1757

Principes généraux du mouvement des fluides

Leonhard Euler

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précedent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverſe qualité des fluides, que des forces qui y puiſſent agir ; je me propoſe de traiter ſur le même pied le mouvement des fluides, & de recher cher les principes géneraux, ſur leſquels toute la ſcience du mouvement des fluides eſt fondée. On comprend aiſément que cette matiere eſt beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes : cependant j'eſpère d'en venir auſſi heureuſement à bout, de ſorte que s'il y reſte des difficultés, ce ne ſera pas du côté du méchanique, mais uniquement du côté de l'analytique: cette ſcience n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui ſeroit néceſſaire pour déveloper les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

II. Il s'agit donc de découvrir les principes, par leſquels on puiſſe déterminer le mouvement d'un fluide, en quelque état qu'il ſe trouve, & par quelques forces qu'il ſoit ſollicité. Pour cet effet examinons en détail tous les articles, qui conſtituent le ſujet de nos recherches, & qui renferment les quantités tant connues qu'inconnues. Et d'abord la nature du fluide eſt ſuppoſée connue, dont il faut conſidérer les diverſes eſpeces : le fluide eſt donc, ou incompreſſible, ou compreſſible. S'il n'eſt pas ſuſceptible de compreſſion, il faut diſtinguer deux cas, l'un où toute la maſſe eſt compoſée de parties homogenes, dont la denſité eſt partout & demeure toujours la même, l'autre

tre où elle eſt composée de parties héterogenes ; & ici on doit ſavoir la denſité de chaque eſpece, & la proportion du mêlange. Si le fluide eſt compreſſible, & que ſa denſité ſoit variable, il faut connoitre la loi, ſelon laquelle ſon élaſticité dépend de la denſité ; ſi c'eſt uniquement de la denſité, que l'élaſticité depend, ou encore d'une autre qualité, comme de la chaleur, qui eſt propre à chaque particule du fluide, au moins pour chaque inſtant du tems.

III. On doit auſſi ſuppoſer, que l'état du fluide dans un certain tems ſoit connu, & que je nommerai l'état primitif du fluide : cet état étant quaſi arbitraire, il faut premièrement connoitre la diſpoſition des particules, dont le fluide eſt composé, & le mouvement qui leur aura été imprimé, à moins que dans l'état primitif le fluide n'ait été en repos. Cependant le mouvement primitif n'eſt pas entièrement arbitraire, tant la continuité que l'impénétrabilité du fluide y mettent une certaine limitation, que je rechercherai dans la ſuite. Mais ſouvent on ne connoit rien d'un état primitif; comme lorsqu'il s'agit de déterminer le mouvement d'une riviere ; & alors les recherches ſe bornent pour l'ordinaire à trouver l'état permanent, auquel le fluide parviendra enfin ſans ſubir de nouveaux changemens. Or, ni cette circonſtance, ni l'état primitif, ne changent rien dans les recherches qu'on aura à entreprendre, & le calcul demeurera toujours le même : ce n'eſt que dans les intégrations, où il y faut avoir égard pour déterminer les conſtantes, que chaque integration amene.

IV. En troiſième lieu, il faut compter parmi les données les forces externes, à la ſollicitation desquelles le fluide eſt aſſujetti : je nomme ici ces forces externes, pour les diſtinguer des forces inteſtines, dont les particules du fluide agiſſent les unes ſur les autres, vû que celles-cy ſont le principal objet des recherches à faire enſuite. On peut donc ſuppoſer, que le fluide ne ſoit ſollicité par aucune force externe, ou ſeulement par la gravité naturelle, qu'on regarde partout comme de la même quantité, & même direction. Or, pour rendre les recherches plus

 géné-

générales, je considérerai le fluide sollicité par des forces quelconques, soit qu'elles soient dirigées vers un ou plusieurs centres, soit qu'elles suivent, tant par rapport à leur quantité qu'à leur direction, une autre loi quelconque. De ces forces on ne connoit immédiatement que leurs actions accélératrices, sans avoir égard aux masses sur lesquelles elles agissent. Je n'introduirai donc dans le calcul que les forces accélératrices, d'où il sera aisé de tirer les véritables forces motrices, en multipliant celles-là en chaque cas par les masses, qui en reçoivent la sollicitation.

V. Passons maintenant aux articles, qui contiennent ce qui est inconnu. Or, pour connoitre bien le mouvement, dont le fluide sera porté, il faut déterminer pour chaque instant & pour chaque lieu, tant le mouvement que la pression du fluide qui s'y trouve : & si le fluide est compressible, il en faut outre cela definir la densité, en connoissant la-dite autre qualité, qui avec la densité concourt à déterminer l'élasticité ; laquelle étant contrebalancée par la pression du fluide, lui doit être estimée égale, tout comme dans le cas d'équilibre, où j'ai dévelopé plus soigneusement ces idées. On voit donc que le nombre des quantités, qui entrent dans la recherche du mouvement, est beaucoup plus grand, que dans le cas d'équilibre, puisqu'il faut introduire des lettres, qui marquent le mouvement de chaque particule, & que toutes ces quantités peuvent varier avec le tems. Donc, outre les lettres qui déterminent la situation de chaque point, qu'on peut concevoir dans la masse fluide, on doit aussi en faire entrer une, qui marque le tems déjà écoulé, & qui par sa variabilité puisse être appliquée à chaque tems proposé.

Fig. 1. VI. Soit donc écoulé après un état primitif le tems $= t$, & que maintenant le fluide se trouve dans un état & mouvement, qu'il faut chercher. Quel que soit l'espace que le fluide occupe à présent, je commence par considérer un point quelconque Z, qui se trouve dans la masse fluide ; & pour faire entrer dans le calcul la situation de ce point Z, je le rapporte à trois axes fixes, OA, OB, & OC, perpendicu-

diculaires entr'eux au point O, & donnés de poſition. Que les deux axes OA & OB ſe trouvent dans le plan, que la Planche repréſente, & le troiſième OC y ſoit perpendiculaire. Qu'on tire donc du point Z au plan AOB la perpendiculaire ZY, & du point Y à l'axe OA la normale YX pour avoir les trois coordonnées: $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, paralleles à nos trois axes. Pour chaque point conçu dans la maſſe fluide, ces trois coordonnèes x, y, & z, auront des valeurs déterminées, & en donnant à ces trois coordonnées ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles, tant poſitives que négatives, on parcourra tous les points de l'eſpace infini, & partant auſſi ceux, qui ſe trouvent dans l'epace, que le fluide occupe à chaque inſtant.

VII. En ſecond lieu, je conſidére les forces accélératrices, qui agiſſent dans l'inſtant préſent ſur la particule du fluide, qui ſe trouve en Z; or, quelles que ſoient ces forces, on les peut toujours réduire à trois, qui agiſſent ſuivant les trois directions ZP, ZQ, & ZR, paralleles à nos trois axes OA, OB, & OC. En prenant donc l'unité pour marquer la force accélératrice de la gravité naturelle, ſoient P, Q, & R, les forces accélératrices, qui agiſſent ſur le point Z ſuivant les directions ZP, ZQ, & ZR; & ces lettres P, Q, & R, marqueront des nombres abſolus. S'il y a toujours les mêmes forces, qui agiſſent dans le même point de l'eſpace Z, les quantités P, Q, & R, ſeront exprimées par des certaines fonctions des trois coordonnées x, y & z; mais en cas que les forces variaſſent auſſi avec le tems t, elles renfermeront encore le tems t. Or je ſuppoſe ces fonctions connuës, puiſqu'on doit compter les forces ſollicitantes parmi les quantités connuës, ſoit qu'elles dépendent uniquement des variables x, y, z, ou encore du tems t.

VIII. Que r exprime maintenant la chaleur au point Z, ou cette autre qualité, qui outre la denſité influë ſur l'élaſticité, au cas que le fluide ſoit compreſſible, & r doit auſſi être conſidérée comme une fonction des trois variables x, y, z, & du tems t, puiſqu'il pour-

 roit

roit arriver, qu'elle changeât avec le tems dans le même point Z de l'espace ; on pourra donc regarder cette fonction comme connuë. Soit ensuite pour le tems présent la densité de la particule du fluide, qui se trouve en Z, $= q$, marquant par l'uuité la densité d'une certaine matiere homogene, dont je me servirai pour mesurer les pressions par des hauteurs, comme je l'ai expliqué plus amplement dans mon Mémoire sur l'équilibre des fluides. Soit donc aussi pour le tems présent la pression du fluide au point Z exprimée par la hauteur $= p$, qui marquera donc aussi l'élasticité ; & puisque la nature du fluide est supposée connuë, on saura le rapport, que la hauteur p tient aux quantités q & r. Or p & q seront de même des fonctions des quatre variables x, y, z, & t, mais inconnuës; mais quand le fluide n'est pas incompressible, la pression p est indépendante de la densité q, & l'autre qualité r n'entre point du tout en considération.

IX. Enfin, quel que soit le mouvement, qui convient à l'instant présent à l'élément du fluide, qui se trouve en Z, il pourra aussi être décomposé suivant les directions ZP, ZQ, & ZR, paralleles à nos trois axes. Soient donc u, v, & w les vitesses de ce mouvement décomposé selon les trois directions ZP, ZQ, & ZR, & il est clair que ces trois quantités doivent aussi être considérées comme des fonctions des quatre variables x, y, z, & t. Car ayant trouvé la nature de ces fonctions, si l'on met le tems t constant, on connoitra par la variabilité des coordonnées x, y, & z, les trois vitesses u, v, & w, & partant le vrai mouvement dont chaque élément du fluide est porté dans l'instant présent ; & si l'on met constantes les coordonnées x, y, & z, & qu'on considére le seul tems t comme variable, on trouvera le mouvement, non d'un certain élément du fluide, mais de tous les élémens, qui passeront successivement par le même point Z, ou on en connoitra à chaque tems le mouvement de cet élément du fluide, qui se trouvera alors dans le point Z.

