1756

Théorie plus complette des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau

Leonhard Euler

THÉORIE
PLUS COMPLETTE DES MACHINES
QUI SONT MISES EN MOUVEMENT
PAR LA RÉACTION DE L'EAU.

PAR M. EULER.

Ayant déjà expliqué en quelques Mémoires l'effet, que la Machine projettée par Mr. *de Segner* à Halle eſt capable de produire, je me propoſe ici de déveloper cette même matiere plus ſoigneuſement. Les forces, par lesquelles cette machine eſt miſe en mouvement, ſont tirées de la réaction de l'eau, dont la machine eſt remplie, & qui en ſort en bas par des ouvertures : car, puisque cette machine eſt mobile autour d'un axe vertical, & que l'eau en échape horizontalement, il réſulte de la réaction de l'eau un moment de forces, qui tend à faire tourner la machine autour de ſon axe, & qui la rend même capable de ſurmonter quelque réſiſtance, ou bien de produire quelque effet. Or, dans la recherche que j'ai faite de cette machine, j'ai ſuppoſé un vaiſſeau cylindrique, au fond duquel ſont attachés des tuyaux horizontaux, par lesquels l'eau échape, & ayant regardé le mouvement de l'eau dans le vaiſſeau comme connu, j'ai cherché le mouvement par les tuyaux attachés, avec la force de réaction, qu'ils en ſoutiennent. Cette ſuppoſition a été faite pour rendre la recherche plus facile : car, ſi j'avois voulu continuer les tuyaux jusqu'en haut de la ſurface de l'eau, la détermination de la réaction de l'eau ſeroit devenuë plus embarraſſante. Quoique cette circonſtance n'apporte aucune atteinte à la juſteſſe de la détermination, après que j'y ai ajouté la rectification, qui lui convient à cauſe du mouvement de l'eau par le vaiſſeau cylindrique, il n'y a aucun doute que cette recherche ne ſeroit plus com-

plette

plette, ſi l'on regardoit le vaiſſeau avec les tuyaux comme une ſeule piece continuë, & qu'on étendit le calcul à la fois ſur toute la maſſe de l'eau, qui eſt miſe en mouvement. Par ce moyen la théorie de cette eſpece de machines ſera non ſeulement portée à un plus haut degré de perfection, mais nous en tirerons encore l'avantage, de rendre les machines mêmes plus parfaites, & d'en augmenter l'effet. Outre cela il y a tant de choſes différentes, auxquelles il faut avoir égard dans cette recherche, qu'il ſera de la derniere importance de déveloper chacune en particulier plus en détail, afin que cette matiére, qui jusqu'ici a été envelopée de quantité d'obſcurités, devienne plus lumineuſe, & qu'on acquierre une connoiſſance claire de ce, que chaque circonſtance en particulier contribue à la production de l'effet de toute la machine. Je m'en vais donc détailler le plus évidemment qu'il me ſera poſſible, tous les élémens, ſur lesquels la théorie de la réaction de l'eau, & de l'effet qu'on en peut tirer, eſt fondée.

DEFINITION I.

I. *La réaction de l'eau eſt la force dont l'eau agit ſur le vaiſſeau, qui la contient, & qui tend par conſéquent à imprimer au vaiſſeau quelque mouvement.*

La réaction ſe prend communement pour la force qu'un vaiſſeau ſoutient de l'eau, entant qu'elle en ſort par quelque ouverture: mais ici je prends ce terme dans un ſens plus général pour marquer la force, dont l'eau agit ſur le vaiſſeau, ſoit que l'eau ſoit en repos, ou qu'elle ſoit en mouvement.

COROLL. I.

II. Donc, ſi l'eau eſt en repos dans le vaiſſeau, les ouvertures étant fermées, le vaiſſeau ne ſoutient que le poids de l'eau tout entier: ou le vaiſſeau en eſt pouſſé en bas par une force égale au poids de l'eau ſelon une direction verticale, qui paſſe par le centre de gravité de la maſſe d'eau. Cette force eſt donc dans ce cas la réaction, que l'eau exerce ſur le vaiſſeau.

COROLL. 2.

III. Si le vaiſſeau, où l'eau eſt enfermée ſans qu'elle en puiſſe ſortir, eſt agité d'un mouvement quelconque, il ſoutiendra outre le poids de l'eau encore les forces, dont l'eau s'oppoſe au mouvement, entant que le mouvement n'eſt pas uniforme, ou qu'il ne ſe fait pas en ligne droite.

COROLL. 3.

IV. Mais ſi, pendant que le vaiſſeau, ou eſt en repos, ou dans un mouvement quelconque, l'eau échape par une ou pluſieurs ouvertures, la réaction de l'eau ſera bien différente de celle du cas précédent. La raiſon en eſt d'un côté, puiſque les parois du vaiſſeau ne ſoutiennent aucune force dans les ouvertures mêmes, & d'un autre côté puisque l'eau dans le vaiſſeau a un mouvement propre, dont l'action ſur le vaiſſeau eſt altéré.

COROLL. 4.

V. Il s'agit donc de déterminer en chaque cas propoſé la réaction de l'eau, ou la force que le vaiſſeau ſouffre de la part de l'eau, qu'il contient. On a donc deux choſes à déterminer; premièrement la quantité de cette force, qu'on meſurera le plus commodément par le poids d'un certain volume d'eau: & enſuite la direction de cette force.

SCHOLIE I.

VI. On voit bien, que la réaction de l'eau eſt le réſultat de toutes les forces, dont tous les élémens des parois du vaiſſeau ſont presſés par l'eau. Car les parois d'un vaiſſeau rempli d'eau ſoutiennent de la part de l'eau dans chacun de leurs points une certaine force, qui dépend tant de la peſanteur de l'eau, que de ſon mouvement. Ainſi chaque élément des parois du vaiſſeau étant ſollicité par une certaine force, dont la direction, à ce qu'on ſait, eſt toujours perpendiculaire aux parois, on n'aura qu'à réduire toutes ces forces élémentaires à une ſeule force, qui leur eſt équivalente, & cette force ſera preciſément la réaction, dont l'eau agit ſur le vaiſſeau. Car le vaiſſeau ne ſouf-

ſouffre rien de la part de l'eau, qu'entant que l'eau exerce des efforts contre ſes parois ; & ſi les parois ne ſoutenoient aucune preſſion de l'eau, ils ſe trouveroient dans le même état, que ſi le vaiſſeau étoit vuide, & partant il n'y auroit point de réaction. Mais ſi les parois ſont ſollicitées en tous leurs points par quelques forces, à moins que ces forces ne ſe détruiſent pas entierement entr'elles, il en réſultera une force, qui leur eſt équivalente, que le vaiſſeau ſoutient actuellement : & c'eſt cette force, qu'on doit entendre ſous le terme de réaction.

SCHOLIE 2.

VII. Cette conſidération nous conduit d'abord à une méthode de déterminer la réaction de l'eau ſur le vaiſſeau. Il faudra commencer par chercher les preſſions que les parois du vaiſſeau ſoutiennent dans tous leurs points de la part de l'eau : enſuite on n'aura qu'à chercher la force, qui ſoit équivalente à toutes ces forces élémentaires priſes enſemble, pour avoir la véritable quantité de la réaction. Or, quoique cette méthode ſemble la plus naturelle, & qu'elle ait été employée par tous les Auteurs qui ont traité cette matiere, elle renferme pourtant de ſi grandes difficultés, que je ſuis bien perſuadé qu'une autre méthode, que je propoſerai dans la ſuite, mérite bien loin la préférence. Car il eſt ſouvent extrèmement difficile, & quelquefois même impoſſible, de déterminer par la ſeule théorie les preſſions, que les parois du vaiſſeau ſoutiennent dans tous leurs points : & quand on ſe trompe tant ſoit peu dans cette détermination, l'erreur qui en réjaillit ſur la réaction, peut devenir très conſidérable. Car ordinairement la pluspart de ces preſſions ſe détruiſent mutuellement, & le réſultat n'eſt compoſé que de l'excès dont les preſſions vers un côté ſurpaſſent celles qui leur ſont contraires : donc, quand on aura commis quelque erreur dans toutes ces forces partiales, l'erreur qui en influë ſur la force équivalente, pourroit devenir très énorme. Or l'autre méthode que je propoſerai, n'eſt pas aſſujettie à cet inconvenient ; parce que je ne déterminerai pas la réaction par des forces, qui ſe détruiſent pour la pluspart,

part, mais plutôt par de telles forces, qui étant ajoutées ensemble fournissent la réaction; & de là nous tirerons cet avantage, que quoique l'expérience ne soit pas entièrement d'accord avec la théorie, l'erreur qui en résulte sur la réaction, ne sauroit devenir fort considérable. Or pour l'explication de cette méthode, je dois encore avancer les définitions suivantes.

DEFINITION II.

VIII. *Par les forces actuelles, qui agissent sur l'eau, j'entends toutes les forces dont l'eau est poussée de dehors, sans aucun égard à sa liaison avec le vaisseau.*

Une telle force est la gravité, dont chaque particule de l'eau est sollicitée en bas indépendamment du vaisseau; & si l'eau dans le vaisseau étoit encore pressée par un piston, cette force du piston doit aussi être comptée parmi les forces actuelles.

COROLL. 1.

IX. Entant que les parois du vaisseau soutiennent une pression de l'eau, l'eau en sera aussi sollicitée par une force égale & contraire: or, puisque ces forces proviennent de la liaison du vaisseau avec l'eau, je les distingue soigneusement des forces actuelles, qui agissent sur l'eau indépendamment du vaisseau: quoique l'une & l'autre espece des forces soit également réelle par rapport à l'eau.

COROLL. 2.

X. Comme il n'y a point d'autres forces, qui dépendent de la liaison de l'eau & du vaisseau, que la pression que le vaisseau soutient de l'eau; hormis ces forces de pression, toutes les autres forces, qui agissent sur l'eau, seront comprises sous le nom des forces actuelles.

COROLL. 3.

XI. La raison de cette distinction est assés évidente: car pour l'ordinaire toutes les forces actuelles sont données & connuës, avant

qu'on

qu'on cherche l'état, ou de repos, ou de mouvement de l'eau; au lieu qu'on ne sauroit assigner la pression mutuelle de l'eau & du vaisseau, sans qu'on sache exactement l'état, où l'eau se trouve.

COROLL. 4.

XII. Or puisque cette force de pression du vaisseau sur l'eau est égale & contraire à celle de l'eau sur le vaisseau, & cette force étant précisement la réaction de l'eau, il s'ensuit que la force que l'eau soutient de la part du vaisseau est égale & contraire à la réaction.

COROLL. 5.

XIII. Pour avoir toutes les forces, par l'action desquelles l'eau dans un vaisseau est sollicitée, il faut premièrement considérer toutes les forces actuelles, comme la pesanteur, & d'autres forces qui agissent par des pistons sur l'eau; à ces forces connuës il faut ajouter encore une force égale & contraire à la réaction, & la somme renfermera toutes les forces, qui agissent sur l'eau.

COROLL. 6.

XIV. Il est aussi clair que tout ce qui vient d'être rapporté a également lieu, soit que le vaisseau avec l'eau se trouve en repos, soit que l'un & l'autre ayent un mouvement quelconque. Il faut seulement remarquer, que dans ce dernier cas les forces sollicitantes peuvent varier à chaque instant.

DEFINITION III.

XV. *Les forces requises, sont les forces nécessaires pour produire les changemens dans l'état, ou de repos, ou de mouvement, où l'eau se trouve.*

Car, entant que les particules d'eau changent d'état, ou que leur mouvement n'est pas uniforme, & en ligne droite, il faut une certaine force, qui soit capable de produire ce changement, & toutes ces forces prises ensemble, ou bien la force qui leur est équivalente, sont ce que je nomme ici forces requises, puisqu'elles sont requises pour le maintien du mouvement.

CO-

COROLL. I.

XVI. Si l'eau avec le vaiſſeau eſt en repos, puiſque l'état du repos ſe conſerve par l'inertie de chaque corps, les forces requiſes évanouïront dans ce cas : & la même choſe arrivera, lorsque le mouvement de l'eau eſt tel, que toutes ſes particules ſe meuvent uniformément en lignes droites ; car la conſervation d'un tel mouvement n'exige point de forces.

COROLL. 2.

XVII. Or ſi les particules d'eau ne ſont pas portées, ni d'un mouvement uniforme, ni en ligne droite ; ou bien lorsque, ou la direction, ou toutes les deux changent : ce changement exige néceſſairement une certaine force, qu'on pourra déterminer ſachant le changement ; & toutes ces forces priſes enſemble conſtituent les forces requiſes, que je viens de définir.

COROLL. 3.

XVIII. Si une particule d'eau, dont la maſſe ſoit $= m$, ſe meut en ligne droite avec une viteſſe variable u, de ſorte que ſa viteſſe étant à préſent $= u$, devienne $u + du$, pendant le tems infiniment petit dt; on ſait que cette accélération demande une force $= \frac{2\,m\,du}{dt}$, qui agiſſe ſur la particule ſuivant la direction de ſon mouvement. Ou bien, poſant l'eſpace parcouru dans le tems dt, $= ds$, à cauſe de $u = \frac{ds}{dt}$, cette force ſera $= \frac{2\,m}{dt}\, d. \frac{ds}{dt} = \frac{2\,m\,dds}{dt^2}$ en prenant le différentiel dt conſtant.

COROLL. 4.

