) \cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff} \cos.\Phi^3$

pro ala IV. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi + \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi$
$+ \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi) \cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff} \cos.\Phi^3$

Quibus in vnam ſummam collectis, erit momentum totale in omnes quatuor alas ſimul exertum

$$Aee(4\cos.\theta^2 \sin.\Phi^2 + 2\sin.\theta^2 \cos.\Phi^2) \cos.\Phi - \frac{8Beu}{f} \cos.\theta \sin.\Phi \cos.\Phi^2 + \frac{4Cuu}{ff} \cos.\Phi^3$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Verum ne vlla ala vnquam ab aere in parte poſtica percutiatur, vnde motus impediretur, neceſſe eſt, vt ſit $e \cos.\theta \sin.\Phi - e \sin.\theta \cos.\Phi > u \cos.\Phi$, ſeu $\frac{u}{e} < \cos.\theta \times (\text{tang}.\Phi - \text{tang}.\theta)$; ideoque angulus Φ maior eſſe debet quam angulus θ. Caeterum notatu hic dignum eſt, momentum totum non amplius pendere ab angulo η, ſeu id eundem perpetuo valorem obtinere, in quocunque ſitu alae reſpectu directionis venti verſentur, quoniam termini angulum η inuoluentes ſe mutuo ſuſtulerunt. Q. E. I.

COROLL.

COROLL. 1.

55. Si angulus θ fuerit valde paruus, erit $\operatorname{cof.}\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta\theta$; et $\operatorname{cof.}\theta^2 = 1 - \theta\theta$; $\operatorname{fin.}\theta^2 = \theta\theta$: vnde momentum vis venti erit $4Aee \operatorname{fin.}\Phi^2 \operatorname{cof.}\Phi - \frac{2Beu}{f} \operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi^2 + \frac{4Cuu}{ff} \operatorname{cof}\Phi^3 - 2Aee\theta\theta(2\operatorname{fin.}\Phi^2 - \operatorname{cof.}\Phi^2)\operatorname{cof.}\Phi + \frac{4Beu}{f}\theta\theta \operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi^2$. Ab obliquitate ergo venti respectu axis momentum vis venti augetur quantitate $2e\theta\theta \operatorname{cof.}\Phi\left[\frac{2Bu}{f} \operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi - Ae(2\operatorname{fin.}\Phi^2 - \operatorname{cof.}\Phi^2)\right]$, vnde si fuerit $\frac{u}{e} > \frac{Af(2\operatorname{fin.}\Phi^2 - \operatorname{cof.}\Phi^2)}{2B\operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi}$, vis venti ab obliquitate augetur; fin autem fuerit $\frac{u}{e} < \frac{Af(2\operatorname{fin.}\Phi^2 - \operatorname{cof.}\Phi^2)}{2B\operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi}$, vis venti ab obliquitate diminuitur.

COROLL. 2.

56. Si vis venti ab obliquitate θ augetur, quod euenit, si $\frac{u}{e} > \frac{Af(2\operatorname{fin.}\Phi^2 - \operatorname{cof.}\Phi^2)}{2B\operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi}$, manifestum est, hoc augmentum ad certum tantum terminum extendi, vltra quem si obliquitas θ augeatur, vis non solum iterum decrescat, sed etiam prorsus euanescat. Dabitur ergo hoc casu eiusmodi obliquitas, vnde momentum vis venti maximum oriatur. Cum autem esse debeat $\frac{u}{e} < \operatorname{tang}\Phi$, perspicuum est, hunc casum locum habere non posse, nisi sit $\operatorname{tang.}\Phi > \frac{Af(2\operatorname{fin.}\Phi^2 - \operatorname{cof.}\Phi^2)}{2B\operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi}$, hoc est, nisi sit $2B\operatorname{fin.}\Phi^2 > 2Af\operatorname{fin.}\Phi^2 - Af\operatorname{cof.}\Phi^2$, seu $\operatorname{tang.}\Phi^2 < \frac{Af}{2(Af-B)}$. Conditiones ergo, sub quibus ab obliquitate θ momentum vis venti augetur, sunt: primo si $\operatorname{tang.}\Phi^2 < \frac{Af}{2(Af-B)}$; deinde vt $\frac{u}{e}$ contineatur intra limites $\operatorname{tang.}\Phi$, et $\frac{Af(2\operatorname{fin.}\Phi^2 - \operatorname{cof.}\Phi^2)}{2B\operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}\Phi}$.

COROLL. 3.

57. Quod si hae conditiones locum habeant, obliquitas θ, quae maximum vis augmentum producit, determinabitur per hanc aequationem:

$$-8Aee\,\text{sin.}\theta\,\text{cos.}\theta\,\text{sin.}\Phi^2\,\text{cos.}\Phi + 4Aee\,\text{sin.}\theta\,\text{cos.}\theta\,\text{cos.}\Phi^3 + \frac{8Beu}{f}\,\text{sin.}\theta\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi^2 = 0,$$

seu: $$-2Ae\,\text{cos.}\theta\,\text{sin.}\Phi^2 + Ae\,\text{cos.}\theta\,\text{cos.}\Phi^2 + \frac{2Bu}{f}\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi = 0,$$

vnde elicitur: $\text{cos.}\theta = \frac{2Bu\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}{Aef(2\,\text{sin.}\Phi^2 - \text{cos.}\Phi^2)}$. Quo valore substituto, prodibit vis venti momentum maximum:

$$2Aee\,\text{cos.}\Phi^3 - \frac{8BBuu\,\text{sin.}\Phi^2\,\text{cos.}\Phi^3}{Aff(2\,\text{sin.}\Phi^2 - \text{cos.}\Phi^2)} + \frac{4Cuu}{ff}\,\text{cos.}\Phi^3.$$

EXEMPLVM.