X. Mais voyons aussi quel chemin décrira l'élément du fluide, qui est à présent en Z, pendant le tems infiniment petit dt ; ou à quel point

point il ſe trouvera un inſtant après. Or, ſi nous exprimons l'eſpace par le produit de la viteſſe & du tems, l'élément du fluide, qui eſt à préſent en Z, ſera porté dans la direction ZP par l'eſpace $= u\,dt$, dans la direction ZQ par l'eſpace $= v\,dt$, & dans la direction ZR par l'eſpace $= w\,dt$. Donc, ſi nous poſons :

$$ZP = u\,dt, \quad ZQ = v\,dt, \quad \& \quad ZR = w\,dt,$$

& qu'on acheve de ces trois côtés le parallelepipede, l'angle oppoſé à Z marquera le point, où l'élément du fluide en queſtion ſe trouvera après le tems dt, & la diagonale de ce parallelepipede, qui eſt $= dt\sqrt{(uu + vv + ww)}$, donnera le vrai chemin décrit, & partant la viteſſe de ce vrai mouvement ſera $= \sqrt{(uu + vv + ww)}$; & la direction ſe déterminera aiſément par les cotés de ce parallelipipede; car elle ſera inclinée au plan AOB d'un angle dont le ſinus $= \frac{w}{\sqrt{(uu + vv + ww)}}$, au plan AOC d'un angle dont le ſinus $= \frac{v}{\sqrt{(uu + vv + ww)}}$, & enfin au plan BOC d'un angle dont le ſinus eſt $= \frac{u}{\sqrt{(uu + vv + ww)}}$.

XI. Ayant déterminé le mouvement du fluide, qui ſe trouve à l'inſtant préſent au point Z, examinons auſſi celui d'un autre élément quelconque infiniment proche, qui ſoit en z, auquel point répondent les coordonnées $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$. Les trois viteſſes de cet élément ſelon les directions des trois axes ſeront donc exprimées par les quantités u, v, w, aprés qu'on y aura ſubſtitué $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$; ou après qu'on y aura ajouté leurs différentiels en poſant le tems t conſtant. Or entant qu'on met $x + dx$ au lieu de x, les incrémens de u, v, & w, ſont :

$$dx\left(\frac{du}{dx}\right); \quad dx\left(\frac{dv}{dx}\right); \quad \& \quad dx\left(\frac{dw}{dx}\right);$$

&

& entant qu'on met $y + dy$ au lieu de y les incrémens font :

$$dy\left(\frac{du}{dy}\right); \quad dy\left(\frac{dv}{dy}\right); \quad \& \quad dy\left(\frac{dw}{dy}\right);$$

& il en eſt de même à l'égard de la variabilité de z. Donc les trois viteſſes de l'élément du fluide, qui ſe trouve à préſent en z, feront

ſuivant la direction $OA = u + dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right) + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$

ſuivant la direction $OB = v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſuivant la direction $OC = w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right) + dy\left(\frac{dw}{dy}\right) + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$

XII. Ce ſont les viteſſes, qui conviennent à un élément du fluide en z, qui eſt infiniment proche du point Z, & dont le lieu eſt déterminé par les trois coordonnées $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$.
Fig. 2. Donc ſi nous prenons le point z en ſorte, que la ſeule x y ſoit changée de dx, les deux autres coordonnées y & z demeurant les mêmes que pour le point Z, les trois viteſſes de l'élément du fluide qui ſe trouve en ce point z, ſeront :

$$u + dx\left(\frac{du}{dx}\right); \quad v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right); \quad w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

par leſquelles cet élément ſera transporté pendant le tems dt dans un autre point z', dont il s'agit de définir le lieu par rapport au point Z', qui ſoit celui, auquel l'élément du fluide, qui étoit en Z eſt transporté pendant le même tems dt ; & dont le lieu a été déterminé ci-deſſus (§. 10.). Pour connoitre ce point z', je remarque, que ſi les viteſſes de z étoient parfaitement les mêmes que celles de Z, le point z' tomberoit en p, de ſorte que la diſtance $Z'p$ feroit égale & parallele à la diſtance Zz. Et puiſque par l'hypotheſe Zz eſt parallele à l'axe OA, & égale à dx, la ligne $Z'p$ ſera auſſi $= dx$, & parallele à l'axe OA.

XIII.

XIII. Maintenant, puisque la viteſſe ſelon OA n'eſt pas u, mais $u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, par cette différence l'élément en queſtion ſera transporté de p & q, ſur la direction $Z'p$, de ſorte que $pq = dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)$: il ſeroit donc en q, ſi les deux autres viteſſes étoient v & w. Mais puisque la viteſſe ſelon l'axe OB eſt $v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$, cette différence transportera notre élément de q & r, par l'eſpace $qr = dt\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$, & parallele à l'axe OB. Enfin l'incrément $dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$ de la viteſſe w transportera l'élément de r en z', par la particule $rz' = dt\,dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$, & parallele au troiſième axe OC. D'où je conclus que l'élément du fluide, qui occupoit la petite ligne droite Zz, ſera dans le tems dt transporté ſur la ligne $Z'z'$, qui ſera infiniment peu inclinée à l'axe OA, & dont la longueur à cauſe de $Z'q = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$ ſera

$$dx\sqrt{\left(\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)^2 + dt^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + dt^2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)}.$$

Donc, en négligeant les termes, qui renferment le quarré de dt, la longueur de Zz' ne différera pas de $Z'q$, & on aura: $Z'z' = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$, pour l'inclinaiſon de cette ligne à l'axe OA il ſuffit de remarquer, qu'elle eſt infiniment petite du premier degré, ou exprimée en ſorte $\alpha\,dt$.

XIV. Si la petite ligne Zz avoit été priſe $= dy$, & parallele à l'axe OB, par le même raiſonnement on trouveroit, que le fluide qui occupoit cette ligne fût transporté ſur une autre

$Z'z' = dy\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right)$, & dont l'inclinaifon à l'axe OB fut auſſi infiniment petite. Et ſi l'on prenoit la ligne $Zz = dz$, & parallele au troiſième axe OC, le fluide qui l'occupoit feroit transporté ſur une autre ligne $Z'z' = dz\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$, & qui feroit infi-

Fig. 3. niment peu incliné à l'axe OC. Donc, ſi nous conſidérons un parallelepipede rectangle $ZPQRzpqr$ formé des trois côtés $ZP = dx$, $ZQ = dy$, & $ZR = dz$, le fluide qui occupoit cet eſpace ſera transporté pendant le tems dt à remplir l'eſpace $Z'P'Q'R'z'p'q'r'$, infiniment peu différent d'un parallelepipede rectangle, dont les trois côtés feront :

$$Z'P' = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right) \; ; \; Z'Q' = dy\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right) \; ; \; Z'R' = dz\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

Car les côtés ZP, ZQ, ZR, étant transportés en $Z'P'$, $Z'Q'$, $Z'R'$, on ne ſauroit douter que le fluide contenu dans le premier eſpace ne ſoit transporté dans l'autre eſpace pendant le tems dt.

XV. A' préſent on pourra juger ſi le volume du fluide, qui a occupé le parallelepipede Zz, eſt devenu plus grand ou plus petit après le tems dt : on n'a qu'à chercher le volume ou la capacité de l'un & de l'autre de ces deux ſolides. Or le premier étant un parallelepipede rectangle formé des côtés dx, dy, dz, ſon volume eſt $= dx\,dy\,dz$; mais pour l'autre, dont les angles plans différent infiniment peu du droit, je remarque que ſon volume ſe trouve également en multipliant ces trois côtés ; car l'erreur qui réſulte de l'obliquité infiniment petite ſera contenuë en des termes, où l'élément du tems dt monteroit à deux dimenſions, qu'il eſt permis par conſéquent de négliger. Ce volume $Z'z'$ ſera donc exprimé en ſorte :

$$dx\,dy\,dz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right).$$

Si

Si l'on avoit encore quelque doute sur la justesse de cette conclusion, on n'auroit qu'à lire ma Piece latine : *Principia motus fluidorum:* où j'ai calculé ce volume sans rien négliger.

XVI. Donc, si le fluide n'est pas susceptible de compression, ces deux volumes doivent être égaux entr'eux, puisque la masse, qui occupoit l'espace Zz, ne sauroit être réduite, ni dans un plus grand, ni dans un plus petit espace. Mais, puisque je me propose de traiter cette matiere dans toute la généralité possible, & que j'ai nommé la densité en $Z = q$, considérant q comme une fonction des trois coordonnées & du tems, je remarque, que pour trouver la densité en Z', il faut premièrement augmenter le tems t de son différentiel dt, ensuite le lieu Z' étant différent de Z, les quantités x, y, z, doivent être augmentées des petits espaces udt, vdt, wdt; d'où la densité en Z' sera :

$$q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right) + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{dq}{dz}\right),$$

& de là, puisque la densité est réciproquement proportionnelle au volume, cette quantité sera à q, comme $dx\,dy\,dz$ à

$$dx\,dy\,dz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right).$$

Par conséquent, en divisant par dt, nous aurons cette équation, que la considération de la densité fournit :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + q\left(\frac{du}{dx}\right) + q\left(\frac{dv}{dy}\right) + q\left(\frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

XVII. Voilà donc une condition bien remarquable, qui établit déjà un certain rapport entre les trois vitesses x, y, & z, à l'égard de la densité du fluide q. Or cette équation peut être réduite à une plus grande simplicité : car $u\left(\frac{dq}{dx}\right)$ ne differe pas de $\left(\frac{u\,dq}{dx}\right)$, puisque

par

par cette maniere d'exprimer il faut entendre, que dans la différentiation de q la seule quantité x est prise pour variable ; il est donc de même $q\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{q\,du}{dx}\right)$: d'où il est évident que

$$q\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dq}{dx}\right)=\left(\frac{u\,dq+q\,du}{dx}\right)=\left(\frac{dqu}{dx}\right),$$

prenant le différentiel du produit qu en sorte, qu'on regarde la seule quantité x comme variable. C'est pourquoi notre équation trouvée se réduit à celle-cy :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0.$$

Si le fluide n'étoit pas compressible, la densité q seroit la même en Z, & en Z', & pour ce cas on auroit cette équation :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0.$$

qui est aussi celle sur laquelle j'ai établi mon Mémoire latin allégué ci-dessus.