XIX. Si la particule d'eau ne ſe meut, ni uniformément, ni en ligne droite, & que ſon mouvement ne ſe faſſe pas même dans un plan, on décompoſera ce mouvement ſuivant trois directions fixes. Soit l'eſpace qu'il parcourt dans le tems dt par le premier de ces mouvemens $= dx$, par le ſecond $= dy$, & par le troiſième $= dz$, & prenant le

diffé-

différentiel dt conſtant, ce mouvement demande trois forces, qui ſollicitent la particule m ſuivant ces mêmes trois directions: ſavoir la premiere force ſera $= \frac{2mddx}{dt^2}$, la ſeconde $= \frac{2mddy}{dt^2}$, & la troiſième $= \frac{2mddz}{dt^2}$.

SCHOLIE.

XX. Tout cela eſt clair par les premiers principes de la Mécanique & de l'action des forces ſur les corps; par lesquels on ſait que l'accélération, ou le différentiel de la viteſſe diviſé par le différentiel du tems, eſt proportionnel à la force ſollicitante diviſée par la maſſe du corps: donc la force ſollicitante eſt proportionnelle au produit de la maſſe par le différentiel de la viteſſe, diviſé par le différentiel du tems, ou bien à $\frac{mdu}{dt}$. On pourra donc poſer la force ſollicitante $= \frac{\alpha mdu}{dt}$, où α marque un certain coëfficient conſtant, qui dépend de la maniere dont on veut exprimer tant la maſſe que la viteſſe & le tems. Or, ſi nous exprimons la maſſe par le poids qu'elle auroit à la ſurface de la terre, la viteſſe par la racine quarrée de la hauteur, de laquelle un corps tombant acquiert la même viteſſe, & le tems dans le mouvement uniforme par l'eſpace parcouru diviſé par la viteſſe, on verra que le nombre 2 donnera la juſte valeur du coëfficient α. Car on n'a qu'à appliquer la formule générale au cas, où le corps grave m tombe librement: que dans le tems il ſoit déjà deſcendu par la hauteur $= x$, ſa viteſſe u ſera donc $= \sqrt{x}$, avec laquelle il parcourra l'eſpace dx dans le tems $dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, puisque le mouvement par l'eſpace infiniment petit dx peut être regardé comme uniforme. Ayant donc $u = \sqrt{x}$, il ſera $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}dt$, & partant $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$. Donc, en vertu de notre formule générale $\frac{\alpha mdu}{dt}$, la force ſollicitante ſera $= \frac{1}{2}\alpha m$: or

la

la force sollicitante est dans ce cas égale à la pesanteur du corps, ou bien à sa masse $= m$; d'où il est clair, que pour qu'il devienne $\frac{1}{2}\alpha m = m$; il faut qu'il soit $\alpha = 2$. Et cette valeur conviendra à α, tant que nous conservons la même maniere d'introduire dans le calcul les masses, les vitesses, & les tems.

THEOREME I.

XXI. *Soit que le vaisseau avec l'eau soit en repos, ou que l'un & l'autre se trouvent dans un mouvement quelconque, la réaction de l'eau est égale aux forces actuelles, moins les forces requises.*

DEMONSTRATION.

Soit nommée la réaction de l'eau $= R$, les forces actuelles prises ensemble $= P$, & les forces requises pour l'entretien du mouvement de l'eau $= Q$. L'eau sera donc sollicitée premièrement par la force P, & ensuite par une force égale & contraire à la réaction R, ou bien par une force $= - R$, donc toutes les forces, dont l'eau est effectivement sollicitée, seront $= P - R$. Il faut donc que tous les changemens, que subit l'eau dans le vaisseau, soient produits par cette force $P - R$: or Q comprend les forces requises pour opérer ces changemens, d'où il s'ensuit que $P - R = Q$, & partant $P - Q = R$, c'est à dire la réaction est égale aux forces actuelles, moins les forces réquises. C. Q. F. D.

COROLL. I.

XXII. Puisque la réaction R agit sur le vaisseau, il faut aussi concevoir les forces P & Q comme appliquées au vaisseau. Le vaisseau soutiendra donc deux forces, une qui convient avec les forces actuelles, & à cause de $- Q$ l'autre est égale, mais contraire, aux forces requises.

COROLL. 2.

XXIII. Parce que nous venons de trouver $P = Q + R$, nous voyons que les forces actuelles se partagent en deux parties Q,

 & R,

& R, dont l'une eſt employée à produire les changemens, qui arrivent dans l'état de l'eau, & l'autre eſt employée à agir ſur le vaiſſeau même, qui eſt la réaction. D'où l'on voit, que la réaction n'exiſte, qu'entant que toute la force actuelle n'eſt pas employée à agir ſur l'eau; ce qui rend l'énoncé du Theoreme encore plus évident. Car on comprend aiſément, que le vaiſſeau même ne ſauroit ſoutenir que cette partie de la force actuelle, qui n'eſt pas employée à agir ſur les particules de l'eau.

COROLL. 3.

XXIV. Donc, ſi l'on connoit premièrement les forces actuelles, par lesquelles l'eau eſt ſollicitée, & enſuite les forces requiſes au mouvement de l'eau, on en pourra déterminer la force de la réaction, dont l'eau agit ſur le vaiſſeau. Or les forces actuelles ſont connuës d'elles-mêmes en chaque cas, & les forces requiſes peuvent être déterminées en regardant le mouvement de l'eau comme connu.

COROLL. 4.

XXV. Si l'eau avec le vaiſſeau n'a aucun mouvement, ou qu'elle demeure en repos, puisque la conſervation de cet état n'exige point de forces, les forces requiſes Q ſeront $= 0$, & le vaiſſeau ſoutiendra toutes les forces actuelles, par lesquelles l'eau eſt ſollicitée: ou bien le vaiſſeau ſera ſollicité tant par le poids de l'eau tout entier, que par les forces des piſtons, s'il y en a, qui preſſent ſur l'eau.

COROLL. 5.

XXVI. La même choſe arrivera, lorsque toutes les parties de l'eau ſe meuvent uniformément en ligne droite. Ce cas aura lieu, lorsque l'eau coule uniformément par un tuyau droit, & alors le tuyau ſoutiendra outre le poids de l'eau les forces, dont l'eau eſt pouſſée par des piſtons.

COROLL. 6.

XXVII. Or, lorsque toutes les forces actuelles ſont employées au mouvement de l'eau, ce qui arrive quand l'eau tombe librement d'un d'un vaiſſeau cylindrique vertical, qui n'a point de fonds, l'eau tombant dans ce cas librement comme un corps ſolide, toute ſa peſanteur eſt employée à accélérer ſon mouvement, & partant il ne reſte rien pour la réaction, ou bien ce vaiſſeau ne ſouffrira rien de la part de l'eau.

SCHOLIE.

XXVIII. Comme cette matiere ſeroit presque inépuiſable, vu la diverſité infinie, qui peut avoir lieu tant à l'égard de la figure des tuyaux, par lesquels l'eau coule, que par rapport au mouvement des tuyaux & de l'eau même, pour ne pas m'étendre trop, je bornerai mes recherches à des tuyaux, qui ſont mobiles autour d'un axe fixe. Ainſi je paſſerai les cas plus ſimples, où les tuyaux ſeroient, ou en repos, ou dans un mouvement progreſſif, puisque ces cas ſont déjà aſſés ſuffiſamment traités; & j'omettrai les cas plus compliqués, où les tuyaux ſeroient ſuſceptibles d'un mouvement irrégulier, ni progreſſif, ni rotatoire, puisque ces cas meneroient à des calculs trop embarraſſans. Mais je ſuis obligé d'apporter aux cas, que je me propoſe de déveloper ici, une limitation, ſans laquelle le calcul deviendroit inſurmontable; j'enviſagerai les tuyaux comme infiniment étroits, afin que tous les points de l'eau, qui ſe trouvent dans la même ſection faite perpendiculairement à la direction du tuyau, puiſſent être regardés avoir le même mouvement; cependant on verra que cette reſtriction n'affecte presque que le calcul, & que les concluſions peuvent ſubſiſter, quand même la largeur du tuyau ſeroit aſſés conſidérable. Néanmoins il ſera néceſſaire, que cette largeur ſoit très petite à l'égard de ſa diſtance à l'axe de rotation, puisque d'ailleurs le mouvement de rotation des particules d'eau, qui ſe trouvent dans la même ſection du tuyau, ſeroit trop inégal, pour qu'il pût être regardé comme le même par toute la ſection.

DEFINITION IV.

XXIX. *Le mouvement de l'eau dans le tuyau eſt le mouvement reſpectif de l'eau, par lequel elle avance d'un endroit du tuyau à un autre.*

De là on comprend auſſi, ce que c'eſt que la viteſſe reſpective de l'eau dans le tuyau, & celle dont l'eau ſort du tuyau, qu'il faut bien diſtinguer de la viteſſe vraye de l'eau lorsque le tuyau a lui-même quelque mouvement.

COROLL. 1.

XXX. Si le tuyau eſt en repos, le vray mouvement de l'eau n'eſt pas différent de ſon mouvement reſpectif à l'égard du tuyau; dans ce cas donc il ſeroit ſuperflu de diſtinguer ces deux mouvemens, & la viteſſe reſpective dont l'eau échape du tuyau, convient avec ſa viteſſe vraye.

COROLL. 2.

XXXI. Or, lorsque le tuyau a un mouvement quelconque, la viteſſe vraye de l'eau eſt différente de ſa viteſſe reſpective à l'égard du tuyau. On ſait par les principes de la Mécanique, que le mouvement vray de l'eau eſt composé de ſon mouvement reſpectif & du mouvement du tuyau même; & de là on pourra toujours trouver le mouvement vray de l'eau en ſachant ſon mouvement reſpectif avec le mouvement du tuyau.

COROLL. 3.

XXXII. Puisque nous ſuppoſons, que dans la même ſection du tuyau toutes les particules de l'eau ſe meuvent également, ſi l'on connoit la viteſſe reſpective de l'eau dans une ſection quelconque du tuyau, on en connoitra la viteſſe reſpective pour toutes les autres ſections au même inſtant, ces viteſſes étant entr'elles réciproquement comme les amplitudes du tuyau.

COROLL. 4.

XXXIII. On commencera donc par chercher la viteſſe reſpective de l'eau pour une ſection donnée du tuyau, & de là on tirera aiſément la viteſſe reſpective dans toutes les autres ſections, la figure du tuyau étant connüe. Or ayant trouvé la viteſſe reſpective de l'eau, pour une ſection quelconque du tuyau, quand on ſait le mouvement du tuyau à cet endroit, on pourra déterminer le vray mouvement, dont l'eau dans cette ſection eſt portée.

SCHOLIE.

XXXIV. Cela remarqué, ſi nous ſuppoſons, pour un inſtant quelconque, comme connûs le mouvement du tuyau, & le mouvement reſpectif de l'eau dans le tuyau, pour une ſection quelconque, nous en pourrons déterminer, tant le mouvement reſpectif à toutes les autres ſections, que le mouvement vray. Or, pour juger des forces requiſes au mouvement de l'eau, & quel effet chaque force eſt capable d'y produire, il faut avoir égard au vray mouvement de l'eau, puisque les principes de la Mécanique, dont on doit ſe ſervir, ſont établis ſur le vray mouvement. Il eſt donc abſolument néceſſaire de commencer par la détermination du vray mouvement de l'eau; ſon mouvement reſpectif avec le mouvement du tuyau étant connu. Ce ſera le ſujet du premier problème, dont je m'en vais chercher la ſolution.

PROBLEME I.

XXXV. *Suppoſé que le tuyau tourne d'une viteſſe donnée autour d'un axe fixe, & que la viteſſe reſpective de l'eau dans une ſection du tuyau ſoit donnée, trouver tant le mouvement reſpectif que le vray de l'eau dans une autre ſection quelconque du tuyau.* Fig. 1.

SOLUTION.

Que la ligne A C repréſente l'axe, autour duquel le tuyau EMF tourne, & que cet axe ſoit perpendiculaire au plan de la planche en C, & que la ſection du tuyau F ſe trouve dans ce plan. Soit l'amplitude de cette ſection $F = ff$, par laquelle l'eau découle avec la viteſſe $= Vv$, ou duë à la hauteur v, & ce ſoit la viteſſe reſpective de l'eau, dont elle ſort ou ſe meut à cet endroit du tuyau; qui eſt ſuppoſée être donnée. Soit de plus Vu la viteſſe dont le point F du tuyau tourne autour de l'axe A C, & par ce mouvement le point F décrira la péripherie d'un cercle dans le plan repréſenté par celui de la planche, dont le centre ſera le point C, & la droite C F le rayon. Soit donc la diſtance du point F à l'axe de rotation, ou la droite $CF = b$.

Cela

Cela posé, considérons une section quelconque du tuyau M, & qu'on baisse du point M au plan de la planche la perpendiculaire MQ, & du point Q sur ce plan à la droite CF la normale PQ; de sorte que le lieu du point M soit déterminé par les trois coordonnées CP, PQ, & QM normales entr'elles, qui soient nommées $CP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$. Soit de plus l'amplitude du tuyau en $M = rr$, dont la quantité sera donnée par les coordonnées x, y, & z, de même qu'on connoitra le rapport entre x, y, & z, puisque tant la figure que l'amplitude du tuyau est supposée être connuë. La vitesse respective de l'eau dans la section du tuyau en M sera donc $= \frac{ff\sqrt{v}}{rr}$, & sa direction suivant celle du tuyau Mm. De plus, posant pour abréger $CQ = \sqrt{(xx + yy)} = q$, cette ligne marquera la distance du point M à l'axe AC à cause de $MN = CQ$, donc la vitesse rotatoire du point M sera $= \frac{q\sqrt{u}}{b}$, étant à celle du point F, comme $MN = q$ à $CF = b$, & tirant Qq perpendiculaire à CQ dans le plan de la planche, la direction de cette vitesse sera parallele à Qq.

