



1757

Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

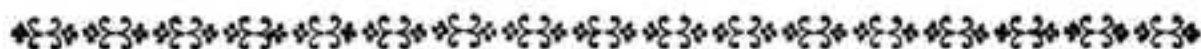
Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides" (1757). *Euler Archive - All Works*. 227.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/227>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



CONTINUATION
DES RECHERCHES
SUR LA THÉORIE DU MOUVEMENT
DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

I.

Ayant réduit dans mes deux Mémoires précédens toute la Théorie des fluides, tant de leur équilibre que de leur mouvement, à deux équations analytiques, la considération de ces formules paroît de la plus grande importance; puisqu'elles renferment non seulement tout ce qu'on a déjà découvert par des méthodes fort différentes & pour la plûpart peu convaincantes, tant sur l'équilibre que sur le mouvement des fluides, mais aussi tout ce qu'on peut encore désirer dans cette Science. Quelque sublimes que soient les recherches sur les fluides, dont nous sommes redevables à Mrs. *Bernoullis*, *Clairaut*, & *d'Alembert*, elles découlent si naturellement de mes deux formules générales: qu'on ne scauroit assés admirer cet accord de leurs profondes méditations avec la simplicité des principes, d'où j'ai tiré mes deux équations, & auxquels j'ai été conduit immédiatement par les premiers axiomes de la Mécanique.

II. Quoiqu'il ne soit pas souvent à propos de donner à nos recherches une trop grande étendue, de peur qu'on ne tombe dans un calcul trop compliqué, dont on ne puisse faire l'application aux cas les plus simples, qu'avec bien de la peine, il arrive ici précisément le contraire: puisque mes équations, quelque générales qu'elles soient, ne laissent pas d'être assés simples, pour les appliquer aisément à tous les cas particuliers: & par cela même elles nous présentent des verités si uni-



universelles, que notre connoissance en tire les plus grands éclaircissements, qu'on puisse souhaiter. Et ensuite la plus grande universalité qu'elles embrassent, n'empêche pas, qu'elles ne soient presque aussi simples, que lorsqu'on considère des cas particuliers.

III. J'ai déjà remarqué que mes formules renferment toute la Théorie tant de l'équilibre que du mouvement des fluides: or, par rapport à la nature des fluides, elles s'étendent également aux fluides nommés élastiques, qu'à ceux qui ne sont pas susceptibles de compression: & à l'égard de ceux-là, de quelque manière que la densité puisse dépendre de l'élasticité, soit que ce soit selon une loi constante, ou variable d'une manière quelconque. Ensuite, quelles que puissent être les forces accélératrices, qui agissent sur les élémens du fluide, leur effet est aussi compris dans lesdites formules; & enfin, de quelques forces externes que le fluide soit sollicité, & quelle que soit la figure du canal, ou vaisseau, où le fluide se trouve, il y est tenu compte de toutes ces différentes circonstances.

IV. Soit que la question roule sur l'équilibre, ou sur le mouvement d'un fluide; & qu'on demande, ou la vitesse & direction de chaque particule, ou les forces, que le fluide exerce sur les parois du vaisseau, qui le contient, ou la résistance, qu'un corps solide, qui y est plongé, essaye, ou l'élasticité & la densité du fluide, lorsqu'il est compressible en chaque endroit: toutes ces questions, & d'autres semblables, qu'on peut imaginer tant sur l'équilibre que le mouvement des fluides, se réduisent à une seule recherche, qui est celle de l'état de pression, où le fluide se trouve dans chaque point. Je mesure cette pression par la hauteur d'une colonne d'une matière pesante homogène, dont je pose la densité = 1, en sorte que, pour trouver la pression, qu'une surface infiniment petite soutient, on n'a qu'à multiplier cette surface par la hauteur, qui lui convient, & le poids de ce volume, étant rempli de ladite matière homogène, fera égal à la pression cherchée.



V. C'est pour cette pression, ou plutôt la hauteur, qui lui sert de mesure, que je donne une équation différentielle, & tout revient à en trouver l'intégrale. Mais, comme cette équation renferme plusieurs variables, on n'en sauroit entreprendre l'intégration, avant qu'on ait découvert le rapport entre ces variables, qui est nécessaire pour la rendre intégrable. On tire de là les conditions de tout le mouvement, tant par rapport à la vitesse de chaque particule qu'à la densité, qui s'y trouve en chaque point, & à chaque instant; de sorte qu'une seule équation différentielle renferme à la fois plusieurs déterminations différentes. L'intégration en elle-même ne donne que la seule détermination de la pression, mais l'intégralité tient lieu de plusieurs équations, qui fournissent les autres déterminations essentielles à la Théorie du mouvement des fluides. Or, pour avoir toutes les déterminations, par lesquelles en chaque cas le mouvement est entièrement déterminé, il faut joindre à cette équation l'autre équation, que j'ai trouvée.

VI. Cette autre équation peut être regardée comme finie, puisqu'elle ne contient point des différentiels, quoiqu'elle en renferme des rapports. Elle est fondée sur la continuité du fluide, & exclut tant le vuide, que les particules du fluide pourroient laisser entr'elles, que leur pénétration mutuelle. Cette dernière circonstance est aussi essentielle aux corps fluides que solides; mais à l'égard de l'autre, il peut bien arriver, que les parties du fluide se séparent actuellement, en laissant entr'elles un vuide, comme nous voyons dans les jets d'eau, qui sont dissipés enfin en gouttes. Les parties étant alors entièrement séparées entr'elles, il est évident qu'on n'y sauroit plus appliquer mes formules; à moins qu'on ne veuille considérer chaque goutte séparément, entant qu'elle constitue un corps fluide à part. Toute la Théorie des fluides est donc uniquement fondée sur deux équations, dont l'une contient la pression, & l'autre la continuité du fluide, dans toutes ses parties.

VII. Sans entrer de nouveau dans le détail des raisonnemens, qui m'ont conduit à ces deux équations, je me contenterai de mettre
ici



ici devant les yeux les équations mêmes. Et d'abord je considère le **fluide** comme remplissant un espace quelconque **Z**, je le rapporte selon la maniere ordinaire à trois axes fixes & perpendiculaires entr'eux au point **O**, par le moyen des trois coordonnées : Fig 1.

$$OX = x; \quad XY = y, \quad \& \quad YZ = z$$

paralleles aux trois axes **OA**, **OB** & **OC**. Il est évident, que ces trois coordonnées sont indépendantes entr'elles ; car pour avoir tous les points du fluide, il faut faire varier chacune séparément : & quand on aura donné à deux des valeurs déterminées, la variabilité de la troisième nous découvre encore une infinité de points différens. C'est donc par ces trois coordonnées que le lieu de chaque point du fluide est déterminé.

VIII. Mais quand il s'agit de différens attributs, qui conviennent à la particule du fluide, qui se trouve dans ce point, il ne suffit pas d'en favoir le lieu ; il faut outre cela considérer, que l'état du fluide dans ce même point peut varier avec le tems, ce qui amene dans le calcul la quatrième variable, indépendante des trois autres, & par laquelle est marqué l'instant du tems, pour lequel on cherche l'état de la particule du fluide, qui se trouve alors au point **Z**. Pour cet effet il faut établir une époque fixe, depuis laquelle nous comptons le tems : soit donc t le tems écoulé depuis cette époque jusqu'à l'instant en question ; de sorte que la question déterminée est à présent de chercher l'état du fluide au point **Z**, dont le lieu est déterminé par les trois coordonnées x , y , & z , & pour le tems depuis l'époque établie $= t$. Je marque ici comme ordinairement le tems par l'espace divisé par la vitesse, & la moitié du quarré de chaque vitesse donne la hauteur, d'où un corps grave tombant acquiert une vitesse égale.

IX. Ensuite, je pose pour le point **Z** déterminé par les trois variables x , y , & z , & pour le tems $= t$ la pression du fluide exprimée par la hauteur $= p$, de la maniere que j'ai expliquée cy-dessus. Or, de quelque maniere que cette hauteur p sera trouvée, on la pourra

rou-



toujours regarder comme une fonction des quatre variables $x, y, z,$ & t , de sorte que si l'on met le tems t constant, on en trouvera la pression pour tous les points Z du fluide, & au même instant ; mais si l'on fait constantes les trois coordonnées $x, y,$ & z , on en connoitra les pressions au même point Z pour tous les tems. Dans les cas donc où la pression au même point Z demeure toujours la même, elle sera exprimée par une fonction du lieu seulement, ou des trois coordonnées x, y, z , sans que le tems t y entre.

X. Il en est de même de la densité du fluide, en cas qu'elle soit variable, comme nous devons le supposer pour rendre nos recherches générales. Soit donc ρ la densité du fluide au point Z & pour le tems t , & ρ doit aussi être regardée comme une fonction des quatre variables $x, y, z,$ & t : la mesure de la densité ρ est déjà déterminée par la densité de la matiere grave & homogene mentionnée cy-dessus, laquelle est exprimée par l'unité, d'où la densité indéfinie ρ sera exprimée par un nombre absolu. Lorsque la densité est partout & toujours la même, comme il arrive dans les fluides incompressibles, je pose $\rho = g$. Dans les fluides élastiques, ou plutôt compressibles, la densité ρ dépend de la pression p , ou uniquement, ou de plus d'une fonction des variables $x, y, z,$ & t ; où je remarque que la pression p mesure en même tems l'élasticité des fluides au point Z ; vu que l'élasticité est toujours balancée par la pression.

XI. Après la pression & la densité, il faut considérer les forces accélératrices, par lesquelles tous les élémens du fluide sont sollicités, & dont la gravité n'est qu'un cas particulier, dont j'exprimerai la force accélératrice par l'unité, & partant les autres forces accélératrices par des nombres absolus. Or, quelles que soient les forces accélératrices, qui agissent sur l'élément du fluide en Z , on fait qu'on les peut toujours réduire à trois, selon les directions $ZP, ZQ,$ & ZR , fixes & paralleles à nos trois axes. Soient donc ces trois forces accélératrices :

selon $ZP = P$; selon $ZQ = Q$; selon $ZR = R$.

Si



Si elles dépendent uniquement du lieu Z , elles seront des fonctions des trois variables x, y, z ; mais si l'on vouloit qu'elles variaient aussi avec le tems, leurs expressions renfermeroient outre cela la quatrième variable t .

XII. Enfin, si le fluide est en mouvement, quel que soit le mouvement de la particule, qui se trouve à présent au point Z , on le peut aussi décomposer selon les mêmes trois directions fixes $ZP, ZQ,$ & ZR ; soient donc les vitesses de l'élément en Z

selon $ZP = u$; selon $ZQ = v$; selon $ZR = w$

de ces trois vitesses dérivées on connoitra non seulement la vraie vitesse du point Z , mais aussi sa direction. Car la vraie vitesse sera $\sqrt{(uu + vv + ww)}$, que je nommerai $= g$, & les frac-

tions $\frac{u}{g}$; $\frac{v}{g}$; $\frac{w}{g}$ exprimeront les cofinus des angles, sous lesquel-

les la vraie direction est inclinée aux axes OA, OB, OC . Ces vitesses doivent aussi en général être envisagées comme des fonctions quelconques des quatre variables $x, y, z,$ & t , puisqu'il pourroit arriver qu'au même point Z le mouvement variât avec le tems. Or il est évident, que lorsqu'on aura trouvé pour quelque cas déterminé, ces fonctions $u, v,$ & w , on sera en état d'assigner le vrai mouvement, que chaque particule du fluide aura à chaque instant.