XVIII. Cette formule ayant été fournie par la considération de la continuité du fluide, renferme déjà un certain rapport qui doit régner entre les quantités u, v, w, & q. Les autres déterminations doivent être tirées de la considération des forces, auxquelles chaque particule du fluide est assujettie : or, outre les forces accélératrices P, Q, R, qui agissent sur le fluide en Z, il est aussi sollicité par la pression qui agit de toutes parts sur l'élément du fluide contenu en Z. De la combinaison de ces doubles forces on tirera trois forces accélératrices selon la direction des trois axes ; & puisqu'on peut assigner les accélérations mêmes par la considération des vitesses u, v, & w, nous tirerons de là trois équations, qui jointes à celle que nous venons de trouver, renfermeront tout ce qui regarde le mouvement des fluides, de sorte que nous aurons alors des principes généraux & complets de toute la science du mouvement des fluides.

XIX.

XIX. Pour trouver les accélérations que l'élément du fluide en Z ſubit, nous n'avons qu'à comparer les viteſſes u, v, w, qui répondent à préſent au point Z, avec celles qui répondent après le tems dt au point Z'. Il arrive donc un double changement, & à l'égard des coordonnées x, y, z, qui reçoivent les incrémens udt, vdt, wdt, & à celui du tems qui augmente de dt. D'où les trois viteſſes qui conviennent au point Z' ſont :

ſelon la direction $OA = u + dt\left(\frac{du}{dt}\right) + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + vdt\left(\frac{du}{dy}\right) + wdt\left(\frac{du}{dz}\right)$

ſelon la direction $OB = v + dt\left(\frac{dv}{dt}\right) + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dv}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſelon la direction $OC = w + dt\left(\frac{dw}{dt}\right) + udt\left(\frac{dw}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dw}{dz}\right)$

Et partant les accélérations, étant exprimées par les incrémens des viteſſes diviſés par l'élément du tems dt, ſeront :

ſelon la direction $OA = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$

ſelon la direction $OB = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſelon la direction $OC = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$

XX. Cherchons maintenant les forces accélératrices ſelon ces mêmes directions, qui réſultent des preſſions du fluide ſur le parallelepipede Zz, dont le volume eſt $= dxdydz$, & partant la maſſe du fluide qui l'occupe $= q\,dxdydz$. Or la preſſion au point Z étant exprimée par la hauteur p, la force motrice, qu'en reçoit la face $ZQRp$ eſt $= p\,dydz$; & pour la face oppoſée $zqrP = dydz$, la hauteur p eſt augmentée de ſon différentiel $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, qui réſulte

 en

en ſuppoſant la ſeule x variable. Donc cette maſſe fluide Zz eſt repouſſée dans la direction AO par la force motrice $dx\,dy\,dz\left(\frac{dp}{dx}\right)$, ou bien par la force accélératrice $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$. De même maniere on verra que la maſſe fluide Zz eſt ſollicitée dans la direction BO par la force accélératrice $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)$, & dans la direction CO par la force accélératrice $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)$. Ajoutons à ces forces les données P, Q, R, & les forces accélératrices entieres ſeront :

ſelon la direction OA $= P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$

ſelon la direction OB $= Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)$

ſelon la direction OC $= R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)$.

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations ſuivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la conſidération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.gw}{dz}\right)=0;$$

& ensuite celle que donne le rapport entre l'élasticité p, la densité q, & l'autre qualité r, qui influë sur l'élasticité p, outre la densité q, nous aurons cinq équations qui renferment toute la Théorie du mouvement des fluides.

XXII. De quelque nature que soient les forces P, Q, R, pourvû qu'elles soient réelles, il faut remarquer que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est toujours un différentiel réel d'une certaine quantité finie & déterminée, en supposant les trois coordonnées x, y, & z, variables; de sorte qu'il y aura toujours:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right);\ \left(\frac{dQ}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right),$$

& si nous posons cette quantité finie $=S$, en sorte qu'il y ait:

$$dS = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

en supposant le tems t constant, en cas que les forces P, Q, R, changent aussi avec le tems aux mêmes endroits; cette quantité S exprime ce que je nomme l'effort des forces sollicitantes, & qui est la somme des intégrales de chaque force multipliée par l'élément de sa direction, ou par le petit espace, par lequel elle traineroit un corps qui obeïroit à son action. Cette idée de l'effort est de la derniere importance dans toute la Théorie, tant de l'équilibre que du mouvement, ayant fait voir, que la somme de tous les efforts est toujours un *maximum* ou *minimum*. Cette belle propriété convient admirablement avec le beau principe de la moindre action; dont nous devons la découverte à notre Illustre Président, M. de *Maupertuis*.

XXIII. Comme les équations que nous venons de trouver, renferment quatre variables x, y, z, & t, qui sont absolument indépendantes entr'elles, vû que la variabilité des trois premières s'étend sur tous

tous les élémens du fluide, & de la derniere à tous les tems, il faut que les autres variables u, v, w, p, & q, en ſoient de certaines fonctions, pour que les équations puiſſent ſubſiſter. Car, bien qu'nne équation differentielle entre deux variables ſoit toujours poſſible, on ſait qu'une équation differentielle, qui renferme trois ou pluſieurs variables, n'eſt poſſible que ſous certaines conditions, en vertu desquelles les termes de l'équation doivent tenir un certain rapport entr'eux. Il s'agit donc de ſavoir de quelle nature doivent être les fonctions de x, y, z, & t, qui expriment les valeurs de u, v, w, p, & q, afinque les équations ſoient poſſibles, avant qu'on puiſſe entreprendre la réſolution de ces mêmes équations.

XXIV. Multiplions donc, des trois équations trouvées en dernier lieu, la premiere par dx, la ſeconde par dy, & la troiſième par dz, & puisque $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$, marque le differentiel de p en ne ſuppoſant que le tems t conſtant, nous obtiendrons :

$$
dS-\frac{dp}{q}=\begin{cases}
+dz\left(\frac{du}{dt}\right)+u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)+v\,dx\left(\frac{du}{dy}\right)+w\,dx\left(\frac{du}{dz}\right)\\
+dy\left(\frac{dv}{dt}\right)+u\,dy\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\,dy\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\,dy\left(\frac{dv}{dz}\right)\\
+dz\left(\frac{dw}{dt}\right)+u\,dz\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\,dz\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\,dz\left(\frac{dw}{dz}\right)
\end{cases}
$$

Voilà donc une équation differentielle, où le tems eſt pris conſtant, & dont il s'agit de trouver l'intégrale. Or il faut remarquer que cette ſeule équation renferme tellement les trois dont elle compoſée, que, dès qu'on aura ſatisfait à celle-cy, les conditions de toutes les trois feront remplies. Car, ſi $dS-\frac{dp}{q}$ eſt égal aux trois lignes, en prenant x, y & z variables, la partie de $dS-\frac{dp}{q}$ qui réſulte de la variabiriabilité de la ſeule x, qui eſt $Pdx - \frac{dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, doit néceſſairement être égale à la premiere ligne, & ainſi des deux autres. Les membres $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, & $\left(\frac{dw}{dt}\right)$, qui ont été trouvés de la variabilité du tems t, puisqu'ils marquent des fonctions finies, n'empêchent pas, que le tems t ne puiſſe à préſent être pris pour conſtant.

XXV. Concevons que cette équation ſont déjà réſoluë, & on aura trouvé de certaines fonctions finies de x, y, z, & t pour les valeurs des quantités u, v, w, q, & p; qui étant ſubſtituées dans l'équation différentielle, en ſuppoſant le tems t conſtant, produiſent une équation identique. Or, puisque après cette ſubſtitution nous aurons trois ſortes de termes, les uns affectés par dx, les autres par dy, & les troiſièmes par dz, l'identification nous conduit à trois équations; d'où il eſt clair, que quoique nous ne conſidérions qu'une équation différentielle, elle a en effet la force de trois, & qu'elle nous détermine trois de nos inconnuës. Ce qui eſt auſſi clair de là, qu'une équation différentielle à trois variables, comme $Ldx + Mdy + Ndz = 0$ n'eſt poſſible, à moins qu'un certain rapport entre les quantités L, M, & N, n'ait lieu. Mais, comme on n'a encore que fort peu travaillé ſur la réſolution de telles équations differentielles à trois variables, nous ne ſaurions eſperer une ſolution complette de notre équation, avant que les bornes de l'Analyſe ne ſoient étenduës conſidérablement plus loin.

XXVI. Le meilleur parti à prendre ſera donc de bien peſer les ſolutions particuliéres, que nous ſommes en état de donner de notre équation différentielle; car de là nous pourrons juger de la route, qu'il faut prendre pour arriver à une ſolution complette. Or j'ai déjà remarqué que dans le cas, où la denſité q eſt ſuppoſée conſtante, on peut donner une fort belle ſolution, lorsque les viteſſes u, v, & w, ſont telles, que la formule différentielle $udx + vdy + wdz$ admet

 l'intél'intégration. Supposons donc que W soit cette intégrale, étant une fonction quelconque de x, y, z, & du tems t, & qu'en la différentiant, si l'on prend aussi t pour variable, on ait :

$$dW = u\,dx + v\,dy + w\,dz + \Pi\,dt.$$

Cela posé, les quantités u, v, w, & Π, auront tels rapports entr'elles qu'il sera :

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \;;\; \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right) \;;\; \left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right) \;;\; \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) \;;\; \left(\frac{dw}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right).$$

XXVII. Par ces égalités notre équation différentielle pourra être réduite à la forme suivante :

$$\begin{aligned} & + dx\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) + u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right) + v\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + w\,dx\left(\frac{dw}{dx}\right) \\ dS - \frac{dp}{q} = & + dy\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) + u\,dy\left(\frac{du}{dy}\right) + v\,dy\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\,dy\left(\frac{dw}{dy}\right) \\ & + dz\left(\frac{d\Pi}{dz}\right) + u\,dz\left(\frac{du}{dz}\right) + v\,dz\left(\frac{dv}{dz}\right) + w\,dz\left(\frac{dw}{dz}\right) \end{aligned}$$

Or puisque ici le tems t est supposé constant, nous aurons pour cette même hypothese :

$$dx\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\Pi}{dz}\right) = d\Pi$$

$$dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right) + dz\left(\frac{du}{dz}\right) = du$$

&c.

donc

donc notre équation ſe changera en celle-cy :

$$dS - \frac{dp}{q} = d\Pi + udu + vdv + wdw,$$

ou $dp = q(dS - d\Pi - udu - vdv - wdw)$.

