1756

De la variation de la latitude des étoiles fixes et de l'obliquité de l'écliptique

Leonhard Euler

DE LA

VARIATION

DE LA LATITUDE DES ÉTOILES FIXES

ET DE L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE.

PAR M. EULER.

I.

Ce sont deux questions de la derniere importance dans l'Astronomie, que je me propose d'éclaircir dans ce Mémoire, & de mettre dans un tel jour, qu'il n'y reste plus le moindre doute. On sait que les Astronomes ont été fort partagés sur ces deux questions; les uns ayant nié absolument, que la latitude des étoiles fixes, & l'obliquité de l'écliptique, fussent assujetties à aucun changement, pendant que d'autres se sont declarés pour le sentiment contraire. Les uns & les autres ont cru avoir les observations de leur côté; & quand ils ne les ont pas trouvées assés d'accord avec leur système, ils en ont attribué la cause au défaut de précision des anciennes observations. Et en effet, si les anciennes observations étoient aussi exactes que les modernes, il ne sauroit y avoir le moindre doute sur ces deux questions; l'intervalle de plus de deux mille ans, dont on pourroit comparer les observations, seroit plus que suffisant pour décider l'une & l'autre. Mais, puisque les anciennes observations sont fort défectueuses, & que leurs erreurs montent ordinairement à plusieurs minutes, il est évident qu'on ne sauroit s'en servir pour décider des questions, où il ne s'agit que de quelques minutes de changement dans l'espace de plusieurs siècles: or c'est précisément le cas, où nous nous trouvons à l'égard des deux questions proposées.

II.

II. M. le *Monnier*, dans la Préface de ses Institutions d'Astronomie, a examiné fort soigneusement ces deux questions ; & après avoir bien dévelopé les raisons, qu'on allégue de part & d'autre, il conclud qu'on n'en sauroit tirer aucune preuve convainquante, ni pour la diminution de l'obliquité de l'écliptique, ni pour quelque changement dans la latitude des étoiles fixes. Il s'oppose fort vigoureusement au sentiment de M. le Chevalier *de Louville*, qui avoit soutenu, que l'obliquité de l'écliptique diminuoit d'une minute pendant le cours de chaque siècle, & il remarque très judicieusement, que quand même une telle diminution auroit lieu, elle ne sauroit être si considérable. Pour la latitude des étoiles fixes, il tombe bien d'accord que celle de quelques unes a fort changé ; & il remarque que la latitude d'*Arcturus* avoit diminué de plus de 2 minutes dans l'espace de 50 ans. Or, en cas que ce changement fut fondé, il faudroit sans doute l'attribuer à quelque mouvement tout particulier de cette étoile, puisqu'il ne se trouve pas en d'autres, dont la position est à peu près la même. Il trouve aussi une augmentation d'une minute dans la latitude de *Fomalhaut* pendant l'espace de 50 ans, laquelle devroit également être l'effet de quelque mouvement particulier, en cas qu'elle fût bien constatée. Aussi ne regardé-je point tels changemens réels, s'il y en a, dans mes recherches ; mais j'envisage plutôt les étoiles fixes comme dans un repos parfait par rapport à l'espace absolu, & je n'ai égard qu'aux changemens apparens, qui sont causés par quelque variation dans la position du plan de l'écliptique. Or il est évident que si un tel changement a lieu, il en doit résulter un, tant dans l'obliquité de l'écliptique, que dans la latitude des étoiles fixes.

III. Cependant il est très certain, que les anciens Astronomes ont trouvé l'obliquité de l'écliptique plus grande, qu'on ne la trouve aujourdhui, & que plus nous remontons dans l'antiquité, nous y rencontrons aussi une plus grande augmentation. *Pytheas* 300 ans avant J. C. la fait de $23°, 52'\frac{1}{2}$. *Hipparque* environ 150 ans avant J. C. de $23°, 51'\frac{1}{3}$, à laquelle *Ptolemée* s'arrête aussi. 750 ans après J. C.

J. C. *Albategnius* la détermina de 23°, 35′, & cette même quantité fut reconnuë à peu près par les Arabes du 9me Siècle. Or l'an 901. *Thebit* l'avoit déterminée de 23°, 33′$\frac{1}{2}$; & *Mahmud* A. 992. de 23°, 32′$\frac{1}{3}$. Ensuite *Ulugh Beigh* la trouva de 23°, 30′$\frac{1}{3}$ vers le milieu du 15me Siècle. Enfin on sait que *Tycho*, & d'autres Astronomes du 16me Siècle, l'ont établie de 23°, 31′, & ensuite de 23°, 30′, & que ce n'est qu'au siècle passé, qu'on la réduisit à 23°, 29′, & à présent même à 23°, 28′, 30″. Cependant il faut avoüer que *Copernic* l'avoit déjà presque trouvée comme aujourdhui, mais il faut aussi convenir, qu'une erreur de deux minutes lui auroit bien pu échaper, ce qui paroit au moins plus probable que d'accuser les plus anciennes d'une de 20 minutes. Au reste, quoiqu'on ne puisse compter à quelques minutes près sur les observations des anciens, & qu'on n'en sauroit conclure la véritable diminution, en cas qu'il y en eut une; il semble pourtant très certain, que l'obliquité de l'écliptique ait été autrefois considérablement plus grande, qu'elle n'est aujourdhui. Car il n'est pas probable, que tous auroient commis des erreurs dans le même sens, & la diminution successive fournit une nouvelle preuve pour ce sentiment, quelque grossières qu'ayent été les premières observations. Or il faut bien distinguer ce changement, que les observations anciennes semblent indiquer dans l'obliquité de l'écliptique, de la variation périodique, qu'on a découverte depuis peu, & qui vient de la nutation de l'axe de la terre; celle-cy étant fort petite, & achevant ses périodes avec les nœuds de la Lune. Ainsi indépendamment de cette variation on demande, si l'obliquité moyenne de l'ecliptique a été de tout tems la même, ou si elle a diminué jusqu'à present?

IV. Quoiqu'il me semble, que les observations rapportées prouvent suffisamment la diminution, je conviens aisément qu'on ne sauroit s'en servir pour déterminer la véritable quantité de cette diminution. Si l'on compare l'obliquité de *Pytheas* de 23°, 52′$\frac{1}{2}$, avec celle d'aujourdhui, on trouve pour l'intervalle 20$\frac{1}{2}$ siècles une diminution de 24′, ce qui donneroit pour un siècle 1′, 2″. Or les détermina-

tions

tions de *Thebit* & *Mahmud* donnent $34''$ de diminution pour un siècle ; mais celles des Arabes du neuvième siècle donnent $47''$: d'où l'on doit vraisemblablement conclure, que *Pytheas* s'est trompé de plusieurs minutes en excès, & *Thebit* avec *Mahmud* de quelques unes en défaut. Car en vouloir conclure, qu'il n'y a point eu du tout de changement dans l'obliquité de l'écliptique, cela seroit sans doute trop hardy, & ne sauroit être soutenu, à moins qu'on ne fût en état de faire voir incontestablement par la Théorie, qu'un tel changement est tout à fait impossible. Or c'est apparement ce, sur quoy se fondent ceux qui nient absolument un tel changement dans l'obliquité de l'écliptique : & depuis qu'on a découvert la variation périodique, ou la nutation de l'axe de la terre fondée sur la Théorie du grand *Newton*, il semble qu'on a raison de rejetter cet autre changement, attendu que personne n'a encore montré, comment un tel changement pourroit être produit conformément à cette Théorie. Comme le changement de la latitude des étoiles fixes est si intimément lié avec celui de l'obliquité de l'écliptique, M. le *Monnier* nie absolument, que l'action des planetes pourroit produire un tel effet sur la terre, & ce même sentiment paroit assés général, que suivant la Théorie de *Newton* la situation du plan de l'écliptique ne sauroit être sensiblement altérée.

V. Or, quand on regarde la chose d'un autre point de vuë, & qu'on réfléchit que les plans des orbites des planetes ne sont pas fixes, mais mobiles, conformément à cette rétrogradation lente, qui convient à leurs nœuds, on changera bientôt de sentiment. Car, puisque les nœuds de l'orbite de Mars, par exemple, reculent tous les ans de $12''$ par rapport aux étoiles fixes, cette orbite sera sans doute assujettie à quelque variation, & partant les habitans de Mars remarqueront avec le tems quelque changement dans la latitude des étoiles fixes. Un semblable phènomene sera aussi apperçu par les habitans des autres planetes, entant que leurs orbites sont mobiles, comme on en est aujourdhui bien assuré par les observations. Donc, si par rapport aux habitans de toutes les autres planetes la latitude des étoiles fixes est variable, avec quelle raison

ſon pourroit-on ſoutenir que ceux de la terre feroient exemts d'un pareil événement? Or le mouvement des nœuds des planetes eſt non ſeulement ſuffiſamment conſtaté par les obſervations; mais il n'y a aucun doute, qu'il ne ſoit parfaitement conforme à la Théorie de *Newton*; depuis qu'on eſt aſſeuré, que le mouvement obſervé des nœuds de la Lune répond exactement à la même Théorie. Enſuite les dérangemens, qu'on obſerve dans le mouvement de Saturne, nous convainquent inconteſtablement, qu'outre la force qui pouſſe les planetes principales vers le Soleil, il y en a encore, dont les planetes ſont pouſſées les unes vers les autres, & que ces forces ſuivent également la raiſon renverſée des quarrés des diſtances. D'où l'on peut tirer cette concluſion générale, que chaque planete, & partant auſſi la terre, eſt attirée non ſeulement vers le Soleil, mais auſſi vers chacune des autres planetes: & de là il s'enſuit, qu'entant que les planetes ne ſe trouvent pas dans le même plan, les plans de leurs orbites en doivent néceſſairement ſouffrir quelque variation.

VI. Tout revient donc à examiner l'effet, que l'action des autres planetes eſt capable de produire dans la poſition du plan de l'orbite de la terre; & il eſt évident que de cet effet doit réſulter une altération, tant dans la latitude apparente des étoiles fixes, que dans l'obliquité de l'écliptique. C'eſt donc le problème propoſé par l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année prochaine, qui nous doit fournir les éclairciſſemens néceſſaires ſur les deux queſtions propoſées; or, puiſque le même problème s'étend auſſi aux autres inégalités, qui y ſont cauſées dans ſon mouvement, & dans le lieu de ſon aphélie, je me bornerai ici uniquement à indiquer les changemens, que l'action des planetes doit produire dans la poſition du plan de l'orbite de la terre. De là il arrive, que ſi l'on rapporte l'orbite de la terre à celle d'une autre planete, leur interſection mutuelle, ou la ligne des nœuds, en acquiert un petit mouvement en arrière, ſemblable à celui qu'on remarque dans les nœuds de la Lune; & à la rigueur l'inclinaiſon même, tout comme celle de la Lune, ſera aſſujettie à quelques changemens: mais

mais ceux-cy étant abſolument imperceptibles, & ſe remettant parfaitement après chaque période, il n'en ſauroit réſulter aucun phènomene ſenſible. De ſorte qu'on peut hardiment ſuppoſer, que l'inclinaiſon de l'orbite de la terre à celle de chaque autre planete demeure inaltérable, & qu'il n'y arrive d'autre changement, que dans le lieu de leur interſection, qui ne devient ſenſible qu'après pluſieurs années. Or, quoique les plans des orbites des autres planetes ſoient également variables, on les peut néanmoins regarder comme fixes, du moins pour le tems de pluſieurs années, & même de quelques ſiècles, au bout desquels on pourra de nouveau tenir compte de la vraye poſition mutuelle, qui aura alors lieu.