XIII. Pour ne rien omettre, qui puisse sembler nécessaire à l'éclaircissement de mes formules, je dois expliquer une manière particulière d'exprimer certaines valeurs différentielles, quoique je l'aye déjà employée plusieurs fois. Lorsque s marque une fonction quel-

conque de $x, y, z,$ & t , cette expression $\left(\frac{ds}{dx}\right)$ marque le diffé-

rentiel de s , (qui résulte de la seule variabilité de x , en posant les autres quantités $y, z,$ & t constantes,) divisé par dx ; d'où l'on comprend

ce que signifient ces expressions $\left(\frac{ds}{dy}\right), \left(\frac{ds}{dz}\right), \left(\frac{ds}{dt}\right)$. Donc, si



le différentiel complet de s est $ds = Ldx + Mdy + Ndz + Odt$,
on voit qu'il y aura selon cette manière d'écrire :

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = L; \left(\frac{ds}{dy}\right) = M; \left(\frac{ds}{dz}\right) = N; \left(\frac{ds}{dt}\right) = O.$$

Donc, en connoissant tous les différentiels particuliers, on en formera aisément le différentiel complet, qui sera :

$$ds = dx \left(\frac{ds}{dx}\right) + dy \left(\frac{ds}{dy}\right) + dz \left(\frac{ds}{dz}\right) + dt \left(\frac{ds}{dt}\right),$$

dont il est bon de bien remarquer la composition, puisqu'elle nous servira à épargner quantité de coefficients, que nous serions obligés d'introduire dans le calcul.

XIV. Il est démontré, que dans un tel différentiel complet :

$$ds = Ldx + Mdy + Ndz + Odt,$$

les coefficients L , M , N , & O , ont toujours un tel rapport entr'eux qu'il y a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dL}{dy}\right) &= \left(\frac{dM}{dx}\right); \left(\frac{dL}{dz}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right); \left(\frac{dL}{dt}\right) = \left(\frac{dO}{dx}\right) \\ \left(\frac{dM}{dz}\right) &= \left(\frac{dN}{dy}\right); \left(\frac{dM}{dt}\right) = \left(\frac{dO}{dy}\right); \left(\frac{dN}{dt}\right) = \left(\frac{dO}{dz}\right), \end{aligned}$$

& cette même manière d'exprimer peut servir à démontrer cette belle propriété. Car, puisque $L = \left(\frac{ds}{dx}\right)$, exprimons $\left(\frac{dL}{dy}\right)$ par $\left(\frac{dds}{dx dy}\right)$, ce qui marque qu'il faut différentier deux fois s de suite, en posant la première fois la seule x , & la seconde fois la seule y variable, & omettre les différentiels dx & dy . Cela remarqué, on aura

$$\left(\frac{dL}{dy}\right) = \left(\frac{dds}{dx dy}\right) \quad \& \quad \left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dds}{dy dx}\right);$$

or



or il est aisé de montrer que $\left(\frac{dds}{dx dy}\right) = \left(\frac{dds}{dy dx}\right)$, d'où la vérité de cette propriété devient évidente.

XV. Maintenant je pose pour abrégé :

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{du}{dy}\right) + w \left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Y = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u \left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$Z = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u \left(\frac{dw}{dx}\right) + v \left(\frac{dw}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right),$$

& l'équation différentielle qui détermine la pression p est :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz - X dx - Y dy - Z dz,$$

dans laquelle le tems t est supposé constant. Or l'autre équation tirée de la continuité du fluide est :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0,$$

& ce sont les deux équations qui contiennent toute la Théorie tant de l'équilibre que du mouvement des fluides, dans la plus grande universalité qu'on puisse imaginer.

XVI. Lorsqu'il est question de l'équilibre, on n'a qu'à faire évanouir les trois vitesses u , v , & w , & puisque alors les quantités X , Y , & Z , évanouissent aussi, toute la Théorie de l'équilibre des fluides est contenue dans ces deux équations :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz, \text{ le tems } t \text{ étant constant,}$$

$$\& \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$



de sorte que la densité q doit être une fonction indépendante du tems t , ou bien la densité au même endroit Z , sera toujours la même. Donc, puisque $dp = Pqdz + Qqdy + Rqdx$, cette formule doit être un différentiel complet, & partant il faut que les forces P, Q, R , ayent tant entr'elles qu'à la densité q un tel rapport qu'il soit :

$$\left(\frac{d.Pq}{dy}\right) = \left(\frac{d.Qq}{dx}\right) ; \left(\frac{d.Pq}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dx}\right) ; \left(\frac{d.Qq}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dy}\right)$$

& quand ces conditions n'ont pas lieu, il est impossible que le fluide puisse jamais parvenir à l'état d'équilibre. Je passe d'autres propriétés, que j'ai suffisamment développées dans mon Mémoire sur l'équilibre des fluides.

XVII. Pour le mouvement en général, puisque l'équation différentielle est :

$$dp = q(P-X)dx + q(Q-Y)dy + q(R-Z)dz,$$

afin qu'elle soit possible, nous aurons de semblables déterminations :

$$\left(\frac{d.q(P-X)}{dy}\right) = \left(\frac{d.q(Q-Y)}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d.q(P-X)}{dx}\right) = \left(\frac{d.q(R-Z)}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d.q(Q-Y)}{dz}\right) = \left(\frac{d.q(R-Z)}{dy}\right),$$

de sorte que la seule première équation renferme quatre déterminations, mais auxquelles on peut satisfaire par une infinité de manières différentes. Ces trois dernières conditions ne déterminent donc absolument les trois vitesses, mais en chaque cas il faut avoir égard aux autres circonstances, comme à l'état initial, à la figure du vaisseau, & aux forces externes, qui agissent quasi par des pistons sur le fluide.

Ces



Ces circonstances n'entrent pas en considération dans l'équation différentielle, mais il en faut tenir compte dans l'intégration.

XVIII. D'autres qui ont traité cette matière, si l'on en excepte *M. d'Alembert*, n'ont donné au fluide qu'une étendue par deux dimensions tout au plus, ou du moins ils ont supposé que le mouvement de chaque particule se fasse dans le même plan, & partant on ne peut regarder que comme particulières les formules qu'ils ont trouvées; au lieu que celles que je viens de donner, sont tout à fait générales, & on ne sauroit imaginer aucun cas, quelque compliqué qu'il puisse être, qui n'y feroit pas compris. Il fera donc bon de faire voir d'abord, que tout ce qu'on a découvert jusqu'ici sur le mouvement des fluides, se déduit fort aisément de mes formules générales: or presque tout ce qu'on a donné sur cette matière, se réduit au mouvement des fluides par des tuyaux infiniment étroits, ou qu'on peut au moins regarder comme tels, de sorte que dans ces cas on ne conçoit qu'une seule dimension tant dans le fluide que dans son mouvement. Ensuite je ferai aussi voir comment tout ce qu'on a écrit sur le mouvement des fluides en considérant deux dimensions, découle très naturellement de ces mêmes formules.

XIX. Que le fluide soit donc renfermé dans un tuyau *FZV*, dont l'amplitude soit partout quasi infiniment petite, que je supposerai néanmoins variable, ce qui nous tiendra lieu de la seconde équation tirée de la continuité du fluide. Car nous n'aurons qu'à supposer partout le mouvement & l'amplitude, telle que la continuité exige. Pour cet effet soit dans un endroit fixe du tuyau *F* l'amplitude $\equiv ff$, & après un tems quelconque $\equiv t$, soit la densité du fluide en *F* $\equiv \phi$, & la vitesse vraie dont le fluide s'y meut dans le tuyau $\equiv \omega$; & quelque variables que puissent être la densité ϕ , & la vitesse ω , leur changement dépendra uniquement du tems t , de sorte que ϕ & ω seront des fonctions du tems t seulement. Maintenant, si nous supposons à un endroit quelconque *Z* l'amplitude du tuyau $\equiv rr$, qui sera une fonction du seul lieu *Z*, sans qu'elle dépende du tems t , & que nous



posions après le tems t , la densité du fluide en $Z = q$, & la vraie vitesse $= v$; & par la continuité du fluide, il faut qu'il subsiste un certain rapport entre ces quantités, qui répondent aux sections F & Z .

XX. Pour trouver ce rapport, nous n'avons qu'à chercher la quantité du fluide, qui occupe maintenant le tuyau FZ , & la poser égale à celle, qui occupera après l'élément du tems dt , la partie du tuyau fs , prenant $Ff = \omega dt$ & $v dt$. Pour cet effet soit la longueur du tuyau $FZ = s$, & il est clair que la quantité du fluide, qui remplit à présent le tuyau FZ , est $= \int q r r ds$: or après l'élément du tems dt , puisque la densité q se change en $q + dt \left(\frac{dq}{dt} \right)$, la quantité du fluide, qui rempliroit la même longueur FZ , seroit $= \int q r r ds + dt \int r r ds \left(\frac{dq}{dt} \right)$: ajoutons y la petite portion, qui occupera l'élément $Zs = v dt$, qui sera $= q r r v dt$, & en retranchons la portion, qui répond à l'espace $Ff = \omega dt$, qui seroit $ff \omega dt$, pour avoir la quantité du fluide, qui remplira après le tems dt l'espace du tuyau fs , qui sera:

$$= \int q r r ds + dt \int r r ds \left(\frac{dq}{dt} \right) + r r q v dt - ff \omega dt.$$

Or celle-cy devant être égale à celle qui occupoit auparavant le tuyau FZ , ou à $\int q r r ds$, nous aurons cette équation:

$$r r q v = ff \omega - \int r r ds \left(\frac{dq}{dt} \right),$$

qui tiendra lieu de l'équation tirée de la continuité du fluide.

XXI. Soient maintenant comme auparavant les forces accélératrices P , Q , R , qui agissent sur l'élément du fluide en Z , selon les directions ZP , ZQ , & ZR , & que u , v , w , expriment les vitesses dérivées du fluide en Z , selon ces mêmes directions pour le tems écoulé $= t$; ces directions étant prises parallèles aux trois axes fixes



fixes OA, OB, OC, auxquels je rapporte les trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, qui déterminent le lieu du point Z. Or, puisque le tuyau FZ est regardé comme une ligne immobile, sa nature sera exprimée par une double équation entre les trois coordonnées x , y , & z ; ou bien tant y que z sera exprimé par une certaine fonction de x ; & puisque $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, la longueur du tuyau $FZ = s$, sera aussi une fonction de x : de même que l'amplitude du tuyau en Z $= rr$. Ou réciproquement on pourra regarder les quantités x , y , z , & rr , comme des fonctions de la seule variable s , dont la nature sera connue, quand on suppose donnée la figure du tuyau.

XXII. Puisque la vitesse vraie g suit la direction du tuyau en Z nous en connoissons les vitesses dérivées, qui seront :

$$u = \frac{g dx}{ds} ; \quad v = \frac{g dy}{ds} ; \quad w = \frac{g dz}{ds} ;$$

d'où nous tirons comme en général $gg = uu + vv + ww$: ensuite nous aurons :

$$u dy = v dx ; \quad u dz = w dx ; \quad \& \quad v dz = w dy.$$

Or je remarque de plus, que puisque les deux variables y & z ne varient qu'avec x , de sorte que prenant x constante, les deux autres y & z , ne subissent point de changemens; si nous rapportons tout à la variabilité de x , les expressions $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ &c. évanouiront ; parce que $dy \left(\frac{du}{dy}\right)$, marque le différentiel de u , si l'on suppose x , & z , & t , constantes: or posant x & t constantes les quantités u , v , w , ne sauroient plus varier. Donc nous aurons :

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u \left(\frac{du}{dx}\right); \quad Y = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u \left(\frac{dv}{dx}\right); \quad = Z \left(\frac{dw}{dt}\right) + u \left(\frac{dw}{dx}\right)$$

de sorte que nous n'ayons dans ce cas que deux variables x & t .