Et partant, ſi la denſité du fluide étoit partout la même, ou $q = g$ on auroit en intégrant :

$$p = g(C + S - \Pi - \tfrac{1}{2}uu - \tfrac{1}{2}vv - \tfrac{1}{2}ww).$$

XXVIII. Poſons pour abréger :

$$C + S - \Pi - \tfrac{1}{2}uu - \tfrac{1}{2}vv - \tfrac{1}{2}ww = V,$$

où il faut remarquer que la conſtante C peut bien renfermer le tems t, vû qu'il eſt regardé comme conſtant dans cette intégration, & ayant $dp = qdV$, il eſt clair que l'hypotheſe :

$$dW = udx + vdy + wdz + \Pi dt,$$

rend auſſi notre équation différentielle poſſible, lorsque l'élaſticité p dépend d'une maniere quelconque de la ſeule denſité q, ou que q eſt une fonction quelconque de p. Elle devient encore poſſible, quand le fluide n'eſt pas compreſſible, mais la denſité q tellement variable qu'elle eſt une fonction quelconque de la quantité V. Et en général, ſi l'élaſticité p dépend en partie de la denſité q, & d'une autre qualité compriſe dans la lettre r, cette hypotheſe peut auſſi ſatisfaire, pourvû que r ſoit une fonction de V. Or dans tous ces cas, pour que le mouvement puiſſe ſubſiſter avec cette hypotheſe, il faut outre cela que cette condition ait lieu :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

XXIX. Cette hypotheſe eſt ſi générale, qu'il paroit, qu'il n'y ait aucun cas, qui n'y ſoit compris, & partant que la for-

 mule

mule $\partial p = q\,d\mathrm{V}$, jointe aux autres équations, qui n'ont presque aucune difficulté, renferme généralement tous les fondemens de la Théorie du mouvement des fluides. Aussi me suis-je uniquement attaché à ce cas dans mon Mémoire latin sur les principes du mouvement des fluides, où j'ai uniquement considéré les fluides incompressibles ; & j'ai fait voir que tous les cas, qu'on a traités jusqu'ici, où le fluide se meut par des tuyaux quelconques, sont renfermés dans cette supposition, & que les vitesses u, v, & w, y sont toujours telles, que la formule différentielle $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ dévient intégrable. Cependant j'ai remarqué depuis, qu'il y a aussi des cas, même lorsque le fluide est incompressible & homogéne partout, où cette condition n'a point lieu; ce qui suffit pour nous convaincre que la solution, que je viens de donner, n'est que particuliere.

XXX. Pour donner un exemple d'un mouvement réel, qui soit parfaitement d'accord avec toutes les formules, que les principes de Mécanique ont fournies, sans cependant, que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ soit intégable ; soit le fluide incompressible, & homogene partout, ou q une quantité constante $= g$, & qu'il n'y ait point de forces qui y agissent, de sorte que $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$, & $\mathrm{R} = 0$. Ensuite soit $w = 0$, $v = \mathrm{Z}x$, & $u = -\mathrm{Z}y$, où Z marque une fonction quelconque de $\sqrt{(xx + yy)}$, & il est évident que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$, qui se change en $-\mathrm{Z}y\,dx + \mathrm{Z}x\,dy$, n'est intégrable qu'au cas $\mathrm{Z} = \frac{1}{xx + yy}$. Cependant ces valeurs satisfont à toutes nos formules, de sorte qu'on ne sauroit révoquer en doute la possibilité d'un tel mouvement. Puisque Z est fonction de $\sqrt{(xx + yy)}$, son différentiel aura telle forme $d\mathrm{Z} = \mathrm{L}x\,dx + \mathrm{L}y\,dy$, où L sera encore une certaine fonction de $\sqrt{(xx + yy)}$.

XXXI.

XXXI. De ces valeurs de u, v, & w nous tirons :

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = 0;\ \left(\frac{du}{dx}\right) = -Lxy;\ \left(\frac{du}{dy}\right) = -Z - Lyy;\ \left(\frac{du}{dz}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0;\ \left(\frac{dv}{dx}\right) = Z + Lxx;\ \left(\frac{dv}{dy}\right) = + Lxy;\ \left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0;\ \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0\ ;\ \left(\frac{dw}{dy}\right) = 0\ ;\ \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

& à cauſe de $dS = 0$, nous aurons cette équation différentielle en poſant le tems t conſtant :

$$-\frac{dp}{g} = \left\{\begin{matrix} + LZxyydx - ZZxdx - LZxyydx \\ - ZZydy - LZxxydy + LZxxydy \end{matrix}\right\} = -ZZ(xdx + ydy).$$

Ayant donc $dp = gZZ\,(xdx + ydy)$, puisque Z eſt ſuppoſée fonction de $\sqrt{(xx + yy)}$, cette équation ſera ſans doute poſſible, & donnera pour intégrale $p = g\int ZZ\,(xdx + ydy)$. On voit que l'équation différentielle ſeroit devenuë poſſible, quand même le fluide auroit été ſollicité par des forces quelconques P, Q, R, pourvû que $Pdx + Qdy + Rdz$, ſoit un différentiel poſſible $= dS$, car alors on auroit $p = gS + g\int ZZ(xdx + ydy)$.

XXXII. Comme ces valeurs $u = -Zy$, $v = Zx$, & $w = 0$, ſatisfont à notre équation différentielle, on verra qu'elles rempliſſent auſſi la condition contenuë dans la formule :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

Car, à cauſe de $q = g$, elle ſera changée en celle-cy :

$$-\,gLxy + gLxy = 0$$

qui étant identique ſatisfait aux conditions requiſes. Donc il eſt bien poſſible, qu'un fluide ait un tel mouvement, que les viteſſes de chacun de ſes élémens ſoient : $u = -Zy$, $v = Zx$, & $w = 0$,

 quoi-

quoiqu'il ne ſoit pas $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ une formule différentielle poſſible; d'où l'on eſt aſſuré, qu'il y a des cas, où le mouvement d'un fluide eſt poſſible, ſans que cette condition, qui paroiſſoit générale, ait lieu. Ainſi la ſuppoſition de la poſſibilité de la formule différentielle $u\,dx + v\,dy + w\,dz$, ne fournit qu'une ſolution particuliere des formules que nous avons trouvées.

XXXIII. Il eſt évident, que le mouvement renfermé dans ce cas ſe réduit à un mouvement de rotation autour de l'axe OC; &, puisque ce, qui eſt dit de l'axe OC, ſe peut appliquer à tout autre axe fixe, nous concluons qu'il eſt poſſible, qu'un fluide ſollicité par des forces quelconques, dont l'effort eſt $= S$, ait un tel mouvement autour d'un axe fixe, que les viteſſes de rotation ſoient proportionnelles à une fonction quelconque de la diſtance à cet axe. Ainſi poſant s la diſtance de cet axe, & la viteſſe de rotation à cette diſtance $= \mathfrak{s}$, à cauſe de $xx + yy = ss$, & $ZZss = \mathfrak{s}\mathfrak{s}$, la preſſion y ſera exprimée par la hauteur $p = gS + g\int \frac{\mathfrak{s}\mathfrak{s}\,ds}{s}$. Un tel mouvement, qui repréſente celui d'un tourbillon, eſt donc également poſſible, que ceux qui ſont contenus dans la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ entant qu'elle eſt intégrable. Sans doute y a-t-il encore une infinité d'autres mouvemens, qui ſatisfaiſant à nos formules, ſont auſſi également poſſibles.

XXXIV. Retournons à nos formules générales, & puisqu'elles ſont un peu trop compliquées, poſons pour abreger:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) = X$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) = Y$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) = Z$$

& de quelque nature que ſoient les trois forces accélératrices P, Q, & R, à cauſe de $dS = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, il faut que cette équation différentielle, où le tems t eſt ſuppoſé conſtant, ſoit poſſible:

$$\frac{dp}{q} = (P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

& outre cela la continuité du fluide exige, qu'il ſoit:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.dw}{dz}\right) = 0$$

De quelque maniere qu'on ſatisfaſſe à ces deux équations, on aura toujours un mouvement, qui pourra actuellement avoir lieu dans le fluide.

XXXV. Lorsque le fluide n'eſt pas compreſſible & homogene partout, ou la denſité q conſtante $= g$, il eſt évident, que l'équation différentielle ne ſauroit avoir lieu, à moins que le différentiel:

$$(P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

ne ſoit poſſible ou complet, c'eſt à dire, à moins qu'il ne réſulte par la différentiation actuelle de quelque fonction finie des variables x, y, & z, laquelle peut bien renfermer le tems t, quoiqu'il ſoit ſuppoſé conſtant dans la différentiation. Il eſt de même évident, que cette formule différentielle doit être poſſible ou complette, lorsque le fluide eſt compreſſible, & que la denſité q eſt exprimée par une fonction quelconque de l'élaſticité p. Dans l'un & l'autre cas, ſi nous poſons V pour la quantité finie, dont le différentiel ſoit:

$$dV = (P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

notre équation différentielle fournira, ou $\frac{p}{g} = V$, ou $\int \frac{dp}{q} = V$.

Or, pour que le mouvement ſoit poſſible, il faut outre cela que l'autre condition tirée de la continuité, ſoit remplie.