Maintenant, puisque le mouvement vray de l'eau en M est composé de son mouvement respectif & du mouvement du point M, si nous posons l'angle, que fait la direction du tuyau en M, ou l'élément Mm, avec la direction du mouvement du point $M, = \theta$, la vitesse vraye de l'eau en M sera $= \sqrt{\left(\frac{f^4 v}{r^4} + \frac{qqu}{bb} + \frac{2ffq\sqrt{vu}}{brr}\cos\theta\right)}$, comme on s'en assurera aisément par les régles de la composition du mouvement.

Or, pour connoitre la direction de ce mouvement, il conviendra de le décomposer suivant les directions des coordonnées CP, PQ, & QM; pour cet effet nommant l'élément du tuyau $Mm = ds$, le mouvement respectif de l'eau en M se réduira à ces trois vitesses:

I. Vi-

$$\text{I. Viteſſe ſelon CP} = \frac{ffdx\sqrt{v}}{rrds};$$

$$\text{II. Viteſſe ſelon PQ} = \frac{ffdy\sqrt{v}}{rrds};$$

$$\text{III. Viteſſe ſelon QM} = \frac{ffdz\sqrt{v}}{rrds};$$

& on aura $\quad ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$

Mais les deux premières viteſſes ſe reduiſent à deux autres ſuivant les directions CQ, & Qq, & on aura

$$\text{la viteſſe ſelon CQ} = \frac{ffxdx\sqrt{v}}{qrrds} + \frac{ffydy\sqrt{v}}{qrrds} = \frac{ffdq\sqrt{v}}{rrds},$$

$$\text{la viteſſe ſelon } Cq = \frac{ffxdy\sqrt{v}}{qrrds} - \frac{ffydx\sqrt{v}}{qrrds} = \frac{ff(xdy-ydx)\sqrt{v}}{qrrds}.$$

On n'aura donc qu'à ajouter à cette derniere viteſſe celle du tuyau en M, qui eſt ſuivant la direction $Qq = \frac{q\sqrt{u}}{b}$, pour avoir le vray mouvement de l'eau en M.

Ainſi le vray mouvement de l'eau en M ſera compoſé de ces trois viteſſes :

$$\text{I. ſuivant CQ} = \frac{ffdq\sqrt{v}}{rrds};$$

$$\text{II. ſuivant } Qq = \frac{ff(xdy-ydx)\sqrt{v}}{qrrds} + \frac{q\sqrt{u}}{b};$$

$$\text{III. ſuivant QM} = \frac{ffdz\sqrt{v}}{rrds}.$$

De là on tirera encore la viteſſe totale de ce mouvement, qui à cauſe de $q = \sqrt{(xx + yy)}$, & $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$

 ſera

fera $= \sqrt{\left(\frac{f^4 v}{r^4} + \frac{qqu}{bb} + \frac{2ff(xdy - ydx)\sqrt{vu}}{brrds}\right)}$, qui étant la même avec $\sqrt{\left(\frac{f^4 v}{r^4} + \frac{qqu}{bb} + \frac{2ffq\sqrt{vu}}{brr} \operatorname{cos}\theta\right)}$, on voit que $\frac{xdy - ydx}{qds} = \operatorname{cos}\theta$.

Par conséquent le vray mouvement de l'eau en M est composé de ces trois vitesses :

I. suivant $CQ = \frac{ffdq\sqrt{v}}{rrds}$;

II. suivant $Qq = \frac{ff\sqrt{v}}{rr} \operatorname{cos}\theta + \frac{q\sqrt{u}}{b}$;

III. suivant $QM = \frac{ffdz\sqrt{v}}{rrds}$.

C. Q. F. T.

COROLL. I.

XXXVI. C'est donc le vray mouvement de l'eau, qui occupe la section du tuyau M à l'instant, où nous supposons, que la vitesse respective de l'eau par la section $F = ff$ est $= \sqrt{v}$, & que la vitesse, dont le point F du tuyau tourne autour de l'axe AC, est $= \sqrt{u}$. Et par ces formules on déterminera le vray mouvement de l'eau, dans chaque section du tuyau.

COROLL. 2.

XXXVII. Puisque les trois directions CQ, Qq, & QM, sont perpendiculaires entr'elles, les vitesses selon chacune auroient pû être trouvées immédiatement du mouvement respectif de l'eau en M, & du mouvement du point du tuyau M même, sans qu'on auroit eu besoin de la composition suivant les ordonnées CP, & CQ. Car la vitesse respective selon Mm est à chacune des vitesses décomposées, comme le sinus total au cosinus de l'angle, dont l'élément Mm est incliné à chacune de ces trois directions.

COROLL. 3.

XXXVIII. Puisque l'élément Mm fait avec la direction QM un angle dont le cosinus est $\frac{dz}{ds}$, le mouvement respectif selon Mm, dont la vitesse $= \frac{ff\sqrt{v}}{rr}$ donne pour la direction QM la vitesse $= \frac{ffdz\sqrt{v}}{rrds}$. Ensuite l'élément Mm faisant avec la direction $CQ = q$ un angle dont le cosinus est $= \frac{dq}{ds}$, la vitesse selon cette direction sera $= \frac{ffdq\sqrt{v}}{rrds}$. Enfin l'angle de l'élément Mm avec la direction Qq étant nommé $= \theta$, la vitesse selon cette direction sera $= \frac{ff\sqrt{v}}{rr} \cos\theta$, à laquelle il faut ajouter la vitesse du point du tuyau $M = \frac{q\sqrt{u}}{b}$, pour avoir le vray mouvement de l'eau dans la section M du tuyau.

COROLL. 4.

XXXIX. L'angle θ, que je viens d'introduire dans le calcul, est très propre à rendre nos formules plus simples; & comme il renferme des différentiels, il nous épargnera dans la suite les différentiels du second degré. Au reste il est aisé de trouver l'égalité $\cos\theta = \frac{xdy - ydx}{qds}$ par une pure considération geométrique; mais pour ne pas trop charger la figure, je me suis contenté de l'avoir dérivée de la considération mécanique; sur tout puisqu'il est permis dans ces recherches de supposer les propriétés de Géometrie comme connües.

COROLL. 5.

XL. Il sera aussi à propos d'introduire dans le calcul l'angle FCQ. Or posant cet angle $FCQ = \omega$, nous aurons

$\sin\omega = \frac{y}{q}$, $\cos\omega = \frac{x}{q}$, & $\tang\omega = \frac{y}{x}$; d'où nous tirerons $d\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx + yy} = \frac{x\,dy - y\,dx}{qq}$, & de là nous obtiendrons $\cos\theta = \frac{q\,d\omega}{ds}$. Or il est clair que $q\,d\omega$ exprime le différentiel Qq, qui étant divisé par $Mm = ds$ donne ouvertement le cosinus de l'angle, que font entr'eux les élémens Mm & Qq. Voilà donc une démonstration géométrique de la formule $\cos\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{q\,ds}$.

COROLL. 6.

XLI. Puisque pour la section F il devient $rr = ff$, & $q = b$, si nous posons l'angle que fait la direction du mouvement respectif de l'eau, qui sort par F, avec la direction du mouvement du point $F = \zeta$, de sorte que ζ soit la valeur de θ pour la section F, la vraye vitesse de l'eau dans la section F sera $= \sqrt{(v + u + 2\cos\zeta.\sqrt{vu})}$. Ainsi si l'angle ζ évanouït, cette vitesse sera $= \sqrt{v} + \sqrt{u}$ à cause de $\cos\zeta = 1$: or si l'angle ζ est égal à deux angles droits à cause de $\cos\zeta = -1$, cette vitesse sera $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$.

SCHOLIE.

XLII. Il est évident, que dans la solution de ce problème l'amplitude du tuyau a été regardée comme infiniment petite à l'égard de la distance de chaque point du tuyau à l'axe de rotation AC. D'où l'on voit que la détermination du mouvement, que nous venons de trouver, ne sauroit avoir lieu dans la Pratique, à moins que cette condition ne soit observée, du moins à peu près. Par cette raison le tuyau doit partout être fort mince, & ensuite il doit partout être si éloigné de l'axe de rotation AC, que la raison de r à q, ou bien de rr à qq, soit très petite. Cependant on verra par la suite, que cette condition n'affecte pas sensiblement les conclusions que nous trouverons. Or ayant déterminé le vray mouvement de chaque particule d'eau pour l'in-l'instant présent, il sera aisé de le déterminer aussi pour l'instant suivant, & la comparaison de ces deux mouvemens nous donnera à connoitre l'accélération, ou la retardation de chaque particule, d'où nous pourrons ensuite conclure les forces requises à la production du changement, s'il y en a un dans le mouvement; cette recherche sera le sujet du problème suivant.

PROBLEME II.

XLIII. *Tant le mouvement respectif de l'eau dans le tuyau, que le mouvement du tuyau même, étant altéré d'une maniere quelconque, trouver le changement que souffrira chaque particule d'eau dans son mouvement, & les forces requises à produire ce changement.*

SOLUTION.

Qu'après un tems écoulé quelconque $= t$, le tuyau ait achevé par son mouvement de rotation l'angle $BCF = \Phi$, de sorte qu'au commencement de ce tems le bout du tuyau F ait été en B, qui se trouve à l'instant présent en F, & que la vitesse du point F, dont il tourne à présent autour du point C soit $= \sqrt{u}$, & la vitesse respective, dont l'eau passe par la section F, $= \sqrt{v}$; & soit de plus comme nous avons supposé dans le problème précedent, la distance $CF = b$, & l'amplitude de la section $F = ff$; c'est de là que nous avons déterminé dans le problème précedent le vray mouvement de chaque particule d'eau en M, que nous avons réduit à ces trois vitesses:

I. Suivant $CQ = \frac{ff\,dq\sqrt{v}}{rr\,ds}$;

II. Suivant $QM = \frac{ff\,dz\sqrt{v}}{rr\,ds}$;

III. Suivant $Qq = \frac{ff\sqrt{v}}{rr}\cos\theta + \frac{q\sqrt{u}}{b}$.

Mais supposons maintenant, que pendant le tems infiniment petit dt les vitesses $\sqrt{v}$ & $\sqrt{u}$ croissent de leurs différentiels, & que pendant ce même inſtant dt l'eau qui étoit en M parvienne dans le tuyau en m, le tuyau étant cependant lui-même transporté par ſon mouvement de rotation. Cela poſé, il eſt clair que nous n'aurons qu'à différentier les formules trouvées pour avoir les accélérations. Mais puiſque les directions CQ & Qq ne ſont pas fixes, il convient de les réduire à des directions fixes.

Pour cet effet, qu'on tire du point Q à la droite fixe la perpendiculaire QX, & ſoient pour le point M les trois coordonnées $CX = X$, $XQ = Y$, & comme auparavant $QM = z$. Maintenant poſant la maſſe d'eau en $M = m$, nous aurons trois forces requiſes à ſon mouvement :

I. une force ſuivant $CX = \frac{2\,m\,ddX}{dt^2}$;

II. une force ſuivant $XQ = \frac{2\,m\,ddY}{dt^2}$;

III. une force ſuivant $QM = \frac{2\,m\,ddz}{dt^2}$;

poſant l'élément du tems dt conſtant : & les viteſſes ſuivant ces directions ſeront $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, & $\frac{dz}{dt}$.

Or, puiſque l'angle $BCF = \phi$, ſi nous poſons l'angle $FCQ = \omega$, à cauſe de $CQ = q$, & l'angle $BCQ = \phi + \omega$, nous aurons

$$X = q\,\text{coſ}(\phi + \omega), \quad \& \quad Y = q\,\text{ſin}\,(\phi + \omega).$$

Mais les deux forces ſuivant CX, & XQ, ſe réduiſent à deux autres ſelon :

$$CQ = \frac{2\,m\,ddX}{dt^2}\,\text{cſ}(\phi+\omega) + \frac{2\,m\,ddY}{dt^2}\,\text{ſn}(\phi+\omega) = \frac{2\,m}{dt^2}\left[ddX\,\text{cſ}(\phi+\omega) + ddY\,\text{ſn}(\phi+\omega)\right]$$

&

$$Qq = \frac{2\,m\,ddY}{dt^2}\,\text{cſ}(\phi+\omega) - \frac{2\,m\,ddX}{dt^2}\,\text{ſn}(\phi+\omega) = \frac{2\,m}{dt^2}\left[ddY\,\text{cſ}(\phi+\omega) - ddX\,\text{ſn}(\phi+\omega)\right]$$

Or

Or les valeurs de X & Y fourniſſent :

$$X\cos(\phi+\omega)+Y\sin(\phi+\omega)=q,\ \&\ Y\cos(\phi+\omega)-X\sin(\phi+\omega)=0,$$

d'où nous tirons en différentiant :

$$dX\cos(\phi+\omega)+dY\sin(\phi+\omega)=dq,\ \&\ dY\cos(\phi+\omega)-dX\sin(\phi+\omega)=q(d\phi+d\omega),$$

& en différentiant encore :

$$ddX\cos(\phi+\omega)+ddY\sin(\phi+\omega)=ddq-q(d\phi+d\omega)^2,$$

$$ddY\cos(\phi+\omega)-ddX\sin(\phi+\omega)=2dq(d\phi+d\omega)+q(dd\phi+dd\omega).$$

De là donc les trois forces requiſes pour le mouvement de la particule m ſeront :

I. Selon $CQ=\frac{2m}{dt^2}\left[ddq-q(d\phi+d\omega)^2\right]$;

II. Selon $Qq=\frac{2m}{dt^2}\left[2dq(d\phi+d\omega)+q(dd\phi+dd\omega)\right]$;

III. Selon $QM=\frac{2m\,ddz}{dt^2}$;

& ces directions conviennent avec celles des viteſſes, que nous avons aſſignées cy-deſſus. Maintenant pour le mouvement rotatoire du tuyau, l'arc BF étant $=b\phi$, & la viteſſe en F $=\sqrt{u}$, nous aurons $\frac{bd\phi}{\sqrt{u}}=dt$: enſuite la viteſſe reſpective de l'eau en M étant $=\frac{ff\sqrt{v}}{rr}$, & l'élément $Mm=ds$, nous aurons auſſi $\frac{rrds}{ff\sqrt{u}}=dt$, & partant $\frac{d\phi}{dt}=\frac{\sqrt{u}}{b}$; $\frac{ds}{dt}=\frac{ff\sqrt{v}}{rr}$, & puiſque $d\omega=\frac{ds\cos\theta}{q}$, encore $\frac{d\omega}{dt}=\frac{ff\cos\theta}{qrr}\sqrt{v}$. Par conſéquent $\frac{dd\phi}{dt}=\frac{du}{2b\sqrt{u}}$; & $\frac{dd\omega}{dt}=\frac{ff\,dv\cos\theta}{2qrr\sqrt{v}}+ff\sqrt{v}.d.\frac{\cos\theta}{qrr}$.