XXIII. De là nous obtiendrons :

$$Xdx + Ydy + Zdz = dx \left(\frac{du}{dt} \right) + dy \left(\frac{dv}{dt} \right) + dz \left(\frac{dw}{dt} \right) + udx \left(\frac{du}{dx} \right) + vdy \left(\frac{dv}{dx} \right) + wdz \left(\frac{dw}{dx} \right)$$

Or, puisque $udy = vdx$ & $udz = wdx$, nous aurons :

$$\begin{aligned} udx \left(\frac{du}{dx} \right) + vdy \left(\frac{dv}{dx} \right) + wdz \left(\frac{dw}{dx} \right) &= udx \left(\frac{du}{dx} \right) + vdx \left(\frac{dv}{dx} \right) + wdx \left(\frac{dw}{dx} \right) \\ &= dx \left(\left(\frac{u du}{dx} \right) + \left(\frac{v dv}{dx} \right) + \left(\frac{w dw}{dx} \right) \right) = dx \left(\frac{u dx}{dx} \right) = u dx \end{aligned}$$

en ne supposant que x variable, ou bien en ne supposant que le tems t constant, puisque nous n'avons que deux variables x & t . Ensuite à cause de $u = \frac{u dx}{ds}$, puisque le rapport $\frac{dx}{ds}$, ne dépend point du

tems t , nous aurons $\left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{dx}{ds} \left(\frac{du}{ds} \right)$, & partant :

$$dx \left(\frac{du}{dt} \right) + dy \left(\frac{dv}{dt} \right) + dz \left(\frac{dw}{dt} \right) = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds} \left(\frac{du}{ds} \right) = ds \left(\frac{du}{ds} \right).$$

Par conséquent nous aurons :

$$Xdx + Ydy + Zdz = ds \left(\frac{du}{ds} \right) + u ds,$$

en supposant dans le terme $u ds$ le tems t constant.

XXIV. Donc, exposant la pression du fluide en Z par la hauteur p , nous parvenons à cette équation différentielle :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz - ds \left(\frac{du}{ds} \right) - u ds,$$

où le tems t est supposé constant, tout comme le terme $u ds$ le renferme déjà : & cette équation jointe à l'autre tirée du principe de la con-

tinuité : $rrq = ff\phi w - fr r ds \left(\frac{dq}{dt} \right)$,

renferme toutes les déterminations du mouvement du fluide par le tuyau

yau FZ. Je remarque ici en passant, que si au lieu de rapporter les quantités y & z à x , j'eusse rapporté ou x & z à y , ou x & y à z , j'eusse trouve la même équation différentielle ; ce qui est évident, puisque aucune de ces trois coordonnées n'y entre préféralement aux autres. Elles n'y paroissent même plus que dans le membre $Pdx + Qdy + Rdz$, qui résulte des forces sollicitantes.

XXV. Voilà donc les formules pour le mouvement d'un fluide quelconque, tant incompressible, que compressible selon une loi quelconque, & sollicité par des forces accélératrices quelconques, par un tuyau d'une figure quelconque ; que personne n'a encore données dans ce degré de généralité autant que je sache. Mais aussi dois-je avouer, que dans cette grande étendue on ne sauroit découvrir l'intégrale de cette équation différentielle ; d'où dépend cependant toute la détermination du mouvement. Or, si nous supposons le fluide incompressible, & que sa densité soit partout & toujours la même $= g$, ce qui est le cas auquel on s'est principalement borné, à cause de $\rho = \phi = g$, nos deux équations pour le mouvement dans ce cas deviendront :

$$\frac{dp}{g} = Pdx + Qdy + Rdz - ds \left(\frac{dz}{dt} \right) - z dz,$$

$$\& \quad r r z = f f \omega, \quad \text{ou} \quad z = \frac{f f \omega}{r r}.$$

XXVI. Puisque y & z sont déterminées par x , quelles que soient les forces P, Q, R , la formule $Pdx + Qdy + Rdz$ sera toujours intégrable. Soit donc $Pdx + Qdy + Rdz = dV$, de sorte que V exprime ce que j'appelle l'effort des forces. Ensuite, puisque $r r$ ne dépend point du tems t , pendant que la vitesse ω , à la section donnée F en dépend uniquement, nous aurons

$\left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{f f}{r r} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)$, & l'expression $\left(\frac{d\omega}{dt} \right)$, ne dépendra pas non plus du lieu Z , ou de la variable x , ou de s .



Donc notre équation différentielle sera :

$$\frac{dp}{g} = dV - \frac{\iint ds}{rr} \left(\frac{d\omega}{dt} \right) - \varkappa d\varkappa ;$$

& parce que le tems t est supposé ici constant, l'équation intégrale en sera :

$$\frac{p}{g} = V - \left(\frac{d\omega}{dt} \right) \int \frac{\iint ds}{rr} - \frac{1}{2} \varkappa \varkappa - \text{Const.}$$

ou bien en remettant pour \varkappa la valeur $\frac{\iint \omega}{rr}$:

$$\frac{p}{g} = V - \left(\frac{d\omega}{dt} \right) \int \frac{\iint ds}{rr} - \frac{\iint \omega^2}{2 r^4} + \text{Const.}$$

où la constante peut renfermer le tems t .

XXVII. Cette formule comprend tout ce qui a été écrit jusqu'ici sur le mouvement des fluides par des tuyaux, ou canaux quelconques; que les Auteurs, ou ont supposés infiniment étroits, ou ont crû, qu'on pouvoit regarder le mouvement tel, comme s'ils étoient infiniment étroits. On n'a pas même douté d'appliquer cette formule au mouvement de l'eau par des vaisseaux d'une largeur quelconque, en quoi on s'est fondé sur cette hypothese, que par toute l'étendue de chaque section horizontale du vaisseau l'eau ait le même mouvement : & ayant comparé ce calcul avec les expériences, on a trouvé en effet, qu'on ne s'étoit pas écarté trop de la vérité. Cependant la condition de l'amplitude infiniment petite est si essentielle au cas, que je viens de développer, qu'on n'en fauroit admettre à la rigueur l'application aux tuyaux, ou vaisseaux, dont la largeur est considérable. Les conclusions qu'on en tire, ne peuvent être regardées que comme des approximations à la vérité.

XXVIII. On peut aussi faire l'application de la formule (§.24.) au mouvement d'un fluide élastique par un tuyau infiniment étroit, quand on suppose que le mouvement est déjà devenu permanent, ou
tel

tel qu'au même endroit du tuyau Z, tant la vitesse v , que la densité q , soit toujours la même. Dans ce cas les quantités q & v feront des fonctions de la seule variable s ou x , & partant $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$, &

$\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$; or les quantités ϕ & ω deviendront absolument constantes. On aura donc $rrq\vartheta = ff\phi\omega$, & l'équation différentielle

fera $\frac{dp}{q} = dV - vdv$, où le tems est supposé constant. Donc, si

la densité q est proportionnelle au ressort p , ou qu'il y ait $p = \frac{hq}{g}$, de sorte que si la densité est $= g$, l'élasticité soit $= h$, on aura

$$\frac{h}{g} \int q = V - \frac{1}{2} v v + \text{Const.} \quad \text{ou bien :}$$

$$\frac{h}{g} \int q = V - \frac{f^4 \phi^2 \omega^2}{2 r^4 q q} + \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{h}{g} \int \phi,$$

en prenant l'intégrale V en sorte, qu'elle évanouisse au point F, où devient $q = \phi$, & $rr = ff$.

XXIX. Pour appliquer ce calcul à l'air, supposons encore plus généralement, que l'élasticité ne dépend pas seulement de la densité, mais aussi de la chaleur, qui soit variable par la longueur du tuyau. Soit le degré de chaleur en Z $= \varrho$, que je suppose aussi toujours le même, & en F $= \gamma$, où la densité soit $\phi = g$, & posons l'élasticité en Z exprimée par la hauteur $p = \frac{hq\varrho}{g\gamma}$, où la chaleur ϱ soit donnée par une fonction quelconque de s , ou de x . Ayant donc

$$rrq\vartheta = ff g \omega, \quad \& \quad dp = \frac{h}{g\gamma} (q d\varrho + \varrho dq),$$

notre équation différentielle fera :

$$\frac{h}{g\gamma} \left(d\varrho + \frac{\varrho dq}{q} \right) = dV - v dv;$$



ou bien à cause de $\frac{dq}{q} = -\frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{2dr}{r}$,

$$\frac{h}{g\gamma} \left(d\varrho - \frac{\varrho d\gamma}{\gamma} - \frac{2\varrho dr}{r} \right) = dV - \gamma d\gamma,$$

d'où il s'agit de chercher la valeur de γ .

XXX. Pour éviter les difficultés du calcul, supposons le tuyau horizontal, & partout de la même largeur, de sorte que $rr = ff$, $q\gamma = g\omega$, & la force accélératrice de la gravité donnera $dV = 0$, d'où nous aurons :

$$\frac{h}{g\gamma} \left(d\varrho - \frac{\varrho d\gamma}{\gamma} \right) = -\gamma d\gamma, \text{ ou } \frac{h}{g\gamma} \left(\frac{\gamma d\varrho - \varrho d\gamma}{\gamma\gamma} \right) = -d\gamma,$$

dont l'intégrale est $\frac{h\varrho}{g\gamma\gamma} = \frac{h}{g\omega} + \omega - \gamma$, d'où l'on trouvera la vitesse γ ,

& de là la densité $q = \frac{g\omega}{\gamma}$, & enfin l'élasticité, ou la pression

$p = \frac{h\varrho\omega}{\gamma\gamma} = h + g\omega(\omega - \gamma)$. Si l'on prend l'unité pour

marquer la densité du mercure, h fera la hauteur du barometre en F ; donc, si la hauteur du barometre à l'autre bout du tuyau Z , qui est $= p$, est aussi connue, nous en tirerons :

$$\gamma = \frac{h\varrho\omega}{\gamma p} = \omega + \frac{h-p}{\gamma\omega}; \text{ \& } q = \frac{g\gamma p}{hr}.$$

Donc $\omega\omega = \frac{\gamma p (h-p)}{g(h\varrho - \gamma p)}$, d'où l'on connoitra le mouvement de l'air

par ce tuyau horizontal, qui se réduira à rien, à ce qu'on voit, lorsque $p = h$.

Fig. 3.

XXXI. Or, si nous concevons un tuyau horizontal AC ouvert par ses deux bouts A & C , & que la hauteur du barometre en $A = AB = h$, soit plus grande que celle en $B = CD = p$, l'air coulera sans cesse de A vers C . Que ab représente le degré de chaleur



leur en A & cd celui en C, & tandis que $\frac{AB}{ab} > \frac{CD}{cd}$, le mouvement de l'air par le tuyau atteindra un degré permanent; mais lorsque $\frac{AB}{ab} = \frac{CD}{cd}$, & à plus forte raison lorsque $\frac{AB}{ab} < \frac{CD}{cd}$, le mouvement ira toujours en accélérant, & deviendra de plus en plus rapide. Cela arrivera donc lorsqu'il fait beaucoup plus chaud en C, que le barometre est plus bas qu'en A, où il est plus haut. Mais, si la hauteur du barometre est la même de part & d'autre, l'air ne se mouvra pas par le tuyau, quoique la chaleur soit différente; ce qui cependant n'est pas contraire à ce que j'ai démontré, que l'atmosphère ne sauroit être en équilibre, à moins qu'à égales hauteurs la chaleur ne soit la même: car dans le présent cas l'équilibre est maintenu par la fermeté du tuyau.