58. Sint singulae alae rectangulares, et area cuiusque $= \Delta$: tum vero $Cf = f$, et $Ce = g$, et latitudo
Fig. 7. $mm = nn = b$, erit $\Delta = (f-g)b$; $A = \frac{1}{2}b(ff-gg)$; $B = \frac{1}{3}b(f^3-g^3)$; et $C = \frac{1}{4}b(f^4-g^4)$. Conditiones ergo, sub quibus ab obliquitate venti respectu axis θ vis venti augetur, sunt: Primo $\text{tang}\,\Phi^2 < \frac{\frac{1}{2}fb(ff-gg)}{fb(ff-gg) - \frac{2}{3}b(f^3-g^3)}$, seu $\text{tang}\,\Phi^2 < \frac{3f(f+g)}{2(f-g)(f+2g)}$, tum vero $\frac{u}{e}$ intra hos limites $\text{tang.}\Phi$, et $\frac{3f(f+g)(2\,\text{sin.}\Phi^2 - \text{cos.}\Phi^2)}{4(ff+fg+gg)\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}$ contineri oportet. Deinde vero obliquitas inuenitur

$$\text{cos.}\theta = \frac{4u(ff+fg+gg)\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}{3ef(f+g)(2\,\text{sin.}\Phi^2 - \text{cos.}\Phi^2)}.$$

Ipsum autem momentum maximum, quod hinc oritur, est

Δ cos.

$$\Delta \operatorname{cof}.\Phi^3 \Big(ee(f+g)+\frac{uu}{9ff(2\operatorname{fin}.\Phi^2-\operatorname{cof}.\Phi^2)}\Big[\frac{2(f-g)^2(ff+4fg+gg)}{f+g}\operatorname{fin}.\Phi^8$$
$$-9(f+g)(ff+gg)\operatorname{cof}.\Phi^2\Big]\Big)$$

quod momentum etiam ita exhiberi poteſt, vt ſit

$$\frac{2ee\operatorname{cof}.\Phi^2}{ff}\Big(Aff+\frac{2Cuu}{ee}-\frac{4BBuu\operatorname{fin}.\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin}.\Phi^2-\operatorname{cof}.\Phi^2)}\Big).$$

Pro quo iterum angulus Φ ita definiri poteſt, vt id fiat maximum; quod eueniet, ſi Φ definiatur ex hac aequatione:

$$-3\operatorname{fin}.\Phi\operatorname{cof}.\Phi^2\Big(Aff+\frac{2Cuu}{ee}-\frac{4BBuu\operatorname{fin}.\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin}.\Phi^2-\operatorname{cof}.\Phi^2)}\Big)+\frac{8BBuu\operatorname{fin}.\Phi\operatorname{cof}.\Phi^4}{Aee(2\operatorname{fin}\Phi^2-\operatorname{cof}\Phi^2)^2}=0$$

ſeu $3Aff+\frac{6Cuu}{ee}-\frac{12BBuu\operatorname{fin}.\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin}.\Phi^2-\operatorname{cof}.\Phi^2)}=\frac{8BBuu\operatorname{cof}.\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin}.\Phi^2-\operatorname{cof}.\Phi^2)^2}.$

Ad quam reſoluendam ponatur $2\operatorname{fin}.\Phi^2-\operatorname{cof}.\Phi^2=z$, erit $\operatorname{fin}.\Phi^2=\frac{1+z}{3}$; $\operatorname{cof}\Phi^2=\frac{2-z}{3}$, et aequatio induet hanc formam: $3Aff+\frac{6Cuu}{ee}=\frac{4BBuu(1+z)}{Aeez}+\frac{8BBuu(2-z)}{3Aeezz}$,

ſeu $9\frac{AAeeffzz}{uu}+18ACzz=12BBz(1+z)+8BB(2-z)$
$$=4BB(4+z+3zz),$$

vnde reperitur:

$$\frac{4B}{z}=-\frac{B}{2}+\sqrt{\Big(\frac{9AAeeff}{uu}+18AC-\frac{47}{4}BB\Big)}$$

ſeu $\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{\Big(\frac{9AAeeff}{BBuu}+\frac{18AC}{BB}-\frac{47}{4}\Big)}$,

quae ſolutio latiſſime patet, et ad omnes alarum figuras extenditur: pro caſu autem huius exempli erit

$$\frac{2}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{\Big(\frac{81eeff(ff-gg)^2}{4uu(f^3-g^3)^2}+\frac{81(ff-gg)(f^4-g^4)}{4(f^3-g^3)^2}-\frac{47}{4}\Big)},\text{ vel}$$

$$\frac{2}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{\Big[\frac{81eeff(ff-gg)^2}{uu(f^3-g^3)^2}+\frac{(f-g)^2(34f^4+68f^3g+21ffgg+68fg^3+34g^4)}{(f^3-g^3)^2}\Big]}$$

ſi alae ad axem vsque extendantur, vt ſit $g=0$, erit $\frac{2}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{\big(\frac{81ee}{uu}+34\big)}$; et $z=\frac{8}{\sqrt{(\frac{81ee}{uu}+34)}-1}$

vnde $\operatorname{fin}.\Phi^2=\frac{\sqrt{(\frac{81ee}{uu}+34)}+7}{3\sqrt{(\frac{81ee}{uu}+34)}-3}$, et $\operatorname{cof}.\Phi^2=\frac{2\sqrt{(\frac{81ee}{uu}+34)}-10}{3\sqrt{(\frac{81ee}{uu}+34)}-3}$, et $\text{tang.}\Phi^2 = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu} + 34\right)} + 7}{2\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu} + 34\right)} - 10} < \frac{3}{2}$; Quare vt hic casus locum habere possit, debet esse

$$\sqrt{\left(\tfrac{81ee}{uu} + 34\right)} + 7 < 3\sqrt{\left(\tfrac{81ee}{uu} + 34\right)} - 15, \text{ seu}$$

$$11 < \sqrt{\left(\tfrac{81ee}{uu} + 34\right)};$$

hincque $87 < \frac{81ee}{uu}$, vel $\frac{u}{e} < \sqrt{\frac{81}{87}}$.

Praeterea vero $\frac{u}{e}$ contineri debet intra hos limites: $\text{cos.}\theta(\text{tang.}\Phi - \text{tang.}\theta)$, et $\frac{3(2\,\text{sin.}\Phi^2 - \text{cos.}\Phi^2)}{4\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}$.