VII. Puisque l'action de chaque planete ſur la terre eſt extrêmement petite, on peut déterminer ſéparément l'effet de chacune, vu que celui de l'une ne ſauroit être troublé par les autres. Et quoique l'orbite de chaque planete ne ſoit pas immobile, il ſera permis dans cette recherche de la regarder comme telle. Rapportons donc tout Fig. 1. à la Sphère du monde, dont le centre ſoit C, qu'on peut ſuppoſer au milieu du Soleil, & que le grand cercle AEB repréſente le plan de l'orbite d'une planete, dont on recherche l'action ſur l'orbite de la terre, qui ſoit repréſentée par le grand cercle FEG, qui coupe l'autre en E, qu'on peut nommer le nœud aſcendant de l'orbite de la terre ſur celle de la planete, ſuppoſé que les lettres F, E, G, ſe ſuivent ſelon l'ordre des ſignes celeſtes; & l'angle BEG marquera l'inclinaiſon mutuelle des deux orbites. Maintenant concevons, que le cercle AEB demeurant immobile, l'autre FEG gliſſe inſenſiblement en arrière en conſervant toujours la même inclinaiſon, de ſorte qu'après quelque tems il parvienne dans la ſituation *feg*, le nœud E étant reculé cependant par l'eſpace E*e*. Cela poſé, il eſt clair que la latitude de la plupart des étoiles fixes, que je ſuppoſe conſerver toujours la même ſituation par rapport au cercle AEB, ſera changée par le transport de l'écliptique FEG en *feg*. Or, pour déterminer ce changement, on n'a qu'à tirer d'une étoile quelconque S perpendiculairement ſur les deux positions de l'écliptique FEG & *feg* les arcs de grands cercles SL & S*l*. Car, puisque ces arcs mesurent la latitude de l'étoile S pour les deux positions proposées de l'écliptique, leur différence donnera le changement, qui sera arrivé dans la latitude de l'étoile S, pendant que l'écliptique aura passé de la position FEG en *feg*. Pour faire cette recherche il faut tirer par l'étoile S un grand cercle ZST perpendiculaire sur l'orbite de la planete, dont la portion ST représentera la latitude de cette étoile par rapport à l'orbite de la planete, que je considére comme constante, de même que sa longitude à ce même égard, qu'on peut indiquer par l'arc AT, prenant pour A un point fixe à volonté.

VIII. Cherchons donc pour le tems, où le nœud de la terre a été en E la latitude d'une étoile quelconque donnée S. Pour cet effet posons

$$\text{l'arc } AT = t; \quad \text{l'arc } TS = s,$$

ensuite l'arc AE $= z$, & l'angle BEG $= \alpha$, qui est constant. De là ayant d'abord dans le triangle ETV rectangle en T le côté ET $= t - z$, avec l'angle TEV $= \alpha$, on en tirera :

$$\operatorname{tang} EV = \frac{\operatorname{tang}(t-z)}{\operatorname{cof}\alpha}; \quad \operatorname{tang} TV = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{fin}(t-z),$$

$$\& \qquad \operatorname{cof} EVT = \operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}(t-z).$$

Soit maintenant pour abréger TV $= v$, & EVT $= \omega$, de sorte que

$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{fin}(t-z); \quad \operatorname{cof}\omega = \operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}(t-z), \quad \& \text{ partant}$$

$$\operatorname{fin} v = \frac{\operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}(t-z)}{\sqrt{[1-\operatorname{fin}\alpha^2 \operatorname{cof}(t-z)^2]}}; \quad \operatorname{cof} v = \frac{\operatorname{cof}\alpha}{\sqrt{[1-\operatorname{fin}\alpha^2 \operatorname{cof}(t-z)^2]}}$$

$$\operatorname{fin}\omega = \sqrt{[1-\operatorname{fin}\alpha^2 \operatorname{cof}(t-z)^2]}; \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{[1-\operatorname{fin}\alpha^2 \operatorname{cof}(t-z)^2]}}{\operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}(t-z)}$$

Ensuite on connoit dans le triangle VSL rectangle en L le côté

$$SV = s - v, \quad \text{avec l'angle } SVL = \omega,$$

d'où

d'où l'on trouve :

$$\text{fin SL} = \text{fin}\,\omega\ \text{fin}\,(s-v) = \text{fin}\,\omega\,(\text{fin}\,s\ \text{cof}\,v - \text{cof}\,s\ \text{fin}\,v)$$

$$\cot \text{VSL} = \text{tang}\,\omega\ \text{cof}(s-v) = \text{tang}\,\omega(\text{cof}\,s\,\text{cof}\,v + \text{fin}\,s\,\text{fin}\,v)$$

$$\text{tang VL} = \text{cof}\,\omega\ \text{tang}\,(s-v) = \text{cof}\,\omega\,.\,\frac{\text{tang}\,s - \text{tang}\,v}{1 + \text{tang}\,s\ \text{tang}\,v}.$$

Donc, si nous remettons pour v & ω les valeurs indiquées, nous trouverons:

$$\text{fin SL} = \text{cof}\,\alpha\ \text{fin}\,s - \text{fin}\,\alpha\ \text{cof}\,s\ \text{fin}\,(t-z)$$

$$\cot \text{VSL} = \frac{\text{cof}\,\alpha\ \text{cof}\,s}{\text{fin}\,\alpha\ \text{cof}(t-z)} + \text{fin}\,s\ \text{tang}(t-z)$$

$$\text{tang VL} = \text{fin}\,\alpha \cos(t-z)\,.\,\frac{\text{tang}\,s - \text{tang}\,\alpha\ \text{fin}\,(t-z)}{1 + \text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,s\ \text{fin}\,(t-z)}.$$

Ayant trouvé l'arc VL on n'a qu'à y ajouter celle de l'arc EV pour avoir l'arc EL qui marque la longitude de l'étoile S comptée depuis le nœud E: or l'arc SL exprime sa latitude, tant que le nœud est en E, d'où l'on peut juger combien elle varie par le mouvement du nœud.

IX. Pour se former une idée plus claire du changement, auquel la latitude des étoiles est assujettie, on n'a qu'à considérer une période entiere, où l'écliptique aura achevé une révolution sur l'orbite de la planete, après laquelle le nœud E sera rétabli au même endroit. Pendant cet intervalle de tems, qui comprend plusieurs milliers d'années, la latitude de la même étoile S aura été une fois la plus petite: & puisque nous venons de trouver $\text{fin SL} = \text{cof}\,\alpha\,\text{fin}\,s - \text{fin}\,\alpha\,\text{cof}\,s\,\text{fin}(t-z)$, il est évident, que la latitude SL sera la plus petite, lorsque l'angle $t-z$, ou l'arc ET, devient de $90°$, car alors la latitude de l'étoile S sera $= s - \alpha$. Or une demi-révolution après, lorsque l'arc $\text{ET} = t-z$ sera de $270°$, la latitude deviendra $= s + \alpha$, & partant le changement entier, depuis la plus petite jusqu'à la plus grande latitude, sera $= 2\alpha$, c'est à dire au double de l'angle BEG, qui mesure l'inclinaison de l'écliptique à l'orbite de la planete. Cependant cette

cette conclusion ne sauroit être assés juste, à cause que j'ai supposé immobile le plan de l'orbite de la planete; car celui-cy étant pareillement assujetti à l'action des autres planetes, souffrira avec le tems un changement assés considérable. Donc notre détermination ne sauroit avoir lieu que pour un tems, pendant lequel le mouvement du nœud E ne recule pas par un espace trop considérable; or, puisque ce mouvement est extrèmement lent, on pourra employer nos formules pendant un assés long tems, & même de plusieurs siècles, comme on verra par la suite. Mais, si l'on vouloit remonter à des epoques plus reculées, on n'auroit qu'à rectifier les élémens du calcul pour ce tems là, & établir de nouveau conformément à la vérité la position tant du plan de l'orbite de la planete que de l'écliptique avec leur inclinaison mutuelle, de laquelle on pourra se servir de nouveau pendant le cours de plusieurs siècles. Et par ce moyen on pourra toujours être assuré de la justesse des conclusions, qu'on tirera de notre calcul, pourvu que les élémens soient justes pour un tems, qui n'en soit pas éloigné d'un trop grand nombre de siècles.

X. Or pour l'usage de l'Astronomie ces bornes sont assés étenduës, & on peut se contenter quand on est en état de déterminer les changemens, qui doivent se trouver dans la latitude des étoiles pendant le cours de quelques siècles. Supposons que pendant un siècle le nœud E recule par l'espace $Ee = \epsilon$, & voyons de combien la latitude de chaque étoile en doit être changée; car ayant trouvé ce changement on comprend aisément, que celui qui répond à deux ou plusieurs siècles sera deux ou autant de fois plus grand, pourvu que le nombre des siècles ne soit pas trop grand. Dans cette recherche on pourra regarder l'espace ϵ comme un infiniment petit, & puisque l'arc $AE = z$, diminuë de ϵ pendant un siècle, on pourra supposer $dz = -\epsilon$. Donc la latitude de l'étoile S étant à present $= SL$, elle sera après un siècle $= Sl$, de sorte que:

$$\sin Sl - \sin SL = -\epsilon \sin \alpha \cos s \cos (t-z).$$

Soit

Soit la latitude $SL = l$, & celle après un siecle $Sl = l + dl$, & on aura : $dl \cos l = - \varepsilon \sin\alpha \cos s \cos(t - z)$.

Or, ayant $\sin l = \cos\alpha \sin s - \sin\alpha \cos s \sin(t - z)$, il faut remarquer que l'angle α est toujours très petit, en sorte qu'on puisse supposer $\cos\alpha = 1$, & $\sin\alpha = 0$, d'où l'on obtient $\sin l = \sin s$, & $\cos l = \cos s$. Par conséquent l'accroissement seculaire de la latitude sera assés à peu près: $dl = - \varepsilon \sin\alpha \cos(t - z)$.

Cette formule a lieu pour les étoiles, dont la latitude est boreale; or pour les méridionales il faut changer le signe. Ou bien on pourra ainsi énoncer cette conclusion, que la distance des étoiles fixes au pole boreal de l'ecliptique est augmentée pendant un siecle de la particule $= \varepsilon \sin\alpha \cos(t - z)$.

XI. La variation donc, causée dans la latitude des étoiles fixes par l'action d'une planete, dépend de trois élémens : 1° du mouvement de nœuds de l'écliptique sur l'orbite de la planete, que je suppose ici $= \varepsilon$ pendant un siecle en arrière; 2°. de l'inclinaison de l'écliptique à l'orbite de la planete, que je pose ici $= \alpha$, où il faut remarquer que cet angle est fort petit; 3°. de l'angle ou l'arc $t - z$, au lieu duquel on peut prendre l'arc EL, qui exprime la longitude de l'étoile S comptée depuis le nœud ascendant E de l'ecliptique sur l'orbite de la planete. Car, outre que la différence entre les arcs ET & EL est fort petite, ce que j'ai déjà négligé dans le calcul, ayant pris $\sin\alpha = 0$ & $\cos\alpha = 1$, change précisément l'arc ET en EL. Pour nous en assurer, on n'a qu'à considérer le point O, où la situation présente de l'ecliptique est coupée par celle, eO, qu'elle aura après un siecle : & puisque nous avons dans le triangle sphèrique EOe l'angle $BEO = \alpha$, l'angle $EeO = \alpha$, & le coté $Ee = \varepsilon$, nous en tirerons :

$$\cos EOe = \cos\varepsilon \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2 (1 - \cos\varepsilon)$$

Or l'angle EOe étant extrèmement petit, son cosinus sera $= \sqrt{(1 - \sin EOe^2)} = 1 - \frac{1}{2}\sin EOe^2$, donc $\sin EOe^2 = 2\sin\alpha^2(1 - \cos\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon \sin\alpha^2$ à cause de $\cos\varepsilon \doteq 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon$, puisque l'arc ε est supposé aussi fort petit. De là nous aurons $\sin EOe = \epsilon \sin\alpha$, & partant : $\sin EOe : \sin Ee = \sin\alpha : \sin EO$ ou $\sin EO = 1$. de sorte que l'arc EO est de 90°. Donc, si nous nommons la longitude de l'étoile depuis le nœud E ou l'arc $EL = L$, nous aurons $OL = 90° - L$, & dans le triangle $LO\lambda$ la particule $L\lambda = \sin EOe . \sin OL = \epsilon \sin\alpha \cos L$, laquelle exprime la diminution seculaire de la latitude. Cette diminution est donc proportionnelle au cosinus de la longitude $EL = L$ comptée depuis le nœud E suivant l'ordre des signes ; elle sera donc la plus grande lorsque $L = 0$, où elle devient $= \epsilon \sin\alpha$; elle évanouïra lorsque $L = 90°$, ensuite elle sera négative, si L surpasse 90°, jusqu'à $L = 270°$, entre lesquels termes elle deviendra encore la plus grande négative, lorsque $L = 180°$: or depuis 270°, où elle évanouït encore, elle redevient positive.