XXXII. Sur le mouvement des fluides par des tuyaux infiniment étroits, on trouve encore des recherches particulieres, lorsque les tuyaux ne sont pas en repos, mais qu'ils sont tournés autour d'un axe. J'ai traité assés au long cette matiere en quelques Mémoires, que j'ai composés à l'occasion d'une machine hydraulique aussi ingénieuse que nouvelle, inventée par M. le Conseiller Privé de *Segner* à Halle. Quelque difficile & epineuse que puisse paroître cette recherche, elle peut être déduire assés aisément de mes formules generales, & même de celles, que j'ai déjà développées pour le mouvement des fluides par des tuyaux immobiles, en y introduisant la considération du mouvement, qu'on veut supposer dans le tuyau. Dans les Mémoires allégués je n'ai examiné que les cas, où le tuyau est tourné autour d'un axe fixe; mais, puisque le tuyau peut recevoir une infinité d'autres mouvemens, je m'en vais faire l'application à un mouvement quelconque du tuyau.

XXXIII. Ici il faut d'abord bien distinguer le mouvement relatif du fluide dans le tuyau, de son vrai mouvement; ce mouvement relatif s'estime de la même maniere, comme si le tuyau étoit en repos;



& le vray mouvement se trouve par la combinaison du mouvement relatif avec le mouvement du tuyau. De la même manière le vrai mouvement de chaque élément du fluide sera composé de son mouvement relatif & du mouvement du point du tuyau, où cette particule se trouve à chaque instant. Or les forces qui agissent sur le fluide se rapportent à son vrai mouvement, & point du tout à son mouvement relatif : cependant il est clair, que si le mouvement du tuyau étoit tel, que tous les points fussent portés avec des vitesses égales & uniformes suivant la même direction, ou que tout l'espace qui contient le tuyau, se mût uniformément selon la même direction, le vrai mouvement du fluide demanderoit les mêmes forces, que le mouvement relatif : ou bien le mouvement relatif subiroit les mêmes changemens que son mouvement véritable.

XXXIV. Ce n'est donc, qu'entant que les élémens du tuyau ne se meuvent pas uniformément, & selon la même direction, que le mouvement relatif du fluide est troublé, entant que le fluide ne reçoit pas les mêmes accélérations que le tuyau. D'où il s'ensuit que le mouvement relatif sera le même, que si le fluide étoit sollicité, outre les forces qui y agissent immédiatement, par des forces égales & contraires à celles dont le mouvement du tuyau est accéléré ou retardé. Pour rendre cela plus évident, on n'a qu'à considérer une portion de fluide dans un tuyau, & que le tuyau reçoive quelque accélération en avant, alors le fluide demeurera en arrière, & son état relatif dans le tuyau sera le même, que si le fluide étoit poussé en arrière par une accélération égale. Donc, pour déterminer le mouvement relatif du fluide dans un tuyau mobile, nous n'avons qu'à transporter sur le fluide les forces accélératrices qui agissent sur le tuyau, mais selon des directions opposées.

XXXV. Que le tuyau par un mouvement quelconque soit donc parvenu après le tems $= t$, dans la situation FZV, qu'au bout F, soit comme auparavant son amplitude $= ff$, la densité du fluide $= \phi$,
&

& la vitesse relative dans le tuyau $\equiv \omega$, & ces quantités ϕ & ω , feront des fonctions du tems, comme aussi les trois coordonnées $OD \equiv a$, $DE \equiv b$, & $EF \equiv c$, par lesquelles est déterminé le lieu du bout F au tems $\equiv t$. Qu'à un autre point quelconque Z déterminé par les trois coordonnées $OX \equiv x$, $XY \equiv y$, & $YZ \equiv z$, soit l'amplitude $\equiv rr$, la longueur du tuyau $FZ \equiv s$, & au même tems t , la densité du fluide en Z $\equiv q$, la vitesse relative dans le tuyau $\equiv v$, & la pression $\equiv p$. Donc, pour la continuité du fluide, qui se détermine également par le mouvement relatif, que par l'absolu, nous aurons cette équation : $rrq v \equiv ff\phi\omega - \int r r ds \left(\frac{dq}{dt} \right)$

pourvu qu'on étende l'intégrale $\int r r ds \left(\frac{dq}{dt} \right)$ par la partie FZ, de sorte qu'elle évanouisse en faisant $x \equiv a$, $y \equiv b$, & $z \equiv c$.

XXXVI. Soit l'élément du fluide en Z, sollicité par les trois forces accélératrices $ZP \equiv P$, $ZQ \equiv Q$, & $ZR \equiv R$, comme auparavant. Mais pour le mouvement du tuyau, quel qu'il soit, qu'on décompose le mouvement du point Z, selon les mêmes directions, dont les vitesses soient :

selon $ZP \equiv u$; selon $ZQ \equiv v$; & selon $ZR \equiv w$;

j'emploie ici les mêmes lettres u , v , w , qui me marquoient auparavant les vitesses du fluide, puisque dans ce sens elles ne sont plus dans le calcul, & qu'il n'y en a point à craindre de confusion. Or, puisque le tuyau est supposé rigide, & ne sauroit changer de figure pendant son mouvement, les trois vitesses doivent tenir un certain rapport aux coordonnées, & cette considération nous fournit les déterminations suivantes :

$u \equiv l + \zeta y - \eta z$; $v \equiv m + \theta z - \zeta x$; $w \equiv n + \eta x - \theta y$;

où les quantités l , m , n , ζ , η , θ , sont, ou constantes, ou des fonctions quelconques du tems t .



XXXVII. Pour obtenir maintenant les forces accélératrices du point Z du tuyau, il est évident que ces forces seront :

$$\text{felon } ZP = \frac{du}{dt}; \quad \text{felon } ZQ = \frac{dv}{dt}; \quad \text{felon } ZR = \frac{dw}{dt};$$

où du , dv , dw , marquent les changemens des vitesses pendant le tems dt ; or pendant ce tems les trois coordonnées x , y , z , qui se rapportent au point Z prennent les accroissemens $dx = u dt$, $dy = v dt$, & $dz = w dt$; d'où nous aurons :

$$du = dl + y d\zeta - z d\eta + \zeta v dt - \eta w dt$$

$$dv = dm + z d\theta - x d\zeta + \theta w dt - \zeta u dt$$

$$dw = dn + x d\eta - y d\theta + \eta u dt - \theta v dt,$$

& en substituant pour u , v , & w leurs valeurs, nous aurons :

$$\frac{du}{dt} = \frac{dl}{dt} + \frac{y d\zeta}{dt} - \frac{z d\eta}{dt} + \zeta m - \eta n - (\zeta\zeta + \eta\eta)x + \zeta\theta z + \eta\theta y$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{z d\theta}{dt} - \frac{x d\zeta}{dt} + \theta n - \zeta l - (\theta\theta + \zeta\zeta)y + \theta\eta x + \zeta\eta z$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dn}{dt} + \frac{x d\eta}{dt} - \frac{y d\theta}{dt} + \eta l - \theta m - (\eta\eta + \theta\theta)z + \eta\zeta y + \theta\zeta x.$$

XXXVIII. Ayant trouvé ces accélérations, nous n'aurons qu'à les soustraire des forces accélératrices P, Q, R, qui agissent immédiatement sur l'élément du fluide, qui se trouve en Z, & de là nous tirerons pour le mouvement relatif du fluide dans le tuyau mobile l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - \frac{du}{dt} dx - \frac{dv}{dt} dy - \frac{dw}{dt} dz - ds \left(\frac{ds}{dt} \right) - s ds,$$

où le tems t est supposé constant; & puisque la figure du tuyau est donnée, les trois variables x , y , z , seront déterminées par la seule s .

On n'a donc qu'à substituer pour $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, & $\frac{dw}{dt}$ les valeurs trouvées, & on aura les équations les plus générales pour le mouvement d'un fluide quelconque dans un tuyau agité d'un mouvement quelconque. Lorsqu'on veut que le tuyau tourne autour d'un axe fixe, ce n'est qu'un cas très particulier de l'hypothèse générale, suivant laquelle j'ai établi le mouvement du tuyau tel, qu'il s'étende absolument à tous les mouvemens possibles.

XXXIX. Pour faire voir l'usage de ces formules dans quelque cas plus particulier, supposons d'abord que le fluide soit incompressible, & que sa densité soit partout & toujours la même. Posons donc $\phi = g$, & $q = g$, & l'équation, qui renferme la continuité du fluide, sera $rrz = ff\omega$, donc $z = \frac{ff\omega}{rr}$, & $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{ff}{rr} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)$. Soit de plus $Pdx + Qdy + Rdz = dV$, & l'intégrale de notre équation différentielle sera :

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} = C + V - \left(\frac{d\omega}{dt}\right) \int \frac{ffds}{rr} - \frac{f^4\omega^2}{2r^4} - \frac{xdl}{dt} - \frac{ydm}{dt} - \frac{zdn}{dt} \\ + \frac{d\zeta}{dt} \int (ydx - xdy) + \frac{d\theta}{dt} \int (zdy - ydz) + \frac{d\eta}{dt} \int (xdz - zdx) \\ + (\zeta m - \eta m)x + (\theta n - \zeta l)y + (\eta l - \theta m)z \\ - \frac{1}{2}(\zeta\zeta + \eta\eta)xx - \frac{1}{2}(\theta\theta + \zeta\zeta)yy - \frac{1}{2}(\eta\eta + \theta\theta)zz \\ + \zeta\theta xz + \zeta\eta xy + \eta\zeta yz, \end{aligned}$$

où puisque le tems est supposé constant, il faut prendre les intégrales $\int (ydx - xdy)$ &c. de la position du tuyau à chaque instant.

* XL. Puisque ce cas est encore trop général, supposons que le tuyau tourne autour de l'axe OC, en sorte qu'après le tems = t , la vitesse de rotation à la distance = r soit = v , & la vitesse de rotation du point Z, dont la distance à l'axe OC est = $V(xx + yy)$,

fera $= \frac{v}{e} V (xx + yy)$, d'où nous tirerons les vitesses dérivées

$u = \frac{vy}{e}$, $v = -\frac{vx}{e}$, & $w = 0$; de sorte que pour ce cas on aura :

$$l = 0; m = 0; n = 0; \zeta = \frac{v}{e}; \eta = 0; \theta = 0;$$

& partant nous aurons pour le mouvement relatif du fluide dans ce tuyau cette équation :

$$\frac{p}{g} = C + V - \left(\frac{dw}{dt}\right) \int \frac{ffds}{rr} - \frac{f^4 w^2}{2r^4} + \frac{dv}{edt} \int (ydx - xdy) - \frac{vv}{2ee} (xx + yy),$$

où la constante peut encore renfermer le tems t d'une manière quelconque.

XLI. Considérons la position initiale du tuyau, où le lieu du point Z ait été exprimé par les trois coordonnées X, Y, Z , & pendant le tems t le point Z ou Y aura décrit autour de l'axe OC un angle ψ , de sorte que $d\psi = \frac{vdt}{e}$, & $\psi = \int \frac{vdt}{e}$, d'où après le tems t , les coordonnées pour le point Z seront :

$$x = X \cos \psi - Y \sin \psi; y = X \sin \psi + Y \cos \psi; z = Z;$$

& partant $xx + yy = XX + YY$. De plus à cause de

$$dx = dX \cos \psi - dY \sin \psi; \text{ \& } dy = dX \sin \psi + dY \cos \psi,$$

nous aurons : $ydx - xdy = YdX - XdY$.