Sit $\frac{u}{e} = \sqrt{\frac{81}{110}}$, erit $z = \frac{8}{11}$; $\text{sin.}\Phi = \sqrt{\frac{19}{33}}$; $\text{cos.}\Phi = \sqrt{\frac{14}{33}}$; $\text{tang.}\Phi = \sqrt{\frac{19}{14}}$. vnde ob $\text{cos.}\theta = \frac{4u}{3e} \cdot \frac{\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}{2\,\text{sin.}\Phi^2 - \text{cos.}\Phi^2}$ erit $\text{cos.}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{133}{55}} = \sqrt{\frac{133}{220}}$; $\text{sin.}\theta = \sqrt{\frac{87}{220}}$; et $\text{tang.}\theta = \sqrt{\frac{87}{133}}$.

Iam videamus, an sit $\frac{u}{e} < \text{cos.}\theta(\text{tang.}\Phi - \text{tang.}\theta$; seu an sit $\sqrt{\frac{81}{110}} < \sqrt{\frac{133}{220}}\left(\sqrt{\frac{19}{14}} - \sqrt{\frac{87}{133}}\right)$, seu $\sqrt{\frac{162}{133}} < \sqrt{\frac{19}{14}} - \sqrt{\frac{87}{133}}$ quod autem non succedit: neque vero etiam aliis valoribus pro $\frac{u}{e}$ assumendis his conditionibus satisfieri potest.

PROBLEMA X.

59. *Determinare figuram alarum aptissimam, vt cum ventus secundum directionem axis in eas incidit, maxima ab eo excipiatur vis, seu vt tum momentum actionis fiat maximum.*

SOLVTIO.

Sit $C c$ axis, secundum cuius directionem ventus impingat celeritate sua $= e$ in alam $C M H H M C$, cuius figura non sit plana, quae tamen a plano axi nor-

Fig. 8.

normali ſecetur recta C T F, quam inſtar diametri alae conſiderabo; ad quam omnes normales M M, $m\,m$ ſint in ſuperficie alae poſitae, ita vt ſingula elementa M M $m\,m$ ſint plana, ſed diuerſimode ad axem C c inclinata: Quanquam enim hoc modo nulla oritur ſuperficies continua, ſed potius infinita multitudo elementorum M M $m\,m$ inter ſe non niſi in diametro C F cohaerentium, tamen etiam in extremitatibus m, m tam prope ad ſe inuicem accedent, vt ſuperficiem continuam mentiantur, atque etiam practice facillime confici poſſe videntur. Sit igitur longitudo alae C F $= f$, et celeritas gyratoria puncti F $= u$: tum vocetur abſciſſa quaecunque C T $= t$, cui reſpondens ordinata ſit M M $= v$, eritque elementum alae M $m\,m$ M $= v\,dt$, quod per hypotheſin eſt planum, ad quod axis C c inclinatus ſit angulo $= \Phi$, quem ergo variabilem aſſumo, ac in quouis loco T ita conſtituo, vt inde maximum momentum reſultet. Hinc ex §. 29 ob $\theta = 0$ erit momentum vis venti in hoc alae elementum M $m\,m$ M $= v\,dt$ ita expreſſum $= v\,t\,dt\,(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{ut}{f}\,\text{coſ.}\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\Phi$: quod ergo vt maximum fiat, angulus Φ conuenienter definiri debet, quod hac aequatione praeſtabitur:

$$\text{ſin.}\Phi(e\,\text{ſin.}\Phi - \tfrac{ut}{f}\,\text{coſ.}\Phi) = 2\,\text{coſ.}\Phi(e\,\text{coſ.}\,\Phi + \tfrac{ut}{f}\,\text{ſin.}\Phi)$$

ſeu $e(\text{ſin.}\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2) = \frac{3ut}{f}\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$, quae praebet

$\text{tang}\,\Phi^2 = \frac{3ut}{ef}\,\text{tang}\,\Phi + 2$, et $\text{tang.}\,\Phi = \frac{3ut}{2ef} + \sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}$; ergo $\text{ſec.}\,\Phi = \sqrt{[3 + \frac{9uutt}{2eeff} + \frac{3ut}{ef}\sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}]}$; hincque $\text{coſ.}\,\Phi =$

$$\frac{1}{\sqrt{[\frac{9uutt}{2eeff} + 3 + \frac{3ut}{ef}\sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}]}}.$$ Hinc ergo

ergo pro quauis ab axe diſtantia $CT = t$ definitur inclinatio elementi $Mmm M$ ad axem, angulus ſcilicet Φ, ſub quo etiam ventus in hoc elementum impinget. Pendet autem determinatio huius anguli Φ praeter abſciſſam $CT = t$, etiam a celeritate puncti $F = u$, ſeu potius a ratione huius celeritatis ad celeritatem venti e. Dummodo ergo haec ratio fuerit conſtans, ſingulis alae elementis hinc aptiſſima inclinatio tribui poterit, vt momentum vis venti in totam alam fiat maximum. Erit autem pro diſtantia ab axe euaneſcente $t = 0$, angulus $\Phi = 54^\circ, 45'$, cum ſit tang. $\Phi = 2$. at pro extremitate $t = f$, erit tang. $\Phi = \frac{3u}{2e} + \sqrt{\left(\frac{9uu}{4ee} + 2\right)}$, vnde patet, hunc angulum eo magis ſuperare angulum illum $54^\circ, 45'$, quo maior fuerit ratio $\frac{u}{e}$. Verum ad momentum totum per integrationem inueniendum expedit abſciſſam t per angulum Φ exprimere, quam viciſſim: vnde fiet $t = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi \cos.\Phi}$, et $dt = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{d\Phi(\sin.\Phi^2 + 2\cos.\Phi^2)}{\sin.\Phi^2 \cos.\Phi^2}$, atque $e \sin.\Phi - \frac{ut}{f}\cos.\Phi = e \sin.\Phi - \frac{e}{3} \cdot \frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi} = \frac{2e}{3\sin.\Phi}$; ſicque erit elementum momenti: $\frac{4e^4ff}{81uu} \cdot \frac{v\,d\Phi(\sin.\Phi^4 - 4\cos.\Phi^4)}{\sin.\Phi^5 \cos.\Phi^2}$, quod ita integrari debet, vt poſito $t = 0$, ſeu tang $\Phi = 2$, euaneſcat; tum vero ponatur $t = f$, ſeu tang. $\Phi = \frac{3u}{2e} + \sqrt{\left(\frac{9uu}{4ee} + 2\right)}$; ſicque momentum pro tota ala prodibit, quod deinde per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis vis venti. Cum autem v ſit functio ipſius t, in ea pro t ſubſtitui debet valor $t = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi \cos.\Phi}$. Ita ſi ſit $v = A + Bt + Ctt + Dt^3$ etc. erit:

$v =$

$$v = A + \frac{Bef}{3u} \cdot \frac{(\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2)}{\sin.\Phi\cos.\Phi} + \frac{Ce^2f^2}{9uu} \cdot \frac{(\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2)^2}{\sin.\Phi^2\cos.\Phi^2}$$

$$+ \frac{De^3f^3}{27u^3} \cdot \frac{(\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2)^3}{\sin.\Phi^3\cos.\Phi^3}$$ etc. Hinc autem ob $\frac{d\Phi(\sin.\Phi^4 - 4\cos.\Phi^4)}{\sin.\Phi^5\cos.\Phi^2} = \frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)$ et $\frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi\cos.\Phi} = \text{tang.}\Phi - 2\cot.\Phi$ erit momentum totale:

$$+ \frac{4Ae^4ff}{3^4uu}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)$$

$$+ \frac{4Be^5f^3}{3^5u^3}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)(\text{tang.}\Phi - 2\cot.\Phi)$$

$$+ \frac{4Ce^6f^4}{3^6u^4}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)(\text{tang.}\Phi - 2\cot.\Phi)^2$$

$$+ \frac{4De^7f^5}{3^7u^5}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)(\text{tang.}\Phi - 2\cot.\Phi)^3$$

etc.

Verum ad has integrationes expediendas notandum eſt, eſſe

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\text{tang.}\Phi^n = \frac{\text{tang.}\Phi^{n-1}}{(n-1)\sin.\Phi^3} - \frac{(n-4)}{n-1}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\text{tang.}\Phi^{n-2}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^n = -\frac{\cot.\Phi^{n-1}}{(n+2)\sin.\Phi^3} - \frac{(n-1)}{n+2}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^{n-2}$$

quarum formularum ope formulae magis compoſitae continuo ad ſimpliores reducuntur. At pro ſimpliciſſimis eſt

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3} = -\frac{\cos.\Phi}{2\sin.\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\text{tang.}\Phi = -\frac{1}{\sin.\Phi} + \int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi = -\frac{1}{3\sin.\Phi^3}$$

Hinc magis compoſitae prodibunt:

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\text{tang.}\Phi^2 = \frac{\text{tang.}\Phi}{\sin.\Phi^3} - \frac{\cos.\Phi}{\sin.\Phi^2} + \int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi} = \frac{1}{\cos.\Phi} + \int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^2 = -\frac{\cos.\Phi}{4\sin.\Phi^4} + \frac{\cos.\Phi}{8\sin.\Phi^2} - \frac{1}{8}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\text{tang.}\Phi^3 = \frac{\sin.\Phi}{2\cos.\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^3 = -\frac{\cos.\Phi^2}{5\sin.\Phi^5} + \frac{2}{15\sin.\Phi^3}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cdot\text{tang}\,\Phi^4 = \frac{1}{3\cos.\Phi^3}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot\,\Phi^4 = -\frac{\cos.\Phi^3}{6\sin.\Phi^6} + \frac{\cos.\Phi}{8\sin.\Phi^4} - \frac{\cos.\Phi}{16\sin.\Phi^2} + \frac{1}{16}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

 Inte-

Integrale ergo erit:

$$+\frac{4Ae^4ff}{3^4uu}\left(\frac{1}{\text{cos}.\Phi}(1+\tfrac{1}{2}\text{cot}.\Phi^2+\text{cot}.\Phi^4)+\tfrac{3}{2}\int\frac{d\Phi}{\text{sin}.\Phi}\right)$$
$$+\frac{4Be^5f^3}{3^5u^3}\left(\frac{\text{tang}.\Phi}{\text{cos}.\Phi}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{22}{5}\text{cot}.\Phi^2+\tfrac{4}{5}\text{cot}.\Phi^4-\tfrac{8}{5}\text{cot}.\Phi^6)-\tfrac{3}{2}\int\frac{d\Phi}{\text{cos}.\Phi}\right)$$
$$+\frac{4Ce^6f^4}{3^6u^4}\left(\frac{\text{tang}.\Phi^2}{\text{cos}.\Phi}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{11}{3}\text{cot}.\Phi^2-3\,\text{cot}.\Phi^4-\tfrac{10}{3}\text{cot}.\Phi^6+\tfrac{8}{3}\text{cot}.\Phi^8)\right.$$
$$\left.-7\int\frac{d\Phi}{\text{sin}.\Phi}\right)$$

vbi huius modi conſtans adiici debet, vt poſito tang. $\Phi = \sqrt{2}$, ſeu cot. $\Phi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ et coſ. $\Phi = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, integrale euaneſcat. Notandum vero eſt eſſe $\int\frac{d\Phi}{\text{sin}.\Phi} = l\,\text{tang}.\tfrac{1}{2}\Phi$ et $\int\frac{d\Phi}{\text{cos}.\Phi} = -l\,\text{tang}.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi) = l\,\text{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$. Q. E. I.

COROLL. 1.

60. Ex quantitate momenti hoc modo inuenta inſuper definiri poſſet ipſa celeritas u, vt momentum actionis fiat maximum; ſed quia hoc modo in calculos intricatiſſimos delaberemur; conſultius videtur, rationem quandam inter celeritates u et e aſſumere, quae experientiae maxime cenſeatur conueniens. Videtur autem ratio $u : e = 1 : 3$ commodiſſima, ita vt celeritas in alarum extremitate ſit minor celeritate venti; quippe quo caſu expreſſiones inuentae ſimpliciſſimae euadunt.

COROLL. 2.

61. Sit igitur $u = \tfrac{1}{3}e$, et in quauis ab axe diſtantia $= t$ pro inclinatione elementi alae ad axem Φ, erit tang. $\Phi = \frac{t+\sqrt{(tt+8ff)}}{2f}$; vnde in alae extremitate erit inclinatio Φ tanta, vt ſit tang. $\Phi = 2$. Cum igitur

igitur prope axem sit tang. $\Phi = \sqrt{2}$, seu inclinatio 54°, $45'$, circa extremitatem alarum erit inclinatio 63°, $26'$.

