1757

Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides

Leonhard Euler

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DE L'ETAT D'EQUILIBRE DES FLUIDES.
PAR. M. EULER.

I.

Je me propoſe ici de déveloper les principes, ſur lesquels toute l'Hydroſtatique, ou la Science de l'équilibre des fluides, eſt fondée. Pour leur donner la plus grande étenduë dont ils ſont ſuſceptibles, je renfermerai dans mes recherches non ſeulement les fluides, qui ont partout le même degré de denſité, tels que ſont l'eau, & les autres corps liquides, dont on dit, qu'ils ne reçoivent aucune compreſſion; mais auſſi ces fluides, qui ſont composés de particules d'une denſité différente, ſoit que cette différence leur convienne en vertu de leur propre nature, ſoit qu'elle réſulte des forces, dont les particules ſe preſſent mutuellement. On voit bien qu'à cette derniere eſpece, il faut rapporter l'air, & les autres corps fluides, qu'on nomme élaſtiques. Outre cela je ne bornerai pas mes recherches à la ſeule force de gravité; mais je les étendrai à des forces quelconques, dont chaque particule du fluide puiſſe être ſollicitée.

II. Voilà le plan, que je me ſuis proposé d'exécuter, d'où il eſt d'abord clair, que les principes communs de l'Hydroſtatique, qu'on trouve expliqués dans les élémens, ne ſont qu'un cas très particulier de ceux, que je m'en vais établir ici. Car d'un coté on ne regarde communément que la gravité, à l'action de laquelle les particules du fluide ſont aſſujetties; & de l'autre coté on ne conſidère que les fluides de la premiere espece, où toutes les parties gardent partout le même degré de densité. Et quoiqu'on n'ait pas negligé d'approfondir l'état d'équilibre des fluides élastiques, & en particulier de l'air, les principes qu'on en a établis, semblent si différens des premiers, qu'à peine les sauroit-on ramener à une origine commune, fondée dans la nature générale des fluides.

III. Quoique j'envisage ici une si grande généralité, tant par rapport à la nature du fluide, qu'aux forces qui agissent sur chacune de ses particules, je ne crains point les reproches, qu'on a souvent faits avec raison à ceux qui ont entrepris de porter à une plus grande généralité les recherches des autres. Je conviens qu'une trop grande généralité obscurcit souvent plutôt, qu'elle n'éclaire, & qu'elle mene quelquefois à des calculs si embrouïllés, qu'il est extrèmement difficile d'en déduire des conséquences pour les cas les plus simples. Quand les généralisations sont assujetties à cet inconvenient, il est bien certain qu'il vaudroit infiniment mieux s'en abstenir entièrement, & borner ses recherches à des cas particuliers.

IV. Mais, dans le sujet que je me propose d'expliquer, il arrive précisement le contraire: la généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouïr nos lumieres, nous découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, & on y trouvera des raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté & la simplicité. Ce sera une instruction importante d'apprendre que des principes, qu'on aura cru attachés à quelque cas particulier, ont une beaucoup plus grande étenduë. Ensuite ces recherches ne demanderont presque point un calcul plus embarrassant; & il sera aisé d'en faire l'application à tous les cas particuliers, qu'on puisse se proposer.

V. Or tout revient à bien fixer la premiere idée, sur laquelle doivent être fondés tous les raisonnemens, que nous aurons à faire pour parvenir à notre but: c'est l'idée de la nature de la fluidité en général. Car les loix d'équilibre des fluides ne sauroient différer de celles

les des corps solides, qu'entant que la nature des fluides est différente de celle des solides. Il s'agit donc de connoitre la différence véritable & essentielle, qui distingue les fluides des solides; ce qui est une question bien agitée entre les Philosophes & les Physiciens: mais de tout ce qu'ils en ont dit nous ne saurions rien déduire, qui fût propre à notre dessein. Que les moindres particules d'un fluide n'ayent aucune liaison entr'elles, & qu'elles se trouvent dans un mouvement continuel, est peut-être vray; mais cette vérité seroit absolument stérile par rapport aux recherches dont il est questien; il faut pour cet effet approfondir bien davantage la nature des corps fluides.

VI. Entant que cette propriété essentielle des fluides doit fournir les principes de l'Hydrostatique, je ne la trouve que dans cette qualité, par laquelle nous savons, qu'une masse fluide ne sauroit être en équilibre, à moins qu'elle ne soit sollicitée en tous les points de sa surface par des forces égales & perpendiculaires à la surface. Je suppose ici que les particules intérieures de la masse fluide ne soient sollicitées par aucunes forces; car, s'il y en avoit, les forces externes les devroient contrebalancer, outre qu'elles seroient égales entr'elles. Je considère donc une masse fluide, qui n'est assujettie à aucune force; & il n'y a nul doute, qu'elle ne soit en équilibre. Qu'on conçoive maintenant des forces, qui agissent extérieurement sur sa surface; & pour maintenir la masse en équilibre, il faut que ces forces y soient perpendiculaires, égales entr'elles, & qu'elles agissent sur tous les élémens de la surface. Si le fluide est élastique, il faut outre cela que l'élasticité soit égale à ces forces sollicitantes, pour empêcher que la masse ne s'étende dans un plus grand volume, ou qu'elle ne soit réduite dans un plus petit.

VII. Cette propriété distingue le plus essentiellement les corps fluides des solides. Un corps solide peut être tenu en équilibre étant sollicité par deux forces égales & contraires; & les parties qui sont à côté, n'en reçoivent aucun effort pour échaper. Or un amas de plusieurs corps solides déliés entr'eux approche déja davantage de la Fig. 1.

nature du fluide, comme on peut voir par le cas de 4 ſphères *a*, *b*, *c*, *d*, qui ſe touchent mutuellement; car, quoique les deux oppoſées *a* & *b* ſoient preſſées par des forces égales & contraires α A & β B, il n'y aura point d'équilibre: mais les deux autres en ſeront pouſſées ſelon les directions C γ & D δ par des forces, qui ſont à celles-là, comme la diſtance *c d* à la diſtance *a b*. Donc, pour conſerver ces quatre ſphères en équilibre, il faut ajouter aux forces α A & β B encore les forces γ C & δ D. S'il y avoit pluſieurs ſphères, ou autres corps ſolides, le maintien de l'équilibre demanderoit encore pluſieurs forces, ſelon leur nombre & ſituation mutuelle.

VIII. Qu'on conçoive ces ſphères infiniment petites, & leur nombre infiniment grand, & il pourra arriver, que l'état d'équilibre demandera une infinité de forces, qui agiſſent de tous côtés ſur cet amas, de ſorte que ſi une en manquoit, l'équilibre ſeroit détruit. On pourroit auſſi concevoir un tel arrangement parmi ces corpuſcules, que toutes les forces requiſes pour l'équilibre deviſſent égales entr'elles; ce qui repréſenteroit exactement le cas d'un fluide. Mais, outre que ce cas ſeroit, pour ainſi dire, moralement impoſſible, auſſi-tôt qu'il y arriveroit le moindre changement, les forces requiſes pour l'équilibre ne manqueroient pas de devenir extrèmement inégales entr'elles; au lieu que dans un fluide l'égalité de ces forces ſubſiſte toujours & néceſſairement, quelque changement que ſubiſſe le fluide. D'où il eſt clair que la fluidité ne ſauroit être expliquée par un amas de corpuſcules ſolides, quand même on les ſuppoſeroit infiniment petits, entièrement déliés entr'eux, & leur nombre infiniment grand: & il paroit encore fort douteux, ſi un mouvement inteſtin ſeroit capable de ſuppléer à ce défaut.

IX. Voilà donc en quoi conſiſte la nature de la fluidité, c'eſt qu'une maſſe fluide ne ſauroit être en équilibre, à moins qu'elle ne fût preſſée de toutes parts par des forces égales & perpendiculaires à ſa ſurface. Ainſi, lorsqu'une maſſe fluide, ABCDEF, eſt preſſée dans
Fig. 2. un endroit AB, par une force quelconque PM, dont la direction eſt

per-

perpendiculaire à la portion de la ſurface A B ſur laquelle elle agit, & que nous concevions une autre portion quelconque C D, pour que le fluide ſoit maintenu en équilibre, il faut que cette portion C D ſoit auſſi preſſée perpendiculairement par une force Q N, qui tienne à celle-là P M la même raiſon, que celle qui ſubſiſte entre les ſurfaces C D & A B. Si une de ces forces étoit moindre que ſelon cette raiſon, elle ne ſeroit pas ſuffiſante à reſiſter à l'action de l'autre, & partant l'équilibre ſeroit troublé. Il en eſt de même de toute autre portion de la ſurface du fluide, faiſant abſtraction de la gravité, & de toute autre force, qui pourroit agir immédiatement ſur les particules du fluide.

X. De là il s'enſuit, que ſi l'on connoit la preſſion par un endroit de la ſurface du fluide, on aura en même tems les preſſions ſur toutes les parties de la ſurface, qui ſont requiſes pour l'équilibre. Ainſi, poſant la baſe $AB = aa$, & la force dont elle eſt preſſée $= P$, une autre baſe quelconque $CD = cc$ ſera preſſée par la force $= \frac{cc}{aa} P$. Cette régle devient plus ſimple, ſi nous exprimons la force P par le poids d'un cylindre d'une matiere homogene grave, dont la baſe eſt $= aa$, c'eſt à dire à celle ſur laquelle cette force agit; ce cylindre aura donc une certaine hauteur, qui ſoit $= p$: & partant la force P ſera égale au poids d'une maſſe de ladite matiere homogene, dont le volume eſt $= aap$, ou bien on pourra mettre $P = aap$: de là la force qui doit agir ſur la baſe $CD = cc$, étant $= \frac{cc}{aa} P$ deviendra $= ccp$, ou ſera égale au poids d'un cylindre de la même matiere homogene, dont la baſe eſt $= cc$, & la hauteur la même qu'auparavant $= p$. Par la même raiſon toute autre portion de la ſurface $= ff$ de cette maſſe fluide, ſoutiendra une force $= ffp$.

XI. Donc, pour connoitre l'état des preſſions, par leſquelles une maſſe fluide eſt maintenuë en équilibre, il ſuffit de connoitre cette hau-

teur

teur p, qui eſt commune à tous les cylindres formés de cette matiere grave homogene, par les poids desquels nous exprimons ici les forces ſollicitantes. Car cette hauteur p étant connuë, on aſſignera aiſément la force, par laquelle chaque portion de la ſurface du fluide eſt preſſée: ainſi prenant une portion $= aa$, cette force ſera exprimée par le poids $= aap$. Comme cette force agit partout perpendiculairement ſur la ſurface, il eſt évident qu'on n'en ſauroit conclure immédiatement la force, que ſoutient une portion convexe ou concave de la ſurface; il faudra donc recourir à des élémens de la ſurface infiniment petits, & poſant un tel élement $= ds^2$, la force dont il eſt preſſé ſera $= pds^2$, & ſa direction perpendiculaire à l'élément, qu'on peut toujours regarder comme plan.

XII. Pour mieux comprendre la force de cette preſſion, qu'on conçoive le fluide renfermé dans un vaiſſeau, qui ait en AB une ouverture $= aa$, remplie par un piſton, ſur lequel agiſſe perpendiculairement une force PM $= aap$; cela poſé, le fluide preſſera partout également ſur les parois du vaiſſeau, de ſorte que s'il y avoit quelque part une ouverture Ee, le fluide y échaperoit actuellement. Or, pour empêcher la ſortie du fluide, ſi l'on bouche ce trou Ee, dont l'amplitude ſoit $= ee$, il y faut appliquer perpendiculairement une force $= eep$, d'où l'on connoit les forces, que chaque élément de la ſurface intérieure du vaiſſeau ſoutient de la part de la preſſion PM $= aap$, qui agit ſur la baſe AB $= aa$. Si cette baſe étoit moindre, & que la force preſſante le fût auſſi dans la même raiſon, la preſſion demeureroit néanmoins la même ſur le vaiſſeau; d'où l'on voit que la plus petite force PM eſt capable de produire une auſſi grande preſſion dans le vaiſſeau, qu'on voudra; pourvû qu'on rende la baſe AB $= aa$ aſſés petite, afin que dans l'expreſſion de la force aap la hauteur p devienne auſſi grande qu'on le ſouhaite.

XIII. Mais le fluide ſe trouvant dans un tel état de preſſion par l'action de quelque force PM $= aap$, non ſeulement tous les élémens

mens des vaiſſeaux ſoutiennent des preſſions, qui repondent à la même hauteur p, mais auſſi tous les élémens du fluide même ſe trouveront dans le même état de preſſion. Qu'on conçoive dans l'intérieur du fluide un diaphragme immatériel E J i F, qui retranche de la maſſe du fluide une portion quelconque AEFB; &, puiſque cette portion eſt en équilibre, toutes les particules du diaphragme ſoutiendront auſſi des forces, qui répondent à la même hauteur p. D'où il s'enſuit, que chaque élément de la maſſe fluide IKki ſera de toutes parts preſſé par de pareilles forces; ou bien toutes les particules du fluide ſeront preſſées les unes contre les autres par des forces qui répondent toutes à la même hauteur p; c'eſt donc l'égalité de toutes ces forces, qui conſtituë l'état d'équilibre, ſuppoſant toujours, qu'il n'y ait point de forces particulieres, comme la gravité, qui agiſſent ſur les particules du fluide.

XIV. Par là on eſt en état de ſe former une juſte idée de ce que je nomme l'état de preſſion d'un fluide; & cette preſſion ne ſauroit être mieux repréſentée que par une certaine hauteur, qui ſe rapporte à la gravité d'une matiere homogene, qu'on jugera la plus convenable pour employer à cette meſure. Ainſi, quand je dis que l'état de preſſion de l'élément du fluide J K k i eſt exprimé par la hauteur p, il faut entendre que chaque face de cet élément, qui ſoit $= ds^2$, eſt preſſée par une force, qui eſt égale au poids d'un cylindre de ladite matiere homogene, dont la baſe eſt $= ds^2$, & la hauteur $= p$. Cette hauteur p exprime donc la force, dont les élemens voiſins du fluide agiſſent de toutes parts ſur l'élément J K k i, & dont par conſéquent cet élément réagit ſur ceux-là. C'eſt donc auſſi par cette même force, que l'élement J K k i réſiſte à la compreſſion, par laquelle il ſeroit réduit à un moindre volume, de ſorte que ſi ſa réſiſtance étoit plus petite, il y ſeroit réduit actuellement.