Donc, par l'équation pour la figure & situation du tuyau au commencement, nous aurons :

$$\frac{p}{g} = C + V - \left(\frac{dw}{dt}\right) \int \frac{ffds}{rr} - \frac{f^4 w^2}{2r^4} + \frac{dv}{edt} \int (YdX - XdY) - \frac{vv}{2ee} (XX + YY),$$

XLII. On peut rapporter ici encore une autre question de la dernière importance en plusieurs occasions, qui roule sur la force de réaction que le vaisseau soutient des pressions du fluide, qui y est contenu. Comme cette réaction est le résultat de toutes les pressions du fluide sur les parois du vaisseau, on la pourroit déduire de l'expression générale, qui donne la pression du fluide en chaque endroit : or cette détermination deviendroit souvent trop épineuse, & même impraticable. Mais j'ai exposé ailleurs une autre méthode fort simple pour arriver à ce but, qui est fondée sur cette belle propriété, que la réaction sur le vaisseau est égale à la somme de toutes les forces, qui agissent sur le fluide, moins celles qui sont requises à maintenir son mouvement. De là si u, v, w , marquent les trois vitesses du vray mouvement du fluide en Z , puisque l'élément de la masse y est $= q r r d s$, la réaction qui résulte de cet élément se réduira à ces trois forces :

$$\begin{aligned} \text{felon } ZP &= q r r d s \left(P - \left(\frac{d u}{d t} \right) \right); \text{ felon } ZQ = q r r d s \left(Q - \left(\frac{d v}{d t} \right) \right) \\ &\& \text{ felon } ZR = q r r d s \left(R - \left(\frac{d w}{d t} \right) \right). \end{aligned}$$

XLIII. On peut de même résoudre la question en général, lorsqu'on demande les forces, qu'un vaisseau quelconque soutient du fluide, qui s'y trouve agité d'une manière quelconque. Car d'abord le vaisseau soutient les forces externes, qui agissent par le moyen des pistons sur le fluide; ensuite le vaisseau soutiendra aussi de la part de chaque élément du fluide en Z , dont la masse peut être représentée par $q d x d y d z$, & que j'appellerai $= d M$, de certaines forces, qui se réduisent à trois, suivant les directions ZP, ZQ & ZR , & ces forces élémentaires seront

$$\begin{aligned} \text{felon } ZP &= d M \left(P - \left(\frac{d u}{d t} \right) \right); \text{ felon } ZQ = d M \left(Q - \left(\frac{d v}{d t} \right) \right) \\ &\& \text{ felon } ZR = d M \left(R - \left(\frac{d w}{d t} \right) \right). \end{aligned}$$

Fig. 1.



On n'a donc qu'à prendre les intégrales de ces formules, & les étendre par toute la masse fluide contenue dans le vaisseau, pour avoir conjointement avec les forces des pistons la force totale de la réaction.

XLIV. J'ai déjà remarqué que presque tous les cas du mouvement des fluides, qu'on a traités jusqu'ici, se réduisent à celui d'un tuyau infiniment étroit, que je viens de développer. Outre celui-là on n'en trouve guères, qu'on ait considéré. Or, pour y arriver il faut très considérablement limiter nos équations générales. Car d'abord il faut supposer le fluide incompressible, ou sa densité q constante, tant par rapport au tems qu'au lieu; posons donc $q = g$. Ensuite il faut supposer le mouvement du fluide permanent, ou tel qu'au même endroit les trois vitesses u , v , w , avec la pression p , demeurent toujours les mêmes, quoiqu'il passe continuellement d'autres élémens du fluide par le même point: de sorte que $\left(\frac{du}{dt}\right) = 0$, $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$, & $\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0$. Le tems n'entrera donc plus en considération, & toutes les quantités que nous aurons à déterminer, ne feront que des fonctions des trois variables x , y , & z ; ce sont les trois vitesses u , v , w , avec la hauteur p , qui expriment la pression dans chaque point Z.

XLV. Nous aurons donc pour les quantités X, Y, & Z, les valeurs suivantes :

$$X = u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{du}{dy}\right) + w \left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Y = u \left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$Z = u \left(\frac{dw}{dx}\right) + v \left(\frac{dw}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right),$$

& nos deux équations, qui renferment le mouvement du fluide, seront :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz - X dx - Y dy - Z dz,$$

$$\& \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

Donc, la première équation devant être intégrable, il faut qu'il soit

$$\left(\frac{dP-dX}{dy}\right) = \left(\frac{dQ-dY}{dx}\right); \left(\frac{dP-dX}{dz}\right) = \left(\frac{dR-dZ}{dx}\right); \left(\frac{dQ-dY}{dz}\right) = \left(\frac{dR-dZ}{dy}\right)$$

Or si les forces, dont le fluide est sollicité, sont réelles, la partie $P dx + Q dy + R dz$ est toujours intégrable d'elle-même, & l'intégrale que j'indique par V , marque l'effort des forces sollicitantes.

XLVI. Or, puisque le mouvement du fluide est supposé permanent, toutes les particules, qui passent successivement par le point Z , décriront la même route. Ou si nous concevons dans le fluide une section fixe BOC , toutes les particules qui passent par le même point F de cette section, se mouvront selon la même ligne FZV . Introduisons donc cette ligne FZV dans le calcul; & soient pour le point F les coordonnées $OE = b$ & $EF = c$, qui sont constantes pour la même courbe FZV , mais variables de toutes les manières possibles pour des courbes différentes. Pour un point quelconque Z de cette courbe soient les trois coordonnées $OX = x$; $XY = y$ & $YZ = z$, & la nature de cette courbe sera exprimée par deux équations entre x , y , & z qui renfermeront outre cela les deux constantes b & c , comme les paramètres; d'où l'on pourra déterminer l'une & l'autre séparément par les trois coordonnées x , y & z . Soient donc les formules différentielles, qui en résultent :

$$db = L dx + M dy + N dz \quad \& \quad dc = l dx + m dy + n dz$$

où L, M, N, l, m, n , seront des fonctions des seules coordonnées x, y, z .

Fig. 2.



XLVII. Puisque la particule en Z se meut suivant la direction de la courbe Zz , ses trois vitesses u , v , & w , tiendront entr'elles le même rapport, que les différentiels dx , dy & dz , entant qu'ils regardent la même courbe. Or, ayant dans ce cas $db = 0$ & $dc = 0$, nous aurons :

$$Lndx + Mndy = Nldx + Nm dy; \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{Ln - Nl}{Nm - Mn}$$

$$Lmdx + Nmdz = Mldx + Mn dz; \text{ ou } \frac{dz}{dx} = -\frac{Lm + Ml}{Nm - Mn}$$

d'où nous tirons :

$$dx : dy : dz = Nm - Mn : Ln - Nl : Ml - Lm$$

Pofons donc :

$$u = K(Nm - Mn); v = K(Ln - Nl); w = K(Ml - Lm)$$

où il est encore incertain, si le facteur commun K dépend uniquement des quantités constantes b & c , ou outre cela encore des coordonnées x , y & z , ce qu'il faut décider par l'équation tirée de la continuité du fluide.

XLVIII. Mais, pour avoir la valeur de $\left(\frac{du}{dx}\right)$, il faut regarder la seule x comme variable, & les deux autres y & z comme constantes, d'où cette considération s'étend sur les courbes voisines, & suppose par conséquent variables les quantités b & c ; d'où nous aurons $db = Ldx$ & $dc = ldx$. Or nous verrons bientôt que le facteur K doit être une fonction de b & c . Soit donc :

$$dK = Bdb + Cdc$$

& puisque les autres quantités L, M, N , & l, m, n dépendent uniquement des trois coordonnées x, y & z , nous aurons :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = (BL + Cl)(Nm - Mn) + K \left(N \left(\frac{dm}{dx}\right) + m \left(\frac{dN}{dx}\right) - M \left(\frac{dn}{dx}\right) - n \left(\frac{dM}{dx}\right) \right)$$

De



De la même manière on trouvera :

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = (BM + Cn)(Ln - Nl) + K \left(L \left(\frac{dn}{dy}\right) + n \left(\frac{dL}{dy}\right) - N \left(\frac{dl}{dy}\right) - l \left(\frac{dN}{dy}\right) \right)$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = (BN + Cm)(Ml - Lm) + K \left(M \left(\frac{dl}{dz}\right) + l \left(\frac{dM}{dz}\right) - L \left(\frac{dm}{dz}\right) - m \left(\frac{dL}{dz}\right) \right)$$

& la somme de ces trois formules doit être égale à zero.

XLIX. Or la somme des trois premiers membres se détruit visiblement ; & pour les derniers membres, si nous considérons, que les formules différentielles $Ldx + Mdy + Ndz$ & $ldx + mdy + ndz$ doivent être intégrables, on aura :

$$\left(\frac{dm}{dx}\right) = \left(\frac{dl}{dy}\right) ; \left(\frac{dn}{dx}\right) = \left(\frac{dl}{dz}\right) ; \left(\frac{dn}{dy}\right) = \left(\frac{dm}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dL}{dy}\right) ; \left(\frac{dN}{dx}\right) = \left(\frac{dL}{dz}\right) ; \left(\frac{dN}{dy}\right) = \left(\frac{dM}{dz}\right),$$

& partant les trois derniers membres se détruisent aussi d'eux mêmes. D'où je conclus que K est uniquement fonction de b & c , comme j'ai supposé. Car si l'on croyoit, que K pût aussi renfermer $x, y, & z$, je remarque d'abord, que par le moyen des deux équations entre b, c, x, y, z , on en pourroit éliminer deux, de sorte que K ne seroit fonction que de b, c , & d'une des trois x, y, z . Or si s'étoit x , on auroit outre les termes qui se détruisent encore $\left(\frac{dK}{dx}\right)(Nm - Ml)$,

& ainsi des deux autres, d'où il est évident, que K doit uniquement dépendre des deux quantités b & c .

L. Prenant donc pour K une fonction quelconque de b & c , nous avons déjà des valeurs générales pour les trois vitesses :

$$u = K(Nm - Ml) ; v = K(Ln - Nl) ; w = K(Ml - Lm)$$

qui



qui satisfont à la formule, que la continuité du fluide nous a fournie. Mais pour l'autre équation différentielle, je remarque que si l'on considérait la seule x comme variable, & qu'on intégrât la formule, on trouveroit la vraie intégrale, pourvu qu'on fit entrer les deux autres variables y & z dans la constante, que l'intégration entraîne. Dans ce cas on opéreroit de la même manière, comme si l'on vouloit seulement chercher la pression pour les endroits, où y & z sont de même valeur, ou qu'on voulut chercher la pression pour une ligne droite parallèle à l'axe OA . De la même manière on pourroit trouver l'intégrale, en supposant x & y , ou x & z , constantes, ou en général pour une ligne quelconque, qu'on conçoit tirée par le fluide.