Ces

Ces valeurs étant ſubſtituées, les trois forces requiſes ſeront :

I. Selon CQ $= 2m\left(\frac{1}{dt}d.\frac{dq}{dt} - q\,[\frac{Vu}{b} + \frac{ff\operatorname{coſ}\theta}{qrr}Vv]^2\right)$

II. Selon Qq $= 2m\left(\frac{2dq}{dt}[\frac{Vu}{b} + \frac{ff\operatorname{coſ}\theta}{qrr}Vv] + \frac{q\,du}{2\,b\,dt\,Vu} + \frac{ff\,dv\operatorname{coſ}\theta}{2\,rr\,dt\,Vv} + \frac{ffqVv}{dt}d.\frac{\operatorname{coſ}\theta}{qrr}\right)$

III. Selon QM $= \frac{2m}{dt}d.\frac{dz}{dt}$.

où il ne s'agit plus, quel différentiel a été ſuppoſé conſtant. C. Q. F. T.

COROLL. I.

XLIV. Nous avons ici deux ſortes de quantités variables à diſtinguer ; les unes dépendent de la figure du tuyau, & de l'endroit où le point M eſt pris, ces quantités ſont q, rr, & l'angle θ, & leurs différentiels auront un rapport connu tant entr'eux qu'avec le différentiel ds. Les autres quantités dépendent uniquement du tems déjà écoulé t, & ſont, les viteſſes Vv & Vu, qu'on doit regarder comme des fonctions de t, & partant $\frac{dv}{dt}$ & $\frac{du}{dt}$ ſeront des quantités déterminées, & auſſi fonctions du tems t.

COROLL. 2.

XLV. Quoique le mouvement élémentaire nous découvre le rapport entre les différentiels ds & dt, par lequel nous avons $dt = \frac{rr\,ds}{ff\,Vv}$, il eſt pourtant néceſſaire pour la ſuite de ne comparer ces divers différentiels qu'avec ceux du même genre. Ainſi les rapports $\frac{dq}{dt}$ & $\frac{dz}{dt}$ n'ayant point cette forme, j'y ſubſtitue au lieu de dt ſa valeur $\frac{rr\,ds}{ff\,Vv}$ pour avoir $\frac{dq}{dt} = \frac{ff\,dq\,Vv}{rr\,ds}$ & $\frac{dz}{dt} = \frac{ff\,dz\,Vv}{rr\,ds}$, où les rapports $\frac{dq}{ds}$ & $\frac{dz}{ds}$ ſont déterminés par la forme du tuyau ſeulement.

CO-

COROLL. 3.

XLVI. Repréſentons donc dans chaque terme ces diverſes quantités diſtinctement, & nous aurons :

$$\frac{dq}{dt} = ff\sqrt{v}.\frac{dq}{rrds}, \quad \& \quad \frac{dz}{dt} = ff\sqrt{v}.\frac{dz}{rrds},$$

dont les différentiels exprimés de la même maniere ſeront :

$$d.\frac{dq}{dt} = \frac{ffdv}{2\sqrt{v}}.\frac{dq}{rrds} + ff\sqrt{v}.d.\frac{dq}{rrds};$$

$$d.\frac{dz}{dt} = \frac{ffdv}{2\sqrt{v}}.\frac{dz}{rrds} + ff\sqrt{v}.d.\frac{dz}{rrds};$$

& puisque les différentiels $d.\frac{dq}{rrds}$, $d.\frac{dz}{rrds}$ de même que $d.\frac{\cos\theta}{qrr}$, ne ſont pas commenſurables à dt, il y faut mettre pour dt ſa valeur $\frac{rrds}{ff\sqrt{v}}$ pour avoir :

$$\frac{1}{dt}d.\frac{dq}{dt} = \frac{ffdv}{2dt\sqrt{v}}.\frac{dq}{rrds} + \frac{f^4v}{rrds}.d.\frac{dq}{rrds};$$

$$\frac{1}{dt}d.\frac{dz}{dt} = \frac{ffdv}{2dt\sqrt{v}}.\frac{dz}{rrds} + \frac{f^4v}{rrds}.d.\frac{dz}{rrds};$$

$$\frac{ff\sqrt{v}}{dt}d.\frac{\cos\theta}{qrr} = \frac{f^4v}{rrds}.d.\frac{\cos\theta}{qrr}.$$

COROLL. 4.

XLVII. Si nous exprimons enſorte les trois forces requiſes trouvées, nous les obtiendrons repréſentées de la maniere ſuivante:

I. Force selon CQ $= 2m\left(\frac{dv}{2dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ff\,dq}{rrds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds}\, d \cdot \frac{dq}{rrds} - u \cdot \frac{q}{bb} - v \cdot \frac{f^4 \cos\theta^2}{qr^4} - 2\sqrt{vu} \cdot \frac{ff \cos\theta}{rr}\right)$

II. Force selon Qq $= 2m\left(\frac{du}{2dt\sqrt{u}} \cdot \frac{q}{b} + \frac{dv}{2dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ff \cos\theta}{rr} + v \cdot \frac{2f^4\, dq \cos\theta}{qr^4\, ds} + v \cdot \frac{f^4\, q}{rrds}\, d \cdot \frac{\cos\theta}{qrr} + 2\sqrt{vu} \cdot \frac{ff\, dq}{brrds}\right)$

III. Force selon QM $= 2m\left(\frac{dv}{2dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ff\,dz}{rrds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds}\, d \cdot \frac{dz}{rrds}\right)$

où chaque terme eſt réſolu en deux facteurs, dont le premier dépend uniquement du tems t, & l'autre uniquement de la forme du tuyau.

COROLL. 5.

XLVIII. Puisque $d \cdot \frac{\cos\theta}{qrr} = -\frac{dq \cos\theta}{qqrr} + \frac{1}{q}\, d \cdot \frac{\cos\theta}{rr}$, la ſeconde force ſelon la direction Qq ſera exprimée par cette formule:

II. Force selon Qq $= 2m\left(\frac{du}{2dt\sqrt{u}} \cdot \frac{q}{b} + \frac{dv}{2dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ff \cos\theta}{rr} + v \cdot \frac{f^4\, dq \cos\theta}{qr^4\, ds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds}\, d \cdot \frac{\cos\theta}{rr} + 2\sqrt{vu} \cdot \frac{ff\, dq}{brrds}\right)$

Or on voit que cette ſeule force fournit un moment à l'égard de l'axe de rotation AC.

PROBLEME III.

XLIX. *Trouver le moment total, que produiſent toutes les forces requiſes pour altérer le mouvement de rotation du tuyau.*

SOLUTION.

Suppoſant toutes les dénominations, dont nous nous ſommes ſervis dans le problème précédent, nous avons trouvé les trois forces requiſes, que le mouvement de chaque particule d'eau exige, ſelon les trois directions CQ, Qq, & QM; or il eſt évident que les deux forces ſelon CQ & QM ne contribuent rien à altérer le mouvement de rotation du tuyau, puiſque leurs directions, ou paſſent par l'axe de rota-

rotation, ou lui sont paralleles. Il ne reste donc qu'à considérer la force selon Qq; qui étant multipliée par la longueur du levier $CQ = q$ produit un moment à accélérer le mouvement de rotation, qui est supposé se faire dans le sens BF. Donc une particule d'eau quelconque, qui se trouve dans la section M du tuyau, dont la masse est supposée $= m$, fournit le moment suivant :

$$2m\left(\frac{du}{2dt\sqrt{u}}.\frac{qq}{b}+\frac{dv}{2dt\sqrt{v}}.\frac{ffq\cos\theta}{rr}+v.\frac{f^4 dq\cos\theta}{r^4 ds}+v.\frac{f^4 q}{rrds}d.\frac{\cos\theta}{rr}+2\sqrt{vu}.\frac{ffqdq}{brrds}\right).$$

Il s'agit donc de chercher la somme de tous ces momens, qui répond à toute la masse d'eau contenuë dans le tuyau. Pour cet effet prenons m pour désigner la quantité élémentaire de l'eau, qui occupe l'espace du tuyau Mm. Cet espace étant un cylindre de la base $= rr$, & de la longueur $Mm = ds$, la masse de l'eau, qui y est contenuë, est $= rrds$, & partant posant $m = rrds$, le moment accélérateur, qui répond à cet élément d'eau, sera :

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}}.\frac{qqrrds}{b}+\frac{dv}{dt\sqrt{v}}.ffqds\cos\theta+2v.\frac{f^4 dq\cos\theta}{rr}+2v.f^4 qd.\frac{\cos\theta}{rr}+4\sqrt{vu}.\frac{ffqdq}{b}.$$

Puisqu'il faut chercher la somme de tous ces momens pour l'instant present, l'intégration doit être instituée en sorte, qu'on regarde toutes les quantités, qui dépendent du tems t, comme constantes: telles sont v, u, $\frac{du}{dt\sqrt{u}}$, & $\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$, que nous avons soigneusement séparées des autres quantités, qui sont variables avec le point M, & qui dépendent de la figure du tuyau. L'intégrale de cette formule sera donc

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}}\int\frac{qqrrds}{b}+\frac{dv}{dt\sqrt{v}}\int ffqds\cos\theta+2v.\int\frac{f^4 dq\cos\theta}{rr}+2v\int f^4 qd.\frac{\cos\theta}{rr}+2\sqrt{vu}.\frac{ffqq}{b}+\text{Const.}$$

Or il est évident que $\int f^4 qd.\frac{\cos\theta}{rr}=\frac{f^4 q\cos\theta}{rr}-\int\frac{f^4 dq\cos\theta}{rr}$; cette ce valeur étant donc ſubſtituée, l'integrale ſe réduira à cette forme :

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}}\int\frac{qqrrds}{b}+\frac{dv}{dt\sqrt{v}}\int ffqds\cos\theta+2v.\frac{f^4 q\cos\theta}{rr}+2\sqrt{vu}.\frac{ffqq}{b}+\text{Conſt.}$$

Pour accommoder cette intégrale à toute la quantité d'eau contenue dans le tuyau, ſoit à l'inſtant préſent le tuyau rempli jusqu'en E ; que la largeur du tuyau en E ſoit $= ee$, la diſtance du point E à l'axe ou EA $= c$; & que la direction du tuyau en E faſſe avec la direction du mouvement de rotation du point E un angle $= \epsilon$; & que les intégrales $\int\frac{qqrrds}{b}$ & $\int ffqds\cos\theta$ commencent du point E. Cela poſé, le moment, qui réſulte de la quantité d'eau contenuë dans la portion du tuyau EM, puisque au point E il devient $q = c$; $rr = ee$ & $\theta = \epsilon$, ſera

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}}\int\frac{qqrrds}{b}+\frac{dv}{dt\sqrt{v}}\int ffqds\cos\theta+2v\left(\frac{f^4 q\cos\theta}{rr}-\frac{f^4 cc\cos\epsilon}{ee}\right)+2\sqrt{vu}.\left(\frac{ffqq}{b}-\frac{ffcc}{b}\right).$$

Qu'on étende maintenant cette intégrale par toute la longueur du tuyau depuis E jusqu'en F, où devient $q = b$; $rr = ff$, & $\theta = \zeta$ poſant ζ pour l'angle que la direction du tuyau en F fait avec l'arc FB ; & ſoient pour le tuyau tout entier les valeurs intégrales :

$$\int\frac{qqrrds}{b} = \text{M} \quad \& \quad \int ffqds\cos\theta = \text{N}$$

Cela poſé, le moment total de toutes les forces requiſes, qui tend à accélérer le mouvement rotatoire du tuyau, ſera :

$$\frac{\text{M}\,du}{dt\sqrt{u}}+\frac{\text{N}\,dv}{dt\sqrt{v}}+2ff(b\cos\zeta-\frac{cff}{ee}\cos\epsilon)v+\frac{2ff}{b}(bb-cc)\sqrt{vu}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

L. Si tant le mouvement rotatoire du tuyau, que le mouvement reſpectif de l'eau, dont elle ſort par l'ouverture F eſt uniforme, de ſorte que $\frac{du}{dt\sqrt{u}} = 0$ & $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} = 0$, le moment des forces requiſes deviendra :

2ff

$$2\,ff\,(b\cos\zeta - \frac{cff}{ee}\cos\epsilon)\,v + 2\,ff\,(b - \frac{cc}{b})\,\sqrt{v\,u}$$

Ce moment dépend donc premièrement des deux viteſſes $\sqrt{v}$ & $\sqrt{u}$, en ſorte que plus ces viteſſes ſeront grandes, plus auſſi deviendra grand le moment.