XXXVI. Si le fluide n'eſt pas compreſſible, mais que ſa denſité q ſoit variable, & exprimée par une fonction quelconque du lieu,

ou

ou des trois coordonnées x, y, z, & du tems t, il ne suffit pas que la formule :

$$(P-X)dx + (Q-Y)dy + (R-Z)dz = dV$$

soit intégrable, mais il faut outre cela que l'intégrale V soit une fonction de q ; car ayant $\frac{dp}{q} = dV$, ou $dp = q\,dV$, il est clair que la pression p ne sauroit avoir une valeur déterminée, à moins que la formule $q\,dV$ ne soit intégrable. Mais je remarque de plus, qu'il n'est pas nécessaire dans ce cas, que la formule :

$$(P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz$$

soit intégrable, pourvû qu'elle soit telle, qu'étant multipliée par une certaine fonction U, elle devienne intégrable. Soit donc

$$U(P-X)dx + U(Q-Y)dy + U(R-Z)dz = dW,$$

& puisque nous avons $\frac{dp}{q} = \frac{dW}{U}$, ou $dp = \frac{q\,dW}{U}$, il suffit pour la possibilité de cette équation, que W soit une fonction de $\frac{q}{U}$, ou que W soit une fonction de nulle dimension des quantités q & U.

XXXVII. Mais, en général de quelque maniere que l'élasticité p dépende tant de la densité q, que d'une autre qualité exprimée par r, fonction quelconque des coordonnées x, y, z, qui pourroit encore renfermer le tems t, il est clair de notre équation $q = \frac{dp}{dV}$, que le différentiel dp doit toujours être divisible par dV, où dV marque non tant un différentiel réel, que cette formule :

$$(P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

& cela tellement, que par la division les différentiels dx, dy, & dz sortent entièrement du calcul : car tant p que q doivent toujours être exprimés par des fonctions finies de x, y, & z, sans que leurs diffé-

différentiels y entrent. Or cela ne ſauroit arriver, à moins qu'il n'y eut une fonction U, par laquelle la formule dV étant multipliée devienne intégrable: car poſant cette intégrale $\int U\,dV = W$, il eſt clair que p doit être une fonction de W, pour que la formule $\frac{dp}{dV}$ obtienne une valeur déterminée, telle qu'il convient à la denſité q.

XXXVIII. Puisque $U\,dV = dW$, nous aurons $q = \frac{U\,dp}{dW}$; donc, ſi nous prenons pour W une fonction quelconque des coordonnées x, y, & z, renfermant le tems t parmi les quantités conſtantes, & que nous poſions p égale à une fonction quelconque de W, ſavoir $p = \Phi{,}W$, & $dp = dW.\Phi'{,}W$, nous aurons $q = U.\Phi'{,}W$; donc $U = \frac{q}{\Phi'{,}W}$. Et partant, de quelque maniere que la denſité q ſoit donnée par l'élaſticité p, & quelqu'autre fonction r des coordonnées x, y, & z, nous en tirerons la valeur de $U = \frac{q}{\Phi'{,}W}$, & par conſéquent celle de $dV = \frac{dW.\Phi'{,}W}{q}$, qui nous fournit enſuite cette équation :

$$(P-X)dx + (Q-Y)dy + (R-Z)dz = \frac{dW.\Phi'{,}W}{q} = \frac{dp}{q},$$

d'où l'on obtiendra les valeurs X, Y, Z, desquelles enfin il faut chercher les valeur des viteſſes u, v, & w: & quand celles-cy ſatisfont outre cela à la condition de la continuité, on aura un cas d'un mouvement poſſible du fluide.

XXXIX. Voilà donc à quoi ſe réduit la quéſtion ſur la nature de la formule :

$$(P-X)dx + (Q-Y)dy + (R-Z)dz.$$

Pp

Lors-

Lorsque la denſité q eſt conſtante, où qu'elle dépend uniquement de l'élaſticité p, il faut que cette formule ſont abſolument intégrable, & pour cet effet il s'agit de déterminer des valeurs convenables pour les trois viteſſes u, v, & w. Or, lorsque la denſité q dépend d'une fonction donnée du lieu & du tems, la formule doit être telle, qu'étant multipliée par une certaine fonction donnée U, elle devienne intégrable. Dans l'un & l'autre cas donc les viteſſes u, v, & w, doivent être telles que cette équation :

$$(P - X)dx + (Q - Y)dy + (R - Z)dz = 0$$

devienne poſſible : or on ſait les conditions, ſous lesquelles une équation différentielle entre trois variables devient poſſible ; & ayant ſatisfait à cette condition, il faut encore ſatisfaire à celle que la continuité exige.

XL. Ce ſont les conditions, par lesquelles doivent être limitées les fonctions qui expriment les trois viteſſes u, v, & w, & toute la recherche ſur le mouvement des fluides revient à ce qu'on détermine en général la nature de ces fonctions, par lesquelles les conditions de notre équation différentielle, & de la continuité ſoient remplies. Or puisque les quantités X, Y, & Z, dépendent non ſeulement des viteſſes u, v, & w mêmes, mais auſſi de leur variabilité par rapport à chacune des coordonnées, x, y, & z, & encore du tems t, cette recherche paroit la plus profonde, qui ſe puiſſe trouver dans l'Analyſe : & s'il ne nous eſt pas permis de pénétrer à une connoiſſance complette ſur le mouvement des fluides, ce n'eſt pas à la Mécanique, & à l'inſuffiſance des principes connus du mouvement, qu'il en faut attribuer la cauſe ; mais l'Analyſe même nous abandonne ici, attendu que toute la theorie du mouvement des fluides vient d'être réduite à la réſolution des formules analytiques.

XLI. Comme une ſolution générale doit être jugée impoſſible par le défaut de l'Analyſe, nous devons nous contenter de la connoiſſance de quelques cas particuliers, & cela d'autant plus, puisque le déve-

dévelopement de plusieurs cas semble l'unique moyen de nous conduire enfin à une plus parfaite connoissance. Or le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, est sans doute lorsqu'on met les trois vitesses u, v, & w égales à zero, ce qui est le cas, où le fluide demeure dans un parfait repos & que j'ai traité dans mon Mémoire précédent. Or nos formules trouvées pour le mouvement en général renferment aussi le cas d'équilibre: car puisque $X = 0$, $Y = 0$, & $Z = 0$, nous aurons : $\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz$, & $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$, d'où nous voyons d'abord que la densité q ne sauroit dépendre du tems t, ou qu'elle doit demeurer toujours la même au même endroit. Ensuite les forces P, Q, R, doivent être telles que la formule différentielle $Pdx + Qdy + Rdz$ devienne, ou intégrable, lorsque q est constante, ou dépendante uniquement de l'élasticité p; ou telle qu'étant multipliée par une certaine fonction elle devienne intégrable.

XLII. Dans mon Mémoire sur l'équilibre des fluides, je n'avois consideré que les cas des forces sollicitantes P, Q, R, où la formule différentielle $Pdx + Qdy + Rdz$ devient intégrable, puisque ce cas paroissoit le seul qui pût avoir lieu dans la Nature. En effet si la densité q est, ou constante, ou qu'elle dépende uniquement de la pression p, le fluide ne sauroit jamais être en équilibre, à moins que cette condition des forces sollicitantes n'ait lieu. Mais, en cas qu'il fut possible que les forces sollicitantes tinssent une autre loi, il pourroit y avoir un équilibre, pourvû qu'elles fussent telles, qu'il y eut une fonction U, qui étant multipliée par la formule $Pdx + Qdy + Rdz$ la rende intégrable, ou bien que l'équation différentielle $Pdx+Qdy+Rdz = 0$ devienne possible; car alors, si la densité q est exprimée par cette fonction U, ou par un produit de cette fonction U par une fonction quelconque de l'élasticité p, l'équilibre pourra également avoir lieu. Or, comme tels cas ne sont peut-être pas possibles, je ne m'arrête pas à les déveloper plus amplement.

XLIII. Après le cas d'équilibre l'état le plus ſimple, qui ſauroit ſubſiſter dans le fluide, eſt celui où le fluide tout entier eſt porté d'un mouvement uniforme ſuivant la même direction. Voyons donc comment cet état eſt contenu dans nos deux formules. Or dans ce cas les trois viteſſes étant conſtantes, poſons: $u = a$; $v = b$; & $w = c$; & nous aurons: $X = 0$; $Y = 0$; & $Z = 0$; d'où nos deux équations ſe changeront dans les ſuivantes :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

& $$\left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$

où il eſt clair que, ſi la denſité q étoit conſtante, la condition de la derniere équation feroit remplie ; mais que la premiere ne ſauroit ſubſiſter, à moins que la formule $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ n'admit l'intégration, tout comme ſi le fluide étoit en repos : & il eſt naturel qu'un tel mouvement ne ſauroit rien changer dans la preſſion.

XLIV. Mais ſi la denſité q n'eſt pas conſtante, voyons d'abord quelle fonction de x, y, z, & t elle doit être, pour que la ſeconde équation ſoit ſatisfaite. Voilà donc une queſtion analytique bien curieuſe, par laquelle on demande quelle fonction de x, y, z, & t, doive être priſe pour q, afin qu'il devienne :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$

& la ſolution de cette queſtion paroit bien difficile étant priſe dans toute ſon étenduë poſſible. Mais, puiſque dans le cas de $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, la quantité q feroit une fonction quelconque de x, y, & z, ſans renfermer le tems t, ſi nous ramenons ce cas à celui de repos en imprimant à l'eſpace un mouvement égal & contraire, il eſt évident qu'après le tems t les coordonnés x, y, & z, feront transformées par le changement en $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, d'où nous concluons qu'on ſatisfera à notre équation en prenant pour q une fonction quelconconque des trois quantités $x-at$; $y-bt$; $z-ct$. Et en effet on s'assure aisément, qu'une telle fonction satisfait, puisqu'il y aura:

$$dq = L(dx-adt)+M(dy-bdt)+N(dz-cdt),$$

& partant:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)=-aL-bM-cN;\ \left(\frac{dq}{dx}\right)=L;\ \left(\frac{dq}{dy}\right)=M;\ \&\ \left(\frac{dq}{dz}\right)=N.$$

XLV. Or, pour satisfaire à la premiere équation, il faut, comme j'ai déjà remarqué, que la formule différentielle $Pdx+Qdy+Rdz$ soit telle, qu'étant múltipliée par une certaine fonction U elle devienne intégrable. Soit donc $\int U(Pdx+Qdy+Rdz=W$, où la constante qui entre par l'intégration renferme aussi d'une maniere quelconque le tems t, & il est clair que la formule $Pdx+Qdy+Rdz$ admettra aussi l'intégration, étant multipliée par Uf,W, où U & W sont des fonctions connuës, puisque les forces sollicitantes sont supposées connuës. Donc, si q ne dépend point de p, il faut qu'il y ait $q=Uf,W$, d'où l'on doit déterminer la fonction des trois quantités $x-at$; $y-bt$; & $z-ct$; afin qu'elle soit reductible à la forme Uf,W. Or si q dépend uniquement de p, il faut que la formule $Pdx+Qdy+Rdz$, soit absolument intégrable, ou bien $U=1$, & alors, puisque p sera trouvée égale à une fonction de W, la densite q en sera aussi fonction; qui devant aussi être fonction des quantités $x-at$; $y-bt$; $z-ct$; on en déduira la nature de cette fonction.