XII. Si nous concevons une étoile dans le pole de l'équateur, sa latitude sera assujettie à une semblable variation ; ou bien la distance de ce pole à l'écliptique sera variable, & partant aussi son complément, qui est égal à l'obliquité de l'écliptique. Donc, pour trouver le changement seculaire de l'obliquité de l'écliptique, on n'a qu'à chercher la longitude du pole de l'équateur comptée depuis le nœud ascendant E de l'écliptique sur l'orbite de la planete. Or ce nœud ascendant est le même que le nœud descendant de l'orbite de la planete sur l'écliptique, & la longitude du pole de l'équateur tombe dans le solstice d'été, au commencement du signe ♋. Qu'on soutraye donc la longitude du nœud descendant de l'orbite de la planete, qu'on trouve marquée dans les tables Astronomiques, de $3^s, 0°, 0'$; & nommant l'arc restant $= L$, la distance du pole à l'écliptique diminuera pendant l'espace d'un siecle de la quantité $\epsilon \sin\alpha \cos L$, ou bien l'obliquité de l'écliptique sera augmentée de la même quantité. Par ce moyen on trouvera la variation de l'obliquité de l'écliptique pour un siecle assez exactement ; mais, si l'on veut passer à plusieurs siecles à cause de la précession des équinoxes, il sera bon de chercher pour chaque siecle la longitude du nœud descendant de l'orbite de la planete par les tables, & de la soutraitraire de 3^s, 0°, $0'$, pour avoir l'arc L. Cette précaution n'eſt pas néceſſaire par rapport à la latitude des étoiles fixes ; car, puisque le mouvement des nœuds eſt fort lent par rapport aux étoiles fixes, ſi l'on ſoutrait la longitude du nœud E de la longitude de quelque étoile, la différence ne variera pas ſenſiblement pour pluſieurs ſiecles : & on verra bientôt par l'application de notre calcul, qu'une erreur de 10° dans cette différence n'eſt d'aucune conſéquence, ou qu'elle produit à peine une ſeconde de variation dans l'eſpace de 100 ans.

XIII. L'action d'une planete influe donc ſur la latitude des étoiles fixes, & ſur l'obliquité de l'écliptique, entant qu'elle fait reculer les nœuds de l'ecliptique ſur le plan de ſon orbite, l'angle de l'inclinaiſon demeurant le même. Un tel effet ſera produit par l'action de chaque planete, & pour le trouver il faut déterminer les élémens ſuivans:

1. *La longitude du nœud deſcendant de l'orbite de la planete ſur l'écliptique, que les Tables aſtronomiques marquent pour tous les tems donnés: & laquelle eſt la même, que la longitude du nœud aſcendant de l'ecliptique ſur l'orbite de la planete. Soit donc cette longitude* $= \Omega$.
2. *L'inclinaiſon de l'orbite de la planete à l'écliptique, qu'on trouve auſſi indiquée dans les tables Aſtronomiques. Soit donc cette inclinaiſon* $= \alpha$.
3. *L'eſpace, par lequel les nœuds de l'écliptique reculent ſur le plan de l'orbite de la planete dans un tems donné, par exemple, dans un ſiècle. Soit cet eſpace* $= \varepsilon$, *qu'il faut déterminer par la Théorie.*

Après avoir déterminé ces trois élémens pour chaque planete, on en trouvera les changemens ſéculaires, tant de l'obliquité de l'ecliptique, que de la latitude de chaque étoile fixe, à l'aide des régles ſuivantes:

I. Régle pour trouver le changement ſéculaire dans l'obliquité de l'écliptique.

 On

On n'a qu'à calculer la valeur de cette formule $\epsilon \sin \alpha \cos (90^\circ - \Omega) = \epsilon \sin \alpha \sin \Omega$, qui marquera l'augmentation de l'obliquité de l'écliptique pendant le cours d'un siecle, si elle est positive, & sa diminution, si elle est negative

II. Régle pour trouver le changement séculaire dans la latitude des étoiles fixes.

Soit λ la longitude de l'étoile proposée, & la valeur de cette formule $\epsilon \sin \alpha \cos (\lambda - \Omega)$ marquera l'accroissement de la distance de l'étoile proposée au pole boreal de l'écliptique pendant le cours d'un siecle. La latitude sera donc diminuée de la même quantité, si elle est boreale; mais, si la latitude est méridionale, la même formule donnera son augmentation pendant un siecle.

XIV. J'ai déjà remarqué, que l'angle $\lambda - \Omega$ ne change pas sensiblement pendant l'espace de plusieurs siecles; car la précession des équinoxes affecte également les deux angles λ & Ω, & le changement de leur différence $\lambda - \Omega$ ne provient que du mouvement régressif du nœud Ω par rapport aux étoiles fixes, qui pendant un siecle ne surpasse jamais $10'$. Par cette raison le changement trouvé pour un siecle aura lieu pour plusieurs autres siecles tant précedens que suivans. Mais il n'en est pas de même de l'obliquité de l'écliptique, dont le changement dépend de l'arc Ω, qui à cause de la précession des équinoxes croit tous les ans de $50''$, & dans un siecle de $1^\circ, 23'$, de sorte qu'en retranchant la régression qui lui est propre, il en reste encore plus que $1^\circ, 23'$, d'où après plusieurs siecles peut résulter un changement assés considérable. Dans cette recherche il faudra donc, au moins après quelques siecles, déterminer de nouveau par la même régle le changement seculaire de l'obliquité de l'ecliptique, ce qui n'est pas si nécessaire pour la latitude des étoiles fixes. Cependant, ayant supposé ici, que l'inclinaison de l'écliptique à l'orbite de chaque planete demeure toujours la même, ce qui seroit bien vray, s'il n'y avoit qu'une planete, qui agit sur la terre; il faut remarquer, que puisque toutes les planetes agissent les unes sur les autres, & que le plan de l'orbite de cha-

chacune eſt altéré à l'égard des plans des orbites de toutes les autres, leurs inclinaiſons mutuelles en ſeront néceſſairement changées. D'où il s'enſuit qu'avant pluſieurs ſiecles l'inclinaiſon de l'orbite de chaque planete à l'écliptique peut avoir été bien différente de celle qu'on obſerve aujourdhui ; ce qui doit produire pour ces tems-là un changement aſſés différent dans la variation ſeculaire de l'obliquité de l'écliptique & de la latitude des étoiles : or cet article demande des recherches trop profondes de la Théorie, qui meritent un attachement tout particulier.

XV. Or il s'enſuit de là encore une autre inégalité dans la longitude des étoiles fixes, dont il ne paroit pas, que les Aſtronomes ſe ſoient apperçus. On croit communément que la longitude des étoiles n'eſt aſſujettie à aucune autre variation, qu'à celle qui provient de la préceſſion des équinoxes, laquelle affectant egalement toutes les étoiles, les différences entre leurs longitudes devroient être invariables. Mais le changement du plan de l'écliptique, que je viens d'expliquer, doit néceſſairement cauſer un changement dans la différence des longitudes des étoiles, lequel après un aſſés longtems peut devenir aſſés conſiderable. Pour comprendre cela plus diſtinctement, on n'a qu'à conſidérer, que le pole de l'écliptique Π décrit actuellement dans le Ciel un Fig. 3.
petit cercle $Q\Pi R$ autour du pole Z de l'orbite de la planete, dont nous examinons l'action ſur la terre, & que le rayon de ce petit cercle eſt égal au ſinus de l'inclinaiſon de l'écliptique à l'orbite de cette planete, ou bien à $\sin\alpha$, l'arc $Z\Pi$ étant $=\alpha$. Le pole de l'écliptique Π reculera donc pendant le cours de chaque ſiecle ſur ce petit cercle par un arc $\Pi\pi = \varepsilon$, & pendant un tems ſuffiſant il achevera une révolution entiere, ce qui doit arriver dans l'eſpace de $\frac{360^\circ}{\varepsilon}$ ſiecles. Concevons maintenant deux étoiles fixes, l'une ſituée en Z, ou dans un autre point quelconque de l'arc QR, & l'autre en P ; & il eſt clair, que lorsque le pole de l'écliptique fut en R, la longitude de ces deux étoiles aura été la même. Mais, quand le pole de l'écliptique

tique aura été transporté en Q après $\frac{180^\circ}{\epsilon}$ fiecles, alors ces deux étoiles fe trouveront éloignées en longitude de 180°, & pendant ce tems la différence entre leurs longitudes aura fubi tous les changemens poſſibles entre 0° & 180°. Pour les étoiles fituées hors le petit cercle QΠR, leur différence en longitude ne fauroit varier tant, mais elle fera toujours variable. Qu'on conçoive deux étoiles en P & A, fituées dans le même grand cercle, qui paſſe par Z, & il eſt évident que, lorsque le pole de l'écliptique eſt en R ou Q, leur longitude fera la même; mais, quand ce pole fe trouve en Π, la différence entre leur longitude fera exprimée par l'angle PΠA, dont la variabilité peut devenir aſſés conſiderable.

XVI. Il fera donc important de voir, à quel point peut monter cette différence de longitude pour deux étoiles quelconques. Pour cet effet je regarde le pole Z de l'orbite de la planete comme fixe, & foient propoſées deux étoiles P & S, dont les diſtances au point Z foient: $ZP = f$; $ZS = g$; & l'angle $PZS = k$, qui font des quantités invariables. Soit enfuite l'angle variable $QZ\Pi = z$, qui diminue pendant chaque fiecle de ϵ, & la diſtance conſtante $Z\Pi = \alpha$. Cela poſé, le triangle ſphérique ZΠP, à cauſe des données: $ZP = f$; $Z\Pi = \alpha$; & $PZ\Pi = z$

fournit $\operatorname{tang} Z\Pi P = \frac{\operatorname{fin} z \operatorname{tang} f}{\operatorname{fin} \alpha - \operatorname{cof} \alpha \operatorname{cof} z \operatorname{tang} f}$,

& le triangle ſphérique ZΠS, à cauſe des données:

$$ZS = g;\quad Z\Pi = \alpha;\quad \&\quad SZ\Pi = k - z$$

fournit $\operatorname{tang} Z\Pi S = \frac{\operatorname{fin}(k - z) \operatorname{tang} g}{\operatorname{fin} \alpha - \operatorname{cof} \alpha \operatorname{cof}(k - z) \operatorname{tang} g}$.