COROLL. 3.

62. Sumta pro alae latitudine v, quae distantiae ab axe t conuenit, hac aequatione $v = A + Bt + Ctt$; momentum potentiale vis venti in totam alam calculo secundum formulas inuentas euoluto sequenti modo expressum reperietur:

$$0,3233 . \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,2074 . \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,1520 . \tfrac{4}{9} Ceef^4,$$

quae quantitas per $\frac{u}{f}$, seu $\frac{e}{3f}$ multiplicata dabit momentum actionis ex tota ala oriundum.

COROLL. 4.

63. Sin autem haec eadem ala esset plana, et vbique ad axem eandem inclinationem Φ teneret, atque etiam ponatur $u = \frac{1}{3} e$, tum ex formulis supra datis colligetur momentum potentiale vis venti in hanc alam

$$+ A eeff (\tfrac{1}{2} \text{tang.}\Phi^2 - \tfrac{2}{9} \text{tang.}\Phi + \tfrac{1}{30}) \text{cos.}\Phi^2$$
$$+ B eef^3 (\tfrac{1}{3} \text{tang.}\Phi^2 - \tfrac{1}{6} \text{tang.}\Phi + \tfrac{1}{45}) \text{cos.}\Phi^2$$
$$+ C eef^4 (\tfrac{1}{4} \text{tang.}\Phi^2 - \tfrac{2}{15} \text{tang.}\Phi + \tfrac{1}{54}) \text{cos.}\Phi^2$$

COROLL. 5.

64. Quare si pro hac ala plana statuatur $\Phi = 54^\circ, 45'$, seu tang. $\Phi = \sqrt{2}$, erit momentum eius:

$$0,30846 . \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,19624 . \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,14287 . \tfrac{4}{9} C eef^4;$$

sin autem inclinatio vbique statuatur $\Phi = 63^\circ, 26'$, seu tang. $\Phi = 2$, erit momentum eius:

$$0,31862 . \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,20572 . \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,15130 . \tfrac{4}{9} Ceef^4.$$

Vtroque ergo casu momentum est minus, quam si alae inclinatio variabilis tribuatur.

N 2 COROLL.

COROLL. 6.

65. Posteriori tamen casu, quo $\Phi = 63°, 26'$ momentum multo propius accedit ad momentum alae, in qua inclinatio Φ ad extremitates continuo augetur; et defectus vix est sensibilis. Vnde nisi alae inclinatio variabilis tribui queat, expediet eius inclinationem ad axem vbique $63°, 26'$ constitui, quam $54°, 45'$, quia hoc modo ad momentum maximum proxime acceditur. Intelligendum autem hoc est, si statuatur $u = \frac{1}{3}e$; nam si celeritas u maior caperetur, tum angulus inclinationis Φ quoque maior euaderet.

PROBLEMA XI.

66. *Alis planis rotam alatam ita instruere, vt a vento non solum vis maxima excipiatur, sed etiam effectus machinae, habita frictionis ratione, maximus reddatur.*

SOLVTIO.

Tab. II. Fig. 1. Concipiatur axis plano tabulae perpendiculariter insistere in puncto C, circa quem disponantur plures alae triangulares, verticibus suis in puncto C concurrentes, et quae in planum tabulae orthogonaliter proiectae polygonum regulare repraesentent, ita vt nihil vacui inter eas relinquatur. Sint nimirum singula triangula isoscelia GCG proiectiones alarum, cuiusmodi in figura duodecim exhibentur. Sic enim obtinetur, vt quaecunque fuerit alarum inclinatio, ventus in omnes simul impingere possit, neque vlla ala impulsionem venti in aliam impediat. Quan-

Quando ergo ventus ſecundum directionem axis incidit, omnis aeris copia, quae intra capacitatem polygoni advehitur, in alas impingit, ita vt maior venti copia excipi nequeat, quin alae longiores reddantur. Sit ergo H C H vna ala quaecunque, ad axem ſub dato angulo $= \Phi$ inclinato, quae triangulum iſosceles G C G ſecet recta C F, ita vt ſemiſſium H C F, H C F alter ſupra planum tabulae cadat, alter infra. Sit iam longitudo huiusmodi alae $CF = f$, baſis $HH = h$, et baſis proiectionis $GG = g$, erit ob ang. $FHG = \Phi$, $g = h \text{ſin.}\Phi$, et $h = \frac{g}{\text{ſin.}\Phi}$; Datur enim $GG = g$ ex altitudine C F $= f$ et numero laterum polygoni, vnde h per g exprimi conuenit. Venti celeritas ponatur, vt ante $= e$, et celeritas rotae huius alatae in puncto $F = u$: numerus porro alarum ſit $= n$, erit $\frac{1}{2}g$ tangens arcus $\frac{360}{2n}$ radio exiſtente $= f$, ſeu $\frac{g}{2f} = \text{tang.}\frac{1}{n}180°$: ideoque $g = 2f\,\text{tang.}\frac{1}{n}180°$. Iam cum ala H C H ſit triangularis, poſita eius abſciſſa quaecunque $CT = t$ et ordinata $MM = v$, erit $v = \frac{h}{f}t$: vnde colligitur pro tota ala:

$A = \int vtdt = \frac{1}{3}ffh$; $B = \int vttdt = \frac{1}{4}f^3h$; $C = \int vt^3dt = \frac{1}{5}f^4h$.

Ex quibus conficitur momentum vis venti vnam alam impingentis $= ffh(\frac{1}{3}ee\,\text{ſin.}\Phi^2\text{coſ.}\Phi - \frac{1}{2}eu\,\text{ſin.}\Phi.\text{coſ.}\Phi^2 + \frac{1}{5}uu\,\text{coſ.}\Phi^3)$; vbi notandum eſt, eſſe debere $\frac{u}{e} < \text{tang.}\Phi$. Ponatur ergo $u = ex\,\text{tang.}\Phi$, ita vt ſit $x < 1$, eritque momentum

$eeffh\,(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi^2\text{coſ.}\Phi$, ſeu ob $h = \frac{g}{\text{ſin.}\Phi}$

$eeffg(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$.