XV. Cette conſidération nous mene à la diſtinction des fluides en élaſtiques & non-élaſtiques, ou compreſſibles & non-compreſſibles, quoique l'état d'équilibre, que nous venons d'expliquer, s'étende également

ment aux uns & aux autres. Car, ſi le fluide renfermé dans le vaiſſeau A B C D E F eſt élaſtique ou compreſſible, la force $P = aap$, qui agit ſur le piſton A B réduira le fluide à un tel degré de compreſſion, où elle ſe trouvera en équilibre ; & alors on comprend que l'élaſticité du fluide eſt préciſément égale à la force comprimante, ou bien la hauteur p ſervira auſſi de meſure à l'élaſticité du fluide. Si l'élaſticité étoit plus grande que la hauteur p, le piſton ſeroit repouſſé, jusqu'à l'état d'équilibre ; & ſi elle étoit plus petite, le piſton entreroit plus profondément : comme le fluide ne ſauroit, ni s'étendre à l'infini, ni ſe réduire dans un eſpace évanouïſſant, il y aura toujours un cas, où l'équilibre doit avoir lieu.

XVI. De là on entend, que lorsque un fluide compreſſible eſt réduit dans un moindre volume, ſon élaſticité doit devenir plus grande, puisqu'il faut employer une d'autant plus grande force, plus qu'on veut comprimer le fluide. L'élaſticité depend donc néceſſairement en ſorte de la denſité du fluide, que plus la denſité eſt augmentée, plus auſſi l'élaſticité devienne plus grande : quoiqu'il ne ſoit pas néceſſaire, que l'élaſticité ſuive préciſément la raiſon de la denſité ; comme on remarque auſſi dans l'air, que l'élaſticité n'eſt pas exactement proportionnelle à la denſité. Cependant, lorsque les changemens ne ſont pas conſidérables, & fort éloignés tant du plus grand volume que du plus petit, auquel le fluide peut être réduit, on peut ſuppoſer, que l'élaſticité ſoit parfaitement en raiſon de la denſité. Or il peut arriver qu'outre la denſité concoure encore une autre qualité à déterminer l'élaſticité, comme par exemple la chaleur, qui ſous le même degré de denſité augmente le reſſort de l'air. Mais, s'il y a de la différence entre la chaleur, on en peut comprendre l'effet dans la proportion qui ſubſiſte entre l'élaſticité & la denſité, & laquelle deviendra par là variable.

XVII. Donc, ſi une maſſe fluide ſe trouve en équilibre, & que la preſſion y ſoit exprimée par la hauteur p, cette même hauteur meſurera auſſi l'élasticité : & par le rapport qui subsiste entre la densité & l'élasticité, on connoitra aussi la densité, & réciproquement. Ainsi si la densité du fluide est $= q$, & que Q en marque la fonction à laquelle l'élasticité seroit proportionnelle, si la chaleur, ou toute autre qualité qui influë sur le ressort, étoit invariable; ce fluide ne sauroit être en équilibre, à moins que la pression p ne fut comme Q. Supposant maintenant la chaleur, ou autre quantité variable $= r$, où r marqueroit le ressort sous une densité donnée, la pression requise pour l'équilibre seroit comme Qr, ou plus généralement comme une certaine fonction de q & r. Soit Π cette fonction, dont la valeur devienne $= \Gamma$ dans un cas déterminé, où $q = g$, & $r = h$: donc, si dans ce cas l'élasticité est exprimée par la hauteur f, la proportion $f : p = \Gamma : \Pi$, donnera pour tout autre cas la pression ou l'élasticité $p = \frac{f\Pi}{\Gamma}$: expression qui par sa généralité s'étend à tous les cas imaginables.

XVIII. Il peut arriver qu'un très petit changement dans la densité en produise un très grand dans l'élasticité; de sorte que, soit qu'on augmente ou diminuë la pression p très considérablement, le fluide ne change pas sensiblement de volume, & qu'il conserve presque la même densité : & lorsque ce petit changement évanouït entièrement, nous aurons précisément le cas d'un fluide non-compressible, qui, sans changer de volume ou de densité, peut soutenir toute pression, quelque grande qu'elle soit. Dans ce cas il faut donc, que la fonction Π évanouïsse, de même que sa valeur déterminée Γ, afinque la fraction $\frac{f\Pi}{\Gamma}$ devienne indéterminée. Ou bien, la densité q pouvant en général être considerée comme une fonction de l'élasticité p, deviendra dans ce cas une quantité constante. On comprend de là, que c'est fort mal à propos, qu'on nomme ces fluides non-élastiques, puisqu'ils renferment plutôt tous les degrés possibles de l'élasticité sous la même densité : pendant que les fluides nommés élastiques renferment aussi tous les degrés possibles, mais chacun sous une densité différente.

XIX. La ſeule idée de la preſſion, que je viens d'établir & de repréſenter par une hauteur, renferme tout ce qui appartient à la connoiſſance de l'équilibre des fluides. Car on en connoit premièrement les forces, dont le fluide agit ſur le vaiſſeau qui le contient; & s'il arrive que quelque part ces forces évanouïſſent, l'équilibre ſubſiſtera ſans que le fluide ſoit renfermé dans cet eſpace. En ſecond lieu, un corps ſolide étant plongé dans le fluide, on pourra déterminer les forces, dont ce corps eſt preſſé de tous côtés, & partant auſſi les efforts, que le corps ſoutient de la part du fluide. En troiſième lieu, ſi les parties du fluide ſont ſuſceptibles de compreſſion, & qu'on connoiſſe le rapport entre la denſité & l'élaſticité, puiſque celle-cy eſt partout égale à la preſſion, on ſera en état d'aſſigner en chaque endroit la denſité du fluide. Or toutes les queſtions, qu'on peut former ſur l'équilibre des fluides, ſe réduiſent aiſément à ces trois articles, qui en fourniront les ſolutions.

XX. Nous venons de voir, que ſi les particules du fluide ne ſont, ni peſantes, ni ſollicitées par aucune force étrangere, l'équilibre ne ſauroit ſubſiſter, à moins que la preſſion ne fut la même dans
Fig. 2. tous les points du fluide. Donc un tel fluide étant renfermé dans le vaiſſeau A B C D E F, ſi dans un endroit la preſſion eſt repréſentée par la hauteur p, cette même hauteur exprimera auſſi la preſſion dans tous les points, tant au dedans de la maſſe fluide, que là où il touche les parois du vaiſſeau. L'élaſticité ſera donc auſſi par tout la même; d'où l'on connoitra par conſéquent la denſité à chaque endroit, pourvû qu'on ſache partout le rapport, qui régne entre l'élaſticité & la denſité. Un corps ſolide, comme J K k i, étant plongé dans ce fluide, ſoutiendra de tous côtés des preſſions égales, leſquelles ſe détruiſant mutuellement, le corps n'en ſouffrira aucun effort. Enfin à moins que la preſſion p n'évanouiſſe, il faut abſolument que le fluide ſoit renfermé dans un vaiſſeau, dont les parois ſoient aſſés fortes pour ſoutenir les preſſions.

XXI. Or si les particules du fluide sont sollicitées par la gravité, ou d'autres forces quelconques, le maintien de l'équilibre exige que l'action de ces forces soit détruite par les pressions du fluide, d'où la hauteur p, qui exprime la pression à chaque endroit, deviendra une quantité variable. Donc toute la Théorie de l'équilibre des fluides sera contenuë dans ce seul problème :

Les forces, dont tous les élémens du fluide sont sollicitées, étant données avec le rapport qui subsiste à chaque endroit entre la densité & l'élasticité du fluide ; trouver les pressions qui auront lieu dans tous les points de la masse fluide, pour qu'elle se trouve en équilibre.

La solution de ce problème fournira tout ce qu'on peut desirer sur l'état de l'équilibre de tous les fluides tant compressibles que non-compressibles. Voilà donc en peu de mots le sujet, sur lequel rouleront les recherches de ce Mémoire.

XXII. Je commence donc par considérer un point quelconque Z dans la masse fluide, dont je rapporterai la position à trois axes fixes OA, OB, & OC, perpendiculaires entr'eux au point O, & pris à volonté : ce qui se fera par les trois coordonnées OX, OY, & OZ, paralleles à ces axes, & partant perpendiculaires entr'elles. Je nomme ces coordonnées : Fig. 1.

$$OX = x, \quad XY = y, \quad \& \quad YZ = z,$$

dont la premiere OX est prise sur l'axe même OA, la seconde XY est parallele à l'axe OB; & la troisième YZ à l'axe OC. Les valeurs de ces trois coordonnées détermineront donc la situation du point Z, & par leur variabilité elles comprendront tous les points possibles, qu'on sauroit imaginer dans la masse fluide.

XXIII. Pour les forces, qui agissent sur les particules du fluide, je les regarde semblables à la gravité, entant qu'elles agissent proportionnellement aux masses, de sorte que s'il y avoit en Z une masse dou-

 ble,

ble, la force sollicitante feroit aussi double. Il y aura donc en Z une certaine force accélératrice, qui ne dépend pas de la masse qui s'y trouve. Si le fluide étoit assujetti à la seule quantité, cette force accélératrice feroit partout la même, & la direction tendroit verticalement en bas. Or, quelle que soit la force accélératrice qui agit au point Z, on la peut toujours décomposer suivant les directions des trois axes: soient ces forces accélératrices en Z:

celle qui agit selon ZL, parallele à $OA = P$
celle qui agit selon ZM, parallele à $OB = Q$
celle qui agit selon Zz, parallele à $OC = R$

où je considére ces quantités P, Q, R, comme des fonctions quelconques des trois variables x, y, & z, & pour leur donner des valeurs déterminées, j'exprime par l'unité la force accélératrice de la gravité, de sorte que les lettres P, Q, R, me marquent toujours des nombres absolus, & variables selon une loi quelconque.

XXIV. Pour tenir compte des masses, qui dépendent du volume & de la densité conjointement, l'unité m'exprimera aussi la densité de la matiere homogene, par le poids de laquelle je me propose de représenter les forces. Soit donc par rapport à cette unité la densité du fluide en $Z = q$, qui sera aussi un nombre absolu exprimé par une fonction quelconque des trois variables x, y, & z; cette quantité appartient donc aux inconnuës, que notre recherche renferme, à moins que le fluide ne soit pas incompressible, auquel cas la quantité q seroit constante, comme cela arrive dans l'eau. Or, si nous appliquons nos recherches à l'air, ou à quelqu'autre fluide susceptible de compression, nous devons regarder cette quantité q comme variable selon une loi quelconque, qui nous est encore inconnuë, & dont il faut chercher la détermination par le principe établi de l'équilibre des fluides. Or ce principe porte, que le fluide ne sauroit être en équilibre, à moins que les forces, qui agissent sur chacun de ses élémens, ne se détruisent mutuellement; ce qui est le principe général de tout équilibre, tant des corps solides que fluides.

XXV.

XXV. Connoiſſant la denſité au point Z, il ſera aiſé de déterminer la maſſe d'un élément quelconque du fluide, qui eſt placé en Z. Donnons à cet élément la figure d'un parallelepipede rectangle $ZLMNzlmn$, formé par les différentiels

$$ZL = YK = Xx = dx;\ ZM = Yy = dy,\ \&\ Zz = dz,$$

de nos trois variables x, y, & z, de ſorte que le volume de cet élément ſoit $= dx\,dy\,dz$. La denſité de cet élément étant $= q$, ſa maſſe ſera à la maſſe d'un égal volume de notre matiere homogene comme q à 1; elle ſera donc $= q\,dx\,dy\,dz$: & ſi la ſeule force de gravité agiſſoit ſur cet élément, ſon poids ſeroit $= q\,dx\,dy\,dz$. Mais étant ſollicité par les trois forces accélératrices P, Q, & R, il en ſera pouſſé par les forces motrices ſuivantes:

I. Suivant la direction $ZL = Pq\,dx\,dy\,dz$
II. Suivant la direction $ZM = Qq\,dx\,dy\,dz$
III. Suivant la direction $Zz = Rq\,dx\,dy\,dz$.

XXVI. Outre ces forces qui agiſſent immédiatement ſur cet élément, il eſt auſſi ſollicité par la preſſion du fluide dont il eſt environné; ce qui eſt l'article principal auquel nous nous devons attacher. Soit donc la preſſion du fluide en Z exprimée par la hauteur p, qui ſe rapporte, comme j'ai déjà remarqué à une matiere homogene grave, dont la denſité eſt ſuppoſée $= 1$. Cette hauteur p doit donc être conſidérée comme une fonction inconnuë des trois variables x, y, & z, & partant ſon différentiel aura une telle forme:

$$dp = L\,dx + M\,dy + N\,dz,$$

où par la nature des différentiels réels de pluſieurs variables, les quantités L, M, & N auront un tel rapport entr'elles qu'il ſoit:

$$\left(\frac{dL}{dy}\right)=\left(\frac{dM}{dx}\right);\ \left(\frac{dL}{dz}\right)=\left(\frac{dN}{dx}\right),\ \&\ \left(\frac{dM}{dz}\right)=\left(\frac{dN}{dy}\right),$$

 où

où il faut se souvenir, que dans une telle formule $\left(\frac{dL}{dy}\right)$ le différentiel de L doit être pris en supposant la seule quantité y variable, dont le différentiel se trouve au dénominateur.

XXVII. Donc, quelle que soit la pression sur la face $ZMzm$ de l'élément, la pression sur la face opposée $LNln$ la surpassera par l'incrément de la hauteur $dp = Ldx$, puisque ces deux faces sont éloignées entr'elles du différentiel dx. Donc l'aire de chacune de ces faces étant $= dydz$, l'élément du fluide sera poussée suivant la direction LZ par la force $= Ldxdydz$. De même la pression sur la face $ZLzl$ dont l'aire $= dxdz$, est surpassée de la pression sur la face opposée $MNmn$ par l'incrément de la hauteur $dp = Mdy$, qui convient au différentiel dy, d'où l'élément sera poussé dans la direction MZ par la force $= Mdxdydz$. Et enfin on verra que de la même pression resulte sur l'élément une force $= Ndxdydz$ suivant la direction zZ. Si nous joignons ces trois forces aux trois précédentes, nous aurons toutes les forces, qui agissent sur l'élément du fluide $ZLMNzlmn$.