D'où l'on tire pour la différence en longitude de ces deux étoiles:

tang

$$\operatorname{tang} P\Pi S = \frac{\operatorname{cos}\alpha \operatorname{tang} f \operatorname{sin} k - \operatorname{sin}\alpha \operatorname{tang} f \operatorname{sin} z - \operatorname{sin}\alpha \operatorname{tang} g \operatorname{sin}(k-z)}{\operatorname{sin}\alpha^2 - \operatorname{sin}\alpha \operatorname{cos}\alpha \operatorname{tang} g (k-z) + \operatorname{cos}\alpha^2 \operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \operatorname{cos} k - \operatorname{sin}\alpha \operatorname{cos}\alpha \operatorname{tang} f \operatorname{cos} z - \operatorname{sin}\alpha^2 \operatorname{tg} f \operatorname{tg} g \operatorname{sn} z \operatorname{sn}(k-z)}$$

laquelle change visiblement pendant une révolution du pole de l'écliptique autour du point fixe Z. Si l'on cherche les cas, où la différence en longitude devient, ou la plus grande, ou la plus petite, on parvient à cette équation :

$$\begin{aligned} 0 = &+ \operatorname{cos}\alpha^2 \operatorname{tang} f \operatorname{tang} g^2 \operatorname{cos} z + \operatorname{sin}\alpha \operatorname{cos}\alpha \operatorname{tang} f^2 \\ &- \operatorname{cos}\alpha^2 \operatorname{tang} f^2 \operatorname{tang} g \operatorname{cs}(k-z) - \operatorname{sin}\alpha \operatorname{cos}\alpha \operatorname{tang} g^2 \\ &+ \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cos}\alpha \operatorname{tg} f^2 \operatorname{tg} g^2 \operatorname{sn} k \operatorname{cs} z \operatorname{sn}(k-z) \\ &- \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cos}\alpha \operatorname{tg} f^2 \operatorname{tg} g^2 \operatorname{sn} k \operatorname{sn} z \operatorname{cs}(k-z) \\ &+ \operatorname{sin}\alpha^2 \operatorname{tang} g \operatorname{cos}(k-z) + \operatorname{sin}\alpha^2 \operatorname{tang} f^2 \operatorname{tg} g \operatorname{sin} z^2 \operatorname{cos}(k-z) \\ &- \operatorname{sin}\alpha^2 \operatorname{tang} f \operatorname{cos} z - \operatorname{sin}\alpha^2 \operatorname{tang} f \operatorname{tg} g^2 \operatorname{cos} z \operatorname{sin}(k-z)^2 \end{aligned}$$

dont les racines z montrent les lieux Π du pole de l'écliptique, qui donnent la difference en longitude, ou la plus grande, ou la plus petite.

XVII. Mais la solution de cette équation étant trop embarrassante, il convient de recourir à des approximations, qu'on peut tirer de cette circonstance, que l'arc α est extrèmement petit. On pourra donc mettre $\operatorname{cos}\alpha = 1$, & négliger dans le dénominateur les termes affectés par $\operatorname{sin}\alpha^2$, d'où nous tirons :

$$\operatorname{tang} P\Pi S = \frac{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \operatorname{sin} k - \operatorname{sin}\alpha\, [\operatorname{tang} f \operatorname{sin} z + \operatorname{tang} g \operatorname{sin}(k-z)]}{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \operatorname{cos} k - \operatorname{sin}\alpha\, [\operatorname{tang} f \operatorname{cos} z + \operatorname{tang} g \operatorname{cos}(k-z)]}$$

& partant encore très à peu près :

$$\operatorname{tang} P\Pi S = \operatorname{tang} k + \frac{\operatorname{sin}\alpha\, [\operatorname{tang} f \operatorname{sin}(k-z) + \operatorname{tang} g \operatorname{sin} z]}{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \operatorname{cos} k^2}.$$

Cette

Cette différence en longitude étant renduë un *maximum*, ou *minimum*, donne :

$$\operatorname{tang} g \cos z = \operatorname{tang} f \cos(k-z) = \operatorname{tang} f (\cos k \cos z + \sin k \sin z),$$

d'où nous trouvons pour les lieux cherchés Π du pole de l'écliptique

$$\operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{tang} g - \operatorname{tang} f \cos k}{\operatorname{tang} f \sin k}, \quad \& \quad \operatorname{tang}(k-z) = \frac{\operatorname{tang} f - \operatorname{tang} g \cos k}{\operatorname{tang} g \sin k}.$$

Or, comme il y a toujours deux angles, qui répondent à la même tangente, leur différence étant 180°, l'un fera pour le plus grand, & l'autre pour plus petit. Pour mieux connoitre cette distinction, substituons ces valeurs dans l'expression de tang $P\Pi S$, & puisque

$$\sin z = \frac{\operatorname{tang} g - \operatorname{tang} f \cos k}{\sqrt{(\operatorname{tang} f^2 + \operatorname{tang} g^2 - 2 \operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \cos k)}};$$

$$\sin(k-z) = \frac{\operatorname{tang} f - \operatorname{tang} g \cos k}{\sqrt{(\operatorname{tang} f^2 + \operatorname{tang} g^2 - 2 \operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \cos k)}},$$

nous aurons :

$$\operatorname{tang} P\Pi S = \operatorname{tg} k + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} f \operatorname{tg} g \cos k^2} \sqrt{(\operatorname{tang} f^2 + \operatorname{tg} g^2 - 2 \operatorname{tg} f \operatorname{tg} g \cos k)}$$

par conséquent :

$$P\Pi S = k + \frac{\alpha}{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} g} \sqrt{(\operatorname{tang} f^2 + \operatorname{tang} g^2 - 2 \operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \cos k)},$$

ou bien à cause de $\cos z = \dfrac{\operatorname{tang} f \sin k}{\sqrt{(\operatorname{tang} f^2 + \operatorname{tang} g^2 - 2 \operatorname{tang} f \operatorname{tang} g \cos k)}}$

$$P\Pi S = k + \frac{\alpha \sin k}{\operatorname{tang} g \cos z}.$$

Or des deux angles trouvés pour z, l'un a son cosinus positif, l'autre négatif ; donc celui-là donne l'angle $P\Pi S$ le plus grand, & celui-cy le plus petit.

XVIII.

XVIII. En quelque poſition que le pole de l'ecliptique Π ſe trouve, on peut auſſi exprimer l'angle $P\Pi S$, ou la différence en longitude des deux étoiles, en ſorte

$$P\Pi S = k + \sin\alpha\left(\frac{\sin(k-z)}{\tang g} + \frac{\sin z}{\tang f}\right)$$

d'où l'on trouvera aiſément, de combien la différence en longitude ſera changée pendant le cours d'un ſiecle; car, puiſque dans ce tems l'angle z diminuë de ϵ, la différence en longitude des deux étoiles propoſées croitra dans un ſiecle de cette particule :

$$\epsilon \sin\alpha\left(\frac{\cos(k-z)}{\tang g} - \frac{\cos z}{\tang f}\right)$$

où l'on peut prendre pour f & g les diſtances des étoiles au pole de l'écliptique, pourvu qu'elles n'en ſoient pas fort proches. On voit de là d'abord que, lorsque les deux étoiles ſe trouvent près de l'écliptique, le changement dans leur différence de longitude évanouït ; parce que les tangentes des diſtances f & g deviennent alors extrèmement grandes, de ſorte que la différence entre leurs longitudes eſt conſtamment $P\Pi S = k$. Mais plus les étoiles approchent de l'un des poles de l'écliptique, plus auſſi deviendra grand le changement dans la différence en longitude. Conſidérons un cas, qui ſemble fort remarquable : Soient les deux étoiles P & S dans le même grand cercle $Z\Pi G$, de part & d'autre également éloignées de l'écliptique, & poſons leur latitude commune $= l$, qui ſera boreale pour l'une, & méridionale pour l'autre. A' préſent donc la longitude de ces deux étoiles ſera la même, mais après un ſiecle elles ſe trouveront différer en longitude, & à cauſe de $z = 0$, $k = 0$, & $\tang g = -\tang f = \cot l$, leur différence en longitude ſera alors $= 2\,\epsilon \sin\alpha \tang l$. Or on verra par la ſuite, que cette différence peut bien monter à quelques minutes, quoique les étoiles ne ſoient pas fort proches des poles de l'ecliptique : il pourra donc arriver, que deux étoiles, dont la longitude eſt à préſent la même, ont différé aſſés conſiderablement en longitude avant quelques fiecles, ce qui eſt ſans doute un paradoxe très remarquable dans l'Aſtronomie.

XIX. L'expreſſion, que nous venons de trouver pour le changement ſeculaire de la différence de longitude entre deux étoiles, qui eſt $= \varepsilon \sin \alpha \left(\frac{\cos(k-z)}{\operatorname{tang} g} - \frac{\cos z}{\operatorname{tang} f} \right)$, nous fait voir, que la premiere partie $\frac{\cos(k-z)}{\operatorname{tang} g}$ répond uniquement à l'étoile S, & l'autre $\frac{\cos z}{\operatorname{tang} f}$ à l'étoile P; & partant chacune priſe ſéparément nous montre, combien la longitude de chaque étoile change pendant un ſiecle, outre le changement connu, cauſé par la préceſſion des équinoxes & la nutation de l'axe de la terre. Car la longitude de l'étoile S croitra dans un ſiecle de la particule.

$$\varepsilon \sin \alpha . \frac{\cos(k-z)}{\operatorname{tang} g} = \varepsilon \sin \alpha . \frac{\cos \Pi Z S}{\operatorname{tang} ZS}$$

Pour ramener ces élémens à l'uſage de l'Aſtronomie, ſoit comme auparavant la longitude du nœud deſcendant de l'orbite de la planete ſur l'ecliptique $= \Omega$; & on ſait que la longitude du cercle Z Π G ſera $= \Omega - 90°$: ſoit de plus la longitude de l'étoile $S = \lambda$, & on aura l'angle $G \Pi S = \lambda - \Omega + 90°$. Soit enſuite la diſtance de l'étoile S au pole boreal de l'ecliptique ou l'arc $\Pi S = p$: & ayant dans le triangle ſphèrique ΠZS les cotés $Z\Pi = \alpha$, & $\Pi S = p$ avec l'angle intercepté $Z \Pi S = 90° - \lambda + \Omega$, on trouve :

$$\cos ZS = \sin(\lambda - \Omega) \sin \alpha \sin p + \cos \alpha \cos p$$

&

$$\operatorname{tang} \Pi Z S = \frac{\cos(\lambda - \Omega) \operatorname{tang} p}{\sin \alpha - \sin(\lambda - \Omega) \cos \alpha \operatorname{tang} p} = \frac{\cos(\lambda - \Omega) \sin p}{\sin \alpha \cos p - \cos \alpha \sin(\lambda - \Omega) \sin p}$$

d'où

d'où en supposant l'arc α extrèmement petit, on aura l'incrément en longitude de l'étoile S pour un siecle

$$= -\frac{\varepsilon \sin \alpha . \sin (\lambda - \Omega)}{\tang p}.$$

laquelle formule aura toujours lieu, pourvu que l'étoile ne soit pas trop proche du pole de l'écliptique. Donc, si l'on calcule pour chaque tems proposé la vraye longitude de chaque étoile, on verra aisément, de combien la différence en longitude entre deux étoiles quelconques sera changée.

XX. Voilà donc trois effets, que l'action de chaque planete produit dans les phènomenes celestes.

Le premier regarde l'obliquité de l'écliptique; & nous avons vû qu'elle en est augmentée pendant le cours d'un siecle de la particule $\varepsilon \sin \alpha \sin \Omega$.