Hinc momentum vis venti omnes n alas percutientis erit

$neeffg\,(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$.

 Sit

Sit nunc momentum frictionis $= F$; ita vt onus movendum sit a momento $neeffg(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - F$, quod multiplicatum per $\frac{u}{f} = \frac{ex}{f}\,\text{tang.}\,\Phi$ dabit momentum actionis, feu effectum machinae, qui erit

$$ne^3fgx(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}xx)\,\text{fin.}\,\Phi^2 - \frac{ex}{f}\,F\,\text{tang.}\,\Phi.$$

Ponatur $F = \mu\, neeffg$, quia hoc modo vis frictionis commodiffime ad vim mouentem comparatur, eritque effectus machinae: $ne^3fgx[(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{fin.}\,\Phi^2 - \mu\,\text{tang.}\,\Phi]$. Quod vt fiat maximum tam x quam angulus Φ definiri poterunt, quod fiet his aequationibus:

$$(\tfrac{1}{3} - x + \tfrac{3}{5}xx)\,\text{fin.}\,\Phi^2 = \mu\,\text{tang.}\,\Phi, \text{ et } 2(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}xx)\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi = \frac{\mu}{\text{cof.}\,\Phi^2},$$

vnde elicitur: $x = \frac{15\,\text{fin.}\,\Phi^2 - \sqrt{15(4 - \text{fin.}\,\Phi^4)}}{6(1 + 2\,\text{fin.}\,\Phi^2)} = \frac{10(2\,\text{fin.}\,\Phi^2 - 1)}{15\,\text{fin.}\,\Phi^2 + \sqrt{15(4 - \text{fin.}\,\Phi^4)}}$ tum vero angulus Φ per fequentem aequationem determinatur. $1 = \frac{3\mu}{2\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi^3}[8 + \text{fin.}\,\Phi^2 - \sqrt{15(4 - \text{fin.}\,\Phi^4)}]$ Vnde fi angulus Φ fuerit inuentus, erit momentum actionis feu totus machinae effectus:

$$\frac{\mu n e^3 f g x\,\text{fin.}\,\Phi(2\,\text{fin.}\,\Phi^2 - 1)}{2\,\text{cof.}\,\Phi^3} = \tfrac{1}{3} n e^3 f g x \cdot \frac{3\,\text{fin.}\,\Phi^3(2\,\text{fin.}\,\Phi^2 - 1)}{8 + \text{fin.}\,\Phi^2 - \sqrt{15(4 - \text{fin.}\,\Phi^4)}},$$

at celeritas motus rotae in F erit $u = ex\,\text{tang.}\,\Phi = \frac{10(2\,\text{fin.}\,\Phi^2 - 1)\,e\,\text{tang.}\,\Phi}{15\,\text{fin.}\,\Phi^2 + \sqrt{15(4 - \text{fin.}\,\Phi^4)}}$. Q. E. I.

COROLL. 1.

67. Patet ergo, angulum Φ femper effe debere femi recto maiorem; fiquidem machina moueri debeat. Nam fi $\Phi = 45°$, vel $\text{fin.}\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $x = 0$, $u = 0$, et ipfe machinae effectus $= 0$: qui cafus locum obtinet, fi $\mu = \frac{1}{6\sqrt{2}}$, hoc eft, fi fuerit momentum frictionis $F = \frac{neeffg}{6\sqrt{2}}$. Nifi ergo fuerit frictio minor, machina commoueri non poterit, feu vt motus fubfequatur, neceffe eft, vt fit $\mu < \frac{1}{6\sqrt{2}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

68. Quia difficile eſt, ex data frictione ſeu valore ipſius μ, angulum Φ inuenire, maxime conducit, pro Φ ſucceſſiue plures valores intra limites 45° et 90° aſſumere et inde valores ipſius μ prouenientes notare, vt ex huius modi tabula viciſſim pro dato μ valor conveniens anguli Φ colligi poſſit. Qui calculus, quo ob irrationalitatem minus impediatur: ponatur

$\text{ſin.}\Phi^2 = \frac{10pp - 6qq}{5pp + 3qq}$, erit $\text{coſ.}\Phi^2 = \frac{9qq - 5pp}{5pp + 3qq}$, et $x = \frac{5(p-q)}{5p-3q}$, et $\frac{u}{e} = x\,\text{tang.}\Phi$; porro $\frac{1}{\mu} = \frac{3(5p-3q)^2}{10pp-6qq} \cdot \frac{1}{\text{coſ.}\Phi^3}$, atque effectus machinae erit $= \frac{1}{2} n e^3 f g \cdot \frac{xx(p+q)}{(5p-3q)} \cdot \text{ſin.}\Phi^3 = \frac{1}{2} n e^3 f g \cdot \frac{1}{5} x^3 \cdot \frac{p+q}{p-q}\,\text{ſin.}\Phi^3$, vbi notandum eſt, $\frac{pp}{qq}$ intra limites 1 et $\frac{9}{5}$ contineri debere.

COROLL. 3.

69. Cum area totius polygoni, in quod rota alata proiicitur, ſit $= \frac{1}{2} n f g$, exhibebit $\frac{1}{2} neefg$ vim venti in aream huius polygoni, ſi celeritate ſua $= e$ in eam directe impingeret; quam ergo vim, cognita venti celeritate, facile definire licet: Sit igitur iſta vis $\frac{1}{2} n e e f g = V$, eritque momentum frictionis $F = 2\,\mu\,V f$. Atque per eandem vim V effectus machinae ſeu momentum actionis ita definietur, vt ſit $= \frac{\mu x\,\text{ſin.}\Phi\,(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - 1)}{\text{coſ.}\Phi^3} \cdot V e$: quo exprimitur onus per celeritatem ſuam multiplicatum. Cum autem ſit $u = e x\,\text{tang.}\Phi$; erit hoc momentum actionis $= \frac{\mu(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - 1)}{\text{coſ.}\Phi^2} \cdot V u$. Vnde ſi reſiſtentia oneris ſit $= Q$, erit oneris celeritas $= \frac{\mu(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - 1)}{\text{coſ.}\Phi^2} \cdot \frac{V u}{Q}$, ex quo modus machinam ad onus applicandi concluditur.