XXVIII. Ces trois forces étant contraires aux forces précédentes, l'état d'équilibre exige qu'elles soient égales entr'elles, ce qui nous fournit ces équations :

$$\begin{array}{lll} Pq\,dxdydz = L\,dxdydz & \text{ou} & L = Pq \\ Qq\,dxdydz = M\,dxdydz & \text{ou} & M = Qq \\ Rq\,dxdydz = N\,dxdydz & \text{ou} & N = Rq \end{array}$$

d'où nous tirons pour la hauteur p, qui exprime la pression en Z, cette équation différentielle $dp = q\,(Pdx + Qdy + Rdz)$.

Cette formule devant être intégrable, il faut qu'il soit :

$$\left(\frac{d.Pq}{dy}\right) = \left(\frac{d.Qq}{dx}\right) \quad \left(\frac{d.Pq}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dx}\right) \; ; \; \left(\frac{d.Qq}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dy}\right)$$

Sans

Sans ces conditions il eſt impoſſible, que la maſſe fluide puiſſe jamais être réduite en équilibre par les forces ſollicitantes P, Q, R. Si de tels cas étoient d'ailleurs poſſibles, ils ſeroient bien remarquables, puisque le fluide ne pouvant jamais atteindre à l'équilibre, devroit ſe trouver dans une agitation continuelle, & par conſéquent renfermer un véritable mouvement perpetuel.

XXIX. Mais nous n'avons pas encore tenu compte du rapport qui peut ſubſiſter entre la denſité q & l'élaſticité; qui s'exprime toujours par la hauteur de la preſſion p. Si le fluide n'eſt pas compresſible, la quantité q ne dépendra pas de la hauteur p, elle ſera ou conſtante, ſi tout le fluide eſt homogene, ou variable, ſi le fluide eſt compoſé de particules d'une denſité différente, mais qui ne ſont ſuſceptibles d'aucune compreſſion. Dans ce cas la denſité q dépendra du lieu Z, & ſera par conſéquent une certaine fonction des trois variables x, y, z, qui montre de quelle maniere les différentes particules du fluide ſont diſpoſées entr'elles. On verra par là, ſi une telle diſpoſition, qu'on aura imaginée, puiſſe ſubſiſter avec l'état d'équilibre, ou non? Car l'équilibre ſera poſſible, ſi la formule $q(Pdx + Qdy + Rdz)$ admet l'intégration; en cas que cela n'arrive point, le fluide ſera agité, & la diſpoſition de ſes particules changée, jusqu'à ce que la fonction q obtienne une telle valeur, qui rende cette formule intégrable; ce ſera le ſeul cas, où l'équilibre puiſſe avoir lieu.

XXX. Si les parties du fluides ſont compreſſibles, l'élaſticité p dépendra de la denſité q, ou uniquement, ou encore d'une autre qualité, qui concoure à augmenter ou à diminuer l'élaſticité pour le même degré de denſité. Donc, pour donner à nos recherches la plus grande étenduë, on doit conſidérer p comme une fonction de la denſité q, & encore des quantités x, y, & z, qui déterminent le lieu du point Z, dont il eſt queſtion. La nature de cette fonction ſervira auſſi à déterminer q par une certaine fonction de la hauteur p, & des trois variables x, y, & z; laquelle étant ſubſtituée pour q dans l'équation

$$dp = q\,(Pdx + Qdy + Rdz)$$

ſera

fera voir, si cette équation est possible, ou non? Dans le premier cas l'équilibre sera possible, & on pourra assigner pour chaque endroit tant l'élasticité que la densité du fluide; or dans l'autre cas le fluide sera agité, ou bien sous la disposition supposée des particules, d'où dépend en partie la nature de la fonction q, on pourra assurer, que l'équilibre est impossible.

XXXI. Voilà donc une solution complette du problème que nous nous sommes proposés, & qui renferme toute la Théorie de l'équilibre des fluides. On voit par là d'abord si l'équilibre sera possible, ou non, dans l'état du fluide, qu'on aura supposé? & s'il est possible, on déterminera pour chaque point tant la pression ou l'élasticité p, que la densité du fluide, en cas qu'elle soit variable. Mais, pour faire l'application de la formule générale trouvée:

$$dp = q\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

qui contient toute la solution, je remarque d'abord, que lorsque les forces P, Q, & R sont réelles, soit qu'elles comprennent la gravité naturelle, ou des forces dirigées à des centres fixes, dont chacune soit proportionnelle à une fonction quelconque de la distance à son centre; dans tous ces cas je remarque, que la formule $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, exprime un différentiel réel, qui résulte de la différentiation d'une quantité finie, fonction des x, y, & z.

XXXII. Or, si l'on examine bien la formule $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, entant qu'elle peut résulter d'une, ou de plusieurs forces centrales, on s'appercevra aisément, qu'elle exprime le différentiel de ce, que j'ai nommé autrefois l'effort, ou l'efficace des forces sollicitantes, qu'on trouve si l'on multiplie chaque force centrale par le différentiel de la distance. Il est bien remarquable, que cette même idée de l'effort entre ici si naturellement dans la détermination de l'équilibre des fluides, après que j'en ai démontré le plus heureux usage dans tous les cas d'équilibre. C'est aussi sur cette même idée, qu'est fondé le grand principe de la moindre action de M. de *Maupertuis*, notre digne Président; principe, que plus

plus on y fait réflexion, & plus on eſt forcé d'en reconnoitre l'excellence. La ſeule envie, ou l'ignorance, eſt capable d'obſcurcir l'éclat de ce principe, qui, malgré toutes les oppoſitions, ne manquera pas d'être reconnu un jour univerſellement pour le principal fondement de toutes nos connoiſſances ſur l'équilibre & le mouvement des corps.

XXXIII. Qu'on multiplie donc chaque force accélératrice, qui agit au point Z, par l'élément de ſa direction, & l'intégrale étant l'effort de cette force, ſoit s la ſomme de tous ces efforts pour le point Z, & s ſera l'intégrale de la formule $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Donc, introduiſant l'effort s dans le calcul, la nature de l'équilibre ſera renfermée dans cette formule: $dp = q\,ds$, de ſorte que les trois variables x, y, & z, ſont réünies dans la ſeule s. Maintenant il eſt clair que cette équation $dp = q\,ds$ ne ſauroit être réelle, que lorsque q eſt, ou fonction de la ſeule quantité s, ou de la ſeule p, ou des deux quantités p & s enſemble ; afin que l'équation ne renferme que les deux variables p & s. Dans tous les autres cas, où la denſité q ne depend point des deux ſeules quantités p & s, mais qu'il y entre encore une autre variable dans ſa détermination, l'équilibre eſt impoſſible, & les parties d'un tel fluide ſeront néceſſairement miſes en mouvement. Or les principes que nous venons d'établir ici, ne ſont pas ſuffiſans pour déterminer ce mouvement.

XXXIV. Il eſt évident que la lettre $s = \int (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ exprimera dans chaque cas une certaine ligne, dont la grandeur ſera déterminée par les trois variables x, y, & z; puisque P, Q, & R, ſont des nombres abſolus, & que les quantités linéaires x, y, z, avec des lignes conſtantes y obtiendront une ſeule dimenſion. Il répondra donc à chaque point Z une telle ligne s, dont la quantité ſera toujours connuë par les forces, qu'on ſuppoſe agir ſur le fluide. Donc, ſi le fluide n'eſt pas compreſſible, ou que q ne dépende point de p, l'équilibre ſera poſſible dans ces deux cas :

I. Lors-

1°. Lorsque q eſt une quantité conſtante; c'eſt à dire, lorsque le fluide eſt homogene, ou que toutes ſes particules ont la même denſité, ſans être ſuſceptibles de compreſſion.

2°. Lorsque q eſt bien variable, mais dépendante de la ſeule quantité s: C'eſt le cas où les particules du fluide ſont héterogenes, ou d'une denſité differente, mais tellement diſpoſées, que partout où la quantité s eſt la même, la denſité ſoit auſſi la même. Dans tous les autres cas, où les parties heterogenes ſeroient diſpoſées autrement, l'équilibre ne ſauroit jamais avoir lieu.

XXXV. Or, ſi le fluide eſt compreſſible, on a auſſi deux cas à conſidérer; l'un où l'élaſticité dépend uniquement de la denſité, comme il arrive dans l'air, lorsqu'il régne partout le même degré de chaleur. Dans ce cas la quantité q étant fonction de la ſeule p, l'équation $dp = q\,ds$ eſt toujours poſſible, ou intégrable, puisqu'elle ſe réduit à celle-cy $\frac{dp}{q} = ds$, où les deux variables ſont ſéparées; & partant auſſi l'état d'équilibre y pourra avoir lieu. Mais, ſi l'élaſticité p dépend outre cela encore d'une autre qualité du fluide, comme de la chaleur; & que celle-ci ſoit différente dans les diverſes particules, l'équilibre ne ſauroit avoir lieu, à moins que la chaleur ne depende uniquement de la quantité s: il faut donc qu'il ſe trouve le même degré de chaleur dans toutes les particules du fluide, auxquelles répond la même valeur de s. Si dans ces endroits la chaleur, ou autre qualité, qui concourt à déterminer l'élaſticité, étoit differente, l'équilibre ſeroit abſolument impoſſible.

XXXVI. Pour éclaircir mieux les conditions ſous lesquelles l'équilibre peut avoir lieu, il conviendra de diſtinguer toute la maſſe fluide par des couches, dont chacune paſſe par tous les points, où la quantité s, ou l'effort total des forces ſollicitantes, eſt la même. Il eſt évident, qu'au cas de la gravité naturelle ces couches ſeront paralleles entr'elles & horizontales: & lorsque les forces ſollicitantes ſont diri-

gées

gées vers un centre fixe, ces couches deviendront ſphèriques & concentriques entr'elles autour du même centre de force : ſi les forces ſont dirigées vers pluſieurs centres, la figure des couches deviendra plus irréguliere. Or, ayant établi toutes ces couches, la formule $dp = q\,ds$ fait voir, que l'équilibre ne ſauroit avoir lieu, à moins que dans chaque couche le fluide n'eut partout, & la même denſité, & la même chaleur : ou bien il faut que les particules de chaque couche ſoient parfaitement homogenes entr'elles. Et alors l'élaſticité p ſe trouvera auſſi la même par toute l'étenduë de chaque couche.

XXXVII. Examinons plus en détail les principaux cas, que fournit la diverſe nature des fluides, quelle que ſoit la figure des couches, laquelle dépend uniquement des forces ſollicitantes accélératrices, comme nous venons de voir. Soit donc premièrement toute la maſſe fluide homogene & non compreſſible : & la denſité q étant conſtante, notre formule $dp = q\,ds$ aura pour intégrale $p = q\,(s \pm a)$, où la conſtante a doit être déterminée par quelque état donné du fluide, par lequel on ſait la preſſion dans une certaine couche : & de là on connoitra la preſſion, qui aura lieu dans toute autre couche, puisque par toute l'étenduë de chaque couche la preſſion eſt la même. Donc, s'il y a une telle couche, où la preſſion évanouït, on la pourra regarder comme la derniere, ou plus haute ſurface, à laquelle le fluide ſe trouve à niveau, & où le fluide n'a pas beſoin d'être retenu par le vaiſſeau. Quand on aura trouvé pour toute autre couche la preſſion, on en pourra déterminer les forces, qu'un corps ſolide plongé dans le fluide ſoutiendra des preſſions du fluide : & toute l'hydroſtatique vulgaire ne contient que le cas très particulier de cette formule $p = q\,(s \pm a)$, où la ſeule gravité agit ſur le fluide.

XXXVIII. Soit pour le ſecond cas le fluide encore incompreſſible, mais compoſé de particules d'une denſité differente ; & pour que le fluide puiſſe arriver à l'état d'équilibre, il faut que chaque couche contienne des particules de la même denſité, de ſorte que partout,

 où

où la valeur de s eſt la même, les particules du fluide ſoient également denſes. Sans un tel arrangement on ne ſauroit jamais atteindre à l'équilibre. Or, étant parvenu à cet état, la denſité q ſera exprimée par une certaine fonction de s, & l'intégrale de notre formule $p = \int q\,ds$ montrera la preſſion du fluide à chaque couche. L'intégrale $\int q\,ds$ renferme une conſtante, qui ſe détermine par la preſſion connuë dans une couche. Ordinairement on connoit la derniere couche, ou la plus haute ſurface, où la preſſion eſt nulle, & le fluide de niveau; & alors il faut déterminer la conſtante en ſorte, que la preſſion p évânouïſſe dans cette couche. On comprend par là, que la figure du niveau ſe régle toujours ſur la figure des couches.

XXXIX. Soit en troiſième lieu le fluide élaſtique & compreſſible, mais en ſorte que l'élaſticité dépende uniquement de la denſité; la denſité q ſera donc exprimée par une certaine fonction de l'élaſticité p, & partant notre formule $dp = q\,ds$ toujours poſſible, ayant pour intégrale $\int \frac{dp}{q} = s$. On réduira cette formule à des meſures abſoluës, ſi l'on connoit l'élaſticité qui convient à une certaine denſité. De là on voit que par toute l'étenduë de chaque couche tant l'élaſticité que la denſité ſera la même; & la conſtante renfermée dans l'intégrale $\int \frac{dp}{q}$ doit être déterminée par l'élaſticité, ou denſité, qu'on ſuppoſe connuë dans une certaine couche. Si l'élaſticité p eſt proportionnelle à la denſité q, & qu'on ſache qu'à la denſité g convient l'élaſticité exprimée par la hauteur h, on aura $q = \frac{gp}{h}$, & partant $\frac{h}{g}\, l\frac{p}{a} = s$: ou bien $p = a\,e^{gs:h}$, & $q = \frac{ag}{h}\,e^{gs:h}$, d'où l'on tirera pour chaque couche tant la denſité q, que l'élaſticité p.