COROLL. 2.

LI. Enſuite, par rapport à la figure du tuyau, ce même moment dépend premièrement des quantités b, ff, & ζ, qui ſe rapportent à l'ouverture F, & enſuite des quantités c, ee, & ϵ, qui ſe rapportent à l'autre ſection E du tuyau, où l'eau eſt déterminée, de ſorte que la figure intermédiaire du tuyau entre les extremités E & F ne vient en aucune conſidération, dans le cas, où les deux viteſſes $\sqrt{v}$, & $\sqrt{u}$, ſont conſtantes.

COROLL. 3.

LII. De là on peut conclure dans ce cas, que quelle que ſoit la figure & l'amplitude du tuyau entre les extremités E & F, le moment des forces requiſes ſera toujours le même, & cela quand même l'amplitude du tuyau entre ces termes ne feroit pas quaſi infiniment petite, par rapport à la diſtance de l'axe de rotation, d'où l'on voit, que cette condition, quoiqu'elle ait paru dabord néceſſaire dans le calcul, n'affecte point la concluſion, que nous venons d'en tirer.

COROLL. 4.

LIII. Or, lorsque la viteſſe rotatoire du tuyau $\sqrt{u}$, ou la viteſſe reſpective de l'eau en F, $\sqrt{u}$, ou toutes les deux ne ſont pas uniformes, alors le moment des forces requiſes dépend outre cela de toute la figure du tuyau depuis E jusqu'en F, & de l'amplitude, qu'il a à chaque ſection. Car les quantités M & N renferment la figure tout entière du tuyau.

COROLL. 5.

LIV. Il eſt auſſi à remarquer que l'intégrale $\int qrrds = bM$ exprime le moment d'inertie de toute la maſſe d'eau par rapport à l'axe AC, puisque $rrds$ eſt l'élément de la maſſe d'eau en Mm, & qq le quarré de ſa diſtance à l'axe AC. Enſuite poſant l'angle FCQ $= \omega$, pour avoir $Qq = q\,d\omega$, puisque $ds \cos\theta = Qq$, l'autre intégrale sera $N = \int ffqq\,d\omega$, ou bien $\frac{N}{ff} = \int qq\,d\omega$. Or $\frac{1}{2}\int qq\,d\omega$ exprime l'aire formée par la projection du tuyau sur le plan de la planche.

COROLL. 6.

Fig. 2. LV. Soit donc FQB la projection de la figure du tuyau sur le plan de la planche, qu'on suppose perpendiculaire à l'axe de rotation, ou D soit la projection du point E, & posant l'aire $FCD = A$, on aura $N = 2\,Aff$. De plus posant le moment d'inertie de toute la masse d'eau $= J$, on aura $M = \frac{J}{b}$, d'où l'on comprend plus évidement comment les quantités intégrales M & N dépendent de la figure & largeur du tuyau.

SCHOLIE.

LVI. Il semble d'abord paradoxe, que dans le cas de l'uniformité des deux mouvemens, le moment des forces requises ne dépende point du tout de la figure & largeur intermédiaire; car on comprend aisément, que si le tuyau étoit en quelque endroit trop étroit, cela troubleroit considérablement le mouvement de l'eau. Mais dans un tel cas, il faut remarquer, ou que la vitesse uniforme de l'eau, Vv, deviendroit différente, ou que le mouvement ne sauroit jamais parvenir à l'uniformité. Cependant il faut remarquer, que si le tuyau étoit trop étroit, nos conclusions pourroient différer très considérablement de la vérité, mais cela par une raison tout différente. Car dans ces cas le frottement de l'eau par des tuyaux si étroits deviendroit trop grand, & arrêteroit le mouvement; & par cette raison il sera nécessaire de donner au tuyau entre les extrémités E & F partout une largeur assés considérable pour empêcher l'effet du frottement, & de là on tirera encore cet avantage, que le mouvement de l'eau arrivera d'autant plus promtement à l'uniformité.

PRO-

PROBLEME IV.

LVII. *L'axe autour duquel le tuyau tourne étant vertical, & le mouvement tant du tuyau que de l'eau quelconque, trouver la force de réaction de l'eau pour altérer le mouvement de rotation.* Fig. 1.

SOLUTION.

Ayant déjà déterminé les forces requiſes, & le moment qui en réſulte, puisque la réaction dépend tant des forces requiſes, que des forces actuelles, nous devons conſidérer, quelles ſont les forces actuelles dans le cas propoſé. Or puisqu'il n'y a point de piſtons, dont l'eau ſoit pouſſée, les forces actuelles ne renferment que la peſanteur de l'eau, dont la direction étant verticale, & partant parallele à l'axe de rotation AC, il n'en réſultera aucun moment pour altérer le mouvement de rotation du tuyau, ou bien le moment des forces actuelles ſera $= 0$. Or la réaction étant égale aux forces actuelles moins les forces requiſes, le moment de la réaction ſe trouvera, quand on retranche le moment des forces requiſes du moment des forces actuelles $= 0$, ou le moment de la réaction ſera égal & contraire au moment des forces requiſes, que nous venons de déterminer dans le problème précédent. Donc, conſervant toutes les dénominations expliquées dans le problème précédent, le moment de la réaction, qui tend à accélérer le mouvement de rotation dans le ſens BF, ſera,

$$-\frac{M\,du}{dt\sqrt{u}}-\frac{N\,dv}{dt\sqrt{v}}+2ff\left(\frac{cff}{ee}\operatorname{cof}\epsilon-b\operatorname{cof}\zeta\right)v+2ff\left(\frac{cc}{b}-b\right)\sqrt{vu}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

LVIII. Si donc, tant le mouvement du tuyau que celui de l'eau par la ſection F eſt uniforme, le moment de la réaction pour accélérer le mouvement du tuyau ſera :

$$2ff\left(\frac{cff}{ee}\operatorname{cof}\epsilon-b\operatorname{cof}\zeta\right)v+2ff\left(\frac{cc}{b}-b\right)\sqrt{vu}$$

qui ne dépend donc point de la figure du tuyau entre les extremités E & F.

COROLL. 2.

LIX. Mais, lorsque le mouvement du tuyau eſt varié, l'accélération diminue le moment de la réaction, or la retardation l'augmente de la quantité $\frac{M\,du}{dt\sqrt{u}}$; puisque la quantité M eſt toujours poſitive. Mais la quantité N pouvant être tant affirmative que negative, l'accélération du mouvement de l'eau peut tantôt augmenter tantôt diminuer le moment de la réaction.

COROLL. 3.

Fig. 2. LX. Donc, pour que l'accélération du mouvement de l'eau contribue quelque choſe à augmenter le moment de la réaction, il faut que l'aire de la projection du tuyau F C D devienne négative, ou que la courbe F Q D tombe de l'autre côté du rayon CF: & plus cette aire ſera grande, plus auſſi ſera augmenté le moment de la réaction par l'accélération de l'eau dans le tuyau.

COROLL. 4.

Fig. 1. LXI. Par rapport à la direction du tuyau en F, le moment de la réaction ſera le plus grand, lorſque l'angle ζ eſt égal à deux droits, c'eſt à dire, lorſque la direction du mouvement reſpectif de l'eau en F eſt oppoſée à la direction du mouvement du tuyau, ou lorſque le bout du tuyau en F eſt dirigé ſelon la direction F B. Dans ce cas, à cauſe de $\cos\zeta = -1$, le moment de la réaction ſera:

$$-\frac{M\,du}{dt\sqrt{u}}-\frac{N\,dv}{dt\sqrt{v}}+2ff\left(\frac{cff\cos\epsilon}{ee}+b\right)v+2ff\left(\frac{cc}{b}-b\right)\sqrt{vu}$$

COROLL. 5.

LXII. Or, puiſque la plus haute ſurface de l'eau en E eſt horizontale, il faut que la direction du tuyau en E ſoit verticale, ou l'angle ϵ droit. Cette circonſtance diminue le moment de l'inertie, qui ſera:

$$-\frac{M\,du}{dt\sqrt{u}}-\frac{N\,dv}{dt\sqrt{v}}+2bffv+2ff\left(\frac{cc}{b}-b\right)\sqrt{vu}$$

CO-

COROLL. 6.

LXIII. Si le tuyau outre cela étoit en repos, ou $u = o$, le moment de la réaction seroit $= -\frac{N\,dv}{dt\sqrt{v}} + 2\,b\,ff\,v$, & dans le cas de l'uniformité du mouvement de l'eau, ce moment sera $= 2\,b\,ff\,v$: où ffv marque le volume ou le poids d'un cylindre d'eau, dont la base $= ff$ & la hauteur $= v$; or b est la longueur du levier. D'où l'on voit, que la réaction doit être estimée par le double dudit cylindre.

SCHOLIE.

LXIV. Ayant ainsi déterminé la force de la réaction, & le moment qui en résulte pour accélérer le mouvement rotatoire du tuyau, on comprendra aisément, comme il est possible de construire de telles machines, qui sont capables par cette force de vaincre quelque obstacle: & on voit comment on devroit arranger les élémens, qui entrent dans cette détermination, pour porter la réaction à la plus grande valeur, dont elle est susceptible. Mais la vitesse de l'eau $\sqrt{v}$ ne dépend pas de notre volonté; il faut la déterminer par les principes de l'Hydrodynamique, & substituer ensuite sa valeur dans la formule trouvée. Or, puisque le tuyau lui-même est supposé en mouvement, la détermination du mouvement de l'eau demande des précautions singulieres, que je tâcherai de mettre dans tout leur jour. Mais, avant que d'entreprendre cette recherche, il sera bon d'expliquer ce que c'est que l'état de pression, qu'il faut considérer dans l'eau, soit qu'elle soit en repos ou en mouvement.

DEFINITION V.

LXV. *La pression, où l'eau se trouve, est la force, dont les particules d'eau sont pressées ensemble; & par laquelle elles seroient comprimées effectivement, si l'eau étoit susceptible d'aucune compression.*

COROLL. 1.

LXVI. Dans une eau dormante la pression est en raison de la profondeur; dans la surface elle évanoüit, & à une profondeur de

 deux

deux pieds elle eſt deux fois plus grande qu'à une profondeur d'un pied ; & en général à une profondeur quelconque la preſſion eſt proportionnelle à la profondeur. Ce qui eſt clair par les premiers principes de l'Hydroſtatique.

COROLL. 2.

LXVII. A'la profondeur $= x$, ſous la ſuperficie d'une eau dormante, la preſſion eſt égale au poids d'une colonne d'eau, dont la hauteur eſt $= x$, & la baſe égale à la ſurface, qui ſoutient la preſſion. Cette ſurface étant $= hh$, la preſſion égalera le poids d'une maſſe d'eau, dont le volume eſt $= hhx$. Ainſi connoiſſant la profondeur $= x$, on connoitra auſſi la quantité de la preſſion.

COROLL. 3.

LXVIII. Or, lorſque l'eau n'eſt pas en repos, la preſſion en chaque point demande des recherches plus profondes. Cependant, quelque grande que ſoit la preſſion, on peut toujours concevoir une profondeur dans une eau dormante, où la preſſion ſeroit la même, & cette profondeur fournira la plus juſte meſure de la preſſion, qui ſubſiſtera à un point quelconque d'une eau agitée.

COROLL. 4.

LXIX. Ainſi quand je dirai, que la hauteur p exprime la preſſion de l'eau dans une ſection quelconque M du tuyau, dont il a été traité cy-deſſus, cela ſignifie que la preſſion en M eſt préciſément égale à celle qui ſe trouve à la profondeur $= p$ d'une eau dormante. Une telle hauteur donc nous ſervira de meſure de la preſſion, où une eau quelconque puiſſe ſe trouver.

SCHOLIE I.

LXX. Il eſt de la derniere importance de bien déveloper cette idée de la preſſion, puisque cette preſſion eſt la force immédiate, qui agit ſur l'eau dans le tuyau, & qui y cauſe, ou l'accélération, ou la retardation. Ainſi conſidérant l'élément d'eau, qui occupe l'eſpace du tuyau Mm, ſi nous exprimons la preſſion de l'eau dans la ſection M par la hauteur $= p$, cet élément d'eau ſera pouſſé en avant ſelon Mm

par

par une force égale au poids d'un volume d'eau $= prr$, puisque rr dénote l'amplitude de la ſection M, & l'eau eſt actuellement aſſujettie à l'action de cette force ſelon la direction Mm. Or à l'autre bout de cet élément d'eau en m, la preſſion qui y régne, agira en ſens contraire, & pouſſera l'eau en arrière ſuivant mM: ſoit donc $p + dp$ la hauteur, qui exprime la preſſion en m, & $rr + 2rdr$ la ſection en m; or, quelque différente que cette baſe m puiſſe être de celle en M, pourvû que la hauteur $p + dp$ ſoit égale à celle-là p, ces deux forces ſe détruiroient; donc l'équilibre n'eſt troublé qu'entant que la hauteur $p + dp$ eſt différente de p. On pourra donc regarder la baſe en M, & la force qui pouſſe en arrière ſelon mM égale à un poids d'eau, dont le volume $= (p + dp)rr$: & partant l'élément d'eau Mm dont la maſſe $= rrds$, eſt pouſſé en arrière ſuivant mM avec une force $= rrdp$, qui étant diviſée par la maſſe $rrds$ donne la force retardatrice $= \frac{dp}{ds}$, ou bien la force accélératrice $= -\frac{dp}{ds}$. Donc à cauſe de l'état de preſſion, où l'eau ſe trouve dans le tuyau, l'eau ſera actuellement ſollicitée ſuivant la direction du tuyau en M, où l'eau ſe trouve.