XLVI. Mais on voit qu'en général la pression p doit toujours être une fonction de W, puisque d'ailleurs la densité q, ne sauroit être une fonction finie. Soit donc $p=f,W$, & $dp=dW.f',W$, d'où à cause de $Pdx+Qdy+Rdz=\frac{dW}{U}$, on aura $q=Uf',W$. Ce cas ne sauroit donc subsister, à moins que la densité q ne soit proportionnelle au produit de la quantité U par une fonction de la pression p, ou bien au produit d'une telle quantité $U\phi,W$, par une

 fonc-

fonction quelconque de p, prenant ϕ, W, pour marquer une fonction donnée de W. Soit par exemple $q = pp U \phi, W$, & on aura $f', W = \frac{d(f, W)}{dW} = (f, W)^2 \phi, W$, d'où l'on trouvera que la fonction inconnuë f, W est composée de W : car dans cet exemple on aura $\frac{1}{f, W} = -\int dW, \phi W = \frac{1}{p}$: & de là on exprimera p par W, & partant aussi la valeur de q sera connuë. Laquelle, quand elle sera réductible à la forme d'une fonction des quantités $x-at$, $y-bt$, $z-ct$, l'état supposé du fluide sera possible, & on en connoitra la pression & la densité pour tout tems & à chaque endroit.

XLVII. Un exemple éclaircira mieux ces opérations, lesquelles, puisque nous n'y sommes pas encore assés accoutumés, pourroient paroitre trop obscures. Soit donc $P = y$, $Q = -x$, & $R = 0$, & ayant $\frac{dp}{q} = ydx - xdy$, nous aurons $U = \frac{1}{yy}$, & $W = \frac{x}{y} + T$, où T marque une fonction quelconque du tems t. Soit de plus $q = \frac{pp}{yy}$, & puisque $\frac{dp}{pp} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, nous obtiendrons $\frac{1}{p} = \Theta - \frac{x}{y}$, & $p = \frac{y}{\Theta y - x}$, où la constante Θ renferme aussi le tems t. Nous aurons donc $q = \frac{1}{(\Theta y - x)^2}$, qui devant être fonction de $x - at$, & $y - bt$, puisque z n'y entre pas, cela ne sauroit arriver autrement, que prenant $\Theta = \frac{a}{b}$; & alors nous aurons $q = \frac{bb}{(ay - bx)^2}$, & $p = \frac{by}{ay - bx}$. Donc, ni la pression, ni la densité, ne dépendent point du tems, & seront au même endroit constamment les mêmes. Cet exemple fait voir, comment en d'autres cas qu'on voudra imaginer, le calcul doit être manié.

XLVIII.

XLVIII. Ayant expédié ce cas, où les trois viteſſes ſont constantes, ſuppoſons maintenant, que deux viteſſes v & w évanouiſſent, ce qui donnera le cas, où toutes les particules du fluide ſe meuvent ſuivant la direction de l'axe OA, de ſorte que le chemin décrit par chacune ſoit une ligne droite parallele à l'axe OA ; ce cas diffère du précédent, puiſque nous conſidérons la viteſſe u, comme variable, tant par rapport au lieu qu'au tems. Ayant donc

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right); \quad Y = 0; \quad Z = 0;$$

nos deux équations ſeront :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - dx\left(\frac{du}{dt}\right) - u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$\& \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.\,qu}{dx}\right) = 0.$$

Cette derniere équation nous donne d'abord à connoitre, que cette formule $q\,dx - qu\,dt$ doit être intégrable : or, par rapport à cette intégration les quantités y & z, ſont regardées comme conſtantes : il faut donc que q multiplié par $dx - u\,dt$ devienne une formule différentielle complette, ou intégrable.

XLIX. Si la denſité du fluide eſt partout & toujours la même ou q une quantité conſtante $= g$, puiſqu'alors $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, il eſt clair que la viteſſe u, doit être indépendante de la variable x. Soit donc u une fonction quelconque des deux autres coordonnées y, z, & du tems t, & notre équation différentielle ſera :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - dx\left(\frac{du}{dt}\right),$$

où le tems t eſt ſuppoſé conſtant : il faut donc que cette formule ſoit intégrable. Donc, ſi la formule tirée des forces ſollicitantes $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ eſt intégrable d'elle même, il faut que

dx

$dx\left(\frac{du}{dt}\right)$ le ſoit auſſi. Or puisque $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ne renferme pas x, s'il y avoit des y, & z, la formule $dx\left(\frac{du}{dt}\right)$ ne ſauroit être intégrable : il faut donc que $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ne renferme point y & z. Que Z ſoit une fonction quelconque de y & z, & T une du ſeul tems t, & la valeur $u = Z + T$ ſatisfera à cette condition, d'où l'on tirera à cauſe de $Pdx + Qdy + Rdz = dV$ & $\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{dT}{dt}\right)$, cette équation intégrale $\frac{p}{q} = V - x\left(\frac{dT}{dt}\right) + Const.$

L. Pour déveloper mieux ce cas, il faut remarquer que chaque particule du fluide Z, n'a d'autre mouvement que ſelon la direction ZP parallele à l'axe ZA, & partant chaque élément du fluide décrira par ſon mouvement une ligne droite parallele à cet axe, de ſorte que pour le même élément les deux coordonnées y & z ne changent point de valeur. Donc, ou le mouvement de chaque particule ſera uniforme, ou changera avec le tems d'une telle maniere, que toutes les particules ſubiſſent à chaque inſtant des changemens égaux dans leurs mouvemens, ce qui eſt évident par la formule $u = Z + T$. Or pour l'état de preſſion ayant cette formule $p = gV - gx\left(\frac{dT}{dt}\right) + Const.$ où la conſtante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque, elle dépend, outre de l'effort des forces V, encore de ce changement de viteſſe, que chaque élément du fluide ſubit ; & outre cela elle peut varier avec le tems d'une maniere quelconque.

LI. Ce cas me fournit l'occaſion d'éclaircir quelques doutes, qui doivent ſe préſenter naturellement, & dont l'explication ſera très importante dans la théorie, tant de l'équilibre que du mouvement des flui-

fluides. D'abord on ſera ſurpris, qu'un changement dans la viteſſe du fluide puiſſe avoir lieu, ſans que les forces ſollicitantes P, Q, R, concourent à le produire ; puisqu'on voit que ce changement ſuppoſé pourroit ſubſiſter, quand même les forces ſollicitantes évanouïroient, & on demandera avec raiſon par quelle cauſe ce changement eſt produit. Enſuite il ſemble auſſi paradoxe, que la preſſion puiſſe varier à chaque inſtant d'une maniére quelconque, & cela indépendamment du dit changement, auquel le mouvement eſt aſſujetti. Cette derniere difficulté ſubſiſte même dans l'état d'équilibre: car en faiſant évanouïr les trois viteſſes u, v, w, on a pour les fluides incompreſſibles cette équation intégrale $\frac{p}{g} = V + \text{Conſt.}$ où la conſtante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque.

LII. Pour mieux comprendre cela, on n'a qu'à concevoir une maſſe déterminée, & renfermée dans un vaiſſeau ; & il eſt clair que l'état de preſſion ne dépend pas ſeulement des forces ſollicitantes, mais auſſi des forces étrangeres, qui peuvent agir ſur le vaiſſeau. Car, quand même il n'y auroit point de forces ſollicitantes, par le moyen d'un piſton dont on agiroit ſur le fluide, on pourroit produire ſucceſſivement tous les états poſſibles de preſſion ſans que l'équilibre en fût troublé : or c'eſt ce que notre formule, qui devient dans ce cas, $\frac{p}{g} =$ fonction du tems t, nous donne à connoitre; d'où nous voyons, que l'état de preſſion peut varier à chaque inſtant, & cela indépendamment de l'équilibre. Mais, connoiſſant pour chaque inſtant la preſſion à un endroit quelconque, les preſſions en tous les autres endroits en ſeroit déterminées ; & puisqu'il pourroit arriver, que le piſton fut pouſſé tantôt avec plus, tantôt avec moins de forces, il faut que le calcul montre tous ces changemens poſſibles: & la même variabilité doit auſſi avoir lieu, quand le fluide eſt ſollicité par des forces accélératrices quelconques, de ſorte qu'à chaque inſtant l'état de preſſion eſt indéterminé, & dépend de la force qui agit alors ſur le piſton.

 LIII.

LIII. Voilà donc une différence très essentielle entre les forces accélératrices, qui agissent sur tous les élémens du fluide, & entre la force d'un piston, dont le fluide est poussé: ce ne sont que les forces accélératrices, qui entrent dans notre équation différentielle, & la force du piston n'entre dans le culcul, qu'après qu'on aura intégré, & n'affecte que la constante, que l'intégration entraine ; qu'il faut par conséquent en chaque cas déterminer en sorte, qu'à l'endroit du piston la pression devienne précisément égale à la force, dont le piston est poussé à chaque moment : & c'est à cause de cela, que ladite constante renferme le tems, pour qu'on la puisse varier avec le tems à volonté, selon que les circonstances l'exigent. Cette variabilité peut toujours être représentée par l'action d'un piston ; car de quelque nature que puisse être un cas proposé, pour qu'il soit déterminé, il faut toujours supposer, que du moins à un endroit du fluide la pression soit connuë à chaque instant : & c'est de cette circonstance, qu'il faut tirer la détermination de la constante introduite dans le calcul par l'intégration de notre équation différentielle.