LI. En conséquence de cela nous pourrons aussi trouver l'intégrale, en ne considérant que la seule ligne FZV , ou en regardant les quantités b & c comme constantes. Or, puisque alors les quantités y & z dépendent de x , si la variabilité de la seule x donne $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv}{dx}\right)$, $\left(\frac{dw}{dx}\right)$, les formules $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ &c. deviendront nulles; d'où nous tirons:

$$Xdx + Ydy + Zdz = udx \left(\frac{du}{dx}\right) + vdy \left(\frac{dv}{dx}\right) + wdz \left(\frac{dw}{dx}\right).$$

Mais dans ce cas ayant $u : v : w = dx : dy : dz$, & partant $udy = vdx$ & $wdz = wdx$, cette formule devient

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz &= udx \left(\frac{du}{dx}\right) + vdx \left(\frac{dv}{dx}\right) + wdx \left(\frac{dw}{dx}\right) \\ &= dx \left(\frac{u du + v dv + w dw}{dx}\right) = dx \left(\frac{\varepsilon d\varepsilon}{dx}\right), \end{aligned}$$

si nous prenons ε pour marquer la vitesse vraie du fluide en Z . Donc, si nous posons $Pdx + Qdy + Rdz = dV$, l'intégrale de notre

équation différentielle fera $\frac{P}{g} = V - \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon + D$,

où D est une certaine fonction des quantités b & c .



LII. Cette même intégrale se trouve aussi, sans que nous négligions les formules $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ &c. pourvu que nous remarquions que pour les vitesses du fluide dans la ligne FZV il y a

$$u dy = v dx; \quad u dz = w dx \quad \& \quad v dz = w dy$$

Car alors la formule $X dx + Y dy + Z dz$ se change en celle-cy :

$$u dx \left(\frac{du}{dx}\right) + u dy \left(\frac{du}{dy}\right) + u dz \left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$v dx \left(\frac{dv}{dx}\right) + v dy \left(\frac{dv}{dy}\right) + v dz \left(\frac{dv}{dz}\right) = u dx \left(\frac{d u}{dx}\right) + u dy \left(\frac{d u}{dy}\right) + u dz \left(\frac{d u}{dz}\right)$$

$$w dx \left(\frac{dw}{dx}\right) + w dy \left(\frac{dw}{dy}\right) + w dz \left(\frac{dw}{dz}\right),$$

dont l'intégrale est évidemment $\frac{1}{2} u u$: & nous aurons comme

$$\text{cy-dessus : } \frac{P}{g} = V - \frac{1}{2} u u + D.$$

Or, puisque nous avons ici traité comme constantes les quantités u &c, la constante D renfermera ces quantités.

LIII. Donc, pour la même ligne courbe FZV, puisque la valeur de D est constante, nous pourrons comparer entr'elles les pressions du fluide dans tous les points de cette ligne, de sorte que si nous savions la pression dans un seul point, nous en pourrions conclure la pression dans tous les autres. Car d'abord nous avons pour chaque point la valeur de V, & la figure de la ligne FZV nous donne à connoître par les équationis $L dx + M dy + N dz = 0$ & $l dx + m dy + n dz = 0$ les trois vitesses u, v, w , d'où nous tirons :

$$u u = K K \left\{ \begin{array}{l} LL(mm + nn) + MM(ll + nn) + NN(ll + mm) \\ - 2 LM lm - 2 LN ln - 2 MN mn \end{array} \right\}$$



où K est aussi une quantité constante par toute l'étendue de la courbe FZV , & $\frac{1}{2} g g$ indique, comme j'ai déjà remarqué la hauteur due à la vitesse g , ou celle de laquelle un grave tombant acquiert la même vitesse g .

LIV. L'équation trouvée $\frac{P}{g} = V - \frac{1}{2} g g + D$ fera donc la véritable intégrale de notre équation différentielle, pourvu qu'on assigne à D la juste valeur qui lui convient. Ou bien cette fonction de b & c doit être telle, qu'en différenciant l'équation trouvée, en supposant aussi b & c variables, on parvienne précisément à notre équation différentielle. Donc il faut qu'il soit $g dx - dD = X dx + Y dy + Z dz$; ce qui donne

$$\begin{aligned} & (udy - vdx) \left(\frac{du}{dy} \right) + (udz - wdx) \left(\frac{du}{dz} \right) \\ dD = & (vdy - udy) \left(\frac{dv}{dx} \right) + (vdz - wdy) \left(\frac{dv}{dz} \right) \\ & + (wdx - udz) \left(\frac{dw}{dx} \right) + (wdy - vdz) \left(\frac{dw}{dy} \right), \\ & \text{ou bien :} \\ dD = & (udy - vdx) \left(\left(\frac{du}{dy} \right) - \left(\frac{dv}{dx} \right) \right) + (vdz - wdy) \left(\left(\frac{dv}{dz} \right) - \left(\frac{dw}{dy} \right) \right) \\ & + (wdx - udz) \left(\left(\frac{dw}{dx} \right) - \left(\frac{du}{dz} \right) \right). \end{aligned}$$

LV. Puisque D est fonction de b & c , posons $dD = E db + F dc$, & remettant pour db & dc leurs valeurs, nous aurons :

$$dD = (EL + Fl) dx + (EM + Fm) dy + (EN + Fn) dz$$

ce différentiel devant être égal à celui que nous venons de trouver, nous en tirerons les trois égalités suivantes :



$$EL + Fl = v \left(\frac{dv}{dx} \right) - v \left(\frac{du}{dy} \right) + w \left(\frac{dw}{dx} \right) - w \left(\frac{du}{dz} \right)$$

$$EM + Fm = w \left(\frac{dw}{dy} \right) - w \left(\frac{dv}{dy} \right) + u \left(\frac{du}{dy} \right) - u \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

$$EN + Fn = u \left(\frac{du}{dz} \right) - u \left(\frac{dw}{dx} \right) + v \left(\frac{dv}{dz} \right) - v \left(\frac{dw}{dy} \right)$$

Ces trois égalités, en les combinant ensemble, & remarquant que

$$Lu + Mv + Nw = 0 \quad \& \quad lu + mv + nw = 0$$

nous les réduisons à ces deux :

$$\frac{E}{K} = l \left(\frac{dw}{dy} \right) - l \left(\frac{dv}{dz} \right) + m \left(\frac{du}{dz} \right) - m \left(\frac{dw}{dx} \right) + n \left(\frac{dv}{dx} \right) - n \left(\frac{du}{dy} \right)$$

$$\frac{F}{K} = L \left(\frac{dw}{dy} \right) - L \left(\frac{dv}{dz} \right) + M \left(\frac{du}{dz} \right) - M \left(\frac{dw}{dx} \right) + N \left(\frac{dv}{dx} \right) - N \left(\frac{du}{dy} \right)$$

LVI. Puisque E, F, & K, sont des fonctions de b & c , il faut que ces deux formules soient telles, qu'en substituant pour $\left(\frac{du}{dy} \right)$, $\left(\frac{du}{dz} \right)$ &c. leurs valeurs, elles deviennent réductibles aux deux seules quantités b & c : c'est à dire, que par le moyen des deux équations entre x, y, z , & b, c , les trois quantités x, y & z en puissent entièrement être éliminées. Donc, pour que cela arrive, il faut que la fonction K obtienne une certaine détermination. Ensuite il faut de plus, que ces deux quantités ou fonctions de b & c soient telles, que la formule $Edb + Fdc$ devienne intégrable: & de là on tirera la juste détermination de la quantité D, & par conséquent celle de la pression p . De là on comprend aussi que les deux équations entre x, y, z & b, c ne dependent pas entièrement de notre volonté, mais qu'elles exigent certaines conditions, pour que le cas soit possible.



LVII. Un cas particulier, qui mérite notre attention, est lorsque chaque particule du fluide tourne autour de l'axe OC, de sorte que toutes les lignes FZV font des cercles décrits autour de l'axe OC. Nous aurons donc, puisque tous ces cercles font en des plans parallèles au plan AOB, $YZ = z = c$, & $xx + yy = bb$; d'où

nous tirons $db = \frac{x dx + y dy}{V(xx + yy)}$ & $dc = dz$ & partant :

$$L = \frac{x}{V(xx + yy)}; M = \frac{y}{V(xx + yy)}, N = 0; l = 0; m = 0; n = 1.$$

Donc les vitesses seront :

$$u = - \frac{Ky}{V(xx + yy)}; v = \frac{Kx}{V(xx + yy)} \text{ \& } w = 0$$

& la vitesse vraie $s = V(uu + vv + ww) = K$ D'où l'on voit que, par toute la périphérie du même cercle, la vitesse est la même, ou que chaque élément du fluide se meut d'un mouvement uniforme autour de l'axe OC, dont la vitesse $s = K$ est une fonction, tant de la hauteur du cercle $EF = c$ que de son rayon $OE = b$.

LVIII. La pression du fluide, qui tourne de cette façon autour de l'axe OC, fera donc en chaque point Z; $\frac{P}{g} = V - \frac{1}{2}KK + D$ où la quantité D doit être une certaine fonction de b & c , en sorte que

$$dD = (udy - vdx) \left(\left(\frac{du}{dy} \right) - \left(\frac{dv}{dx} \right) \right) + vdz \left(\frac{dv}{dz} \right) + ndz \left(\frac{du}{dz} \right).$$

Or $udy - vdx = - \frac{Kydy - Kxdx}{V(xx + yy)} = -Kdb$, & $dz = dc$, de plus

posant $dK = Bdb + Cdc = \frac{Bxdx + Bydy}{V(xx + yy)} + Cdz$, nous aurons :

$$\left(\frac{du}{dy} \right)$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{Kxx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Byy}{xx+yy} \quad \& \quad \left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{Kyy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Bxx}{xx+yy}$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = \frac{Cx}{V(xx+yy)} \quad \& \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = -\frac{Cy}{V(xx+yy)}$$

Ces valeurs étant substituées donnent, à cause de $b = V(xx + yy)$

$$dD = \frac{KKdb}{b} + BKdb + CKdc = \frac{KKdb}{b} + KdK$$

Cette formule devant être intégrable, il faut que K foit une fonction quelconque de b seulement, sans renfermer la hauteur $EF = c$.

LIX. Donc la vitesse par chaque cercle décrit autour de l'axe OC dépend uniquement du rayon de ce cercle ; prenant donc pour K une fonction quelconque du rayon OE = b , nous aurons $D = \int \frac{K^2 db}{b} + \frac{1}{2} KK$; & partant pour la pression nous aurons cette équation :

$$\frac{p}{g} = V + \int \frac{K^2 db}{b}$$

Les limites, ou la surface suprême de cette masse fluide fera là, où la pression p évanouit, c'est à dire, où il y aura : $V + \int \frac{K^2 db}{b} = 0$.

Sous cette surface le fluide se trouvera dans tout l'espace, où la pression p se trouve positive. On voit bien que cette surface sera engendrée par la rotation d'une certaine courbe autour de l'axe OC, & la nature de cette courbe fera exprimée par l'équation $V + \int \frac{KKdb}{b} = 0$.

Or cette même équation, en changeant les constantes, exprime toutes les autres surfaces, où la pression est la même, qu'on appelle les surfaces de niveau.



Fig. 5. LX. Soit AZC la génératrice d'une telle surface de niveau, & qu'on pose $OP = x$, $PZ = y$ & $OZ = z$, de sorte que y marque le rayon du cercle décrit par le point Z autour de l'axe OC ; & soit v la vitesse de ce point, & une fonction quelconque du rayon $PZ = y$. Que le point Z soit attiré au centre O par une force accélératrice Z , qui soit une fonction quelconque de la distance $OZ = z$, & on aura pour la nature de la courbe AZC cette équation

$$- \int Z dz + \int \frac{v v dy}{y} = 0.$$

Soit, par exemple, $Z = a z^m$ & $v = \xi y^n$, & notre équation sera $\frac{\xi \xi y^{2n}}{2n} = \frac{a z^{m+1} - a a^{m+1}}{m+1}$, en posant le demi-axe $OC = a$, & de là le demi-diamètre de l'équateur OA , qui soit $OA = e$, sera déterminé par cette équation :

$$\frac{(m+1)\xi\xi}{2an} e^{2n} = e^{m+1} - a^{m+1}$$

ou bien, sachant le demi-diamètre de l'équateur $OA = e$, le demi-axe

fera : $a = \sqrt[m+1]{e^{m+1} - \frac{(m+1)\xi\xi}{2an} e^{2n}}$ & si la différence est

fort petite, on aura $a = e - \frac{\xi\xi}{2an} e^{2n-m}$.