XL. Soit en quatrième lieu le fluide élaſtique, mais que l'élaſticité p dépende, outre la denſité, encore de la chaleur du fluide, qui ſoit

ſoit variable: il eſt d'abord évident, que quelle que ſoit cette dépendance, l'équilibre ne ſauroit avoir lieu, à moins que par toute l'étenduë de chaque couche la chaleur ne fut la même. Soit donc r le degré de chaleur en Z, qui ſera par conſéquent une certaine fonction de s; & que l'élaſticité p ſoit en raiſon compoſée de la denſité q, & de la chaleur r; dans ce cas on aura $p = \alpha q r$, & partant $q = \frac{p}{\alpha r}$, où il eſt aiſé de déterminer α par les meſures abſoluës. Notre équation étant donc $dp = \frac{p\,ds}{\alpha r}$, ſe changera en celle-ci $\frac{\alpha dp}{p} = \frac{ds}{r}$, qui, puiſque r eſt fonction de s, aura pour intégrale $\alpha\, l \frac{p}{a} = \int \frac{ds}{r}$, d'où l'on tire:

$$p = a\, e^{\int \frac{ds}{\alpha r}}, \quad \& \quad q = \frac{a}{\alpha r}\, e^{\int \frac{ds}{\alpha r}}.$$

Si l'élaſticité dependoit autrement de la denſité q, & de la chaleur r, l'évolution de la formule $dp = q\,ds$ montreroit également l'élaſticité & la denſité du fluide dans chaque couche.

XLI. Or un fluide quelconque étant en équilibre, il eſt aiſé d'aſſigner les forces, dont un corps ſolide qui y eſt plongé, ſera pouſſé, ſans qu'on ait beſoin de ſommer toutes les forces élémentaires. On n'a qu'à conſidèrer, que ce corps ſoutient de la preſſion du fluide les mêmes forces, que ſoutiendroit un égal volume fluide, qui en occuperoit la place, & qui ſeroit en équilibre avec le reſte. Or les conditions requiſes pour l'équilibre nous donnent la maſſe de ce volume, d'où l'on conclura la grandeur & la direction des forces ſollicitantes qui y agiſſent, & qui le mettroient actuellement en mouvement, s'il n'étoit pas retenu par les preſſions du fluide environnant. Donc, l'effet de ces preſſions eſt égal & contraire à celui des forces ſollicitantes, d'où il s'enſuit, qu'un corps ſolide plongé dans le fluide en éprouve les mêmes

 for-

forces, mais dans un ſens contraire, qu'éprouveroit cet égal volume de fluide dont il occupe la place. On voit donc que la régle vulgaire ſur les corps plongés dans l'eau, eſt la plus générale, & s'étend tant aux fluides de toutes les eſpeces, qu'à des forces quelconques, dont ils puiſſent être ſollicités.

XLII. Voilà donc en général, comme tout ce qui regarde l'équilibre des fluides ſe déduit auſſi aiſément que naturellement de notre formule $dp = q\,ds$, qu'on aura donc droit de regarder comme l'unique fondement de toute la Théorie de l'équilibre des fluides. Mais, puisque ce que je viens d'expoſer éblouït presque par la trop grande généralité à l'égard des forces, dont je ſuppoſe le fluide ſollicité, il ſera bon de déveloper auſſi à cet égard quelques cas particuliers. Dans cette vuë je conſidérerai premièrement les fluides, qui ſont ſollicités par la ſeule gravité, où les forces ſollicitantes ſont partout égales & paralleles entr'elles; & c'eſt ici que j'aurai occaſion de traiter non ſeulement toute l'hydroſtatique ordinaire, mais auſſi la théorie de l'état de l'atmosphère, qu'on comprend ſous le nom d'aërometrie. Enſuite, je ſuppoſerai les forces ſollicitantes dirigées vers un centre fixe; où j'ajouterai quelques reflexions ſur la force centrifuge, qui réſulte du mouvement diurne de la terre; quoique, à cauſe de ce mouvement les fluides qui environnent la terre, ne puiſſent être proprement regardés comme étant en équilibre.

De l'équilibre des fluides dans l'hypotheſe de la gravité naturelle.

XLIII. La force accélératrice de la gravité étant poſée $= 1$, ſi nous ſuppoſons le plan A O B horizontal, & l'axe O C vertical, les forces accélératrices, qui agiſſoient ſur le point Z, deviendront $P = 0$, $Q = 0$, & $R = -1$, la droite ZY étant dirigée en bas. Donc, puisque $ds = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, nous aurons $ds = -dz$, & $s = a - z$; & notre formule pour l'état d'équilibre

libre de toutes sortes de fluides sera $dp = q\,dz$. Ensuite, tous les points, auxquels répond la même valeur de $s = a - z$, étant disposés dans le même plan horizontal, les couches, par lesquelles le fluide doit être distingué, seront horizontales. D'où l'on voit que dans tout état d'équilibre chaque couche, ou plan horizontal, doit contenir des particules fluides tant de la même densité que de la même chaleur, ou autre qualité dont dépend l'élasticité: & de plus, l'élasticité sera aussi la même par toute l'étenduë de chaque couche.

XLIV. Si le fluide dont il s'agit n'est pas susceptible de compression, & qu'il soit homogene, ou de la même densité par tout, rien n'empêche que nous ne le posions le même que cette matiere homogene, à laquelle se rapporte la hauteur p, qui nous sert de mesure de la pression, ou de l'élasticité. Soit donc $q = 1$, & ayant $dp = -dz$, nous aurons $p = a - z$. Prenons donc C D pour la base horizontale, d'où nous mesurons en haut la hauteur $CM = DN = z$, de la couche MN, & la pression par toute cette couche sera $= a - z$. Soit $CA = DB = a$, & la pression évanouïra par la couche AB, qui sera donc la plus haute, ou celle qui est à niveau: d'où l'on voit que dans toute autre couche plus basse MN, la pression sera exprimée par la hauteur AM. S'il y avoit du fluide au dessus de la couche AB, la pression y seroit négative, & partant le fluide ne sauroit demeurer continu. Ainsi l'état d'équilibre exclut entièrement l'existence d'un fluide continu au dessus de la couche, où la pression est nulle. Le cas très connu, où un tuyau recourbé comme fkh demeure plein d'eau, & où il semble que la pression en h soit négative, ne peut avoir lieu, que lorsque la surface AB soutient la pression de l'atmosphère. Or alors la pression en AB n'est nulle, comme on suppose, mais égale à la pression de l'atmosphère, & la pression en k, qui en est moindre de la hauteur gk, est encore positive. Aussi sait-on, que quand la hauteur gk est plus grande que celle qui répond à la pression de l'atmosphère, l'eau n'y demeure plus continuë. Fig. 4.

XLV.

XLV. Si le fluide eſt incompreſſible, mais composé de parties d'une denſité differente, l'équilibre ne ſauroit avoir lieu, à moins que ces diverſes parties ne ſoyent ſéparées par des plans horizontaux. Que
Fig. 5. le vaiſſeau AADD contienne donc trois fluides differens, dont le premier & plus haut occupe l'eſpace AABB, ſa denſité étant $Aa = l$: le ſecond l'eſpace BBCC, ſa denſité étant $= m$, le troiſième l'eſpace CCDD, ſa denſité étant $= n$; & pourvû que les ſurfaces AA, BB, CC, qui terminent ces differens fluides, ſoient horizontales, l'équilibre aura lieu. Dans ce cas notre formule nous fait voir, que ſuppoſant la preſſion en AA nulle, la preſſion en MM ſera $= l.AB + m.BM$, & la preſſion $NN = l.AB + m.BC + n.CN$, la droite AD étant verticale. Il n'importe laquelle de ces parties ſoit la plus denſe, mais il faut remarquer, que ſi une ſupérieure BBCC étoit plus denſe que l'inférieure CCDD, auſſi-tôt que par quelque accident la ſituation horizontale de la ſurface CC ſeroit troublée, l'équilibre ſeroit détruit, & la partie plus peſante BBCC tomberoit pour occuper les couches les plus baſſes. Puiſqu'un tel accident ne ſauroit être évité, il eſt clair que des fluides différens ne ſauroient être en équilibre, à moins que les plus denſes ne ſoient les plus profonds.

XLVI. Conſidérons maintenant auſſi les conditions, ſous lesquelles l'équilibre peut ſubſiſter dans notre atmoſphère, ou l'air, qui eſt un fluide compreſſible, dont l'élaſticité dépend tant de ſa denſité, que du degré de chaleur qui y régne. Où je remarque d'abord, que l'équilibre ne ſauroit avoir lieu, à moins qu'il n'y eut le même degré de chaleur par toute l'étenduë de chaque couche horizontale de l'atmoſphère. Donc, toutes les fois qu'il y a un parfait calme dans l'air, nous pouvons ſurement conclure, qu'il ſe trouve par une étenduë aſſés conſidérable, à la même hauteur de l'atmoſphère, le même degré de chaleur, ou que chaque couche horizontale contient un air également tempéré, quoique dans des couches différentes la chaleur puiſſe varier d'une maniere quelconque. De là nous apprenons de plus, que lorsque par quelque cauſe que ce ſoit, il arrive, qu'à égales hauteurs de

l'atl'atmoſphère la chaleur y eſt differente, l'équilibre ne ſauroit en aucune maniere avoir lieu. Dans ces cas il en naitra donc néceſſairement un vent; & il n'y a aucun doute que la diverſité de chaleur à égales hauteurs de l'atmoſphère ne ſoit une des principales cauſes des vents.

XVII. Mais, ſuppoſons que l'atmoſphère ſe trouve en équilibre, & ſoit A M E une ligne verticale, ſur laquelle nous prenons les hauteurs. A' un point donné comme en A, regardons l'état de l'air comme connu: que le degré de chaleur y ſoit exprimé par l'ordonnée $AB = c$, la denſité y ſoit $= g$, & l'élaſticité exprimée par la hauteur $= h$. Puisqu'on eſt accoutumé de meſurer l'élaſticité de l'air, ou ce qui revient au même, la preſſion de l'atmoſphère par la hauteur du barometre, l'unité nous marquera la denſité du vif argent, & g ſera une fraction, qui exprime le rapport de la denſité de l'air en A à celle du vif argent; & h ſera la hauteur même du barometre lorsqu'il eſt placé en A. Enſuite, à une hauteur quelconque $AM = z$, à laquelle répond la valeur de $s = a - z$, ſoit le degré de chaleur $= r$, la denſité de l'air $= q$, & l'élaſticité, ou la hauteur du barometre $= p$. Je regarde la chaleur r comme connuë, & exprimée par l'appliquée M N d'une courbe donnée B N F, qui eſt l'échelle des chaleurs.

XLVIII. Puisqu'on n'a pas encore établi des meſures fixes pour la chaleur, par lesquelles on pourroit dire, qu'une chaleur eſt double d'une autre; il ſemble que l'influence même de la chaleur ſur l'élaſticité de l'air fournit le moyen le plus convenable pour régler ces meſures. Diſons donc que la chaleur devient double, lorsque l'élaſticité d'une maſſe d'air, dont la denſité eſt donnée, en devient deux fois plus grande; ou qu'en général la chaleur ſoit proportionnelle à l'élaſticité, la denſité demeurant la même. On pourroit douter, ſi la même chaleur, qui double le reſſort de l'air d'une certaine denſité, le doubleroit auſſi, ſi la denſité étoit differente; c'eſt ſur quoi la ſeule expérience nous peut éclaircir. Cependant il ſemble que nous ne nous écarterons pas ſenſiblement de la vérité, en ſuppoſant que ce rapport ait lieu dans toutes les densités differentes, ou du moins dans celles' qui se rencontrent dans l'atmosphère. Cela posé, quelques expériences suffiront à réduire les degrés de chaleur marqués par quelque thermometre à ces mesures plus fixes; & ensuite il sera aisé de changer l'echelle du thermometre en sorte, qu'elle nous donne d'abord les vrayes mesures de la chaleur, que nous venons de marquer par les lettres c & r.

XLIX. Pour la densité nous nous tromperons encore moins, si nous la supposons proportionnelle à l'élasticité, la chaleur demeurant la même. Car ce n'est que dans de fort grandes densités, qu'on a remarqué que l'élasticité croît dans une plus grande raison que la densité: or un tel degré de densité ne se trouve pas dans l'atmosphère. L'élasticité p sera donc proportionnelle au produit de la chaleur r par la densité q, ou bien on aura cette proportion $p : qr = h : gc$, d'où l'on tire $q = \frac{gcp}{hr}$: où il faut remarquer, que r est donné par une certaine fonction de la hauteur $AM = z$, qui convient à l'échelle des chaleurs BNF. De là notre équation $dp = q\,ds$ à cause de $ds = -dz$, se changera en $dp = -\frac{gcp\,dz}{hr}$, dont l'intégrale est

$$lp = \text{Const.} - \frac{gc}{h}\int\frac{dz}{r}.$$

L. Supposons que l'intégrale $\int\frac{dz}{r}$ soit prise ensorte, qu'elle évanouïsse au point A où $z = 0$, & puisque dans cette couche il devient $r = c$, $q = g$, & $p = h$, la constante doit être $= lh$, & notre équation qui renferme la nature de l'équilibre de l'atmosphère, sera

$$l\frac{p}{h} = -\frac{gc}{h}\int\frac{dz}{r}, \quad \text{ou} \quad p = h\,e^{-\frac{gc}{h}\int\frac{dz}{r}}$$

prenant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Cette formule nous montre donc à chaque hauteur la pression de l'atmosmosphère, ou bien la hauteur que le barometre y marqueroit ; & de là on connoitra aussi la densité $q = \frac{gcp}{hr}$, qui se trouvera à la même hauteur, de sorte que ces deux formules nous découvriront l'état de l'air à la hauteur $AM = z$:

$$p = h e^{\frac{-gc}{h} \int \frac{dz}{r}}, \quad \& \quad q = \frac{gc}{r} e^{\frac{-gc}{h} \int \frac{dz}{r}}$$

d'où l'on voit que ni l'élasticité, ni la densité, ne sauroit entièrement évanouïr à aucune hauteur.