LIV. Mais pour notre cas du mouvement expliqué §. 49. supposons aussi les forces accélératrices évanouïssantes, ou $V = o$, & pour rendre le cas tout à fait déterminé, supposons $u = a + \alpha y + \beta t$, & nous aurons pour ce cas cette équation qui détermine la pression $\frac{p}{g} = \text{Const.} - \beta x$. Supposons de plus cette constante $= \gamma + \delta t$, de sorte que $\frac{p}{g} = \gamma + \delta t - \beta x$, & voyons sous quelles conditions ce mouvement puisse avoir lieu. Puisque chaque élément du fluide se meut selon la direction de l'axe OA, ce mouvement ne sauroit avoir lieu, que dans un tuyau cylindrique couché selon la même direction.

Fig. 4. Soit ABIO ce tuyau, & qu'au commencement, où $t = o$, le fluide en ait rempli la portion ABCD, terminée par les sections AB, & CD, perpendiculaires au tuyau. Comptons les abscisses x depuis le point A, sur la droite AI, & sur la base AB la pression étoit partout

$p =$

$p = \gamma g$: & sur l'autre base $CD = g\gamma - \epsilon g . AC$; mais au dedans du fluide, à un endroit quelconque Z, posant $AP = x$; $PZ = y$; la pression étoit $= \gamma g - \epsilon g x$. On ne sauroit donc concevoir le fluide dans le tuyau plus étendu que jusqu'en CD, prenant $AC = \frac{\gamma}{\epsilon}$, afin que la pression en CD ne devienne négative.

LV. Posons pour cette masse déterminée de fluide la longueur $AC = b$, la largeur $AB = CD = c$, la hauteur n'entrant pas en considération, puisque, ni les vitesses, ni les pressions, ne dépendent point de la troisième coordonnée z, & prenant $\gamma = \epsilon b$, dans l'état initial ABCD, la pression sur la base AB étoit $= \epsilon b g$, sur la base $CD = o$, & à un point quelconque $Z = \epsilon g(b - x) = \epsilon g . CP$. Or dans cet état nous supposons, que le fluide ait un tel mouvement selon la direction du tuyau, que la vitesse sur la ligne AC soit $= a$, sur la ligne $BD = a + \alpha c$, & sur une ligne quelconque QR parallele à la direction du tuyau $= a + \alpha y$, posant $AQ = CR = y$. Nous concevons donc, que par une cause quelconque ait été imprimé au fluide ce mouvement, & qu'il soit poussé au premier instant sur la surface AB par le moyen d'un piston, par la force indiquée $\epsilon b g$, l'autre base CD n'étant assujettie à aucune pression. Mais dans les instans suivans les forces qui agissent sur les faces extrèmes pourroient varier à volonté: or cette variabilité est déterminée par les hypothéses, que nous venons d'établir; voyons donc comment en vertu de ces hypotheses le mouvement du fluide sera continué.

LVI. Après un tems écoulé $= t$, tous les élémens du fluide, qui se trouvent sur la ligne QR, auront une vitesse selon cette même direction $= a + \alpha y + \epsilon t$, par laquelle ils parcourront dans l'instant dt l'espace $(a + \alpha y + \epsilon t) dt$; ils auront donc parcouru depuis le commencement l'espace $= at + \alpha y t + \frac{1}{2} \epsilon t t$; & partant la filée du fluide qui étoit au commencement en QR, se trouvera à présent avancée en qr, ayant parcouru l'espace $Qq = at + \alpha y t + \frac{1}{2} \epsilon t t$.

Donc le fil AC fera parvenu en ac, ayant parcouru l'efpace $Aa = at + \frac{1}{2}\beta tt$, & le fil BD en bd, ayant parcouru l'efpace $Bb = at + \alpha ct + \frac{1}{2}\beta tt$; de forte que la maffe fluide fera maintenant terminée par les faces ab & cd, droites, mais obliques à la direction du tuyau. Or il faut qu'à préfent la preffion fur la face ab en q foit $= g(\beta + \delta t - \beta.Qq) = g(\beta b + \delta t - \beta at - \alpha\beta yt - \frac{1}{2}\beta\beta tt)$, & fur la face cd en

$$r = g(\beta b + \delta t - \beta.Qr) = g(\delta t - \beta at - \alpha\beta yt - \tfrac{1}{2}\beta\beta tt).$$

Il faut donc concevoir des piftons, qui agiffent avec ces forces fur les deux extrémités ab & cd, & puisque ces preffions ne font pas les mêmes par toute l'étenduë de ces faces, il faut concevoir des piftons flexibles & pliables, par le moyen defquels ces preffions puiffent être exécutées.

LVII. Ce mouvement demeureroit le même, fi dans l'intégration de la preffion p, nous euffions pris au lieu de δt une fonction quelconque de t; mais alors l'état de preffion dans la maffe fluide deviendroit différent à chaque inftant, fans que le mouvement fuppofé même du fluide en fouffrit quelque altération. Pofons donc $\delta t = \beta at + \alpha\beta ct + \frac{1}{2}\beta\beta tt$, & après le tems t la preffion à un point quelconque q de la face ab, fera $= g[\beta b + \alpha\beta(c-y)t]$, & dans un point quelconque z, fur la ligne qr, la preffion fera $g[\beta b + \alpha\beta(c-y)t - \beta.qz]$, d'où la preffion à l'autre extrémité r fera $= \alpha\beta g(c-y)t$. Donc, fur la face ab, la preffion fera en $a = \beta g(b + \alpha ct)$; & en $b = \beta gb$: mais fur l'autre face cd, la preffion fera en $c = \alpha\beta gct$, & en $d = 0$. Au refte chaque fil QR fe mouvra felon fa propre direction d'un mouvement uniformement accéléré, ou recevra en tems égaux des accroiffemens égaux de viteffe. Le dévelopement de ce cas particulier peut fervir pour éclaircir le calcul qu'on aura à faire pour tous les autres cas.

LVIII. Arrêtons-nous encore au cas propofé (§. 48.), & fuppofons la denfité q conftante $= g$: mais prenons les forces P, Q, R, telles,

telles, que le fluide ne sauroit jamais être à l'équilibre. Soit pour cet effet $P = 0$, $Q = -\frac{x}{a}$, & $R = -\frac{x}{a}$, & posons $u = b + \frac{(y+z)t}{a}$, pour avoir $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, & $\frac{dp}{g} = -\frac{xdy - xdz}{a} - \frac{ydx - zdx}{a}$, d'où nous tirons en intégrant $\frac{p}{g} = \text{Const.} - \frac{xy - xz}{a}$, où la constante peut renfermer le tems d'une maniere quelconque. Il n'est donc pas possible, que toute la masse du fluide demeure jamais en repos; car, quoique nous posions $b = 0$, pour avoir le fluide en repos au commencement $t = 0$, aussi-tôt après le premier instant il sera agité, & il n'y aura que les élémens, où $y = 0$, ou $z = 0$, ou $y + z = 0$, qui demeureront en repos: tous les autres recevront un mouvement, ou en avant, ou en arrière, selon que $y + z$, aura une valeur positive, ou négative. On déterminera aussi aisément les pressions réquises pour maintenir ce mouvement supposé.

LIX. Mais que la densité ne soit plus constante, mais variable, ou le fluide compressible, & pour que $q\,dx - qu\,dt$ devienne une différentiel complet, on peut prendre pour u une fonction quelconque des variables x, y, z, & t; car puisque ici on ne regarde que les deux x & t comme variables, & les deux autres y & z comme constantes, on pourra toujours assigner une quantité s, telle que $s(dx - u\,dt)$ devienne intégrable. Soit S cette intégrale, & cette condition sera remplie, lorsqu'on prend $q = sf : S$, supposant $S = \int s(dx - u\,dt)$. Maintenant il faut de plus, que cette équation différentielle soit intégrable :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - dx\left(\frac{du}{dt}\right) - u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right),$$

où je remarque que si les forces P, Q, R, étoient évanouïssantes, la pression p deviendroit fonction de x & de t, & partant cette

 quan-

quantité $q\left(\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$, ne devroit renfermer que les deux variables x & t, d'où la nature de la fonction u, entant qu'elle peut renfermer y & z, doit être déterminée.

LX. Quoique j'aye supposé ici $v=0$ & $w=0$, ces formules renferment tous les cas, où le mouvement de toutes les particules du fluide suit toujours la même direction ; car on n'aura qu'à prendre l'axe OA sur cette même direction. Or de là nous pourrons réciproquement résoudre nos formules, lorsque la direction du mouvement est oblique à la position des trois axes, ce qui ne manquera pas de nous fournir quelques éclaircissemens dans cette Analyse. Pour cet effet considérons la vitesse vraye d'une particule quelconque Z du fluide qui soit $=\text{ȣ}$, & puisque sa direction est donnée à l'égard des trois axes, les vitesses dérivées y tiennent des rapports donnés. Soit donc : $u=\alpha \text{ȣ}$; $v=\beta \text{ȣ}$; & $w=\gamma \text{ȣ}$;
& posant $d\text{ȣ}=\mathrm{K}dt+\mathrm{L}dx+\mathrm{M}dy+\mathrm{N}dz$, nous aurons:

$$\mathrm{X}=\alpha\mathrm{K}+\alpha\alpha\mathrm{L}+\alpha\beta\mathrm{M}+\alpha\gamma\mathrm{N}$$
$$\mathrm{Y}=\beta\mathrm{K}+\alpha\beta\mathrm{L}+\beta\beta\mathrm{M}+\beta\gamma\mathrm{N}$$
$$\mathrm{Z}=\gamma\mathrm{K}+\alpha\gamma\mathrm{L}+\beta\gamma\mathrm{M}+\gamma\gamma\mathrm{N}.$$