Le second affecte la latitude des étoiles; & nous avons vû que la distance d'une étoile fixe au pole boreal de l'écliptique en est augmentée pendant un siecle de la quantité $\varepsilon \sin \alpha \cos (\lambda - \Omega)$.

Le troisième affecte la longitude des étoiles fixes, par lequel nous venons de voir, que la longitude d'une étoile fixe diminuë pendant un siecle de la particule $\varepsilon \sin \alpha . \frac{\sin(\lambda - \Omega)}{\tang p}$; outre les changemens, que la précession des équinoxes & la nutation de l'axe de la terre y produisent.

On y peut ajouter le quatrième effet, qui consiste dans une irrégularité de la précession des équinoxes même. Car si nous considérons une étoile dans le pole boreal de l'équateur de la terre, sa longitude étant $90°$, & sa distance au pole de l'écliptique égale à l'obliquité de l'écliptique, qui soit $= e$, la longitude de cette étoile sera diminuée pendant un siecle de la particule $\varepsilon \sin \alpha \frac{\cos \Omega}{\tang e}$, & de la même quantité les points équinoctiaux seront transportés en arriere outre la précession ordinaire.

Pour

Pour l'intelligence de ces formules, il faut se souvenir que nous avons supposé,

La longitude du nœud descendant de la planete $= \Omega$.
L'inclinaison de son orbite à l'écliptique $= \alpha$.
La longitude d'une étoile proposée $= \lambda$.
Sa distance au pole boreal de l'écliptique $= p$.
La régression seculaire des nœuds de la planete $= \varepsilon$.
(par rapport aux étoiles fixes)
L'obliquité de l'écliptique $= \epsilon$.

XXI. Après ces déterminations générales, recherchons plus soigneusement, quel doit être l'effet produit par l'action de chaque planete en particulier. Et d'abord il s'agit de définir l'espace ε par lequel le plan de l'écliptique recule dans un siecle sur l'orbite de chaque planete; or, comme cela dépend uniquement de la Théorie, & qu'il demande des calculs fort longs, je me contenterai d'en rapporter les résultats. Mais il faut observer ici, qu'on ne connoit que les forces absoluës des deux planetes de Saturne, & de Jupiter, par l'action qu'ils exercent sur leurs satellites; & que les forces des autres planetes nous sont absolument inconnues. Il est bien vray que dans le Systême de *Newton*, on estime les forces absoluës des corps celestes par la quantité de leur matiere; mais, puisque celle-cy n'est pas proportionnelle à leur volume, on n'en peut rien conclure: il faudroit outre le volume connoitre la densité du corps de chaque planete. Or en considérant la densité de Saturne, de Jupiter, & de la Terre, comme *Newton* l'a établie, en comparant leur volume avec leur force absoluë, en supposant la parallaxe horizontale du Soleil de $10''$, on s'apperçoit d'abord que la densité augmente en approchant du Soleil: & quand on compare ces densités connues avec les distances moyennes de ces planetes au Soleil, ou avec le tems de leurs révolutions, il semble qu'on en puisse conclure, que les densités suivent la raison sousdoublée des mouvemens moyens, qui répondent au même tems, ou bien la raison réciproque sousdoublée de leurs tems périodiques. Si l'on se tient à cette régle, on pourra as-

si-

ſigner la force abſoluë de chaque planete ; & puisque le mouvement progreſſif de l'aphelie de l'orbite de la terre eſt ſans contredit cauſé par l'action des autres planetes, le calcul fondé ſur cette régle conduit effectivement à une concluſion, qui ſe trouve parfaitement d'accord avec les obſervations. Ayant donc ſatisfait au phènomene de l'aphelie de la terre, on peut être aſſeuré que les mêmes forces abſoluës nous conduiront auſſi aux phénomenes, qui réſultent de la mutabilité du plan de l'écliptique.

XXII. Or le calcul fondé ſur ces principes nous découvre, que l'interſection du plan de l'écliptique avec celui de l'orbite de Saturne doit reculer par an de $22'''$, ou de $37''$ par ſiecle; & c'eſt en quoi conſiſte l'action de Saturne. L'action de Jupiter eſt la plus grande de toutes les planetes, elle fait que l'interſection de l'écliptique avec l'orbite de cette planete recule de $6''$, $57'''$ par an, & partant de $695''$ par ſiecle. Mars produit encore un moindre effet que Saturne, & ne fait reculer la ligne des nœuds que de $5'''$ par an, & $8''$ par ſiecle. Mais l'action de Venus eſt après celle de Jupiter la plus grande, puisqu'elle fait reculer la ligne des nœuds de $5''$, $20'''$ par an & partant de $533''$ par ſiecle. Enfin l'action de Mercure eſt la plus petite, & ne fait reculer la ligne des nœuds que d'une tierce par an, & d'une ſeconde environ par ſiecle. Joignons ces valeurs de ε avec les autres élémens, que les tables Aſtronomiques nous fourniſſent, & nous trouverons pour le commencement de ce ſiecle les valeurs ſuivantes :

	Long. du nœud deſcendant ou ☋	Inclinaiſon de l'orbite ou α	Régreſſion ſeculaire des nœuds ou ε
Pour Saturne	$9^s, 21^\circ, 5', 6''$	$2^\circ, 30', 10''$	$37''$
Pour Jupiter	9, 7, 34, 10	1, 19, 10	695
Pour Mars	7, 17, 24, 42	1, 51, 0	8
Pour Venus	8, 13, 57, 53	3, 23, 20	533
Pour Mercure	7, 14, 47, 20	6, 59, 20	1

 Delà

De là il eſt clair qu'on peut hardiment négliger dans cette recherche l'action de Mars & de Mercure; & pour celle de Saturne, puisque les nœuds différent fort peu, on la peut combiner avec l'action de Jupiter, en augmentant la valeur de ϵ d'environ $70''$, puisque l'inclinaiſon α pour Saturne eſt presque le double de celle de Jupiter. Et partant en rejettant auſſi Saturne, je mettrai pour l'effet de Jupiter $\epsilon = 765''$, & pour celui de Venus $\epsilon = 540''$, à cauſe de Mars & de Mercure.

XXIII. Nous n'aurons donc à conſidèrer que les deux planetes de Jupiter & de Venus; & puisque dans nos formules, que nous avons trouvées pour les variations dans l'obliquité de l'écliptique, dans la préceſſion des équinoxes, dans la latitude & dans la longitude des étoiles fixes, la régreſſion ſeculaire ϵ eſt partout multipliée par ſin α, nous aurons

Pour l'action de Jupiter

$$\epsilon \sin\alpha = 18'' \quad \& \quad ☊ = 9^s, 7^\circ, 34' \quad \text{A. } 1700.$$

Pour l'action de Venus

$$\epsilon \sin\alpha = 32'' \quad \& \quad ☊ = 8^s, 13^\circ, 58' \quad \text{A. } 1700.$$

d'où l'on voit que l'effet de Venus eſt presque deux fois plus grand que celui de Jupiter, quoique la valeur de ϵ, qui répond à Jupiter, ſoit plus grande que celle qui répond à Venus. La raiſon en eſt, que l'inclinaiſon de l'orbite de Venus eſt beaucoup plus grande que celle de l'orbite de Jupiter. Or j'ai déjà remarqué que l'inclinaiſon mutuelle des orbites des planetes doit auſſi varier avec le tems: & il eſt très probable que du tems d'*Hipparque* l'inclinaiſon des orbites de Jupiter & de Venus à l'écliptique a été ſenſiblement différente de celle qu'on obſerve aujourdhui; & partant pour ces tems reculés, il n'y a aucun doute que les valeurs de ϵ ſin α pour l'une & l'autre planete n'ayent été, ou plus grandes, ou plus petites, que je les ai marquées ici. Mais il ſera extrèmement difficile de s'aſſurer ſur cet important article par les ſeules obſervations anciennes; & il vaudroit bien la peine, qu'on apportât tous les ſoins poſſibles pour l'éclaircir par la Théorie.

Ce-

Cependant, au défaut de telles recherches, je confidérerai ces valeurs de ϵ fin α comme fixes, puisqu'il eft fur, qu'elles ne fauroient varier fort fenfiblement, à moins que l'intervalle de tems ne foit extrèmement long. Sur ce pied je m'en vai déveloper les quatre articles mentionnés l'un après l'autre.

I.
Détermination des changemens dans l'obliquité de l'écliptique.

XXIV. Pour voir combien l'obliquité de l'écliptique fera changée dans un fiecle donné, il faut tirer des tables Aftronomiques pour le commencement de ce fiecle

La longitude du nœud defcendant de Jupiter = ♃
& La longitude du nœud defcendant de Venus = ♀.

Alors pendant le cours de ce fiecle l'obliquité de l'écliptique fera augmentée de tant de fecondes :

$$18'' \text{ fin } ♃ + 32'' \text{ fin } ♀.$$

Maintenant au commencement du fiecle préfent ou A. 1700. il étoit :

$$♃ = 9^s, 7^\circ, 34' \quad \& \quad ♀ = 8^s, 13^\circ, 58'.$$

les finus de ces arcs étant donc négatifs, l'obliquité de l'écliptique va en diminuant, & la diminution feculaire vaudra

$$18'' \text{ fin } 82^\circ, 26' + 32'' \text{ fin } 73^\circ, 58' = 47\tfrac{1}{2}''.$$

On eftime à prefent l'obliquité moyenne de l'écliptique de $23^\circ, 28', 30''$ qu'on peut regarder comme la jufte valeur pour l'année 1730. environ; d'où l'on peut conclure, que l'obliquité moyenne de l'écliptique

a été A. 1700 = $23^\circ, 28', 43''$
A. 1750 = $23^\circ, 28', 19''$
& fera A. 1800 = $23^\circ, 27', 55''$.

Il faut bien confidérer que je parle ici de l'obliquité moyenne de l'écliptique, en faifant abftraction des inégalités, qui y font caufées par la nutation

tion de l'axe de la terre, & qui font fuffifamment conftatées. Cependant la connoiffance de cette même diminution feculaire ne contribuera pas peu à mieux établir l'obliquité moyenne pour un tems donné, puisque jusqu'ici on n'a pas foupçonné, que le tems y doive entrer en compte.

XXV. Pour les fiecles à venir, les arcs ♃ & ♀ croiffant, l'effet de Venus deviendra plus grand, mais celui de Jupiter plus petit, fans pourtant que la diminution feculaire change fenfiblement. Ainfi on peut compter que pour chaque fiecle à venir, pourvu qu'on n'aille point trop loin, l'obliquité de l'écliptique diminuë pendant le cours de chaque fiecle de $47\frac{1}{2}$ fecondes. Il en eft de même pour les fiecles paffés, où nous pourrons compter $47\frac{1}{2}$ fecondes d'augmentation pour chacun en arrière: cependant il ne faut pas remonter trop haut. Cherchons par exemple la diminution de l'obliquité de l'écliptique depuis l'an 1000 à 1100, & puisque les tables Aftronomiques nous donnent pour l'année 1000 ♃ $= 8^s, 27°, 52'$ & ♀ $= 8^s, 7°, 57'$

la diminution pour ce fiecle a été

$$= 18'' \sin 87°, 52' + 32'' \sin 67°, 57' = 47\tfrac{2}{3}''$$

qui ne différe pas encore fenfiblement de la préfente. Mais fi nous confidérons le fiecle depuis l'an 0 à l'an 100, ayant pour l'an 0

♃ $= 8^s, 13°, 58'$ & ♀ $= 7^s, 19°, 20'$

la diminution feculaire aura été alors

$$= 18'' \sin 37°, 58 + 32'' \sin 49°, 20' = 41\tfrac{1}{2}'',$$

qui eft déjà de 6″ moindre qu'à prefent, & plus nous remontons au delà, plus auffi trouverons-nous cette diminution petite. Mais, puisqu'on fuppofe très gratuitement, que l'inclinaifon des orbites de ces deux planetes étoit alors la même qu'aujourdhui, on ne peut pas fe fier fur cette détermination, & il pourroit bien arriver, que la diminution feculaire fût alors encore plus grande qu'aujourdhui. Car quand l'inclinaifon auroit été deux fois plus grande qu'à préfent, il faudroit doubler les nombres 18 & 32, & alors on obtiendroit 83″ pour la diminution depuis A. 0 jus-

jusqu'à A. 100. Il n'eſt cependant pas probable, que le changement dans l'inclinaiſon ait été ſi grand; mais il eſt toujours fort incertain de déterminer par cette methode l'obliquité de l'écliptique pour les ſiecles trop reculés.