TABVLA

TABVLA

pro quauis frictione exhibens angulum inclinationis alarum ad axem rotae, celeritatem rotae et effectum totum ipsius machinae

Momentum Frictionis.	Angul Inclin:	Celeritas rotae in extremit:	Effectus Machinae,	qui etiam hoc modo expr:
o, 235702 Vf	45°	o, 000000 e	o, 000000 V e	o, 00000 V u,
o, 175837 Vf	50	o, 127686 e	o, 004718 V e	o, 036950 Vu
o, 122871 Vf	55	o, 281334 e	o, 017968 V e	o, 063869 Vu
o, 079653 Vf	60	o, 469882 e	o, 037427 V e	o, 079653 Vu
o, 047001 Vf	65	o, 711154 e	o, 060147 V e	o, 084576 Vu
o, 024370 Vf	70	1, 042160 e	o, 083159 V e	o, 079795 Vu
o, 010362 Vf	75	1, 550395 e	o, 103842 V e	o, 066978 Vu
o, 003084 Vf	80	2, 499421 e	o, 120105 V e	o, 048053 Vu
o, 000386 Vf	85	5, 208606 e	o, 130454 V e	o, 025046 Vu
o, 000000 Vf	90	∞	o, 134001 V e	o, 000000 Vu

COROLL. 4.

70. Ex hac ergo tabula perſpicitur, ſi momentum frictionis fuerit = o, 235702 V f, vel etiam maius, tum vim venti non parem eſſe machinae ad motum excitandae, etiamſi nulla oneris reſiſtentia ſit ſuperanda. Effectus ergo machinae hoc caſu erit nullus; neque ventus machinam mouere valebit, niſi ſit momentum frictionis F < o, 235702 Vf, vel niſi ventus iam tanta moueatur celeritate, vt ſit o, 235702. $\frac{1}{2}$ $neeffg$ > F.

COROLL. 5.

71. Quo autem minor momentum frictionis fuerit pars quantitatis Vf, eo maior capi debet angulus inclina-

inclinationis Φ, eoque celerior tribuendus erit motus rotae; atque ipse effectus machinae eo fiet maior: qui tamen limitem 0, 134001 Ve nunquam superare potest. Vbi notandum est, si momentum frictionis fuerit $\frac{1}{10}Vf$, effectum tantum esse semissem, sin autem momentum frictionis sit $\frac{1}{15}Vf$, effectum tantum fore circiter quadrantem illius summi effectus.

SCHOLION.

72. Quando momentum frictionis est pars notabilis quantitatis Vf, minor tamen quam eius pars quarta, patet, quantum intersit, si frictio adhuc vltra diminuatur: sic si momentum frictionis sit circiter pars sexta ipsius Vf, effectus machinae erit propemodum $= \frac{1}{200}Ve$: at si frictio eo vsque diminuatur, vt eius momentum sit $\frac{1}{8}Vf$, quae est leuis diminutio, effectus erit $\frac{1}{57}Ve$, ideoque fere quadruplo maior, quam casu praecedente. Data autem frictione, ita vt vltra diminui nequeat, patet, impedimentum inde oriundum eo fore minus, quo maior fuerit area polygoni G F G F etc; et cum etiam aucto radio f diminuatur, manifestum est, coefficientem quantitatis Vf in prima columna in ratione triplicata radii f diminui, sicque hoc pacto multo maiorem coefficientem termini Ve in quarta columna obtineri, ideoque effectum machinae iam non mediocriter augeri. Praeterea vero ob auctum V hic effectus in ratione duplicata radii f augebitur. Ex quo maxime expediet, vt ala huiusmodi rotata tanta conficiatur, quantam reliquae circumstantiae id permittunt. Hoc autem modo

inclinatio alarum ad axem fiet angulus ad rectum multo propius accedens, et celeritas alarum tanto fiet maior. Cum autem quantitas V in ratione duplicata celeritatis venti crescat, quouis casu certa venti celeritas potissimum est spectanda, ad quam machina accommodetur, vt hoc flante vento effectum maximum producat. Tum si ventus magis intendatur, effectus in triplicata ratione celeritatis venti augebitur, quo contenti esse poterimus, etiamsi machina ad hunc ventum non sit instructa. Contra autem flante vento debiliori, effectus in maiori quam triplicata ratione eius celeritatis diminuetur, ex quo, ne effectu machinae saepe penitus frustremur, conueniet machinam ad minimum fere venti gradum, quo frui oporteat, accommodari.

EXEMPLVM.

73. Ponamus ad machinam quamcunque mouendam alam huiusmodi rotatam adhiberi, cuius radius C F sit 20 pedum; et frictionem huius machinae tantam esse, vt ad eam superandam vi opus sit 10 librarum in distantia 20 pedum ab axe applicanda: et quaeritur maxime idonea dispositio huius rotae alatae.

Erit ergo $f = 20$ ped: et momentum frictionis $F = 20 . 10 . = 200$ libr. Sit alarum numerus $n = 12$, erit $g = 40$ tang. $15^\circ = 10, 717968$ ped: vnde $V = 6 . 20 . 10, 717968\, ee$; sit ee altitudo celeritati venti debita in pedibus expressa, atque haec vis V aequabitur ponderi massae aereae, cuius volumen $= 1286, 15616\, ee$ ped. cub. seu ponderi voluminis aquae $= 1\frac{3}{5} ee$ ped. cub;