LI. Dévelopons d'abord le cas, où la chaleur est la même par toute la hauteur de l'atmosphère : Soit donc $MN = AB$ ou $r = c$, & nos formules pour la densité & l'élasticité de l'air en M seront :

$$p = h e^{\frac{-gz}{h}}, \quad \& \quad q = g e^{\frac{-gz}{h}}$$

ou bien par des series :

$$p = h\left(1 - \frac{gz}{h} + \frac{g^2z^2}{2h^2} - \frac{g^3z^3}{6h^3} + \frac{g^4z^4}{24h^4} - \&c.\right)$$

$$q = g\left(1 - \frac{gz}{h} + \frac{g^2z^2}{2h^2} - \frac{g^3z^3}{6h^3} + \frac{g^4z^4}{24h^4} - \&c.\right)$$

d'où l'on connoitra à chaque hauteur donnée $AM = z$, l'état de l'air, sachant celui en A. Puisque l'unité marque la densité du mercure, si le point A est pris à la surface de la terre, on sait par les expériences que la valeur de g, sera une fraction entre $\frac{1}{10000}$ & $\frac{1}{12000}$ environ, & h ; à peu près de $2\frac{2}{5}$ pieds de Rhin. Donc, prenant $g = \frac{1}{11000}$,

&

& exprimant la hauteur $AM = z$ en pieds de Rhin, à cauſe de $\frac{g}{h} = \frac{1}{25000}$ à peu près, nous aurons:

$$p = h\left(1 - \frac{z}{25000} + \frac{zz}{1250000000} - \&c.\right)$$

A la hauteur donc AM de 1000 pieds, on aura $p = 0{,}96079h = \frac{24}{25}h$.

LII. On peut auſſi déterminer la hauteur z, à laquelle le barometre ſera diminué d'une partie donnée de toute ſa hauteur h. Soit la hauteur du barometre en $M = \left(1 - \frac{n}{1000}\right)h$, & poſant $p = \left(1 - \frac{n}{1000}\right)h$, nous aurons $l\left(1 - \frac{n}{1000}\right) = -\frac{gz}{h}$, ou bien:

$$z = \frac{h}{g}\left(\frac{n}{1000} + \frac{nn}{2000000} + \frac{n^3}{3000000000} + \&c.\right)$$

La ſomme de cette ſerie ſe peut exprimer à très peu près de cette maniere:

$z = \frac{2nh}{g(2000-n)}$, ou plus exactement $z = \frac{nh\,(6000-n)}{1000g\,(6000-4n)}$

Si l'on veut ſavoir la hauteur, à laquelle le barometre baiſſe de n lignes, ou parties cent quarante quatrièmes du pied de Londres, prenant $g = \frac{1}{11000}$, & la hauteur h de $2\frac{1}{2}$ pieds de Londres, on aura en même meſure la hauteur, où cela arrive, $AM = z = \frac{76n(2160-n)}{2160-4n}$

LIII. Mais on ſait par l'expérience que, plus on monte dans l'atmoſphère, & plus le degré de chaleur y diminuë. La courbe BNF approchera donc de plus en plus de la verticale AME; & partant la quantité r ſera telle fonction de z, que lorsque $z = 0$; il devi-

devienne $r = c$, & si $z = \infty$, on ait $r = 0$. On pourra donc prendre pour r une telle expression :

$$r = \frac{c}{1 + \frac{\alpha z}{h} + \frac{\beta zz}{hh} + \frac{\gamma z^3}{h^3}}$$

où les coëfficiens α, β, γ, &c. doivent être déterminés par quelques observations sur la chaleur de l'atmosphère à quelques hauteurs différentes. De là nous aurons :

$$\frac{c\,dz}{r} = dz\left(1 + \frac{\alpha z}{h} + \frac{\beta z^2}{h^2} + \frac{\gamma z^3}{h^3} + \&c.\right), \text{ \& partant}$$

$$c\int\frac{dz}{r} = z + \frac{\alpha z^2}{2h} + \frac{\beta z^3}{3h^2} + \frac{\gamma z^4}{4h^3} + \&c. \quad \text{d'où nous tirons:}$$

$$l\frac{p}{h} = -g\left(\frac{z}{h} + \frac{\alpha z^2}{2h^2} + \frac{\beta z^3}{3h^3} + \frac{\gamma z^4}{4h^4} + \&c.\right)$$

& $$q = \frac{gp}{h}\left(1 + \frac{\alpha z}{h} + \frac{\beta z^2}{h^2} + \frac{\gamma z^2}{h^3} + \&c.\right).$$

LVI. De ces formules on connoitra pour chaque hauteur $AM = z$, tant la hauteur du barometre p, que la densité de l'air q. On posera pour cet effet :

$$g\left(\frac{z}{h} + \frac{\alpha z^2}{2h^2} + \frac{\beta z^3}{3h^3} + \frac{\gamma z^4}{4h^4} + \&c.\right) = u, \quad \text{\& on aura :}$$

$$p = he^{-u} = h\left(1 - u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 - \&c.\right)$$

ou bien par des approximations :

$$p = \frac{2 - u}{2 + u}h, \quad \text{ou} \quad p = \frac{12 - 6u + uu}{12 + 6u + uu}h.$$

 Or

Or, si l'on peut savoir à quelle hauteur z, le barometre descendra de sa partie $\frac{1}{\nu}h$; posant $p = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)h$, on aura :

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\nu^2} + \frac{1}{3\nu^3} + \frac{1}{4\nu^4} + \&c. = u = \frac{6\nu - 1}{\nu(6\nu - 4)},$$ à peu près,

& puisque les coëfficiens α, β, γ, &c. iront fort en diminuant, & qu'ils seront très petits d'eux mêmes, ayant trouvé la valeur de u, on obtiendra fort à peu près :

$$z = h\left(\frac{u}{g} - \frac{\alpha u^2}{2gg} + \frac{(3\alpha\alpha - 2\beta)u^3}{6g^3} - \frac{(15\alpha^3 - 20\alpha\beta + 6\gamma)u^4}{24g^4} + \&c.\right)$$

ou $$z = \frac{6\alpha g + (3\alpha\alpha - 4\beta)u}{6\alpha g + (6\alpha\alpha - 4\beta)u} \cdot \frac{hu}{g}.$$

LV. De là nous voyons, qu'à cause de la diminution de la chaleur, le barometre en s'élevant baisse plutôt d'une quantité donnée, que si la chaleur étoit partout la même. Or, si on savoit exactement en A, le rapport de la densité de l'air à celle du mercure, ou la fraction g, & la hauteur du barometre h, on trouveroit par le calcul précédent la hauteur, où le barometre devroit baisser d'une ligne, si la chaleur étoit partout la même. Car, prenant $\frac{1}{\nu}h = 1$ ligne, & posant $u = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\nu^2} + \frac{1}{3\nu^3} + \&c.$ cette hauteur seroit $= \frac{hu}{g}$. Qu'on compare ensuite cette hauteur, qu'on trouve par l'expérience, qui soit moindre & $= \frac{hu}{g} - w$, & ayant à peu près $\frac{hu}{g} - w = h\left(\frac{u}{g} - \frac{\alpha uu}{2gg}\right)$, on en tirera $w = \frac{\alpha huu}{2gg}$, ou $\alpha = \frac{2ggw}{huu}$, d'où l'on connoitra assés exactement le premier coëfficient

cient

cient α de la formule, qui contient la diminution de la chaleur $\frac{c}{r} = 1 + \frac{\alpha z}{h} + \frac{\beta zz}{hh} + \frac{\gamma z^3}{h^3} +$ &c. puisqu'on peut regarder les autres termes, comme incomparablement plus petits.

LVI. Voilà donc une methode pour connoitre par les expériences la diminution de la chaleur dans l'atmoſphère. Pour en donner un exemple, ſuppoſons que la hauteur du barometre en bas en A, ait été obſervée de 30 pouces du pieds de Londres, ou $h = 2\frac{1}{2}$ pieds de Londres; & que la denſité y ſoit à celle du mercure comme 1 à 10000, de ſorte que $g = \frac{1}{10000}$. Maintenant une ligne étant $\frac{1}{360}h$, nous aurons $\nu = 360$, & $u = \frac{1}{358}$, & ſi la chaleur étoit par tout la même, le barometre baiſſeroit d'une ligne à la hauteur de $69\frac{4}{9}$ pieds. Or, ſuppoſons que cet abaiſſement arrive déjà à la hauteur de 63 pieds; & nous aurons $w = 6\frac{4}{9}$ pieds, & de là nous tirerons $\alpha = \frac{7}{1000}$. Donc négligeant les autres termes, nous aurons pour la chaleur à chaque hauteur z cette équation: $r = \frac{c}{1 + \frac{7z}{1000h}}$, ou $r = \frac{c}{1 + \frac{z}{357}}$: d'où il s'enſuivroit qu'à la hauteur de 357 pieds la chaleur ſeroit reduite à la moitié. Si la différence w avoit été plus petite, la valeur de α auroit auſſi été trouvée moindre dans la même raiſon.

LVII. Si nous négligeons les termes affectés par β, γ, δ, &c. & que nous ſuppoſions donnée la hauteur, où la chaleur eſt reduite à la moitié nous en pourrons aſſigner le degré de chaleur à toute autre hauteur, & delà l'élaſticité de l'air avec ſa denſité. Soit cette hauteur $= mh$, & puiſque $r = \frac{c}{1 + \frac{\alpha z}{h}}$, nous aurons $\alpha = \frac{1}{m}$, & par-

tant

tant $r = \frac{c}{1+\frac{z}{mh}}$: d'où l'on connoitra à toute autre hauteur z, le rapport de la chaleur à celle qui se trouve en A. Ensuite, posant $g\left(\frac{z}{h} + \frac{zz}{2mhh}\right) = u$, ou $u = \frac{gz}{h}\left(1 + \frac{z}{2mh}\right)$, la hauteur du barometre en M sera $p = \frac{12 - 6u + uu}{12 + 6u + uu} h$, à très peu près ; & la densité $q = \frac{12 - 6u + uu}{12 + 6u + uu} g \left(1 + \frac{z}{mh}\right)$. Soit la hauteur AM $=$ $z = nh$, & on aura à cause de $u = ng\left(1 + \frac{n}{2m}\right)$, pour cette hauteur $r = \frac{mc}{m+n}$; $p = \frac{12 - 6ng\left(1+\frac{n}{2m}\right) + nngg\left(1+\frac{n}{2m}\right)^2}{12 + 6ng\left(1+\frac{n}{2m}\right) + nngg\left(1+\frac{n}{2m}\right)^2} h$, & de là $q = \frac{gp}{h}\left(1 + \frac{n}{m}\right)$.

LVIII. Or, si l'on veut savoir à quelle hauteur AM $= z$, l'abaissement du mercure dans le barometre sera $= \frac{1}{v} h$, ou bien $p = \left(1 - \frac{1}{v}\right)$, on cherchera d'abord comme auparavant le nombre u, de sorte que $u = \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{3v^3} + \frac{1}{4v^4} +$ &c. ou à peu près $u = \frac{6v - 1}{v(6v - 4)}$, & puisque $\alpha = \frac{1}{m}$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, &c.

on

on trouvera la hauteur

$$AM = h\left(\frac{u}{g} - \frac{uu}{2mgg} + \frac{u^3}{2mmg^3} - \frac{5u^4}{8m^3g^4} + \&c.\right)$$

ou fort à peu près $AM = \frac{2mg+u}{mg+u}.\frac{hu}{2g}$: & la densité y sera

$$q = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{2mg+u}{mg+u}.\frac{u}{2m}\right), \quad \text{\& la chaleur}$$

$r = \frac{c}{1 + \frac{2mg+u}{mg+u}.\frac{u}{2mg}}$, ou bien après avoir trouvé $AM = z$,

on aura $q = g\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 + \frac{z}{mh}\right)$, & $r = \frac{c}{1 + \frac{z}{mh}}$.

Donc, en remettant pour u sa valeur $\frac{6\nu-1}{\nu(6\nu-4)}$, nous aurons :

$$AM = h\left(\frac{1}{\nu g} + \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{1}{\nu^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right)\&c.\right)$$

& la profondeur, où le barometre hausse de la quantité $\frac{1}{\nu}h$, sera

$$h\left(\frac{1}{\nu g} - \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{1}{\nu^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) - \&c.\right)$$

LIX. On trouve quantité d'expériences, qu'on a faites sur la hauteur du barometre, tant en montant qu'en descendant dans l'atmosphère, d'où l'on a taché de déterminer les hauteurs ou profondeurs, où le barometre hausse ou baisse de parties égales. Soit A le point fixe, d'où l'on compte ces hauteurs & profondeurs, que la hauteur du barometre y soit $= h$, la densité de l'air $= g$, celle du mercure étant $= 1$, & qu'à une hauteur au dessus $AE = mh$, la chaleur soit ré- Fig. 7.

duite

duite à la moitié. Soient ensuite 1. 2. 3. &c. en montant, & I. II. III. &c. en descendant les lieux, où le changement du barometre vaille $\frac{1}{v}h$, de sorte que la hauteur du barometre soit

$$\text{en } 1 = \left(1 - \frac{1}{v}\right)h;\ \text{en } 2 = \left(1 - \frac{2}{v}\right)h;\ \text{en } 3 = \left(1 - \frac{3}{v}\right)h$$

$$\text{en I} = \left(1 + \frac{1}{v}\right)h;\ \text{en II} = \left(1 + \frac{2}{v}\right)h;\ \text{en III} = \left(1 + \frac{3}{v}\right)h.$$

Cela posé, voyons quel ordre doit régner dans les intervalles A, 1; 1, 2; 2, 3; en montant, & A, I; I, II; II, III; en descendant.