XXVI. En cas que l'inclinaiſon des orbites des planetes à l'écliptique n'ait pas changé ſenſiblement depuis le commencement de notre époque, nous pourrions conclure, que l'obliquité de l'écliptique eut changé de 50 en 50 ans, comme la Table ſuivante indique.

A.C.	Obliquité de l'ecliptique.	A.C.	Obliquité de l'ecliptique.
0	23, 41, 38	1000	23°, 34′, 15″
50	23, 41, 18	1050	23, 33, 51
100	23, 40, 57	1100	23, 33, 27
150	23, 40, 36	1150	23, 33, 4
200	23, 40, 15	1200	23, 32, 40
250	23, 39, 54	1250	23, 32, 16
300	23, 39, 33	1300	23, 31, 52
350	23, 39, 12	1350	23, 31, 28
400	23, 38, 50	1400	23, 31, 5
450	23, 38, 28	1450	23, 30, 41
500	23, 38, 6	1500	23, 30, 17
550	23, 37, 43	1550	23, 29, 54
600	23, 37, 21	1600	23, 29, 30
650	23, 36, 58	1650	23, 29, 6
700	23, 36, 35	1700	23, 28, 43
750	23, 36, 12	1750	23, 28, 19
800	23, 35, 49	1800	23, 27, 55
850	23, 35, 26	1850	23, 27, 32
900	23, 35, 2	1900	23, 27, 8
950	23, 34, 38	1950	23, 26, 44
1000	23, 34, 15	2000	23, 26, 21

Selon

Selon cette table on auroit pour le tems de *Pytheas* l'obliquité de l'écliptique 23°, 43', 40'', & partant de 9' plus petite, qu'il ne l'avoit marquée : donc, en cas qu'une différence de 9' ne puiſſe être attribuée aux obſervations, il faut conclure que l'inclinaiſon de l'écliptique aux orbites de Jupiter & de Venus ait été autrefois plus grande qu'aujourdhui. Mais cette Table convient aſſés avec les obſervations d'*Albategnius*, & de ceux qui l'ont ſuivi.

XXVII. M. *Caſſini*, dans ſes Elémens d'Aſtronomie, aſſure que par une ſuite des obſervations faites pendant l'eſpace de 66 ans on avoit remarqué, que l'obliquité de l'écliptique avoit diminué dans ce tems de 30'', ce qui s'accorde fort bien avec notre Théorie, qui donne pour un ſiecle 47½ ſecondes de diminution. Il obſerve auſſi que *Copernic*, dans ſa détermination de l'obliquité de l'écliptique, qu'il ne trouva que de 23°, 28', avoit négligé la réfraction, par le moyen de laquelle il l'auroit trouvée de 2' plus grande, ce qui s'accorde encore fort bien avec la Théorie : & ce qu'il remarque ſur les obſervations des derniers ſiecles prouve encore admirablement notre Théorie, quoique M. *Caſſini* lui-même n'ait pas oſé contredire ouvertement le ſentiment de ceux qui ſoutiennent l'obliquité de l'écliptique invariable. Cependant il faut remarquer que depuis quelques ſiecles la diminution de l'obliquité a été la plus grande, & qu'elle deviendra de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'après un très grand nombre de ſiecles elle évanouïra entièrement, & deviendra enſuite négative. Après ce tems là elle croitra de nouveau pendant un très long tems, jusqu'à ce qu'elle aura atteint ſa plus grande quantité : mais on ne ſauroit rien déterminer, ni ſur ce tems, ni ſur la plus grande & plus petite quantité : tant parce que le mouvement des nœuds des planetes n'eſt pas aſſés exactement connu, que parce qu'on ignore encore tout à fait les changemens, auxquels l'inclinaiſon des orbites des planetes à l'écliptique eſt aſſujettie : ce qui eſt pourtant ce de quoi la variation dans l'obliquité de l'écliptique dépend principalement. Puisqu' à préſent cette variation eſt à peu près la plus grande, on en peut conclure, que l'obliquité ſe trou-

ve

ve à sa grandeur moyenne, & qu'elle deviendra encore d'autant plus petite, qu'elle a été autrefois plus grande. Si ce n'étoit qu'une seule planete, qui causât cette variation, la différence entre la plus grande & plus petite obliquité seroit égale à la double inclinaison de l'orbite de cette planete; mais, puisqu'elle dépend de deux planetes, on n'en peut pas tirer une semblable conclusion : cependant le changement total ne sauroit jamais monter à 9°, ce qui est le double de la somme des inclinaisons des orbites de Jupiter & de Venus.

II.
Détermination des changemens dans la précession des Equinoxes.

XXVIII. Quand M. *d'Alembert* détermina le premier la précession des équinoxes, & les inégalités qui y sont causées par l'action de la Lune, il regarda comme fixe le plan de l'écliptique. Or ayant prouvé à présent que ce plan est mobile, on comprend aisément, que cette mobilité doit aussi causer quelque altération dans la précession des équinoxes; où j'observe en passant que le mouvement même de l'axe de la Terre, entant qu'il dépend de l'obliquité de l'écliptique, a été autrefois un peu différent de celui qu'on a determiné par la Théorie pour le siecle d'à présent. Mais je suppose ici comme parfaitement connuë la précession des équinoxes avec ses irrégularités, qui sont causées par l'action de la Lune; & je recherche uniquement les changemens, qui y doivent arriver à cause de l'action de Jupiter & de Venus. Or ayant assigné les valeurs de la formule $\varepsilon \sin \alpha$ pour ces deux planetes, leur action fera reculer la longitude du pole de l'équateur, & partant aussi les points équinoctiaux pendant un siecle par l'espace

$$\frac{18'' \cos ♃ + 32'' \cos ♀}{\tang e},$$

où e marque l'obliquité de l'écliptique pour ce tems. Donc pour le siecle d'à present, où

$$♃ = 9^s, 7°, 34'; \quad ♀ = 8^s, 13°, 58' \quad \& \quad e = 23°, 28', 30'',$$

 les

les points équinoctiaux reculeront pendant ce siecle par l'espace de :

$$\frac{18'' \cos 82°, 26' - 32'' \cos 73°, 58'}{\tang 23°, 28', 30''} = -14'',$$

donc les points équinoctiaux avanceront pendant ce siecle de 14''. Donc, si le mouvement moyen, qui leur est imprimé par l'action de la Lune est de 5030'', ou de 1°, 23', 50'' pour un siecle, il sera effectivement de 14'' moindre, & partant de 1°, 23', 36'', à cause de l'action des planetes. Mais, puisque cette accéleration n'est que de $8\frac{2}{5}$ tierces par an, elle évanouït presque par rapport à la précession moyenne, qu'on estime de 50'', 18''' par an.

XXIX. Puisque les longitudes ♃ & ♀ vont en croissant, il est évident, que pour les siecles suivans cet effet des planetes deviendra de plus en plus petit, & qu'après être évanouï, il changera de signe. Mais pour les siecles passés il a été plus grand par la même raison, & puisqu'il est négatif, la précession ordinaire des équinoxes en a été diminuée. Considérons le siecle depuis A. 1000. à A. 1100; & les points équinoctiaux auront été reculés pendant ce siecle de

$$-\frac{18 \cos 87°, 52' - 32 \cos 67°, 57'}{\tang 23°, 34', 15''} = -29'',$$

& partant la précession moyenne des équinoxes aura été

$$1°, 23', 50'' - 29'' = 1°, 23', 21''.$$

Faisons aussi le calcul du siecle depuis A. 0 à A. 100. & nous trouverons

$$-\frac{18 \cos 73°, 58' - 32 \cos 49°, 20'}{\tang 23°, 40' 38''} = -59'',$$

& partant dans ce siecle la précession moyenne des équinoxes aura été

$$1°, 23', 50'' - 59'' = 1°, 22', 51''.$$

De là nous pourrons dresser la table suivante, qui représente la longitude moyenne de la première étoile d'*Aries* pour le commencement de chaque siecle, indépendament des inégalités particulieres, auxquelles la longitude de cette étoile est assujettie.

Lon-

Longitude moyenne de la 1^re^ * de ♈.

A. 0	0^s, 5°, 24′, 23″	A.1000	0^s, 19°, 15′, 8″
	1, 22, 51		1, 23, 21
A. 100	0, 6, 47, 14	A.1100	0, 20, 38, 29
	1, 22, 54		1, 23, 23
A. 200	0, 8, 10, 8	A.1200	0, 22, 1, 52
	1, 22, 57		1, 23, 26
A. 300	0, 9, 33, 5	A.1300	0, 23, 25, 17
	1, 23, 0		1, 23, 27
A. 400	0, 10, 56, 5	A.1400	0, 24, 48, 44
	1, 23, 3		1, 23, 30
A. 500	0, 12, 19, 8	A.1500	0, 26, 12, 14
	1, 23, 6		1, 23, 32
A. 600	0, 13, 42, 14	A.1600	0, 27, 35, 46
	1, 23, 9		1, 23, 34
A. 700	0, 15, 5, 23	A.1700	0, 28, 59, 20
	1, 23, 12		1, 23, 36
A. 800	0, 16, 28, 35	A.1800	1, 0, 22, 56
	1, 23, 15		1, 23, 40
A. 900	0, 17, 51, 50	A.1900	1, 1, 46, 36
	1, 23, 18		1, 23, 45
A.1000	0, 19, 15, 8	A.2000	1, 3, 10, 21

Où j'ai ſuppoſé la préceſſion annuelle ordinaire de 1°, 23′, 50″: ſi elle étoit ou plus grande, ou plus petite, on en corrigeroit aiſément cette Table.

30. Après avoir bien déterminé la partie de la préceſſion des équinoxes, qui dépend de l'action des planetes, on eſt en état d'aſſigner plus exactement celle, qui eſt cauſée par l'action de la Lune ſur l'axe de la Terre. Car, ſi l'on connoiſſoit avec toute la préciſion poſſi-poſſible, de combien la premiere étoile d'Aries eſt avancée en longitude dans un tems donné, puiſqu'on ſait l'effet produit par l'action des planetes, le reſte doit être attribué au mouvement de l'axe de la Terre. Mais dans cette détermination il faut prendre la longitude moyenne de cette étoile, & non pas la vraye, qui en différe à cauſe de la nutation de l'axe de la terre. Ainſi, ſi nous ſuppoſons, que par les obſervations de *Tycho* la longitude vraye de 1*♈ ait été A.1601 = 0^s, 27°, 36′, 50″

 puiſ-

puisque la longitude du nœud ascendant de la Lune étoit alors $9^s, 11^\circ, 35'$, il en faut soutraire $17''$ pour avoir la longitude moyenne. Donc au commencement de l'année 1601 la longitude moyenne de la 1 ✱ ♈

aura été $0^s, 27^\circ, 36', 33''$.