cub: hoc eſt, ponderi $112\frac{1}{2}\,ee$ librarum, tribuendo 70 ℔ vni pedi cubico aquae. Machina ergo moueri non poterit, niſi ſit momentum frictionis $200 < 0,235702 \cdot 20 \cdot 112\frac{1}{2}\,ee$, hoc eſt, niſi ſit altitudo celeritati venti debita $ee > \frac{3}{8}$ ped: qua celeritate ſingulis minutis ſecundis percurruntur $4\frac{3}{4}$: ped. Niſi igitur venti celeritas maior ſit, quam $4\frac{3}{4}$ pedum, machina ne quidem ad motum excitari poterit. Diſponamus ergo machinam, ita vt maximum producat effectum, ſi ventus conficiat 10 pedes ſingulis minutis ſecundis, ita vt altitudo celeritati venti debita ſit $ee = 1\frac{3}{5}$ ped: eritque vis $V = 180$ ℔, et $Vf = 3600$: vnde erit momentum frictionis $200 = \frac{1}{18} \cdot Vf = 0,05555\, Vf$. Quo numero ad primam columnam translato, patebit, angulum, quo alae ad axem rotae inclinari debent, eſſe oportere circiter, $64°$. Porro reperitur $u = \frac{2}{3}e$, ita vt extremitas alarum hoc vento flante eſſe debeat $6\frac{2}{3}$ ped. in minuto ſecundo, vnde rota alata reuolutionem quamlibet abſoluere debet tempore 19 ſecundorum circiter. Effectus autem machinae colligetur $= 0,054\, Ve = 9\frac{3}{4}$ ℔ . 10 ped. Quare ſi oneris reſiſtentia valeat Q libras, eius celeritas erit $= \frac{97\frac{1}{2}}{Q}$ pedum vno minuto ſecundo. Si ergo onus perpendiculariter attolli debeat ope huius machinae, hocque onus ſit 1000 librarum, id ſingulis horis eleuabitur per ſpatium 351 pedum. Vbi notandum eſt, vnum hominem idem onus ſingulis horis per ſpatium $= 180$ pedum attollere poſſe, ſi quidem vis hominis, qua minuto ſecundo per ſpatium 2 pedum progreditur, ſtatuatur

25 libr. ex quo intelligitur a duobus hominibus plus praestari posse quam ab hac machina, si vento 10 pedes minuto secundo peragrante impellatur. Verum si ventus duplo sit velocior, machina effectum circiter octuplo maiorem edet, ideoque tantum efficiet, quantum 16 homines: Sed hic tenendum est, homines ad hunc effectum producendum nulla frictione impediri; Si enim eidem machinae applicentur, vbi frictionem superare debent, multo minus efficere possent. Vnus enim homo eidem machinae innitens pondus 1000 ℔ vnius horae spatio tantum ad altitudinem 108 pedum eleuabit, ideoque ventus 10 pedum reuera tantum praestat, quantum $3\frac{1}{2}$ homines; ventus autem duplo celerior plus quam 28 homines efficiet.

ELEMENTA

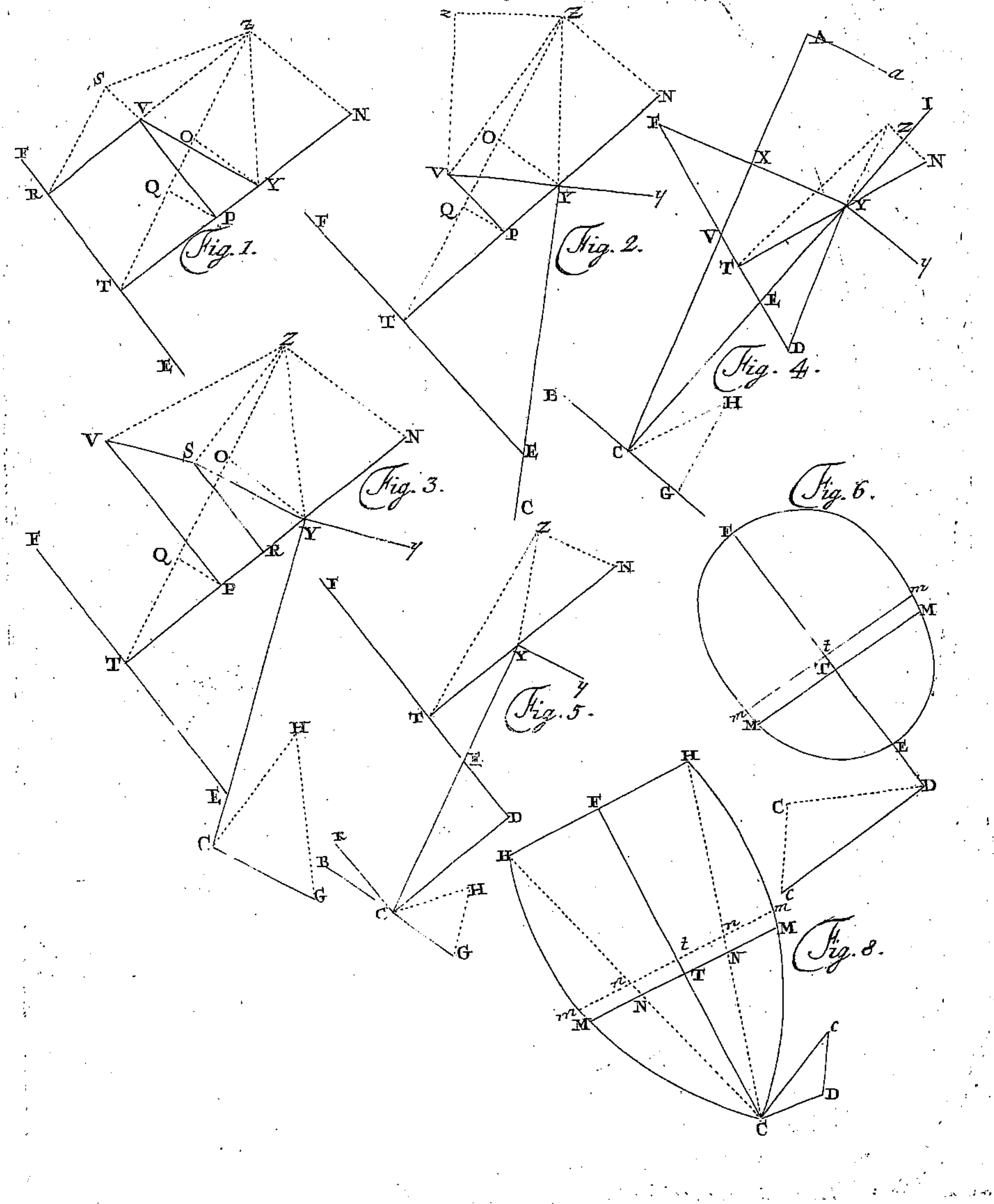
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.