LX. Or la formule trouvée nous fournira les valeurs suivantes de ces intervalles, en montant :

$$A,1 = h\left(\frac{1}{vg} + \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{1}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) + \&c.\right)$$

$$1,2 = h\left(\frac{1}{vg} + \frac{3}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{7}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) + \&c.\right)$$

$$2,3 = h\left(\frac{1}{vg} + \frac{5}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{19}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) + \&c.\right)$$

& en descendant :

$$A,I = h\left(\frac{1}{vg} - \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{1}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) - \&c.\right)$$

$$I,II = h\left(\frac{1}{vg} - \frac{3}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{7}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) - \&c.\right)$$

$$II,III = h\left(\frac{1}{vg} - \frac{5}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{19}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) - \&c.\right)$$

D'où

D'où l'on tire en prenant les différences :

$$2,3 - 1,2 = h\left(\frac{2}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{12}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) + \&c.\right)$$

$$1,2 - \mathrm{A},1 = h\left(\frac{2}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + \frac{6}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) + \&c\right)$$

$$\mathrm{A},1 - \mathrm{A},\mathrm{I} = h\left(\frac{2}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) + 0\right)$$

$$\mathrm{A},\mathrm{I} - \mathrm{I},\mathrm{II} = h\left(\frac{2}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) - \frac{6}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) + \&c.\right)$$

$$\mathrm{I},\mathrm{II} - \mathrm{II},\mathrm{III} = h\left(\frac{2}{v^2}\left(\frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2}\right) - \frac{12}{v^3}\left(\frac{1}{3g} - \frac{2}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3}\right) + \&c.\right)$$

LXI. Si la chaleur étoit la même par toute la hauteur de l'atmosphère, ou qu'il fut $m = \infty$, ces intervalles iroient en croissant assés regulièrement en montant ; car on auroit

$$\mathrm{III},\mathrm{II} = h\left(\frac{1}{vg} - \frac{5}{2v^2g} + \frac{19}{3v^3g}\right)$$

$$\mathrm{II},\mathrm{I} = h\left(\frac{1}{vg} - \frac{3}{2v^2g} + \frac{7}{3v^3g}\right)$$

$$\mathrm{I},\mathrm{A} = h\left(\frac{1}{vg} - \frac{1}{2v^2g} + \frac{1}{3v^3g}\right)$$

$$\mathrm{A},1 = h\left(\frac{1}{vg} + \frac{1}{2v^2g} + \frac{1}{3v^3g}\right)$$

$$1,2 = h\left(\frac{1}{vg} + \frac{3}{2v^2g} + \frac{7}{3v^3g}\right)$$

$$2,3 = h\left(\frac{1}{vg} + \frac{5}{2v^2g} + \frac{19}{3v^3g}\right)$$

différences

$$\ldots\ h\left(\frac{1}{v^2g} - \frac{4}{v^3g}\right)$$

$$\ldots\ h\left(\frac{1}{v^2g} - \frac{2}{v^3g}\right)$$

$$\ldots\ h\left(\frac{1}{v^2g} - 0\right)$$

$$\ldots\ h\left(\frac{1}{v^2g} + \frac{2}{v^3g}\right)$$

$$\ldots\ h\left(\frac{1}{v^2g} + \frac{4}{v^3g}\right)$$

Cepen-

Cependant il femble qu'il pourroit arriver, que l'intervalle II, III, devint plus grand que I, II, lorsque $1 < \frac{4}{\nu}$, ou $\nu < 4$, ou $\frac{1}{\nu} > \frac{1}{4}$, mais il faut remarquer que dans ces cas, où le changement $\frac{1}{\nu}h$ feroit fi confidèrable, notre formule approchée ne fauroit plus avoir lieu; car il la faudroit alors continuer à plufieurs termes, par lequel l'accroiffement de ces intervalles feroit rétabli.

LXII. Mais il n'en eft pas de même, quand la chaleur diminuë dans l'atmofphère en montant; cet accroiffement pourra bien alors devenir affés irregulier, & même négatif en quelques endroits, quoique la fraction $\frac{1}{\nu}$ fut très petite. Pour mieux éclaircir cet effet de la chaleur variable, pofons d'abord $m = \frac{1}{g}$, ou $m = 10000$ à peu près, de forte qu'à la hauteur de $10000\,h$ la chaleur foit réduite à la moitié. Ayant donc $mg = 1$, nos intervalles feront:

$$\mathrm{III,II} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{19}{3\nu^3}\right)$$
$$\mathrm{II,I} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{7}{3\nu^3}\right)$$
$$\mathrm{I,A} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{3\nu^3}\right)$$
$$\mathrm{A,1} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{3\nu^3}\right)$$
$$1,2 = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{7}{3\nu^3}\right)$$
$$2,3 = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{19}{3\nu^3}\right)$$

dans ce cas donc tant en montant au deffus du point A, qu'en defcendant au deffous, ces intervalles iroient en croiffant. Or ces formules ne fauroient plus avoir lieu, lorsqu'on monte trop haut, ou qu'on defcende trop bas: car alors il faudra recourir à nos premières formules fans fe fervir de ces approximations.

LXIII. Posons donc pour ce cas $m = \frac{1}{g}$, & partant $\alpha = g$, la hauteur du barometre à un endroit quelconque $= \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right)h$, & à un de nos intervalles au dessus $= \left(1 - \frac{\mu - 1}{\nu}\right)h$. Nous aurons donc pour l'élevation du premier endroit cette équation :

$$l\left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) = -\frac{gz}{h} - \frac{ggzz}{2hh}, \qquad \text{\& partant}$$

$$z = \frac{h}{g}\left(\sqrt{\left(1 + 2l\frac{\nu}{\mu - \nu}\right)} - 1\right)$$

& l'élevation du second, qui soit $= z'$ sera

$$z' = \frac{h}{g}\left(\sqrt{\left(1 + 2l\frac{\nu}{\mu - \nu - 1}\right)} - 1\right)$$

Donc cet intervalle, par lequel la hauteur du barometre change de $\left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right)h$ à $\left(1 - \frac{\mu - 1}{\nu}\right)h$, sera

$$\frac{h}{g}\left(\sqrt{\left(1 + 2l\frac{\nu}{\nu - \mu - 1}\right)} - \sqrt{\left(1 + 2l\frac{\nu}{\nu - \mu}\right)}\right)$$

Et prenant μ négatif nous aurons pour un tel intervalle quelconque au dessous de A

$$\frac{h}{g}\left(\sqrt{\left(1 + 2l\frac{\nu}{\nu + \mu - 1}\right)} - \sqrt{\left(1 + 2l\frac{\nu}{\mu + \nu}\right)}\right)$$

ou fort à peu près $= \dfrac{h}{g(\nu + \mu)\sqrt{\left(1 + 2l\frac{\nu}{\nu + \mu}\right)}}$

LXIV. Dans cette hypothese il est évident, qu'à quelque profondeur qu'on descende, le barometre ne sauroit monter au delà d'une certaine hauteur, il ne sauroit même jamais atteindre la hauteur $= 2h$; car posant $p = 2h$, on a pour la profondeur z, où cela devoit arriver, cette équation $l\,2 = \frac{gz}{h} - \frac{ggzz}{2hh}$, dont les racines $z = \frac{h}{g}[\sqrt{(1 - 2\,l\,2)} + 1]$ sont imaginaires. La plus grande hauteur, à laquelle le barometre puisse monter, sera donc lorsque $2\,l\frac{\nu+\mu}{\nu} = 1$, ou bien $\mu = \nu(\sqrt{e} - 1)$: donc cette plus grande hauteur du barometre sera $= h\sqrt{e} = 1,6487h$, à laquelle il arrivera à la profondeur $z = \frac{h}{g}$; & à des profondeurs plus grandes, la hauteur du barometre redeviendra plus petite: ce qui est sans doute un grand paradoxe. Mais il n'en faut pas être surpris, puisque l'hypothese $r = \frac{c}{1 - \frac{z}{mh}}$ renferme déjà cette grande absurdité, qu'à la profondeur $z = mh$, la chaleur est supposée infinie: d'où l'on voit que notre hypothese, quelque bonne qu'elle soit pour la montée, ne sauroit être appliquée à des trop grandes profondeurs.

LXV. Considérons aussi le cas où $mg = 2$, ou environ $m = 20000$, desorte qu'à la hauteur $= 20000h$ la chaleur soit réduite à la moitié: & nos intervalles seront:

$$\mathrm{III,II} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{5}{4\nu^2} + \frac{95}{24\nu^3}\right)$$

Difrerences

$$\ldots \frac{h}{g}\left(\frac{1}{2\nu^2} - \frac{5}{2\nu^3}\right)$$

$$\mathrm{II,I} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{3}{4\nu^2} + \frac{35}{24\nu^3}\right)$$

$$\ldots \frac{h}{g}\left(\frac{1}{2\nu^2} - \frac{5}{4\nu^3}\right)$$

$$\mathrm{I,A} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{4\nu^2} + \frac{5}{24\nu^3}\right)$$

$$\ldots \frac{h}{g}\left(\frac{}{2\nu^2} + 0\right)$$

$$\mathrm{A,1} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{4\nu^2} + \frac{5}{24\nu^3}\right)$$

$$\ldots \frac{h}{g}\left(\frac{1}{2\nu^2} + \frac{5}{4\nu^3}\right)$$

$$1,2 = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{3}{4\nu^2} + \frac{35}{24\nu^3}\right)$$

$$\ldots \frac{h}{g}\left(\frac{1}{2\nu^2} + \frac{5}{2\nu^3}\right)$$

$$2,3 = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{5}{4\nu^2} + \frac{95}{24\nu^3}\right)$$

d'où l'on voit que ces intervalles décroitront moins, plus on defcend au deffous de A, & qu'ils cefferont enfin entierement de diminuer, après quoi ils iront même en augmentant, comme dans le cas précédent $mg = 1$.

LXVI. Mais fi $mg < 1$. l'ordre de ces intervalles deviendra plus irrégulier. Pofons pour le faire voir $mg = \frac{1}{2}$, ou la hauteur, à laquelle la chaleur eft réduite à la moitié, $= 5000h$ à peu près; & nos intervalles feront :

III,

$$\text{III,II} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{v} + \frac{5}{2v^2} + \frac{76}{3v^3}\right)$$

$$\text{II, I} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + \frac{28}{3v^3}\right)$$

$$\text{I, A} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{4}{3v^3}\right)$$

$$\text{A, 1} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2v^2} + \frac{4}{3v^3}\right)$$

$$\text{1, 2} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{v} - \frac{3}{2v^2} + \frac{28}{3v^3}\right)$$

$$\text{2, 3} = \frac{h}{g}\left(\frac{1}{v} - \frac{5}{2v^2} + \frac{76}{3v^3}\right)$$

d'où l'on voit que les intervalles au deſſous de A vont en croiſſant & que ceux au deſſus de A en diminuant, mais que cette diminution devient de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'elle évanouïſſe entièrement, après quoi ils redéviendront plus grands.

LXVII. On ne doit donc pas être ſurpris ſi en montant on trouve plus petits les intervalles, par lesquels le barometre deſcend d'une quantité donnée; & qu'en deſcendant on les trouve plus grands. Et puisque la chaleur, tant en montant dans l'atmosphere qu'en deſcendant dans les entrailles de la terre, peut ſuivre une loi fort irréguliere, qui s'ecarte beaucoup de notre formule, on ne ſera plus frappé ſi l'on y découvre encore une plus grande irrégularité dans les intervalles en queſtion. De plus, cette irrégularité doit devenir encore plus grande, lorsque l'air n'eſt pas en équilibre, comme j'ai ſuppoſé jusqu'ici. On rencontre ſurtout dans les mines un vent presque continuel, d'où la grandeur des intervalles doit être fort altérée; & on ſait par les principes du mouvement des fluides, que les autres circonſtances demeurant les mêmes, le mouvement doit diminuer la preſſion, & partant la hauteur du barometre.

LXVIII. Ayant remarqué, que l'atmosphère ne ſauroit être en équilibre, à moins qu'à hauteurs égales le degré de chaleur ne ſoit partout le même, on comprend bien qu'il doit naitre un vent toutes les fois,

fois, qu'à égales hauteurs la chaleur eſt différente. La raiſon en eſt, que les preſſions ſur chaque particule de l'air ne peuvent plus être balancées par ſon poids. Or, ſi nous ſuppoſons la preſſion verticale en équilibre avec la gravité de chaque particule, les preſſions horizontales ne peuvent pas évanouir, & partant l'air ſera pouſſé horizontalement. Si nous conſultons les formules données ci-deſſus pour les trois preſſions, nous appercevrons bientôt, que l'air doit être pouſſé du côté, où eſt la plus grande chaleur, de ſorte qu'il doit y avoir toujours un vent des endroits, où il fait plus chaud, vers ceux où il fait plus froid à la même hauteur. Cet effet doit toujours avoir lieu dans la ſuppoſition, que les preſſions verticales ſoient en équilibre avec la gravité.

De l'Equilibre des fluides dans l'hypotheſe de la Gravité dirigée vers un ou pluſieurs centres.

LXIX. Lorſque les forces ſollicitantes ſont dirigées vers un centre fixe, & qu'elles ſont proportionnelles à une fonction quelconque de la diſtance, de ſorte qu'à égales diſtances elles ſoient auſſi égales; il eſt évident, que les couches ſeront ſphèriques, & concentriques autour du centre de forces, & que dans l'état d'équilibre tant la preſſion que la denſité doit être la même par toute l'étenduë de chaque couche. Et ſi le fluide eſt compreſſible, & que la chaleur influë ſur ſon élaſticité, l'équilibre ne ſauroit ſubſiſter, à moins que la chaleur ne fut la même par chaque couche. Quand cette condition n'a pas lieu, on peut conclure comme auparavant, que le fluide ſera porté des endroits plus chauds aux plus froids; mais je me borne ici uniquement à la conſidération de l'équilibre.

LXX. Soit C le centre des forces, & à la diſtance $CP = z$, ſoit la force accélératrice $= Z$ fonction quelconque de z; comme cette force tend à diminuer la diſtance z, nous aurons pour nos formules $ds = -Z dz$, & poſant la denſité en $P = q$, & la preſſion exprimée par la hauteur $= p$, l'équilibre ſera renfermé dans cette équa-

équation $dp = -qZdz$. Ce que je viens de déveloper ſur les fluides compreſſibles dans l'hypotheſe de la gravité naturelle, s'appliquera aiſément à l'hypotheſe préſente; & il feroit ſuperflu, ſi je voulois traiter de nouveau de cette eſpece de fluides. Soit donc le fluide incompreſſible, & ſa denſité partout la même $= g$, & notre formule donnera: $p = C - g\int Zdz$. Suppoſons qu'à la couche A, dont le demi-diametre $CA = a$, la preſſion ſoit $= 0$, & prenant la conſtante C en ſorte que p évanouiſſe, ſi $z = a$, la formule trouvée montrera à chaque diſtance $CP = z$ du centre la preſſion; la plus haute ſurface, où le fluide eſt de niveau, ſera donc ſphèrique, dont le rayon $CA = a$.

LXXI. Si la force centrale eſt proportionnelle à la diſtance, & que la force accélératrice en A ſoit $= n$, on aura $Z = \frac{nz}{a}$, & partant

$$p = C - \frac{ngzz}{2a} = \tfrac{1}{2}nga - \frac{ngzz}{2a} = \frac{nga}{2}\left(1 - \frac{zz}{aa}\right).$$

Donc la preſſion au centre même C ſera $= \frac{1}{2}nga$; ce qui feroit presque le cas, ſi toute la terre étoit formée d'eau, & qu'il n'y eut point de mouvement de rotation.