Fig. 6. LXI. Considérons aussi un fluide qui tourne dans un vaisseau cylindrique $A E F B$, autour de son axe OC , qui soit vertical, & que le fluide n'essuye d'autres forces que celle de la gravité. La plus haute surface ACB sera donc concave; & pour en trouver la nature, posons $OP = z$ & $PZ = y$, & la vitesse rotatoire du point Z , qui soit v , soit une fonction quelconque du rayon $PZ = y$. L'effort de la gravité $= r$, agissant dans la direction verticale sera $= f - dz = -z$, d'où l'équation pour la courbe CZA sera :

$\int \frac{z z dy}{y} = z - a$. Donc, si la vitesse est proportionnelle à la distance de l'axe y , ou qu'il soit $z = \frac{y}{\sqrt{c}}$, l'équation sera $yy = 2c(z-a)$: & partant la courbe ACB sera une parabole dont le sommet est en C , & le parametre $= 2c$. Il est évident que les solutions de ces cas sont les mêmes, que celles qu'on a trouvées par les methodes ordinaires.

LXXII. Passons à des cas un peu plus compliqués, & supposons que chaque courbe FZV se trouve toute dans un plan parallele au plan AOB , & que le mouvement par tous les plans paralleles au plan AOB soit le même. On aura donc pour la courbe FZV , premièrement $z = c$, & ensuite une équation entre les deux coordonnées x, y , & le parametre $OE = b$, qui sera indépendante de la hauteur $EF = c$; de cette équation on pourra donc définir b par x & y , d'où nos deux équations différentielles pour toutes les courbes FZV feront :

Fig. 2.

$$db = Ldx + Mdy \quad \& \quad dc = dz$$

de sorte que $N = 0$, $l = 0$, $m = 0$, & $n = 1$. Donc les trois vitesses du point Z seront :

$$u = -KM; \quad v = KL \quad \& \quad w = 0.$$

D'où, si nous posons $dK = Bdb + Cdc = BLdx + BMdy + Cdz$, nous aurons :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -BLM - K\left(\frac{dM}{dx}\right); \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = -BM^2 - K\left(\frac{dM}{dy}\right); \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = -CM$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = +BL^2 + K\left(\frac{dL}{dx}\right); \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = BLM + K\left(\frac{dL}{dy}\right); \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = CL.$$

LXIII. Ces valeurs fournissent les formules suivantes :

$$X = K^2 \left(M \left(\frac{dM}{dx} \right) - L \left(\frac{dM}{dy} \right) \right)$$

$$Y = K^2 \left(L \left(\frac{dL}{dy} \right) - M \left(\frac{dL}{dx} \right) \right)$$

& $Z = 0 :$

D'où à cause de $\left(\frac{dL}{dy} \right) = \left(\frac{dM}{dx} \right)$ nous aurons :

$$Xdx + Ydy + Zdz = K^2 \left(Mdx \left(\frac{dM}{dx} \right) - Ldx \left(\frac{dM}{dy} \right) + Ldy \left(\frac{dL}{dy} \right) - Mdy \left(\frac{dL}{dx} \right) \right)$$

Ou bien posant la vraie vitesse $V(uu + vv + ww) = g$, la pression sera exprimée par cette formule $\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2} g g + D$, où D est une telle fonction de b & c , que

$$dD = K db \left(B(L^2 + M^2) + K \left(\frac{dL}{dx} \right) + K \left(\frac{dM}{dy} \right) \right) + CK(LL + MM) dc$$

Or $B db + C dc = dK$; donc

$$dD = K dK (LL + MM) + KK db \left(\left(\frac{dL}{dx} \right) + \left(\frac{dM}{dy} \right) \right)$$

& partant il faut, que les quantités x & y se puissent entièrement éliminer de cette formule, par la relation donnée entre x , y & b .

LXIV. Dans le cas du cercle il est arrivé, que les quantités $LL + MM$ & $\left(\frac{dL}{dx} \right) + \left(\frac{dM}{dy} \right)$ sont devenues réductibles à la seule quantité b : mais, si l'on prend d'autres lignes courbes, on s'apercevra bientôt, que cette réduction ne sauroit avoir lieu que très rarement. Et il semble que ce soit un des plus difficiles problèmes, de trouver telles équations entre x , y & b , que la valeur trouvée pour dD puisse entièrement être délivrée des quantités x & y par le moyen



moyen de l'équation supposée. Or si cela arrive ou non? on s'assurera en sorte: Ayant trouvé l'expression différentielle de dD , on substituera pour y sa valeur par b & x ; ensuite on verra s'il est possible de poser pour K une telle fonction de b , que tous les termes, qui contiennent encore x , se détruisent tout à fait: quand cela réussit, on aura dD exprimé par une fonction de b multipliée par db , d'où l'on obtiendra enfin aisément l'intégrale.

LXV. Quelque difficile qu'il soit de résoudre cette équation, ou de lui satisfaire par des formules particulières, on en peut trouver une infinité par une supposition heureuse, qui rend d'abord l'équation différentielle intégrable, au lieu que j'ai commencé ici par satisfaire à l'équation tirée de la continuité. J'ai déjà remarqué que notre équation différentielle devient intégrable, en prenant pour les trois vitesses u, v, w , telles fonctions de x, y, z , que la formule $u dx + v dy + w dz$ admette l'intégration, ce qui se peut faire par une infinité de manières différentes: car on n'a qu'à prendre à volonté une fonction quelconque de x, y, z , la différentier, & choisir les coefficients de dx, dy , & dz , pour les valeurs de u, v , & w . Mais il faut bien prendre garde, qu'on ne donne cette solution pour générale, vû qu'il y a une infinité de mouvemens possibles, où la formule $u dx + v dy + w dz$, n'est pas intégrable. Cependant cette supposition est très propre à nous fournir une infinité de solutions particulières, auxquelles on ne sauroit parvenir par la méthode que je viens d'expliquer.

LXVI. Soit donc comme jusqu'ici le fluide incompressible, & sa densité partout & toujours la même $g = g$: & que de plus le mouvement se trouve dans un état permanent, de sorte que le tems n'entre point en considération. Pour ce cas j'ai donné cy-dessus (45) les deux équations, qui renferment les conditions du mouvement. Supposons de plus que la formule $P dx + Q dy + R dz$, tirée des forces accélératrices, soit intégrable, l'intégrale étant $= V$ qui exprime l'effort de ces forces. Cela posé;



Soit la formule $u dx + v dy + w dz$ intégrable,

& à cause de $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$; $\left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)$; $\left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right)$

nous aurons :

$$X = u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dx}\right) + w \left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$Y = u \left(\frac{du}{dy}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right)$$

$$Z = u \left(\frac{du}{dz}\right) + v \left(\frac{dv}{dz}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right),$$

donc $X dx + Y dy + Z dz = u du + v dv + w dw$.

LXVII. Posant donc la vitesse véritable

$$\text{en } Z = \mathfrak{s} = V (u u + v v + w w)$$

l'intégrale de notre équation différentielle fera :

$$\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2} \mathfrak{s} \mathfrak{s} + C,$$

où C est une telle constante, qui demeure partout & toujours la même. Et de là on reconnoit d'abord, que cette solution n'est que particulière, vû que nous avons déjà eu des cas, où la pression p n'étoit pas définie par cette forme. Car, si nous comparons cette expression avec l'in-

tégrale générale trouvée ci-dessus $\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2} \mathfrak{s} \mathfrak{s} + D$, nous

voyons que l'hypothèse présente n'est que ce cas particulier, où D devient égal à une quantité constante, au lieu qu'en général la quantité D étoit variable par rapport aux courbes différentes, que les particules du fluide parcourent, quoique pour la même courbe D demeure invariable.

LXVIII.



LXVIII. Cela est aussi évident par l'expression différentielle, qui a été trouvée cy-dessus (54) pour la valeur de dD , qui évanouit ouvertement lorsque $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$; $\left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right)$; $\left(\frac{dw}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dz}\right)$ & ce sont les conditions de l'intégrabilité de la formule : $u dx + v dy + w dz$, de sorte que dans ce cas la quantité D devient en effet constante. Donc, puisque en général elle peut avoir une valeur variable, on se tromperoit fort, si l'on s'imaginait que l'intégrabilité de la formule $u dx + v dy + w dz$ fût une condition absolument nécessaire pour tous les mouvemens des fluides. Mais cette hypothèse ne satisfait qu'à l'équation différentielle, & il reste encore à remplir la condition de la continuité contenuë dans cette formule :

$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$. Et partant il s'agit de trouver telles expressions pour u , v , & w , qu'il soit :

I. $u dx + v dy + w dz$ intégrable : & II. $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$, & alors on aura pour l'état de pression du fluide cette équation :

$$\frac{P}{g} = V - \frac{1}{2} \vartheta \vartheta + C.$$

LXIX. Pourfuivons d'abord le cas, où chaque particule du fluide acheve son mouvement dans le même plan, auquel l'axe OC soit perpendiculaire, ou ce qui revient au même, que toute la masse du fluide soit réduite au plan AOB , auquel se fasse aussi le mouvement. Or c'est à ce cas principalement, que se sont attachés ceux qui ont examiné plus soigneusement le mouvement des fluides. Donc, puisque dans ce cas la vitesse w est nulle, notre hypothèse exige de telles valeurs pour les deux autres vitesses u & v , qu'il soit :

I. $u dx + v dy$ intégrable, & II. $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$, & alors on aura pour la pression p , l'équation suivante :

$$\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2} \vartheta \vartheta + C,$$



prenant u pour la vraie vitesse de chaque particule, ou $\frac{1}{2} u u$, pour la hauteur due à cette vitesse, de sorte que $u u = u u + v v$. Mais il ne faut pas penser, que ces deux conditions renferment tous les mouvemens possibles dans le même plan; car il y a en effet des mouvemens, où la formule $u dx + v dy$ n'est pas intégrable.

LXX. Or on satisfait à la formule $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$, en rendant ce différentiel $u dy - v dx$ intégrable. Il faut donc que ces deux formules $u dx + v dy$ & $u dy - v dx$ soient intégrables, ce qu'on obtient par la méthode fort ingénieuse de M. d'Alembert. Car, puisqu'il faut que la première, plus la seconde multipliée par $\sqrt{-1}$, soit aussi intégrable, on aura :

$u(dx + dy\sqrt{-1}) + \frac{v}{\sqrt{-1}}(dx + dy\sqrt{-1})$, à rendre intégrable.

Et prenant $\sqrt{-1}$ aussi négatif, il faut que ces deux formules :

$\left(u + \frac{v}{\sqrt{-1}}\right)(dx + dy\sqrt{-1})$ & $\left(u - \frac{v}{\sqrt{-1}}\right)(dx - dy\sqrt{-1})$,

soient intégrables; auxquelles conditions on satisfait en prenant pour

$u + \frac{v}{\sqrt{-1}}$ une fonction quelconque de $x + y\sqrt{-1}$, & pour

$u - \frac{v}{\sqrt{-1}}$ une fonction quelconque de $x - y\sqrt{-1}$. Or il faut

prendre de telles fonctions, que les deux valeurs de u & v deviennent réelles, & que les imaginaires soient détruites.