Donc, si nous posons pour abréger $\mathrm{K}+\alpha\mathrm{L}+\beta\mathrm{M}+\gamma\mathrm{N}=\mathrm{O}$, ayant $\mathrm{X}=\alpha\mathrm{O}$, $\mathrm{Y}=\beta\mathrm{O}$, $\mathrm{Z}=\gamma\mathrm{O}$, nos équations seront :

$$\frac{dp}{q}=\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz-\mathrm{O}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz).$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\alpha\left(\frac{d.q\text{ȣ}}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d.q\text{ȣ}}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d.q\text{ȣ}}{dz}\right)=0.$$

LXI. Soit d'abord la densité $q=g$, & pour satisfaire à cette égalité $\alpha\left(\frac{d\text{ȣ}}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d\text{ȣ}}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d\text{ȣ}}{dz}\right)=0$, nous avons vû dans le §. 44. que la quantité ȣ doit être une fonction quelconque des quantités

tités $\alpha y - \beta x$ & $\alpha z - \gamma x$, ou $\beta z - \gamma y$, & qui puiſſe outre cela renfermer le tems t d'une maniere quelconque. Soit donc u une fonction quelconque des quantités $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$, & t, puisque la formule $\beta z - \gamma y$ eſt déjà formée des deux autres, & on comprend aiſément de là, que dans chaque inſtant la viteſſe des particules qui ſe trouvent dans une même ligne droite, parallele à la direction du mouvement, eſt par tout la même, tout comme la nature de l'hypotheſe exige. Donc le différentiel de u aura une telle forme :

$$du = F\,dt + G(\alpha\,dy - \beta\,dx) + H(\alpha\,dz - \gamma\,dx),$$

de ſorte que :

$$K = F;\ L = -\beta G - \gamma H;\ M = \alpha G;\ \&\ N = \alpha H;$$

& partant $O = F$ fonction de $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$, & de t : d'où l'équation différentielle qui reſte à réſoudre, ſera :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - F(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz).$$

LXII. Le tems t étant ici ſuppoſé conſtant, ſi la formule $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dV$, & intégrable d'elle-même, il faut que l'autre partie $F(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)$ le ſoit auſſi; ce qui ne ſauroit arriver, à moins que F ne ſoit une fonction de $\alpha x + \beta y + \gamma z$, & du tems t. Mais il faut de plus que F ſoit auſſi une fonction des quantités $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$, & du tems t : donc puisque la formule $\alpha x + \beta y + \gamma z$, n'eſt pas compoſée des formules $\alpha y - \beta x$, & $\alpha z - \gamma x$, il eſt évident que la quantité F doit être fonction du ſeul tems t. Par conſéquent la viteſſe u ſera en ſorte $u = Z + T$, où Z marque une fonction quelconque des deux quantités $\alpha y - \beta x$, & $\alpha z - \gamma x$, ſans renfermer le tems t, & T eſt une fonction quelconque du ſeul tems t, de ſorte que $dT = F\,dt$. D'où l'intégrale de notre équation différentielle ſera $\frac{p}{g} = V - F(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \text{Conſt.}$ où la conſtante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque. Cette équation intégrale jointe à $u = Z + T$ contient tout ce qui regarde le mouvement du cas propoſé.

LXIII. Mais si la densité q n'est pas constante, il sera important de decouvrir la résolution de cette formule :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\alpha\left(\frac{d.q\upsilon}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d.q\upsilon}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d.q\upsilon}{dz}\right)=0.$$

Or, quelque difficile que cela puisse paroitre, la reduction au cas précédent nous montre, que la vitesse υ peut être une fonction quelconque des quatre variables x, y, z, & t, mais que la valeur de q doit être déterminée de la maniere suivante. Qu'on considére en général une telle formule :

$$s(l\,dx+m\,dy+n\,dz-\upsilon\,dt)=dS,$$

qui étant par s multipliée est devenuë intégrable, & soit $q=sf:S$; donc posant $d.f:S=dS.f':S$, notre formule deviendra:

$$f:S\left(\frac{ds}{dt}\right)-sf':S.s\upsilon+\alpha sf:S\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)+\alpha\upsilon f:S\left(\frac{ds}{dx}\right)+\alpha\upsilon sf':S.ls$$

$$+\beta sf:S\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right)+\beta\upsilon f:S\left(\frac{ds}{dy}\right)+\beta\upsilon sf':S.ms$$

$$+\gamma sf:S\left(\frac{d\upsilon}{dz}\right)+\gamma\upsilon f:S\left(\frac{ds}{dz}\right)+\gamma\upsilon f':S.ns$$

qui doit être égale à zero :

LXIV. Faisons d'abord évanouïr les termes affectés par $f':S$, & nous en obtiendrons $1=\alpha l+\beta m+\gamma n$, & le reste étant divisé par $f:S$ donne :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)+\alpha\left(\frac{d.s\upsilon}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d.s\upsilon}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d.s\upsilon}{dz}\right)=0,$$

qui est bien semblable à la proposée, mais il faut remarquer que l'intégrabilité de la valeur dS renferme ces conditions:

$$\left(\frac{d.s\upsilon}{dx}\right)=-\left(\frac{d.ls}{dt}\right);\ \left(\frac{d.s\upsilon}{dy}\right)=-\left(\frac{d.ms}{dt}\right);\ \left(\frac{d.s\upsilon}{dz}\right)=-\left(\frac{d.ns}{dt}\right);$$

d'où

d'où nous tirons: $\left(\frac{ds}{dt}\right)(1 - \alpha l - \beta m - \gamma n)$; ce qui est d'accord avec la condition précédente. Donc, pourvû qu'il soit $\alpha l + \beta m + \gamma n = 1$, & s une telle fonction qui rende $s(l dx + m dy + n dz - u dt) = dS$, ou intégrable, on satisfera à notre formule, lorsqu'on prend $q = s f : S$, ou $\frac{q}{s}$ égal à une fonction quelconque de S. Il n'est pas nécessaire que les quantités l, m, & n, soient constantes, mais alors il faut qu'il soit

$$\alpha\left(\frac{dl}{dt}\right) + \beta\left(\frac{dm}{dt}\right) + \gamma\left(\frac{dn}{dt}\right) = 0,$$

or cette condition est déjà renfermée dans l'équation $1 = \alpha l + \beta m + \gamma n$.

LXV. Or il faut de plus que l, m, & n, soient de telles fonctions, que l'équation différentielle $l dx + m dy + n dy - u dt = 0$ devienne possible; car sans cette condition il seroit impossible de trouver un multiplicateur s, qui rendit cette formule intégrable. Or, ayant pris à volonté une valeur pour l, celles de m & n en seront déjà déterminées, & nous nous pourrons dispenser de les chercher, en posant $\alpha l = 1$ où $l = \frac{1}{\alpha}$, car alors il faut qu'il soit $\beta m + \gamma n = 0$; & on n'aura qu'à chercher un tel facteur s, que cette formule $s\left(\frac{dx}{\alpha} - u dt\right)$ devienne intégrable, où l'on regardera les deux quantités y & z comme constantes. Soit donc $S = \int s\left(\frac{dx}{\alpha} - u dt\right)$, de sorte que S renferme y & z comme des constantes, & on pourra prendre $q = s f : S$: ce qui nous fournit la même solution, que si nous eussions tellement changé la position des trois axes, que l'un convint avec la direction du mouvement de tous les élémens du fluide. D'où nous voyons que cette restriction apparente n'affoiblit point la généralité de la solution.

 LXVI.

LXVI. De la même maniere on pourroit déveloper plusieurs autres cas particuliers, qui auront, tantôt une plus grande, tantôt une plus petite étendue ; mais on n'en trouvera point, qui soit plus général que celui, où les trois vitesses u, v, & w, sont telles, que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ devienne intégrable. Soit S l'intégrale, qui contenant encore le tems t soit son différentiel complet : $dS = u\,dx + v\,dy + w\,dz + \Pi\,dt$, & puisque

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) ; \quad \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) ; \quad \left(\frac{dw}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) ; \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right) ; \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right),$$

nous aurons :

$$X = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dx}\right) + w\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$Y = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) + u\left(\frac{du}{dy}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

$$Z = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right) + u\left(\frac{du}{dz}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

& notre équation différentielle deviendra :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - d\Pi - u\,du - v\,dv - w\,dw$$

(dont le dernier membre est absolument intégrable),

& l'autre équation demeure :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

LXVII. Tout se réduit donc à trouver des valeurs convenables pour les trois vitesses u, v, & w, qui satisfassent à nos deux équations, qui renferment tout ce qui regarde notre connoissance sur le mouvement des fluides. Car ayant ces trois vitesses, on pourra déterterminer le chemin, que chaque élément du fluide parcourt par son mouvement. Considérons la particule qui se trouve à présent en Z, & pour trouver le chemin, qu'elle a déjà parcouru, & qu'elle parcourra encore, puisque ses trois vitesses u, v, & w, sont supposées connues, nous aurons pour son lieu à l'instant suivant, $dx = udt$; $dy = vdt$ & $dz = wdt$. Qu'on élimine de ces trois égalités le tems t, & on aura encore deux équations entre les trois coordonnées x, y & z, qui détermineront le chemin cherché de l'élément du fluide, qui se trouve actuellement en Z, & en général on en connoitra la route, que chaque particule a décrite, & décrira encore.

LXVIII. La détermination de ces routes est de la derniere importance, & doit servir pour appliquer la Théorie à chaque cas proposé. Car si la figure du vaisseau, dans lequel le fluide se meut, est donnée, les particules du fluide, qui touchent à la surface du vaisseau, en doivent suivre nécessairement la direction: & partant les vitesses u, v, & w, doivent être telles, que les routes qui en seront déduites, tombent dans la surface même. Or nous voyons par là suffisamment, combien nous sommes encore éloignés de la connoissance complette du mouvement des fluides, & que ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant tout ce que la Théorie des fluides renferme, est contenu dans les deux équations rapportées cy-dessus (§. XXXIV.), de sorte que ce ne sont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la poursuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyse, qui n'est pas encore assés cultivée, pour ce dessein: & partant on voit clairement, quelles découvertes nous restent encore à faire dans cette Science, avant que nous puissions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.