SCHOLIE 2.

LXXI. Outre cette force, l'eau eſt encore actuellement ſollicitée par ſa propre peſanteur, ſelon la direction verticale MQ, & cette force eſt égale au poids de l'élement d'eau Mm, ou à ſa maſſe $= rrds$. Cette force en donne par la décompoſition auſſi une, qui agit ſelon la direction Mm, qui ſera à celle-là comme $-dz$ à ds, & partant $= -rrdz$, d'où réſulte une force accélératrice ſelon la direction du tuyau M$m = -\frac{dz}{ds}$, & cette force avec la précédente $-\frac{dp}{ds}$, produiſent immédiatement l'accélération de l'élément d'eau Mm ſuivant la direction Mm. Il y aura bien d'autres forces, qui agiſſent auſſi ſur cet élément d'eau, comme l'autre, qui réſulte de la décompoſition de la peſanteur, & le tuyau lui même exercera quelques forces, entrainant l'eau par ſon mouvement; mais les directions de ces autres forces étant perpendiculaires à la direction Mm, ne contribueront rien à l'accélération ſuivant la direction Mm. Donc, puisque la preſſion de l'eau ne produit d'autre accélération, que ſuivant Mm, c'eſt réciproquement de l'accélération de l'eau ſuivant cette direction Mm qu'il faut chercher la preſſion de l'eau; & partant pour trouver cette preſſion, de laquelle dépend la détermination du mouvement de l'eau dans le tuyau, ou la viteſſe $\sqrt{v}$, nous devons décompoſer les forces accélératrices, dont l'eau doit être ſollicitée, en une, qui agit ſelon la direction Mm, & en deux autres, dont les directions y ſont perpendiculaires; or, puisque ces ceux dernieres ne contribuent rien à la recherche, dont il s'agit, nous pourrons nous en paſſer entièrement.

PROBLEME V.

Fig. 1. LXXII. *Des forces requiſes trouvées cy-deſſus tirer la force accélératrice, dont l'eau en* M *eſt accélérée ſuivant la direction du tuyau* Mm, *les directions des autres forces, qui réſultent outre celle-cy des forces requiſes, étant normales à la direction* Mm.

SOLUTION.

Ayant trouvé cy-deſſus les forces requiſes pour un élément d'eau dont la maſſe $= m$ dans la ſection du tuyau M, poſons pour abréger ces trois forces: la force ſelon $CQ = P$; la force ſelon $Qq = Q$; la force ſelon $QM = R$, de ſorte que nous ayons par le §. 47.

$$P = 2m\left(\frac{dv}{2dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ffdq}{rrds} - u.\frac{q}{bb} + v.\frac{f^4}{rrds}d.\frac{dq}{rrds} - v.\frac{f^4\cos\theta^2}{qr^4} - 2\sqrt{vu}.\frac{ff\cos\theta}{rr}\right)$$

$$Q = 2m\left(\frac{du}{2dt\sqrt{u}}\cdot\frac{q}{b} + \frac{dv}{2dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ff\cos\theta}{rr} + v.\frac{f^4dq\cos\theta}{qr^4ds} + v.\frac{f^4}{rrds}d.\frac{\cos\theta}{rr} + 2\sqrt{vu}.\frac{ffdq}{brrds}\right)$$

$$R = 2m\left(\frac{dv}{2dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ffdz}{rrds} + v.\frac{f^4}{rrds}d.\frac{dz}{rrds}\right).$$

Con-

Considérons d'abord la force Q, qui agit selon la direction Qq, & puisque θ marque l'angle, que fait la direction Qq avec Mm, la force qui en résulte suivant Mm sera $= Q\cos\theta$. De même maniere de la force R selon QM, puisque le cosinus de l'angle, que fait QM avec Mm est $= \frac{dz}{ds}$, il résulte de cette force une suivant Mm, qui sera $= \frac{R\,dz}{ds}$. Pour la force P selon CQ, elle donnera pareillement pour la direction Mm une force $= \frac{P\,dq}{ds}$; & les directions des autres forces, qui résultent de ces résolutions, sont perpendiculaires à la direction Mm. Donc de toutes les trois forces P, Q, R, il résulte une force suivant Mm, qui sera $= \frac{P\,dq}{ds} + Q\cos\theta + \frac{R\,dz}{ds}$; & substituant les valeurs pour P, Q, R, cette force proviendra $=$

$$2m\begin{cases}\frac{du}{2dt\sqrt{u}}\cdot\frac{q\cos\theta}{b} + \frac{dv}{2dt\sqrt{v}}\left(\frac{ff\,dq^2}{rrds^2} + \frac{ff\cos\theta^2}{rr} + \frac{ff\,dz^2}{rrds^2}\right) - u\cdot\frac{q\,dq}{bbds} \\ + v\left(\frac{f^4\,dq}{rrds^2}\,d.\frac{dq}{rrds} + \frac{f^4\cos\theta}{rrds}\,d.\frac{\cos\theta}{rr} + \frac{f^4\,dz}{rrds^2}\,d.\frac{dz}{rrds}\right).\end{cases}$$

Mais, puisque $\cos\theta = \frac{q\,d\omega}{ds}$, le facteur de $\frac{dv}{2dt\sqrt{v}}$ sera

$$\frac{ff}{rrds^2}(dq^2 + qq\,d\omega^2 + dz^2) = \frac{ff}{rr},$$

à cause de $dq^2 + qq\,d\omega^2 + dz^2 = ds^2$, comme il est évident de la figure.

De même le facteur de v, sera

$$\frac{f^4}{ds}\left(\frac{dq}{rrds}d.\frac{dq}{rrds}+\frac{qd\omega}{rrds}d.\frac{qd\omega}{rrds}+\frac{dz}{rrds}d.\frac{dz}{rrds}\right), \quad \& \text{ partant}$$

$$\frac{f^4}{2ds}\left(d\left(\frac{dq}{rrds}\right)^2+d\left(\frac{qd\omega}{rrds}\right)^2+d.\left(\frac{dz}{rrds}\right)^2\right)=\frac{f^4}{2ds}d.\frac{dq^2+qqd\omega^2+dz^2}{r^4ds^2}\Big)$$

qui par conséquent se reduit à $\frac{f^4}{2ds}d.\frac{1}{r^4}$.

Donc la force qui agit selon Mm sera

$$\frac{m\,du}{dt\sqrt{u}}\cdot\frac{q\cos\theta}{b}+\frac{m\,dv}{dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ff}{rr}-mu.\frac{2qdq}{bbds}+mv.\frac{f^4}{ds}d.\frac{1}{r^4},$$

qui étant divisée par la masse m, donne la force accélératrice suivant la direction du tuyau Mm,

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}}\cdot\frac{q\cos\theta}{b}+\frac{dv}{dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ff}{rr}-u.\frac{2qdq}{bbds}+v.\frac{f^4}{ds}d.\frac{1}{r^4},$$

où j'ai encore séparé dans chaque terme les facteurs, qui dépendent du tems, de ceux qui dépendent de la figure du tuyau. C. Q. F. D.

COROLL. 1.

LXXIII. Si le tuyau étoit en repos, l'accélération de l'eau en M selon la direction du tuyau Mm seroit $=\frac{dv}{dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ff}{rr}+v.\frac{f^2}{ds}d.\frac{1}{r^4}$; & c'est la même formule, qu'on a trouvée par les principes ordinaires pour le mouvement de l'eau dans des tuyaux immobiles. Par là on voit donc, combien cette accélération est altérée par le mouvement du tuyau.

COROLL. 2.

LXXIV. Or, si tant le mouvement du tuyau que celui de l'eau est uniforme, l'accélération de l'eau en M suivant la direction Mm sera:

$-u$.

$$-u.\frac{2qdq}{bbds}+v.\frac{f^4}{ds}d.\frac{1}{r^4}=-u.\frac{2qdq}{bbds}-v.\frac{4f^4dr}{r^5ds},$$

elle eſt donc négative lorsque l'eau s'éloigne de l'axe, & lorsque la largeur du tuyau va en croiſſant.

PROBLEME VI.

LXXV. *Le mouvement rotatoire du tuyau, & le mouvement de l'eau par le tuyau étant donné, trouver l'état de la preſſion de l'eau en chaque endroit du tuyau, ſuppoſant, que l'axe de rotation ſoit vertical.*

SOLUTION.

Gardant toutes les dénominations qui ont été faites jusqu'ici, ſoit p la hauteur qui exprime la preſſion de l'eau dans la ſection M; & nous avons vu, que de cette preſſion réſulte une force accélératrice ſelon la direction $Mm=-\frac{dp}{ds}$. Enſuite l'axe de rotation AC étant vertical, la gravité de l'eau fournit auſſi une force accélératrice ſelon la direction Mm qui eſt $=-\frac{dz}{ds}$, comme nous avons vu (69). Donc la force accélératrice entiere, dont l'eau en M eſt actuellement ſollicitée ſuivant la direction Mm, ſera $=-\frac{dp}{ds}-\frac{dz}{ds}$, & les directions de toutes les autres forces qui agiſſent encore ſur l'eau en M ſont perpendiculaires à cette direction. Ayant donc déterminé dans le problème précédent l'accélération que l'eau en M ſouffre réellement ſelon Mm, les autres accélérations étant auſſi réduites à des directions perpendiculaires à celles-cy, il faut que cette accélération réelle trouvée cy-deſſus ſoit égale à celle, qui y agit actuellement, ce qui nous fournit cette équation :

$$-\frac{dp}{ds}-\frac{dz}{ds}=\frac{du}{dt\sqrt{u}}.\frac{q\operatorname{cof}\theta}{b}+\frac{dv}{dt\sqrt{v}}.\frac{ff}{rr}-u.\frac{2qdq}{bbds}+v.\frac{f^4}{ds}d.\frac{1}{r^4},$$

d'où

d'où l'on pourra déterminer la valeur de la pression p à chaque endroit du tuyau. Car multipliant par ds on aura cette équation différentielle

$$dp = -dz - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cdot \frac{q\,ds\cos\theta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ff\,ds}{rr} + u \cdot \frac{2q\,dq}{bb} - v \cdot f^4 d \cdot \frac{1}{r^4},$$

& puisqu'il s'agit de trouver la pression p pour l'instant présent, on doit regarder comme constantes les quantités, qui ne varient qu'avec le tems, savoir, u, v, $\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$, & $\frac{du}{dt\sqrt{u}}$, & partant l'intégrale sera :

$$p = C - z - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cdot \int \frac{q\,ds\cos\theta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \int \frac{ff\,ds}{rr} + u \cdot \frac{qq}{bb} - v \cdot \frac{f^4}{rr},$$

où je suppose que les intégrales $\int \frac{q\,ds\cos\theta}{b}$, & $\int \frac{ff\,ds}{rr}$ sont prises depuis la section E, où se trouve la plus haute superficie de l'eau du moins pour l'instant présent. Donc, puisque la pression à la superficie en E est nulle, & que là devient $q = c$, & $rr = ee$, si nous supposons la hauteur de E au dessus du plan horizontal BCF, ou $AC = a$, nous en tirerons la valeur de la constante C, de sorte que la véritable pression à un endroit quelconque M sera :

$$p = a - z + u\left(\frac{qq}{bb} - \frac{cc}{bb}\right) - v\left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4}\right) - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cdot \int \frac{q\,ds\cos\theta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \int \frac{ff\,ds}{rr}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

LXXVI. Cette formule exprime donc la hauteur p, qui nous sert de mesure de la pression, & nous voyons qu'elle est composée de cinq membres :

I. $a - z$; II. $-\frac{u(cc - qq)}{bb}$; III. $-v\left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4}\right)$;

IV. $-\frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{q\,ds\cos\theta}{b}$; V. $-\frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ff\,ds}{rr}$;

le

le premier membre $a-z$ marque la profondeur AN, à laquelle la ſection M ſe trouve au deſſus de la ſuperficie E; & cette quantité marqueroit la preſſion de l'eau en M, ſi le tuyau & l'eau étoient en repos.

COROLL. 2.

LXXVII. Le ſecond membre $-\frac{u(cc-qq)}{bb}$ nous découvre combien le mouvement de rotation du tuyau trouble la preſſion, & nous voyons que cet effet eſt proportionel au quarré de la viteſſe angulaire du tuyau, qui eſt $=\frac{\sqrt{u}}{b}$. Nous voyons de plus, que ſi la diſtance $MN=q$, eſt plus grande que $AE=c$, cet effet augmente la preſſion, mais ſi $MN<AE$, il diminuë la preſſion, puisqu'il devient alors négatif. Mais ſi $MN=AE$; ce membre ne change point du tout la preſſion.

COROLL. 3.

LXXVIII. Le troiſième membre $-v\left(\frac{f^4}{r^4}-\frac{f^4}{e^4}\right)$ eſt proportionnel au quarré de la viteſſe reſpective, dont l'eau ſort par l'ouverture F, ou puisque $ff\sqrt{v}$ exprime la quantité d'eau qui échape par l'ouverture F dans un tems donné, ce membre étant $f^4v\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{e^4}\right)$, eſt proportionnel au quarré de cette quantité d'eau. Outre cela la preſſion ſera augmentée par ce membre, lorsque $rr>ee$, ou lorsque la largeur du tuyau en M eſt plus grande qu'en E; mais elle en ſera diminuée, ſi la largeur en M eſt plus petite qu'en E.