LXXI. Prenons les ϕ & ψ pour marques des fonctions, & posons :

$$u + \frac{v}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\phi:(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x + y\sqrt{-1})$$

$$u - \frac{v}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\phi:(x - y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x - y\sqrt{-1}),$$

&



& nous aurons :

$$u = \frac{1}{2}\phi:(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\phi:(x-y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x+y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x-y\sqrt{-1})$$

$$v = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\phi:(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\phi:(x-y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\psi:(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\psi:(x-y\sqrt{-1})$$

Or si $\phi:p$ & $\phi:q$ marquent des fonctions semblables des quantités p & q , de même que $\psi:p$ & $\psi:q$, les imaginaires se détruiront dans nos formules, & u & v seront exprimées par des fonctions réelles de x & y .

LXXII. Or, pour trouver les valeurs réelles que ces expressions renferment, posons la droite $OY = s$, & l'angle $AOY = \omega$, pour avoir $x = s \cos \omega$, & $y = s \sin \omega$; & puisque

Fig. 7.

$x \pm y\sqrt{-1} = s(\cos \omega \pm \sqrt{-1} \sin \omega)$, & une puissance quelconque $(x \pm y\sqrt{-1})^n = s^n(\cos n\omega \pm \sqrt{-1} \sin n\omega)$, nous aurons en posant :

$$\phi:p = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 + \&c.$$

$$\psi:p = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}p + \mathfrak{C}p^2 + \mathfrak{D}p^3 + \mathfrak{E}p^4 + \&c.$$

pour les vitesses u & v les formules suivantes :

$$u = A + Bs \cos \omega + C s s \cos 2\omega + D s^3 \cos 3\omega + E s^4 \cos 4\omega + \&c. \\ + \mathfrak{B} s \sin \omega + \mathfrak{C} s s \sin 2\omega + \mathfrak{D} s^3 \sin 3\omega + \mathfrak{E} s^4 \sin 4\omega + \&c.$$

$$v = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} s \cos \omega + \mathfrak{C} s s \cos 2\omega + \mathfrak{D} s^3 \cos 3\omega + \mathfrak{E} s^4 \cos 4\omega + \&c. \\ - B s \sin \omega - C s s \sin 2\omega - D s^3 \sin 3\omega - E s^4 \sin 3\omega + \&c.$$

où l'on peut prendre pour les coefficients $A, B, C, \&c.$ & $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \&c.$ des quantités constantes quelconques: & si l'on veut remettre les va-

leurs $s = \sqrt{(xx + yy)}$; $\sin \omega = \frac{y}{\sqrt{(xx + yy)}}$; & $\cos \omega = \frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}}$

on obtiendra les vitesses u & v , exprimées par x & y .

LXXIII. De là on pourra aussi trouver une équation pour toutes les courbes, que chaque particule du fluide décrira sur le plan

Y y 3

AOB.



AOB. Soit EYV la courbe, que décrit la particule, qui se trouve en Y; & puisque les vitesses fournissent $dx = u dt$ & $dy = v dt$, la nature de cette courbe fera exprimée par cette équation $u dy - v dx = 0$. Maintenant, si nous substituons pour u & v les valeurs trouvées à cause de $dy = ds \sin \omega + s d\omega \cos \omega$, & $dx = ds \cos \omega - s d\omega \sin \omega$, nous trouverons de l'équation $u dy - v dx = 0$ l'intégrale suivante :

$$O = + A s \sin \omega + \frac{1}{2} B s^2 \sin 2\omega + \frac{1}{3} C s^3 \sin 3\omega + \frac{1}{4} D s^4 \sin 4\omega + \&c.$$

$$- A s \cos \omega - \frac{1}{2} B s^2 \cos 2\omega - \frac{1}{3} C s^3 \cos 3\omega - \frac{1}{4} D s^4 \cos 4\omega - \&c.$$
où O marque une quantité, qui est bien constante pour toute la courbe EYV, mais pour des courbes diverses elle doit être variable. Elle fera donc comme le parametre de ces courbes, dont la variabilité fournit toutes les courbes, que tous les élémens du fluide décrivent.

LXXIV. Voilà donc une équation générale pour toutes les courbes, qui peuvent être décrites par les particules du fluide, entant que l'hypothese de l'intégrabilité de la formule $u dx + v dy$ est admise. Cette équation est entièrement générale, si l'on y ajoute aussi des termes, ou l'exposant de s est, ou négatif, ou rompu, comme $s^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \omega$, $s^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3} \omega$, &c. Car, quand même les fonctions de $x \pm y\sqrt{-1}$ feroient, ou rompuës, ou irrationnelles, ou même transcendentes, on les peut toujours convertir en des series infinies, dont les termes renferment des puissances $x \pm y\sqrt{-1}$, & par là on parviendra toujours à une expression semblable à la trouvée. Je remarque de plus, qu'une telle fonction $\log.(x \pm y\sqrt{-1}) + \log.(x - y\sqrt{-1})$ donneroit $2/s$, & $\frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{x \pm y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$ donneroit 2ω , d'où nous pourrons encore ajouter à nos formules à volonté tels termes a/s & $\xi\omega$, qui rendroient les courbes transcendentes.

LXXV. Mais ce qui est le plus important de remarquer sur cette équation, c'est qu'elle renferme toutes les courbes possibles, ou bien le mouvement du fluide peut toujours être tel, qu'une des courbes EYV
 soit



soit une ligne donnée. Et c'est par cette propriété, que notre calcul peut être appliqué à un vaisseau d'une figure donnée; car, si le plan, où se trouve le fluide est terminé par la ligne BH, il faut bien que cette ligne BH, soit une de l'infinité des courbes EYV. Comme toutes ces courbes diffèrent entr'elles par la variabilité de la quantité O, on peut concevoir que le cas $O = 0$, donne la courbe proposée BH. Or dans ce cas notre équation peut être réduite à cette forme :

$$0 = \phi:(x+y\sqrt{-1}) + \phi:(x-y\sqrt{-1}) + \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:(x+y\sqrt{-1}) - \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:(x-y\sqrt{-1}).$$

Il s'agit donc de prouver, que quelle que soit la courbe donnée BH, son équation entre x & y est toujours réductible à cette forme, ou qu'on peut toujours assigner pour ϕ & ψ telles formes de fonctions, que cette équation exprime une ligne donnée.

LXXVI. Pour mettre cela hors de doute, posons $x+y\sqrt{-1} = 2p$ & $x-y\sqrt{-1} = 2q$, de sorte que $x = p+q$ & $y = \frac{p-q}{\sqrt{-1}}$; & substituons ces valeurs pour x & y dans l'équation de la courbe donnée BH. De là nous obtiendrons une équation entre p & q , dans laquelle entreront les deux quantités p & q presque également, la différence ne viendra que du signe $\sqrt{-1}$. De cette équation entre p & q , qu'on cherche premièrement p par q , & la résolution des équations, que je suppose ici, donnera $p = Q$, où Q sera une certaine fonction de q . Qu'on cherche ensuite pareillement q par p , pour avoir $q = P$, où P sera une certaine fonction de p , & semblable à la fonction Q au signe $\sqrt{-1}$ près. De ces deux valeurs on pourra former une nouvelle équation $p+q-P-Q=0$; ou encore plus généralement $f:p+f:q-f:P-f:Q=0$, où f est la marque d'une fonction quelconque; & cette équation renfermera encore la courbe donnée BH.

LXXVII. Or, si nous remettons pour p & q leurs valeurs $p = \frac{x+y\sqrt{-1}}{2}$ & $q = \frac{x-y\sqrt{-1}}{2}$, il est évident, que cette équation sera comprise dans la forme : $0 =$



$$0 = \Phi:(x+yV-1) + \Phi:(x-yV-1) + \frac{1}{V-1}\Psi:(x+yV-1) - \frac{1}{V-1}\Psi:(x-yV-1);$$

ou sans faire la restitution des valeurs p & q , on s'apercevra aisément, que l'équation : $f:p + f:q - f:P - f:Q = 0$, est toujours réductible à la forme :

$$\Phi:p + \Phi:q + \frac{1}{V-1}\Psi:p - \frac{1}{V-1}\Psi:q = 0.$$

Or, ayant réduit l'équation pour la courbe BH à la forme :

$$f:p + f:q - f:P - f:Q = 0,$$

toutes les autres courbes EYV, qui représentent avec la donnée le mouvement du fluide, seront comprises dans cette équation :

$$f:p + f:q - f:P - f:Q = O$$

en donnant à O successivement toutes les valeurs possibles.

LXXVIII. Si nous prenons pour f' : la marque d'une autre fonction quelconque, la courbe donnée fera aussi comprise dans cette équation plus générale :

$$\left. \begin{aligned} f:p + f:q - f:P - f:Q \\ + \frac{1}{V-1}f':p - \frac{1}{V-1}f':q + \frac{1}{V-1}f':P - \frac{1}{V-1}f':Q \end{aligned} \right\} = 0,$$

qui sera encore réductible à la forme :

$$\Phi:p + \Phi:q + \frac{1}{V-1}\Psi:p - \frac{1}{V-1}\Psi:q = 0.$$

Et alors on aura pour toutes les autres courbes EYV, que le fluide décrit par son mouvement, cette équation :

$$\left. \begin{aligned} f:p + f:q - f:P - f:Q \\ + \frac{1}{V-1}f':p - \frac{1}{V-1}f':q + \frac{1}{V-1}f':P - \frac{1}{V-1}f':Q \end{aligned} \right\} = 0,$$

en donnant à O successivement toutes les valeurs possibles.



LXXIX. Par cette réduction générale on voit que, pour la même ligne donnée BH , on peut trouver une infinité de systèmes différens pour les autres courbes EYV , puisque nous pouvons prendre pour les deux marques f , & f' des forces des fonctions quelconques. Il se pourra donc faire que, parmi les autres courbes EYV , il se trouve encore une qui soit donnée. Et cette recherche servira à découvrir la vraie résistance qu'un corps d'une figure quelconque, placé dans le courant en souffrira; car alors cette autre courbe donnée doit convenir avec la figure du corps. Or, pour trouver la résistance, on n'a qu'à différentier l'équation générale pour les courbes, en supposant O constant, & la comparaison du différentiel avec la forme $u dy - v dx = 0$, donnera les valeurs de u & v , d'où l'on tire ensuite la vraie vitesse $\alpha = \sqrt{uu + vv}$, & de là la pression du fluide à chaque endroit.

LXXX. Cependant il faut que je le répète encore une fois, que par ce moyen on n'obtiendra point tous les mouvemens possibles pour chaque figure donnée du plan, où le fluide se meut: on ne trouve que les cas, où la formule $u dx + v dy$ est intégrable, & hormis ces cas il y a encore une infinité d'autres, qui renferment également des mouvemens possibles. On comprend aussi aisément, que quand même la figure du canal, & celle du corps qui y est fixé, est donnée, le cas n'est pas encore déterminé: car le mouvement du fluide pourroit être agité & troublé d'une infinité de manières différentes, de sorte pourtant que le fluide qui touche les bords du canal, & le corps qui y est fixé, en suive toujours la direction par son mouvement: & cette seule réflexion peut suffire pour nous convaincre, que les formules que je viens de trouver, ne sont pas générales.