Ensuite selon *Flamsted* la longitude vraye de cette même étoile a été au commencement de l'année 1700 $= 0^s, 28^\circ, 59', 20''$, d'où à cause du nœud ascendant de la Lune $5^s, 16^\circ, 46'$, la longitude moyenne en différe de $3''$, & partant

aura été $0^s, 28^\circ, 59', 23''$.

Et partant dans l'espace de 99 ans cette étoile aura actuellement avancé en longitude moyenne de $1^\circ, 22' 50''$, & en 100 ans de $1^\circ, 23', 40''$. Soit maintenant s la précession seculaire des équinoxes causée par le mouvement de l'axe de la terre, & puisque nous avons vu, que l'action des planetes donne pour ce siecle $16''$, la précession entière sera $s - 16''$, & partant $s = 1^\circ, 23', 56''$, qui ne surpasse que de $6''$ celle que j'ai introduite d'abord. D'où l'on voit que par la seule action de la Lune, ou par le mouvement de l'axe de la terre, la précession moyenne seculaire des équinoxes est $1^\circ, 23', 56''$, ou $5036''$ ce qui donne par an $50'', 21\frac{1}{2}'''$; & convient fort bien avec ce qu'on a pu conclure jusqu'ici de la Théorie de la Lune appliquée à la nutation de l'axe de la terre.

III.

Détermination des changemens dans la latitude des étoiles fixes.

XXXI. Ayant trouvé $\varepsilon \sin \alpha = 18''$ pour Jupiter, & $\varepsilon \sin \alpha = 32''$ pour Venus, si nous posons

La longitude du nœud descendant de Jupiter $=$ ♃.
La longitude du nœud descendant de Venus $=$ ♀.
& La longitude d'une étoile fixe $= \lambda$.

nous avons vu que la distance de cette étoile au pole boreal de l'écliptique croitra pendant un siecle de cette particule :

$18''$

$$18'' \cos(\lambda - ♃) + 32'' \cos(\lambda - ♀).$$

Donc la latitude croitra de cette même particule, ſi elle eſt boreale, mais ſi elle eſt méridionale, la latitude en ſera diminuée, ſuppoſé que la valeur de notre formule ſoit poſitive; car au cas qu'elle devienne négative, l'effet ſera contraire. J'ai déjà remarqué que la même valeur, qui convient à cette formule pour un certain ſiecle, peut avoir lieu pour pluſieurs ſiecles tant paſſés qu'à venir, parce que les arcs $\lambda - ♃$ & $\lambda - ♀$ ne changent pas ſenſiblement pendant le cours de pluſieurs ſiecles. En effet les Tables de *Halley* donnent aux nœuds de Jupiter le même mouvement qu'aux étoiles fixes, de ſorte que l'arc $\lambda - ♃$ demeureroit toujours exactement le même: or les Tables de *Caſſini* ne font avancer les nœuds de Jupiter que de $24''$ par an, pendant que les étoiles fixes avancent de $50''$, d'où réſulteroit enfin une grande différence dans la valeur de l'arc $\lambda - ♃$. Mais pour les nœuds de Venus ces deux Aſtronomes ſont plus d'accord, *Caſſini* mettant leur mouvement annuel de $34''$, & *Halley* de $31''$, d'où l'arc $\lambda - ♀$ changeroit de $18''$ par an, & partant de $31'$ par ſiecle, ce qui ne produiroit pourtant que $10°$ pendant 20 Siecles. Or j'ai déjà obſervé, que notre formule ne ſauroit avoir lieu pour un trop grand nombre de ſiecles, à cauſe de l'incertitude où nous ſommes par rapport à l'inclinaiſon des orbites: & avec cette reſtriction nous pourrons bien regarder comme invariables les arcs $\lambda - ♃$ & $\lambda - ♀$.

XXXII. Qu'on prenne donc la longitude d'une étoile pour le commencement de ce ſiecle, de ſorte que

λ marque la longitude de l'étoile A. 1700.

& puisque pour ce même cas on a

$$♃ = 9^s, 7°, 34' \quad \& \quad ♀ = 8^s, 13°, 58'$$

en dévelopant notre formule, l'augmentation ſeculaire de la diſtance de l'étoile au pole boreal de l'écliptique ſera:

$$+ 18'' \cos ♃ \cos\lambda + 18'' \sin ♃ \sin\lambda$$
$$+ 32'' \cos ♀ \cos\lambda + 32'' \sin ♀ \sin\lambda.$$

Or

Or nous avons trouvé cy-dessus :

$$18'' \sin ♃ + 32'' \sin ♀ = -47\tfrac{1}{2} \text{ secondes}$$

$$\&\quad 18'' \cos ♃ + 32'' \cos ♀ = -6\tfrac{1}{2} \text{ secondes}$$

Donc ladite augmentation seculaire sera :

$$-47\tfrac{1}{2} \sin\lambda - 6\tfrac{1}{2} \cos\lambda \text{ secondes.}$$

D'où l'on voit que les étoiles, dont la longitude fut A. 1700.

ou $2^s, 22^\circ$, ou $8^s, 22^\circ$

sont le plus assujetties au changement en latitude ; car pendant le cours d'un siecle leur distance du pole de l'écliptique change de $48''$; celle des premieres, dont la longitude est $2^s, 22^\circ$, en devenant plus petite, & celle des dernieres, dont la longitude est $8^s, 22^\circ$, plus grande. Puisque le même changement est arrivé depuis plusieurs siecles, la distance au pole boreal de l'écliptique des étoiles dont la longitude étoit $2^s, 22^\circ$ A. 1700. fut autrefois plus grande qu'aujourdhui, & cela d'autant de fois de $48''$, qu'il s'en est écoulé de siecles ; mais pour les étoiles dont la longitude étoit $8^s, 22'$ A. 1700. leur distance au pole boreal de l'écliptique fut autrefois plus petite qu'aujourdhui, & cela d'autant de fois de $48''$ qu'il s'en est écoulé de siecles. Ce changement sera donc de $8'$ en 10 siecles, & de $16'$ en 20 siecles ; mais les autres étoiles fixes auront subi de moindres changemens.

XXXIII. La formule trouvée $47\tfrac{1}{2} \sin\lambda + 6\tfrac{1}{2} \cos\lambda$ se transforme aisément dans celle-cy $48 \cos(82^\circ - \lambda)$, ou $48 \cos(\lambda - 82^\circ)$, ou bien $48 \sin(\lambda + 8^\circ)$. Donc, si la longitude d'une étoile fixe est $= \lambda$ pour l'année 1700, & que sa distance au pole boreal de l'écliptique ait été pour un tems quelconque proposé $= D$, un siecle après, sa distance au même pole sera $= D - 48'' \sin(\lambda + 8^\circ)$; d'où j'ai calculé la Table suivante.

CHAN-

CHANGEMENS
dans la distance des étoiles fixes au pole boreal de l'ecliptique pendant un siècle.

Arg. La longitude de l'étoile A. 1700.

gr.	♈ dimin. ♎ augm.	♉ dimin. ♏ augm.	♊ dimin. ♐ augm.	♋ dimin. ♑ augm.	♌ dimin. ♒ augm.	♍ dimin. ♓ augm.
0	6″, 7	29″, 5	44′, 5	47″, 5	37″, 8	18′, 0
3	9, 2	31, 5	45, 4	47, 1	36, 2	15, 6
6	11, 6	33, 4	46, 1	46, 6	34, 5	13, 2
9	14, 0	35, 1	46, 8	45, 9	32, 8	10, 8
12	16, 4	36, 8	47, 3	45, 1	30, 8	8, 4
15	18, 8	38, 3	47, 6	44, 2	28, 8	5, 9
18	21, 0	39, 8	47, 9	43, 2	26, 8	3, 4
21	23, 3	41, 1	48, 0	42, 0	24, 7	0, 9
24	25, 4	42, 4	48, 0	40, 7	22, 5	1, 7
27	27, 5	43, 5	47, 8	39, 3	20, 2	4, 2
30	29, 5	44, 5	47, 5	37, 8	18, 0	6, 7

De là il est aisé de conclure, combien la latitude de chaque étoile change pendant un siecle; car, si la latitude est boreale, on n'a qu'à changer les titres, & si elle est méridionale, les titres demeurent les mêmes.

XXXIV. Les endroits du plus grand changement souffrent donc une plus grande étenduë, & on peut dire que les étoiles, dont la longitude tombe ou dans la derniere moitié de ♊, ou dans la derniere de ♐ A. 1700, sont assujetties au plus grand changement en latitude, qui monte à 48″ pendant un siecle : ce qui se reduit aux deux régles suivantes :

I. Pour les étoiles, dant la longitude tomboit A. 1700. *dans la derniere moitié de* ♊.

 Leur

Leur latitude, si elle est boreale, augmente pendant chaque siecle de 48″; or, si elle est méridionale, elle diminuë après chaque siecle de 48″.

II. Pour les étoiles, dont la longitude tomboit A. 1700. dans la derniere moitié de ♐.

Leur latitude, si elle est boreale, diminuë après chaque siecle de 48″, & si elle méridionale, elle augmente de 48″ après chaque siecle.

On voit aussi, qu'il y a deux positions en longitude pour A. 1700. où la latitude des étoiles ne change point du tout. Ainsi la latitude des étoiles, dont la longitude étoit A. 1700, ou ♍ 22° ou ♓ 22°, a été depuis plusieurs siecles la même qu'aujourdhui, & demeurera encore la même pendant plusieurs siecles.

Or les déterminations de latitudes, qu'on tire des observations sont rarement si exactes, qu'on ne doive craindre une erreur de plusieurs secondes, surtout quand on remonte à des tems reculés. Ainsi, en comparant nôtre table avec les observations, on ne doit pas être surpris, lorsqu'on ne rencontre point un parfait accord. Principalement il ne faut pas comparer ensemble des observations, à moins que l'intervalle du tems ne soit de quelques siecles. Donc, quoique les latitudes, qu'on trouve dans le Catalogue de *Ptolemée*, soient fort grossièrement marquées, on pourra s'en servir avec un meilleur succès, que des latitudes de *Tycho*, qui sont beaucoup plus parfaites. Cependant il faudra se contenter, quand on voit en général que les variations dans les latitudes s'accordent à quelques minutes près avec nos principes.

XXXV. Pour voir à quel point les anciennes observations sont d'accord avec la Théorie, tirons des Catalogues des étoiles fixes de *Ptolemée* & de *Flamsted* la latitude des étoiles, dont la longitude tombe dans la derniere moitié des Gemeaux A. 1700, où je cotterai les étoiles par les nombres marqués dans le Catalogue de *Ptolemée.*

Con-

Conſtellation Auriga

Nro.	Longitude A. 1700.	Latitude de Ptolem.	Latitude A. 1700.	
1	♊ 25°, 36′	30°, 0′	30°, 49′	Boreale
2	24 , 50	31 , 50	32 , 14	Boreale
3	17 , 32	22 , 30	22 , 52	Boreale
4	25 , 36	21 , 0	21 , 28	Boreale
5	23 , 58	15 , 15	15 , 41	Boreale
6	25 , 37	13 , 20	13 , 44	Boreale
7	14 , 31	20 , 40	20 , 54	Boreale
8	15 , 7	18 , 0	18 , 15	Boreale
9	14 , 19	18 , 0	18 , 10	Boreale
11	18 , 14	5 , 0	5 , 22	Boreale
12	19 , 50	8 , 30	8 , 51	Boreale
19	20 , 27	2 , 30	2 , 14 *m*	Conſt. Taurus.
14	29 , 7	1 , 30	0 , 56 *m*	Conſt. Gemini.
15	30 , 58	1 , 15	0 , 51 *m*	Conſt. Gemini.