Si l'on veut ſuppoſer la force centrale réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance, on aura $Z = \frac{naa}{zz}$, prenant le nombre n pour marquer la force accélératrice en A, & on aura la preſſion en P:

$$p = C + \frac{ngaa}{z} = \frac{ngaa}{z} - nga = nga\left(\frac{a}{z} - 1\right)$$

d'où la preſſion au centre C deviendroit infinie.

Fig. 9. LXXII. Si les particules du fluide ſont attirées non ſeulement vers le centre fixe C par la force accélératrice Z, fonction quelconque de la diſtance $CM = z$, mais qu'elles ſoient outre cela repouſſées d'une

d'une ligne fixe ACB, qui passe par le centre C, par des forces proportionnelles aux distances depuis cet axe, de sorte qu'à la distance $= b$ cette force soit $= m$; au point M il y aura deux forces accélératrices, l'une selon MC, qui est $= Z$, & l'autre selon $PM = y$, qui est $= \frac{my}{b}$, ayant tiré de M la perpendiculaire MP à l'axe ACB.

Cela posé, l'effort au point M sera : $s = -\int Z dz + \frac{myy}{2b}$, & partant $ds = -Z dz + \frac{mydy}{b}$. Donc, si la densité en M est $= q$, & la pression exprimée par la hauteur $= p$, nous aurons cette équation
$$dp = -qZ dz + \frac{mqydy}{b}$$
& les couches doivent être prises en sorte, que pour chacune la quantité $-\int Z dz + \frac{myy}{2b}$ soit une quantité constante; chaque couche sera donc une surface engendrée par la révolution d'une certaine courbe TVM autour de l'axe AB.

LXXIII. Il faut donc distinguer tout le fluide par de telles couches, & pour trouver la figure de chacune, on n'a qu'à chercher les courbes TMV, par la révolution desquelles autour de l'axe AB ces couches naissent. Or pour chacune de ces courbes, en posant $CM = z$, & $PM = y$, on a cette équation $-\int Z dz + \frac{myy}{2b} = \text{Const.}$ Et comme toutes ces figures ne différent entr'elles que de la valeur de la constante C, leur nature sera exprimée par la même équation différentielle $-Z dz + \frac{mydy}{b} = 0$. Ayant trouvé ces couches, il faut que tant la densité que l'élasticité soit la même par toute l'étenduë de chaque couche; & si le fluide est compressible, & que la chaleur influë sur son élasticité, il faut aussi que la même chaleur régne par

 toute

l'étenduë de chaque couche: fans cette derniere condition, l'équilibre ne feroit pas même poffible.

LXXIV. Or, fuppofons le fluide incompreffible, & que fa denfité foit par tout la même $q = g$, & la preffion en M fera exprimée par la hauteur $p = C - g\int Z\,dz + \frac{mgyy}{2b}$.

Donc, fi ADB repréfente la couche la plus haute, où le fluide eft cenfé être de niveau, il faut C déterminer en forte, que fi l'on rapporte z & y à cette couche, la valeur de p évanouiffe. Donc, fi l'équation pour la derniere couche eft:

$$-\int Z\,dz + \frac{myy}{2b} = A$$

la preffion à toute autre couche fera:

$$p = -Ag - g\int Z\,dz + \frac{mgyy}{2b}.$$

D'où l'on voit que par toute l'étenduë de chaque couche la preffion eft la même: & fi nous confidérons la couche, dont la nature eft exprimée par cette équation: $-\int Z\,dz + \frac{myy}{2b} = L$, la preffion dans cette couche fera partout $p = (L - A)g$.

LXXV. Soit la force centrale proportionnelle aux diftances, ou $Z = \frac{nz}{b}$, de forte que $\int Z\,dz = \frac{nzz}{2b}$. On aura donc pour chaque couche cette équation $\frac{myy - nzz}{2b} = \text{Conft.}$ qui eft ou pour une ellipfe, lorfque $m < n$, ou pour une hyperbole lorfque $m > n$, ou pour deux lignes droites paralleles & perpendiculaires à l'axe AB, lorfque $m = n$. Or en général la preffion à un point quelconque M fera $p = g\left(\frac{myy - nzz}{2b} - A\right)$: ou bien,

fi nous

si nous posons l'abscisse $CP = x$, à cause de $zz = xx + yy$, nous aurons cette équation pour la pression :

$$p = g\left(\frac{(m-n)yy - nxx}{2b} - A\right)$$

où il faut remarquer, que là où cette formule est négative, le fluide ne sauroit exister : il n'occupera que les endroits, où la valeur de cette formule est positive, & sera terminé là où elle évanouït, de sorte que pour la derniere surface du niveau, on aura cette équation :

$$(m-n)yy - nxx - 2Ab = 0.$$

LXXVI. Commençons par considérer le cas, où $m = n$, & il n'y aura point d'équilibre, à moins que A ne soit une quantité négative: soit donc $A = -\frac{naa}{2b}$, pour avoir

$$p = \frac{ng}{2b}(aa - xx).$$

Dans ce cas donc, le volume du fluide résultera par la révolution de l'espace indéterminé ABEF, compris entre les deux paralleles AE & BF, perpendiculaires à l'axe AB, & de part & d'autre également distantes du centre C, de sorte que $CA = CB = a$. Il sera donc terminé par deux plans infinis EAE & FBF, où la pression évanouït. Entre ces deux plans il y aura par tout une pression positive, & par toute l'étenduë de chaque plan perpendiculaire à l'axe la même; ainsi dans, le plan MPM, la pression sera $= \frac{ng}{2b}(CA^2 - CP^2)$: & au plan qui passe par le centre C la pression sera $= \frac{ng}{2b}.CA^2$, & partant la plus grande. Fig. 10.

LXXVII. Si m est plus grand que n, ou $m - n$ positif, il y aura trois cas à considérer, selon que la constante A est posi-

 tive

tive, ou négative, ou zero. Soit premièrement $A = o$, & la pression sera $$p = \frac{g}{2b}[(m-n)yy - nxx]$$
d'où nous tirons pour les surfaces, où la pression est nulle, ces deux

Fig. 11. équations $y = x\sqrt{\frac{n}{m-n}}$, & $y = -x\sqrt{\frac{n}{m-n}}$, qui sont pour deux lignes droites ECF, également inclinées à l'axe AB, & qui passent par le centre C, la tangente de leur inclination à l'axe, ou de l'angle ACE, étant $= \sqrt{\frac{n}{m-n}}$, & le sinus $= \sqrt{\frac{n}{m}}$: & ainsi les couches de niveau seront les deux surfaces coniques ECF. Pour les autres couches, où la pression est la même, on aura cette équation : $(m-n)yy - nxx = cc$, la pression y étant $= \frac{gcc}{2b}$. Cette couche sera donc engendrée par la révolution d'une hyperbole MVM entre les asymtotes EE & FF, & à cause de $cc = (m-n)CV^2$, la pression par toute cette couche sera $= \frac{(m-n)g.CV^2}{2b}$.

LXXVIII. Soit en second lieu A une quantité positive $= (m-n)aa$, pour avoir la pression $p = \frac{g}{2b}[(m-n)yy - nxx - (m-n)aa]$: & la surface où le fluide est à niveau, ou la pression nulle, sera en-

Fig. 12. gendrée par la révolution de l'hyperbole EDE, décrite entre les asymtotes Ce, Ce, également inclinées à l'axe AB, le sinus de leur inclinaison, ou de l'angle ACe, étant $= \sqrt{\frac{n}{m}}$, comme auparavant, & le demi-axe $CD = a$: le fluide remplira l'espace formé par la révolution de l'aire hyperbolique infinie EDEdE. Les autres couches seront formées par toutes les autres hyperboles MVM décrites entre les mêmes asymtotes, dont le demi-axe CV est plus grand que CD, & la pression y sera $= \frac{(m-n)g}{2b}(CV^2 - CD^2)$.

LXXIX.

LXXIX. Enfin, si A est une quantité négative $= -naa$, la pression étant $p = \frac{g}{2b}[(m-n)yy - nxx + naa]$,

la surface de niveau est engrendrée par la révolution de l'hyperbole $naa = nxx - (m-n)yy$, ou plutôt des deux hyperboles conjuguées AE, BF, décrites sur l'axe même $AB = 2a$, dont les asymtotes Ce, Cf sont inclinées à l'axe de l'angle ACe, duquel le sinus $= \sqrt{\frac{n}{m}}$. Le fluide occupera tout l'espace infini EABF, renfermé entre les deux hyperboles conjuguées AE & BF, concevant cet espace tourné autour de l'axe AB. Les couches de cet espace seront aussi formées par toutes les autres hyperboles conjuguées VM, VM, décrites entre les mêmes asymtotes, dont l'axe VV est moindre que AB, & la pression y sera $= \frac{ng}{2b}(CA^2 - CV^2)$. L'espace conique formé par les asymtotes mêmes Ce, Cf, donnera donc aussi une couche, où la pression sera $= \frac{ng}{2b}.CA^2$. Mais outre cela toutes les hyperboles NWN, décrites entre les asymtotes eCf, donneroit aussi des couches à l'infini; & la pression dans une telle couche sera $= \frac{g}{2b}[n.CA^2 + (m-n)CW^2]$: d'où l'on voit qu'en s'éloignant par la ligne CD, la pression va toujours en augmentant, & même jusqu'à l'infini; ce qui arrive aussi dans les deux cas précédens, où la distance CV peut croitre jusqu'à l'infini. Dans tous ces cas le fluide s'étend à l'infini. Fig. 13.

LXXX. Supposons enfin $n > m$ ou $m - n < 0$, & la pression ne sauroit devenir positive, à moins que A n'ait une valeur négative. Soit donc: $p = \frac{g}{2b}[aa - nxx - (n-m)yy]$,

& la couche de niveau sera une surface elliptique ADB, où Fig. 9

CA

$CA = CB = \frac{a}{\sqrt{n}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{(n-m)}}$; de ſorte que $CD > CA$. Le fluide remplira donc la cavité de cet elliptoïde, dont CD repréſente le demi-diametre de l'équateur. Toutes les autres couches comme VMT, ſeront auſſi des ellipſes ſemblables, plus petites, & ſi l'équation en eſt

$$n x x + (n - m) y y = c c,$$

la preſſion de cette couche ſera $= \frac{g}{2b}(aa - cc)$, ou puisque

$aa = n.CA^2$, & $cc = n.CV^2$, elle eſt $= \frac{ng}{2b}(CA^2 - CV^2)$.

Ce cas approche fort de la figure de la Terre, ou autre Planete, qui par ſon mouvement de rotation produit la force centrifuge, dont toutes les particules ſont repouſſées de l'axe AB, & cela proportionnellement aux diſtances de cet axe, comme j'ai ſuppoſé. Or, ſi ce mouvement d'une maſſe fluide peut ſubſiſter, ou non? c'eſt une queſtion, qui ne ſauroit être decidée ici, où je me contente de regarder la force centrifuge comme une force particuliere, qui agit ſur le fluide en repos.

LXXXI. Ce ſont donc les figures, qu'une maſſe fluide doit recevoir, dont les particules ſont attirées à un centre fixe en raiſon des diſtances, & en même tems repouſſées d'un axe fixe auſſi en raiſon des diſtances; où j'ai introduit ces dernieres forces pour tenir lieu de la force centrifuge, qui agiroit ſur le fluide, s'il tournoit d'un mouvement donné autour de cet axe. Pour éclaircir cette matiere davantage, je ſubſtituerai au lieu de cette force centrale une autre, qui pouſſe le fluide au centre C, en raiſon réciproque des quarrés des diſtances, en laiſſant l'autre force centrifuge inaltérée. Soit donc comme ci-deſſus, la force centrale $Z = \frac{naa}{zz}$, pour avoir ſon effort $\int Z dz = -\frac{naa}{z}$, & ſuppoſant la denſité du fluide partout la même $= g$, à un endroit quelconque M, dont la diſtance au centre C eſt $CM = z$, & à l'axe

AB

AB la diſtance PM $= y$, la preſſion ſera exprimée par la hauteur p, dont la valeur eſt $$p = g\left(\frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} - na\right).$$

LXXXII. Il eſt clair que la conſtante C doit être priſe négative, puisque d'ailleurs la preſſion ne ſauroit nulle part évanouïr. Ainſi nous aurons pour la derniere couche, où le fluide eſt de niveau, ou $p = 0$, cette équation :

$$\frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} = na, \quad \text{ou} \quad z = \frac{2naab}{2nab - myy},$$

or pour toute autre couche, où la preſſion eſt poſitive, on aura :

$$\frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} > na, \quad \text{ou} \quad z < \frac{2naab}{2nab - myy}.$$

Je remarque ici d'abord que pour chercher ces figures, on ſe tromperoit, ſi l'on vouloit ramener cette équation à des coordonnées orthogonales CP $= x$, & PM $= y$, en ſubſtituant $z = \sqrt{(xx + yy)}$, d'où l'on tireroit une ligne du ſixième ordre; car il eſt clair que cette même ligne répondroit auſſi à l'équation $-z = \frac{2naab}{2nab - myy}$: Or ce feroit le cas, où les particules du fluide feroient repouſſées du centre en raiſon réciproque du quarré des diſtances, & partant l'équation rationnelle du ſixième degré entre x & y comprendroit conjointement deux hypotheſes différentes, l'une des forces centrales attirantes, & l'autre des forces centrales repouſſantes.

LXXXIII. Donc, pour écarter ce dernier cas, il ne faut donner à la diſtance z que des valeurs poſitives, & partant il n'eſt pas permis de lui ſubſtituer la valeur radicale $\sqrt{(xx + yy)}$, puisqu'alors après la réduction à la rationalité on ne feroit plus le maitre de ſéparer les cas, où la valeur de z deviendroit négative dans l'équation fondamentale. On ſera ſurpris qu'une telle équation finale puiſſe contenir plus que le problème qui l'avoit fournie, ne renferme: mais il faut conſidé-

ſidérer que l'hypotheſe même de l'attraction en raiſon réciproque du quarré des diſtances, renferme déjà quelque choſe, dont le principe de
Fig. 14. continuité eſt choqué. Car, ſoit ſur la droite OM le centre de force C un point fixe O, & un corps en M; poſons la diſtance $OC = a$, $OM = u$, & le corps M ſera pouſſé de droite à gauche, ou vers O, par la force $= \frac{A}{(u-a)^2}$: or il eſt clair que, ſi $u < a$, ou qu'on poſe $ON = u$, cette expreſſion étant encore poſitive marqueroit, que le corps N ſeroit encore pouſſé de droite à gauche contre la teneur de l'hypotheſe, de ſorte que l'hypotheſe même eſt en quelque maniere contredite par le calcul; ce qui n'arrive pas dans le cas, où la force centrale eſt proportionnelle aux diſtances mêmes.