COROLL. 4.

LXXIX. Les deux autres membres dépendent de l'accélération ou du mouvement du tuyau, ou de celui de l'eau, & l'un & l'autre eſt négatif, lorsque les mouvemens ſont accélérés; or le quatrième ceredevient affirmatif, lorsque la formule $\int \frac{q\,ds\cos\theta}{b}$, ou l'aire de la projection du tuyau, est négative.

COROLL. 5.

LXXX. Mais lorsque l'un & l'autre mouvement est uniforme, les deux derniers membres évanouïssent, & la pression en M sera exprimée par la hauteur $p = a - z - \frac{u(cc-qq)}{bb} - v\left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4}\right)$, & ne renferme plus de formules intégrales. Et si outre cela $q = c$, & $rr = ee$, la pression sera $p = a - z$, ou bien la même que si le tuyau & l'eau étoient en repos.

SCHOLIE.

LXXXI. Il pourroit donc arriver que la pression en M devint même négative, & alors l'eau abandonneroit les parois du tuyau, & y laisseroit un vuide, si elle n'étoit pas comprimée par le poids de l'atmosphère. Mais l'atmosphère ne sauroit conserver la continuité de l'eau dans le tuyau, qu'entant que sa pression surpasse la pression négative: ou bien, si nous posons k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui contrebalance la pression de l'atmosphère, qu'on sait être de 32 pieds environ, la véritable pression en M, entant qu'elle est augmentée par le poids de l'atmosphère, sera

$$p = k + a - z - \frac{u(cc-qq)}{bb} - v\left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4}\right) - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cdot \int \frac{q\,ds\cos\theta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \int \frac{ff\,ds}{rr},$$

& pourvu que cette quantité ne devienne pas négative, l'eau demeurera continuë dans le tuyau. Mais, s'il arrivoit qu'à quelque endroit du tuyau cette quantité devint négative, l'eau abandonneroit les parois du tuyau, & y laisseroit un vuide ; or il faut bien prendre garde que cet accident n'arrive, puisqu'alors l'expérience s'écarteroit de la théorie. Cet accident seroit à craindre, si le tuyau avoit une trop grande convergence vers l'axe AC, ou si les distances q étoient plus petites que

la

la distance $AE = e$, & si de plus la largeur du tuyau en M étoit beaucoup plus petite que celle en E; & de là on voit aisément, comment en chaque cas on pourra aisément prévenir cet accident. Cela remarqué, je passe à la recherche du mouvement de l'eau dans un tuyau, qui tourne autour d'un axe vertical d'un mouvement quelconque.

PROBLEME VII.

LXXXII. *Le mouvement, dont le tuyau tourne autour de l'axe vertical* AC *étant donné, déterminer la vitesse* $\sqrt{v}$, *avec laquelle l'eau sortira par l'orifice* F, *qui se trouve au bas du tuyau.*

SOLUTION.

Puisque l'eau sort par l'orifice $F = ff$ librement dans l'air, la pression en F sera nulle, ou bien, si l'on fait entrer dans le calcul la pression de l'atmosphère k, elle y sera $= k$. Ayant donc trouvé dans le problème précédent la pression dans une section quelconque M du tuyau, ou la valeur de p, nous n'avons qu'à en tirer la pression qui convient à l'orifice F, où l'on aura $q = b$, $rr = ff$, & $z = 0$; or pour les intégrales qu'il faut prendre pour toute la masse d'eau contenuë dans le tuyau depuis E jusqu'en F, puisque nous avons déjà supposé la valeur intégrale entiere $\int ffq\,ds\cos\theta = N$, nous aurons $\int \frac{q\,ds\cos\theta}{b} = \frac{N}{bff}$, & soit la valeur totale $\int \frac{ds}{rr} = L$. Cela posé, la pression en F sera exprimée par la hauteur:

$$a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) - \frac{N}{bff}\cdot\frac{du}{dt\sqrt{u}} - Lff\cdot\frac{dv}{dt\sqrt{v}},$$

qui doit être égalée à zero, puisque nous négligeons le poids de l'atmosphère.

Par conséquent nous aurons l'équation suivante à résoudre

$$0 = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) - \frac{N}{bff}\cdot\frac{du}{dt\sqrt{u}} - Lff\cdot\frac{dv}{dt\sqrt{v}},$$

 où

où, la quantité u avec $\frac{du}{dt\sqrt{u}}$ étant une fonction donnée du tems, cette équation nous découvre l'accélération de l'eau, qui fort par l'orifice F.

Mais pour trouver la viteſſe même, il faut voir, ſi la hauteur de l'eau dans le tuyau AC eſt variable, ou non? Ce dernier cas ayant lieu, lorsque à chaque inſtant on laiſſe couler par enhaut autant d'eau, qu'il en ſort par enbas, de ſorte que le tuyau demeure conſtamment rempli jusqu'à la ſection E. Or dans le premier cas, où la hauteur eſt variable, & qu'il n'entre point d'eau dans le tuyau, non ſeulement la hauteur a avec la largeur ee ſera variable, mais auſſi les quantités L & N, puisqu'elles renferment les valeurs des intégrales priſes pour la partie du tuyau remplie d'eau à chaque inſtant, d'où la réſolution de l'équation deviendra extrêmement difficile.

Mais pour les cas, que je me propoſe de déveloper, la machine eſt toujours arrangée en ſorte, que le tuyau demeure toujours plein jusqu'à la même ſection E, par une addition continuelle d'autant d'eau, qu'il en découle en bas. On ſuppoſe auſſi que le mouvement de rotation du tuyau eſt uniforme, & dans cette hypotheſe le mouvement de l'eau devient auſſi pour la plûpart bientôt uniforme, de ſorte que les deux derniers termes évanouïront alors. Donc, quand cela arrive, on connoitra aiſément la viteſſe reſpective dont l'eau ſortira du tuyau par l'orifice $F = ff$; car ayant

$$0 = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right),$$

on trouvera la hauteur duë à cette viteſſe :

$$v = \frac{a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

co-

COROLL. 1.

LXXXIII. Pour ce cas donc, où le mouvement de rotation eſt ſuppoſé uniforme, & le tuyau toujours entretenu plein d'eau jusqu'en E, la viteſſe conſtante, que l'eau atteint enfin en ſortant du tuyau, ſera :

$$\sqrt{v} = \sqrt{\frac{a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}},$$

Donc, lorsque la largeur de l'orifice ff eſt quaſi infiniment plus petite que la largeur ee en haut, cette viteſſe ſera

$$\sqrt{v} = \sqrt{\left(a - u\left[\frac{cc}{bb} - 1\right]\right)}.$$

COROLL. 2.

LXXXIV. Or, lorsque l'orifice ff a un plus grand rapport à ee, la viteſſe conſtante $\sqrt{v}$ deviendra plus grande, & elle deviendroit même infinie, s'il étoit $ff = ee$. Mais dans ce cas il faut bien remarquer, qu'il faudroit un tems infini avant que l'eau atteignit cette viteſſe, ou bien l'accélération de l'eau iroit toujours en croiſſant ; & la même choſe arriveroit, ſi l'orifice ff étoit plus grand que la largeur en haut ee.

COROLL. 3.

LXXXV. Si la diſtance $AE = c$ eſt plus grande que la diſtance $CF = b$, la viteſſe dont l'eau ſort par F, en deviendra plus petite ; & il pourroit arriver, qu'il ne ſortit rien par l'orifice F, ſi le tuyau étoit tellement convergent vers le bas, qu'il fut

$$a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{cc}{bb} = \frac{a + u}{u}.$$

dans ce cas la force centrifuge empêcheroit la ſortie de l'eau.

COROLL. 4.

LXXXVI. Or, si la distance $CF = b$ est plus grande que celle d'enhaut $AE = c$, la vitesse, dont l'eau sortira du tuyau, en sera augmentée, ou bien la force centrifuge avancera la sortie de l'eau.

SCHOLIE.

LXXXVII. Pour que la supposition, que je viens de faire, que le tuyau est toujours entretenu plein d'eau, ou qu'on y verse par enhaut continuellement autant d'eau, qu'il en échappe par enbas; pour que cette supposition, dis je, puisse avoir lieu, & que le calcul n'en souffre rien, il faut que l'eau entre dans le tuyau en E avec la même vitesse, & sous la même direction, que l'eau y baisse: or comment cette condition puisse être remplie, c'est ce qui sera expliqué plus en détail dans la suite. Je remarquerai ici seulement, qu'à moins que cette condition ne soit observée, & que l'eau qu'on y verse n'eut un mouvement différent de celui dans le tuyau, il faudroit des forces pour lui imprimer ce mouvement, qu'elle doit suivre, ce qui ne se pourroit faire sans quelque perte des forces, dont on veut faire usage dans la Mécanique. Pour cette cause je supposerai d'abord, que l'eau, dont on entretient le tuyau, y est versée avec la juste vitesse & direction, afin qu'il ne se perde rien des forces, que j'ai déterminées, ni que le mouvement que je viens d'assigner, n'en souffre aucune altération.

PROBLEME VIII.

LXXXVIII. *Le tuyau étant tourné uniformément autour de l'axe vertical* AC, *& étant constamment entretenu plein d'eau jusqu'en* E, *trouver la vitesse dont l'eau sortira par l'orifice* F *à chaque instant, après qu'on aura ouvert cet orifice.*

SOLUTION.

On suppose donc que l'orifice F ait d'abord été fermé, & qu'on l'a ouvert subitement, pour donner une issuë à l'eau: dans ce premier instant donc la vitesse de l'eau a été $= 0$. Maintenant après un tems $= t$,

$= t$, soit $\sqrt{v}$ la viteſſe reſpective dont l'eau ſort par l'ouverture $F = ff$, & poſant comme jusqu'ici la viteſſe de rotation du tuyau en $F = \sqrt{u}$ conſtante, le rayon $CF = b$, la hauteur de l'eau dans le tuyau $AC = a$, & la largeur du tuyau en $E = ee$, & la valeur de l'intégrale $\int \frac{ds}{rr}$ pour toute l'étenduë du tuyau depuis E jusqu'en $F = L$, on aura à réſoudre cette équation :

$$0 = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) - Lff.\frac{dv}{dt\sqrt{v}},$$

pour en tirer la valeur de la viteſſe cherchée $\sqrt{v}$.

Poſons pour abréger les quantités conſtantes :

$$a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) = h, \quad \& \quad 1 - \frac{f^4}{e^4} = n, \text{ \& nous avons}$$

$$h - nv = \frac{Lff\,dv}{dt\sqrt{v}}, \quad \text{ou} \quad dt = \frac{Lff\,dv}{(h-nv)\sqrt{v}}.$$

Soit $\sqrt{v} = z$, & $\frac{dv}{2\sqrt{v}} = dz$, pour que nous ayons :

$$dt = \frac{2Lff\,dz}{h-nzz},$$

& nous aurons trois cas à conſidérer, ſelon que $n = 0$, ou $n > 0$, ou $n < 0$.

I. Soit $n = 0$, ce qui donne le cas, où l'orifice F eſt égal à la ſection E, & on aura $t = \frac{2Lff}{h}z = \frac{2Lff}{h}\sqrt{v}$; donc $\sqrt{v} = \frac{ht}{2Lff}$. D'où l'on voit que la viteſſe $\sqrt{v}$ croîtra toujours jusqu'à l'infini, & partant que dans ce cas l'eau n'arrivera jamais à un mouvement uniforme.

II. Soit $n > 0$, ce qui eſt le cas où l'orifice F eſt moindre que la ſection E, & poſant $\sqrt{\frac{h}{n}} = i$, de ſorte que $dt = \frac{2Lff}{n}.\frac{dz}{ii-zz}$,

&

& l'intégration donnera $t = \frac{Lff}{in} l \frac{i+z}{i-z}$. Posant donc $\frac{in}{Lff} = \nu$, pour avoir $\nu t = l \frac{i+z}{i-z}$, & prenant α pour le nombre, dont le logarithme $= 1$, nous aurons $\alpha^{\nu t} = \frac{i+z}{i-z}$, ou $z = \frac{\alpha^{\nu t} - 1}{\alpha^{\nu t} + 1} i = \sqrt{v}$. Donc après un tems infini nous aurons $\sqrt{v} = i = \sqrt{\frac{h}{n}}$, ou $\sqrt{v} = \frac{h}{n}$.

III. Soit $n < 0$, ce qui est le cas, où l'orifice F est plus grand que la section E, & posant $\frac{f^4}{e^4} - 1 = m$, pour avoir $dt = \frac{2 Lff dz}{h + mzz}$. Soit $\sqrt{\frac{h}{m}} = i$, & on aura $dt = \frac{2Lff}{m} . \frac{dz}{ii + zz}$, ou $s = \frac{2Lff}{im} . \mathrm{A\,tg} \frac{z}{i}$. Soit $\frac{im}{2Lff} = \mu$, pour avoir $\mu t = \mathrm{A\,tg} \frac{z}{i}$, & partant $z = i \,\mathrm{tg}\, \mu t$, ou $\sqrt{v} = i \,\mathrm{tang}\, \frac{imt}{2Lff}$. Cette vitesse croitra donc non seulement à l'infini, mais deviendra ensuite même négative ; ou bien il sera impossible d'entretenir dans ce cas le tuyau toujours plein. C. Q. F. T.

COROLL. I.