De là on voit clairement, que la latitude de toutes ces étoiles, où elle eſt boreale, eſt devenuë conſidérablement plus grande depuis le tems de *Ptolemée* jusqu'à nous ; or celle des trois dernières, qui eſt méridionale, eſt devenuë plus petite : donc l'une & l'autre eſt parfaitement d'accord avec notre première régle. Si l'on compare de même maniere les autres étoiles, dont la longitude ne différe que d'un ſigne de cette poſition, on rencontrera pour la plûpart une ſemblable harmonie ; & quand on trouve le contraire, la différence eſt ſi énorme, qu'elle doit être attribuée à la bévuë d'un Copiſte, plutôt qu'à la négligence des obſervateurs.

XXXVI. Examinons de la même maniere les principales étoiles fixes, dont la longitude tomboit A. 1700. dans la derniere moitié de ♐, & l'Hiſtoire Celeſte de *Flamſted* nous fournit les ſuivantes :

Nro.

Nro.	Longitude A. 1700	Latitude de Ptolem.	Latitude A. 1700.		
6	♐ 15°, 31′	49°, 30′	49°, 20′		Boreale
7	20 , 54	52 , 0	51 , 13		dans la Conſtellation
8	28 , 21	52 , 50	52 , 14		d'Hercules.
9	25 , 6	54 , 0	53 , 40		
10	24 , 49	53 , 0	52 , 44		
18	24 , 6	61 , 0	60 , 44		
19	15 , 31	69 , 20	69 , 19		
22	20 , 29	72 , 15	71 , 50		
13	15 , 58	10 , 30	10 , 18		Boreale
14	20 , 13	8 , 10	7 , 59		dans la Conſtellation
15	21 , 7	10 , 50	10 , 34		de Serpens.
16	25 , 48	20 , 0	19 , 48		
1	18 , 6	36 , 0	35 , 53	B	
2	21 , 1	27 , 15	27 , 58	B	
3	22 , 19	26 , 30	26 , 9	B	
9	20 , 15	15 , 0	5 , 16	B	dans la
10	25 , 25	31 , 40	13 , 43	B	Conſtellation
14	16 , 34	2 , 15	2 , 5	B	de Serpentarius.
15	17 , 3	1 , 30	1 , 48	M	
16	18 , 0	0 , 20	0 , 54	M	
17	19 , 1	0 , 45	0 , 31	B	
18	19 , 58	1 , 0	1 , 20		

Malgré quelques groſſières bévuës, la comparaiſon de la latitude de ces étoiles prouve auſſi ouvertement la vérité de notre Théorie ; & ſi l'on veut ſe donner la peine d'examiner encore d'autres étoiles, on en ſera encore plus convaincu. Il n'y a donc nul doute, qu'on ne puiſſe aſſigner par le moyen de notre table la véritable latitude de chaque étoile fixe pour tous les tems tant paſſés qu'à venir.

IV.

IV.

Détermination des changemens dans la longitude des étoiles fixes.

XXXVII. Ayant établi cy-deſſus la vraye longitude de la 1 ✱ ♈ pour chaque époque propoſée, on en pourroit auſſi déterminer celle de toutes les autres étoiles, ſi leur différence en longitude demeuroit conſtamment la même. Mais, après avoir remarqué, qu'outre la variation & l'aberration commune leur différence en longitude eſt aſſujettie à un changement, qui eſt cauſé par l'action des planetes, je m'en vay déterminer ce changement. Suppoſant donc pour un tems propoſé la longitude d'une étoile $= \lambda$, ſa diſtance au pole boreal de l'écliptique $= p$, la longitude du nœud deſcendant de l'orbite de Jupiter $=$ ♃, & celle de l'orbite de Venus $=$ ♀, nous avons vû cy-deſſus que la longitude de cette étoile doit diminuer pendant le cours d'un ſiecle de la quantité

$$\frac{18 \sin(\lambda - ♃) + 32 \sin(\lambda - ♀)}{\operatorname{tang} p} \text{ ſecondes.}$$

Donc, puisqu'on peut mettre pour tout tems au lieu des quantités λ, ♃ & ♀ leurs valeurs, qu'elles ont eu au commencement de ce ſiecle, ou A. 1700, λ marque la longitude d'une étoile A. 1700, la diminution ſeculaire de la longitude de cette étoile ſera :

$$\frac{18(\sin \lambda - 270° - 8°) + 32 \sin(\lambda - 270° + 16°)}{\operatorname{tang} p} \text{ ſeconde,}$$

ou $$\frac{18 \cos(\lambda - 8°) + 32 \cos(\lambda + 16°)}{\operatorname{tang} p} \text{ ſecondes,}$$ qui ſe reduit à $$\frac{48 \cos \lambda - 6 \sin \lambda}{\operatorname{tang} p} = \frac{48 \cos(\lambda + 8°)}{\operatorname{tang} p} \text{ ſecondes.}$$

XXXVIII. Donc, ſi nous conſidérons deux étoiles, dont la longitude de l'une ait été $= -8°$, ou 11ˢ, 22° A. 1700, & de l'au-

$5^s, 22^\circ$, la différence entre leur longitude aura été de 6^s; mais en supposant p la distance de la première au pole de l'écliptique, & q celle de l'autre, la longitude de la première diminuera pendant le cours d'un siecle de $\frac{48}{\tang p}$ sec. où elle sera après un siecle $11^s, 22^\circ - \frac{48''}{\tang p}$, or celle de l'autre sera après un siecle $5^s, 22^\circ + \frac{48''}{\tang q}$; & partant leur différence en longitude sera $6^s - 48''(\cot p + \cot q)$, ou diminuera de $48''(\cot p + \cot q)$; or A. 1600. elle a été d'autant plus grande. Donc A. 0. il faut que cette différence en longitude ait été de $13\frac{1}{3}(\cot p + \cot q)$ min. plus grande. Telles étoiles sont celle de n°. 27 de la grande Ourse, & n°. 10 du Dragon; la latitude de celle là étant $54^\circ, 27'$, & de celle-cy $81^\circ, 48'$. Or on trouve

La longitude	A. 1700	au tems de *Ptolem.*
de la première	$5^s, 22^\circ, 34$	$4^s, 29^\circ, 50'$
de l'autre	$11, 29, 23$	$11, 8, 0$
Diff. en long.	$6, 6, 49$	$6, 8, 10$

de sorte que la différence en longitude de ces deux étoiles a été du tems de *Ptolemée* de $1^\circ, 21'$ plus grande qu'aujourdhui; ce qui répond parfaitement bien à notre Théorie rapportée à l'intervalle du tems entre *Ptolemée* & nous; car puisque $\cot p + \cot q$ devient $= 8$, ce changement se trouve si grand. Mais j'ai dejà remarqué, que ces formules ne sauroient plus avoir lieu, lorsque les étoiles seroient encore plus proches au pole de l'écliptique.

XXXIX. Puisque les étoiles proches de l'écliptique ne sont pas assujetties à ce changement, la première étoile d'Aries ne l'est pas non plus, & partant sa longitude marquée cy-dessus n'a plus besoin de correction de ce côté. Donc notre formule $\frac{48 \cos(\lambda + 8^\circ)}{\tang p}$ sec. marquera de combien la longitude d'une étoile comptée depuis la 1 ✱ ♈ dimiminuë pendant le cours d'un ſiecle. Pour le numérateur de notre formule, il eſt évident que ſes valeurs pour chaque étoile pourroient être tirées de la Table de l'article précédent : cependant il ſera bon d'en donner une Table à part

TABLE

qui ſert pour trouver le changement dans la longitude des étoiles fixes pour un ſiècle.

Arg. La longitude de l'étoile A. 1700.

gr.	♈ dimin. ♎ augm.	♉ dimin. ♏ augm.	♊ dimin. ♐ augm.	♋ augm. ♑ dimin.	♌ augm. ♒ dimin.	♍ augm. ♓ dimin.
0	47″, 5	37″, 8	18″, 0	6″, 7	29″, 5	44″, 5
3	47 , 1	36 , 2	15 , 6	9 , 2	31 , 5	45 , 4
6	46 , 6	34 , 5	13 , 2	11 , 6	33 , 4	46 , 1
9	45 , 9	32 , 8	10 , 8	14 , 0	35 , 1	46 , 8
12	45 , 1	30 , 8	8 , 4	16 , 4	36 , 8	47 , 3
15	44 , 2	28 , 8	5 , 9	18 , 8	38 , 3	47 , 6
18	43 , 2	26 , 8	3 , 4	21 , 0	39 , 8	47 , 9
21	42 , 0	24 , 7	0 , 9	23 , 3	41 , 1	48 , 0
24	40 , 7	22 , 5	1 , 7	25 , 4	42 , 4	48 , 0
27	39 , 3	20 , 2	4 , 2	27 , 5	43 , 5	47 , 8
30	37 , 8	18 , 0	6 , 7	29 , 5	44 , 5	47 , 5

Cette table ne marque pas les changemens ſeculaires mêmes, mais après en avoir tiré la valeur pour une étoile donnée, il la faut encore diviſer par la tangente de ſa diſtance au pole boreal de l'écliptique, le ſinus total étant = 1, & le quotient donnera l'augmentation ou diminution ſeculaire de la longitude de cette étoile comptée depuis 1*♈. Or il faut obſerver, que lorſque la latitude de l'étoile eſt méridionale, la tangente de ſa diſtance au pole boreal de l'écliptique devient négative, d'où les titres de *augm.* & *dimin.* ſeront changés.

XL.

XL. Pour éclaircir ces changemens tant en longitude qu'en latitude par un exemple, soit proposée l'étoile nommée α de la Lyre, dont M. *le Monnier* marque pour A. 1700. la longitude ♑ 11°, 48′, 45″, la latitude 61°, 45′ 51″ *b*. Donc pour sa latitude notre Table marque, qu'elle augmente pendant chaque siecle de $45\frac{3}{10}$ sec. par conséquent la latitude moyenne de cette étoile fut autrefois plus petite, & du tems de *Ptolemée*, ou A. 150. elle a été 61°, 33′, 10″. Or pour la longitude notre table donne $15\frac{6}{10}$ sec. dim. qu'il faut encore multiplier par la tangente de la latitude, d'où l'on obtient 30″ dimin. Donc la longitude de cette étoile prise depuis 1*♈ diminuë de 30″ par siecle, & autrefois elle aura été plus grande qu'à présent, & cela de 8′ A. 150. Or pour A. 1750. nous avons

La longitude de 1*♈	= 0ˢ, 29°, 41′, 8′
La long. de α de la Lyre	= 9, 11, 48, 45
différence	8, 12, 7, 37
ajoutez y	8′, 0″
Diff. pour A. 150. . . .	8, 12, 15, 37
ajout. long. 1*♈ A. 150. .	0, 7, 28, 41
Long. de α de la Lyre A. 150.	8, 19, 44, 18.

Donc pour l'étoile α de la Lyre nous avons :

	Long. moy.	Latit. moy.
A. 1750	♑ 11°, 48′, 45″	61°, 45′, 15″ *b*
A. 150	♐ 19, 44, 18	61, 33, 10 *b*.

De cette maniere on ne trouve que le lieu moyen des étoiles, qu'il faut ensuite encore corriger tant par les tables de l'aberration, que par celles de la variation, qu'on trouve déjà construites pour l'usage de l'Astronomie.

ECLAIR-