LXXXIV. Cela remarqué, conſidérons l'équation pour une couche quelconque, où la preſſion eſt poſitive, qui eſt

$$\frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} = nc, \quad \text{ou} \quad z = \frac{2naab}{2nbc - myy}$$

ſuppoſant $c > a$, & la preſſion par cette couche ſera $p = ng(c-a)$, d'où l'on voit que prenant $c = a$, ou trouvera la ſurface de niveau. Mais, puiſque chaque couche peut devenir celle de niveau, il conviendra d'examiner toutes les figures, que toutes les valeurs poſſibles de c fourniſſent; & quelle que ſoit la valeur de c, qui donne la couche de niveau, toutes les valeurs plus grandes donneront les couches, où la preſſion eſt poſitive; & l'excès de la valeur de c ſur celle-là, étant multipliée par ng, montrera la preſſion. Or, puiſque z ne ſauroit être priſe négativement, je remarque d'abord, que y doit toujours être plus petite que $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$, ce qui eſt la limite du fluide autour de l'axe: mais il faut de plus que la diſtance z ſoit plus grande que y.

LXXXV. Commençons par les plus petites valeurs de c, & il eſt clair que ſi $c = o$, notre équation ne ſauroit ſubſiſter, à moins qu'il qu'il ne fut $y = 0$, & $z = \infty$, cette couche se réduit donc à deux lignes droites situées sur l'axe même, & qui sont de part & d'autre infiniment éloignées du centre C. Pour tous les autres cas, en posant $y = 0$, on a $z = \frac{aa}{c}$, d'où l'on voit que chaque couche traverse l'axe en deux points également éloignés du centre C, & dont la distance sera d'autant plus grande, plus la ligne c est prise petite. Puisque de part & d'autre du centre C les figures sont les mêmes, il suffit de borner nos recherches à un côté du centre C sur l'axe CA; soit donc CA la valeur de z en posant $y = 0$, qu'une petite valeur de c donne, & de plus grandes donneront CE, CF, &c. de plus en plus petites, comme la position $c = 0$, a rendu la valeur de z infinie. Fig. 15.

LXXXVI. Pour trouver la courbe qui passe par le point A, donnons à y une valeur extrêmement petite, & nous aurons fort à peu près $z = \frac{aa}{c} + \frac{maa}{2nbcc}yy$, ayant $CA = \frac{aa}{c}$.

Soit $PM = y$, & $AP = x$, & puisque $CM = z$, à cause de

$$zz = \left(\frac{aa}{c} + x\right)^2 + yy,$$

nous trouverons en négligeant xx, & les plus hautes puissances de y, cette équation :

$$\frac{a^4}{cc} + \frac{ma^4}{nbc^3}yy = \frac{a^4}{cc} + \frac{2aax}{c} + yy,$$

qui se réduit à $x = \frac{cyy}{2aa}\left(\frac{ma^4}{nbc^3} - 1\right)$.

Donc, tant que c est pris si petit, que $\frac{ma^4}{nbc^3} > 1$, la valeur de x sera positive, & la courbe tournera sa convexité vers le centre C, & le rayon de sa courbure en A sera $= \frac{naabcc}{ma^4 - nbc^3}$. Cette

 cour-

courbe s'éloignera donc de plus en plus du centre C, & s'étendra du côté de l'axe CA prolongé à l'infini, où sa plus grande distance de cet axe sera $y = \sqrt{\frac{2nbc}{m}}$, à laquelle répond $z = \infty$; elle aura donc une asymtote parallele à l'axe, qui en est éloignée de l'intervalle $= \sqrt{\frac{2nbc}{m}}$.

LXXXVII. Pour démontrer cette étenduë uniforme de la courbe AMN à l'infini, considérons en une appliquée quelconque QN, moindre que $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$, & soit $yy = \frac{2(1-\nu)nbc}{m}$, posant $\nu < 1$, mais pourtant $\nu > 0$, & le point N sera réel, pourvû que la distance CN $= z$, soit plus grande que QN $= y$. Or, posant cette valeur pour yy, on aura $z = \frac{aa}{\nu c}$, & puisque par hypothese $ma^4 > nbc^3$, il est évident que $zz = \frac{a^4}{\nu\nu cc}$ est toujours plus grand que $yy = \frac{2(1-\nu)nbc}{m}$, ou $ma^4 > 2\nu\nu(1-\nu)nbc^3$. Car la plus grande valeur de $2\nu\nu(1-\nu)nbc$ est $\frac{8}{27}nbc^3$, qui provient si $\nu = \frac{2}{3}$. Donc, non seulement quand $ma^4 > nbc$? mais pourvû qu'il soit $ma^4 > \frac{8}{27}nbc^3$, à toute distance $y < \sqrt{\frac{2nbc}{m}}$ repond une valeur $z > y$, & partant tous les points N de la courbe AMN seront réels. Cette propriété est donc commune à tous les cas, où $c < \frac{3}{2}a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$. quand même c sera plus grand que $a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$. Mais, si $c > \frac{3}{2}a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$, la courbe n'aura pas des parties, qui répondent à toutes les distances y moindres que $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$.

LXXXVIII.

LXXXVIII. Mais il faut démontrer de plus, qu'en augmentant les appliquées y depuis zero jusqu'à leur plus grande valeur $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$, les abſciſſes AQ ou CQ vont toujours en augmentant, dans le cas que nous conſidérons à préſent, où $ma^4 > nbc^3$, ou $c < a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$. Soit pour cet effet $ma^4 = \lambda nbc^3$ poſant $\lambda > 1$, & nous aurons $CQ^2 = zz - yy = \frac{\lambda nbc}{\nu\nu m} - \frac{2(1-\nu)nbc}{m}$, & il s'agit de faire voir, que cette quantité devient plus grande, plus on diminuë la fraction ν. Or en diminuant ν cette quantité va en augmentant, quand celle-cy $\frac{\lambda}{\nu\nu} + 2\nu$ prendra des accroiſſemens continuels. Poſons $\nu - d\nu$ pour ν, & l'accroiſſement ſera $2\left(\frac{\lambda}{\nu^3} - 1\right)d\nu$, qui eſt par conſéquent toujours poſitif, pourvûque $\nu^3 < \lambda$, ce qui arrive évidemment dans le cas préſent, puisque $\nu < 1$, & $\lambda > 1$. D'où nous voyons que ſi $\lambda = 1$, ou $c = a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$, l'accroiſſement de l'abſciſſe n'évanouït qu'au premier inſtant, qui ſoit en E, où la courbure évanouït, & de là la courbe ſuivra un trait ſemblable Emu, qui s'étend à l'infini tout comme dans les cas, où $c < \sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$.

LXXXIX. Nous voilà donc arrivés à la connoiſſance de toutes les couches qui coupent l'axe au delà du point E, poſant pour ce point $c = a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$, ou la diſtance même $CE = a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$, & toutes ces couches s'étendent uniformement à l'infini, comme elles ſont repréſentées dans la figure. Pour approcher plus du centre, poſons $c > a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$, mais pourtant $c < \frac{3}{2}a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$; de ſorte que $\lambda < 1$, & $\lambda > \frac{8}{27}$:

& chaque diſtance y moindre que $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$, donnera un point réel de la courbe. Mais, pendant que les appliquées croiſſent, les abſciſſes diminueront depuis le commencement par quelque intervalle tant que $v^3 > \lambda$. Soit F le point, où $c = \frac{3}{2} a \sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$, ou $CF = \frac{3}{2} a \sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$, & la figure de la couche qui paſſe par ce point s'approchera dabord de la perpendiculaire CD, & la touchera même au point D, d'où elle réjaillit quaſi, & depuis s'éloignera de CD en allant par v à l'infini, & s'approchant de plus en plus de ſon aſymtote parallele à l'axe. Les autres couches entre E & F prendront une route preſque ſemblable, avec cette différence, qu'elles ne parviennent pas jusqu'à la droite CD, & qu'elles ont un point d'inflexion.

XCX. Mais, lorsque $c > \frac{3}{2} a \sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$, ou bien $\lambda < \frac{8}{27}$, il y aura des valeurs de y moindres que $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$, auxquelles ne répond aucune partie de la courbe. Car nommant l'abſciſſe priſe ſur l'axe depuis le centre $C = x$, & poſant $yy = \frac{2(1-v)nbc}{m}$, nous avons trouvé

$$xx = \frac{nbc}{m}\left(\frac{\lambda}{vv} - 2 + 2v\right).$$

Donc, lorsque $\frac{\lambda}{vv} + 2v = 2$ l'abſciſſe x évanouit, & lorsque $\frac{\lambda}{vv} + 2v < 2$ elle devient imaginaire. Or, ſi $\lambda = \frac{8}{27}$, l'équation $\frac{\lambda}{vv} + 2v = 2$ a deux racines égales chacune $v = \frac{2}{3}$, la troiſième étant négative $v = -\frac{1}{3}$, & partant inutile; ce qui eſt le cas précédent, où le point D tombe en CD, à laquelle ligne les deux branches

ches FD & $\nu\mu$ font inclinées d'un angle de 60 degrés. Mais, fi $\lambda < \frac{8}{27}$, l'équation $\frac{\lambda}{\nu\nu} + 2\nu = 2$ aura deux racines inégales positives dont l'une & l'autre donne un point dans la ligne CD, par lesquels la couche paſſe, comme H & I. Cette couche deviendra donc double, l'une ſemblable à un quart d'ellipſe GH, & l'autre paſſera de I par K à l'infini, en s'éloignant de l'axe CA, & s'approchant de ſon aſymtote, dont la diſtance à l'axe eſt $= \sqrt{\frac{2nbc}{m}}$.

XCI. Voilà donc les figures des principales couches, qu'on doit diſtinguer dans le fluide dans l'hypotheſe propoſée. D'abord en E, prenant $CE = a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$, & plus loin du centre C les couches ſont formées de la révolution des courbes Emn, AMN autour de l'axe CA, ces courbes s'éloignant tant du centre C, que de la droite CD, qui eſt tirée ſur l'axe au centre C perpendiculaire. Enſuite, depuis E jusqu'en $CF = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$, ou $CF = \frac{2}{3}CE$, ces courbes ſeront plus irrégulières comme $em'n'$, & $fd\nu'$, en s'approchant au commencement de la ligne CD. Or la courbe qui aboutit en F, parvient jusqu'à la droite CD en D, de ſorte que $CD = \frac{3}{2}CF$, faiſant en D l'angle CDF de 60°, d'où elle rebrouſſe en ν, faiſant auſſi l'angle IDν de 60°. Cette branche Dν ne peut pas être cenſée la continuation de la branche FD, ce qui ſeroit contraire à la loi de continuité; mais il faut conſidérer, qu'à l'autre côté de la ligne CD ſe trouvent des courbes pareilles, & Dν eſt la continuation de la branche ſemblable à FD, qui eſt de l'autre côté de CD.

XCII. Aux points G qui ſont encore plus proches du centre C, les couches GH & gh paſſent perpendiculairement par la droite CD, & ſont ſemblables à des quarts d'ellipſe. Or il faut remarquer, que dans toutes ces courbes la raiſon entre CH & CG eſt moindre que celle

celle de 3 à deux, & plus le point G approche du centre C, plus ce rapport approche de la raiſon d'égalité, de ſorte que dans cette hypotheſe il ſeroit impoſſible que le diametre de l'équateur d'une Planete ſurpaſſât plus de la moitié ſon axe. Mais chacune de ces couches G H eſt accompagnée d'une autre IK, qui s'étend à l'infini, & où la preſſion eſt la même, quoique ces couches ne ſoient nulle part liées enſemble; ainſi à la couche gh appartient encore la couche ik, qui s'en éloigne d'autant plus, plus celle-là devient petite. De cette maniere tout l'eſpace du centre C eſt partagé en couches, & on ne ſauroit marquer aucun point, par lequel ne paſſe une couche.

XCIII. Autour d'un tel centre le fluide peut donc être en équilibre ſous pluſieurs formes différences; il aura une figure terminée de toute part, lorſque la couche de niveau eſt une de celles qui ſont repréſentées par GH; car alors tout l'eſpace GCH étant rempli de fluide ſe trouvera en équilibre, & pourra être conſidéré comme une Planete. Donc, une telle Planete ne ſauroit ſubſiſter, à moins que la moitié de ſon axe CG ne fut plus petite que $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$; car ſi CG devenoit égale à $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$, la Planete ſeroit ſous l'équateur en D pointue. Si fd' étoit la couche de niveau, le fluide devroit être étendu vers v' à l'infini; mais s'il étoit entouré, par exemple, en do d'une croute ferme, l'équilibre pourroit avoir lieu, ce qu'il faut entendre de toutes les autres couches Em, AM, étant priſes pour celles de niveau. Sans cette condition tout l'eſpace devroit être rempli de fluide à l'exception de l'eſpace conoïdique VEn, ou VAn.

XCIV. Il y a encore à remarquer que cette hypotheſe renferme de tels cas d'équilibre, où tout l'eſpace autour de l'axe CV ſeroit vuide de fluide. Cela arrive ſi l'on prend pour le niveau la couche Dv, ou toute autre au deſſus IK; car alors tout l'eſpace étant rempli de fluide, & qu'il n'y eut de vuide que l'eſpace conoïdique formé mé par la révolution de la courbe Dv ou IK autour de l'axe, cette maſſe de fluide ſeroit en équilibre. Pour mieux comprendre cela, qu'on conçoive tout l'eſpace autour de C en tout ſens plein de fluide, & il n'y a aucun doute que cette maſſe ne ſoit en équilibre; ce ſeroit notre premier cas, où $c = o$. Enſuite, qu'on retranche de cette maſſe infinie une portion quelconque renfermée dans une des couches trouvées, & le reſte demeurera en équilibre. Les parties qu'on pourra retrancher de cette maniere ſont les ſolides formés par la révolution de quelqu'une des aires ſuivantes:

VAN, VEn, Ven', Vfdv', VFDv, VCDv, &c.

d'où l'on voit ſous combien de figures différentes le fluide pourroit être en équilibre dans l'hypotheſe, que je viens de conſidérer.