LXXXIX. Puisque donc dans la pratique on exige un mouvement uniforme, le premier cas, & à plus forte raison le troisième, n'y sauroit être employé. Il faut donc que le second cas ait lieu, & que l'ouverture en F soit moindre que la section du tuyau en haut E. Le nombre $n = 1 - \frac{f^4}{e^4}$ sera donc positif, mais moindre que l'unité, & partant il faut nécessairement que $h = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right)$, soit aussi une quantité positive, ou bien $\frac{cc}{bb} < \frac{a+u}{u}$.

co-

COROLL. 2.

XC. Or pour ce cas on aura $\mathcal{V}v = \frac{\alpha^{\nu t}-1}{\alpha^{\nu t}+1}i$, où $i = \mathcal{V}\frac{h}{n}$, $\nu = \frac{in}{Lff} = \frac{\mathcal{V}hn}{Lff}$. D'où l'on voit que la viteſſe $\mathcal{V}v$ va toujours en croiſſant, & qu'elle ne parvient à l'uniformité, qu'après un tems infini ; de ſorte qu'il ſemble que ni même ce cas répond au but, qu'on ſe propoſe dans la pratique, où l'on demande une viteſſe uniforme.

COROLL. 3.

XCI. Cependant on pourra ſe contenter, pourvu que la viteſſe approche aſſés vite de la derniere viteſſe $\mathcal{V}v = i$ ſi près, que la différence ne feroit plus ſenſible. Car, ſi par exemple, d'abord après une ſeconde la viteſſe $\mathcal{V}v$ arrivoit ſi près à la valeur i, qu'elle n'en différeroit que d'une centième partie, cela ſuffiroit ſans doute pour la pratique, & dès la première ſeconde on pourroit regarder le mouvement comme uniforme.

COROLL. 4.

XCII. Voyons donc, combien la viteſſe $\mathcal{V}v$ différera encore après une ſeconde de la valeur i. Pour cet effet ſoit g la hauteur, de laquelle un corps grave tombe librement dans une ſeconde, & puiſque le calcul donne pour le tems de cette chute $2\mathcal{V}g$, poſons $2\mathcal{V}g$ pour t ; & ſoit $\frac{\alpha^{\nu t}-1}{\alpha^{\nu t}+1}i = [1-\frac{1}{100}]i$, d'où nous tirons $\frac{\alpha^{\nu t}-1}{\alpha^{\nu t}+1} = 1-\frac{1}{100}$, ou bien $\alpha^{\nu t} = 199$, & $\nu = \frac{l199}{t\,l\alpha} = \frac{\mathcal{V}nh}{Lff}$, donc $\frac{Lff}{\mathcal{V}nh} = \frac{t\,l\alpha}{l199} = \frac{0,8685890}{2,2988531}\mathcal{V}g$, ou $L = 0,37784.\frac{\mathcal{V}ngh}{ff}$.

 Pour-

Pourvu donc que la valeur de L ſoit de cette grandeur, ou encore moindre, le mouvement de l'eau arrivera d'abord après la premiere ſeconde, ou encore plutôt, à l'uniformité.

COROLL. 5.

XCIII. Puisque $L = \int \frac{ds}{rr}$, ſi nous poſons la largeur du tuyau rr conſtante, & $= \lambda ff$, & la longeur du tuyau égale à ſa hauteur a, auquel cas nous aurons $c = b$, & $h = a$; nous obtiendrons $L = \frac{a}{\lambda ff}$, & partant le cas indiqué aura lieu ſi $a < 0{,}37784 \lambda \sqrt{nga}$, ou $\sqrt{\frac{a}{g}} < 0{,}37784 \lambda \sqrt{n}$. Or ſi ee eſt auſſi $= \lambda ff$, à cauſe de $n = 1 - \frac{1}{\lambda\lambda}$, & de $0{,}37714 = \frac{3}{8}$, cela arrivera ſi $\lambda \sqrt{[1 - \frac{1}{\lambda\lambda}]} > \frac{8}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$, ou $\lambda\lambda - 1 > \frac{7a}{g}$; donc ſi $\lambda > \sqrt{[1 + \frac{7a}{g}]}$.

COROLL. 6.

XCIV. Il eſt donc clair, que pour remplir cette condition, on n'a qu'à donner au tuyau partout une largeur ſuffiſante, & plus grande que celle de l'ouverture ff, par laquelle l'eau échape, puisqu'il faut que $\lambda > 1$; & de plus, plus la hauteur du tuyau a ſera grande, plus auſſi grande doit être priſe la valeur de λ. Si la hauteur du tuyau a étoit $= g$, ou de 15 pieds environ, il ſuffiroit pour cet effet, qu'il fût $\lambda = 3$, ou que le tuyau fut partout ſeulement trois fois plus large que l'ouverture ff. Donc, pourvu que la largeur du tuyau ſoit quelquefois plus grande que l'orifice, on peut ſans aucune faute ſuppoſer, que le mouvement de l'eau ſe compoſe bientôt à l'uniformité.

SCHOLIE.

XCV. J'ai déjà remarqué, que pour éviter l'effet du frottement, il convient de rendre les tuyaux aſſès larges: ainſi l'élargiſſement du tuyau

yau nous procurera un double avantage, l'un que le mouvement ne ſoit pas diminué par le frottement, & l'autre, que l'eau parvienne d'autant plus vite à l'uniformité. Obſervant donc cette régle, nous pourrons être aſſurés, que le mouvement de l'eau ſera non ſeulement conforme au calcul, mais qu'il deviendra auſſi d'abord après le commencement uniforme; de ſorte que dans ces ſortes de machines il ſera permis de regarder la viteſſe de l'eau Vv comme conſtante, pourvu que le mouvement de rotation du tuyau ſoit uniforme, & que le tuyau ſoit toujours entretenu plein d'eau jusqu'à la ſection E. Or le mouvement de l'eau étant déjà devenu uniforme, voyons combien il faut d'eau pour entretenir le tuyau toujours plein jusqu'en E, & avec quelle viteſſe l'eau y doit être verſée.

PROBLEME IX.

XCVI. *Le tuyau étant tourné uniformement autour de l'axe vertical* AC, *& entretenu toujours plein d'eau jusqu'à la ſection* E, *trouver la quantité d'eau, que cet entretien exige par ſecondes, & tant la viteſſe que la direction ſous laquelle l'eau doit continuellement être conduite dans le tuyau.*

SOLUTION.

Puisqu'on ſuppoſe que le mouvement de l'eau ait déjà atteint l'uniformité, on aura cette équation $0 = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right)$, où il faut que ee ſoit conſidérablement plus grand que ff, & de cette équation on connoitra la viteſſe Vv, dont l'eau ſortira par l'embouchure $F = ff$, les autres quantités a, u, b, & c étant données de la figure du tuyau, & de ſon mouvement. Puisque l'eau ſort par l'ouverture ff avec la viteſſe $= Vv$, ſi nous prenons g pour marquer la hauteur de la chute d'une ſeconde, la quantité d'eau, qui s'en va chaque ſeconde ſera $= 2ffVgv$: il faut donc pour entretenir le tuyau toujours plein, qu'il entre par enhaut chaque ſeconde une pareille quantité d'eau $= 2ffVgv$.

 Mais

Mais ſi l'eau ſort par enbas avec la viteſſe $= \sqrt{v}$, la viteſſe en haut en E ſera $= \frac{ff\sqrt{v}}{ee}$, dont l'eau y deſcend dans le tuyau, & la direction de ce mouvement reſpectif eſt verticale, comme il a été remarqué cy-deſſus, ou bien la direction du tuyau en E doit être ſuppoſée verticale. Or le tuyau étant lui-même transporté autour de l'axe AC, & la viteſſe de rotation en E étant $= \frac{c\sqrt{u}}{b}$, la vraye viteſſe de l'eau en E ſera $= \sqrt{\left(\frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}\right)}$, & la direction de ce vray mouvement ſera inclinée à l'horizon d'un angle, dont la tangente eſt $= \frac{bff\sqrt{v}}{cee\sqrt{u}}$. Il faut donc, pour ne point troubler le mouvement de l'eau dans le tuyau, que l'eau ſoit conduite dans le tuyau en E avec une viteſſe $= \sqrt{\left(\frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}\right)}$, & ſous un angle avec l'horizon, dont la tangente eſt $= \frac{bff\sqrt{v}}{cee\sqrt{u}}$. Donc ſi l'eau, dont le tuyau eſt entretenu, ſe trouve dans un réſervoir placé au deſſus de E, il faut que la ſuperficie de l'eau dans le réſervoir ſoit élevée au deſſus de la ſection E d'une hauteur $= \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}$, pour que l'eau, qui en découle dans le tuyau puiſſe acquérir la juſte viteſſe, & qu'elle y ſoit conduite par des tuyaux, qui ayent l'inclinaiſon, que nous venons de trouver. C. Q. F. T.

SCHOLIE.

XCVII. Puisque le réſervoir, qui fournit l'eau dans le tuyau EF, doit être en repos, le tuyau échaperoit d'abord à la veine d'eau, qui y ſeroit conduite. Pour remédier à cet inconvenient, il eſt néceſſaire de ranger un grand nombre de tuyaux autour de l'axe AC, en ſorte que leurs ouvertures en haut E, forment une ſurface unie; & alors l'eau, qui y ſera conduite du réſervoir par quelque canal, ne manquera ra pas d'entrer toujours dans ces tuyaux réünis enſemble par enhaut. Or ce qui vient d'être calculé pour le mouvement de l'eau dans un tuyau, aura également lieu pour pluſieurs tuyaux réünis ainſi enſemble, pourvu qu'ils ſoient égaux entr'eux, & qu'on prenne *ff* pour marquer la ſomme de tous leurs orifices en bas, & *ee* la ſomme de leurs orifices en haut, qui formeront un eſpace annulaire uni. Mais, afin que l'eau ſoit entretenuë par tout cet eſpace également, le réſervoir doit être garni de pluſieurs tels canaux, qui forment quaſi auſſi une ouverture unie. De là naîtra la conſtruction d'une telle Machine hydraulique, dont je m' en vais donner la deſcription.

Déſcription d'une telle Machine hydraulique.

XCVIII. Soit O O l'axe vertical, autour duquel la machine doit tourner uniformément ; cette machine ſera compoſée de pluſieurs tuyaux ſemblables, qui ont chacun leurs embouchures en bas, comme F, F, F, &c. par lesquelles l'eau échape, & leur ouvertures en haut ſoient unies dans l'eſpace annulaire E, E, E, E, &c. Il ſera bon d'enfermer tous ces tuyaux dans un tambour comme B B F F, d'une ſurface bien unie & polie par le dehors, afin que la réſiſtance de l'air n'apporte pas un obſtacle ſenſible à ſon mouvement. Ce tambour creux en dedans, pour en diminuer le poids, ſera affermi à l'axe de rotation par des barres transverſales, afin qu'il tourne avec l'axe. Or au deſſus de ce tambour mobile avec l'axe ſe trouve le réſervoir D D J J, auſſi en forme d'un tambour, mais qui ſoit immobile, n'étant pas attaché à l'axe O O, qui le traverſe au milieu. Au fonds de ce reſervoir, ſe trouvent pluſieurs canaux J *i*, J *i*, J *i*, &c. par lesquels l'eau eſt conduite dans le vaiſſeau inférieur B B F F, ſous une obliquité, qui a été déterminée dans le problème précédent. Et ſi le reſervoir fournit dans le vaiſſeau autant d'eau, qu'il en ſort par les embouchures F, F, F, &c. les tuyaux du vaiſſeau demeureront conſtamment pleins d'eau, jusqu'à la ſurface E, E, E, &c. & le mouvement de l'eau deviendra bientôt uniforme, pourvu que le mouvement de rotation ſoit uniforme, comme je ſuppoſe ; & il ſera outre cela conforme aux formules, qui ont été trouvées cy-deſſus. Fig. 5.

Application du calcul à cette Machine.

XCIX. La hauteur de l'eau dans le vaiſſeau mobile au deſſus des embouchures F, F, &c. ou la hauteur AC eſt poſée $= a$, la diſtance des embouchures à l'axe de rotation, ou CF $= b$; la ſomme de toutes ces embouchures $= ff$, la ſurface de l'eau en haut de ce vaiſſeau, ou l'eſpace annulaire E, E, E, $= ee$; ſa diſtance moyenne à l'axe de rotation AE $= c$. Enſuite ſoit la viteſſe dont les embouchures F, F, tournent au tour de l'axe $= \sqrt{u}$, & la viteſſe reſpective, dont l'eau ſort par ces embouchures $= \sqrt{v}$. Cela poſé, nous avons vû, que le mouvement uniforme ſera déterminé par cette équation

$$o = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right),$$

& la dépenſe d'eau pendant chaque ſeconde ſera $= 2ff\sqrt{gv}$, prenant g pour la hauteur, par laquelle un corps peſant tombe dans une ſeconde.

C. Pour le réſervoir DDJJ, qui ſoit toujours rempli d'eau jusqu'à G, G, G, ſoit la hauteur de cette ſurface au deſſus de E, E, E, &c. ou la ligne verticale HA $= k$, & il faut qu'il ſoit $k = \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}$. Soit de plus la ſomme de toutes les embouchures i, i, i, &c. qui fourniſſent l'eau dans le vaiſſeau inférieur, $= ii$, & puisque l'eau en ſort avec la viteſſe $= \sqrt{k}$, pourvu que ce réſervoir ſoit aſſés large, il en ſera fourni par ſeconde une quantité d'eau $= 2ii\sqrt{gk}$; il faut donc qu'il ſoit

$$2ii\sqrt{gk} = 2ff\sqrt{gv}, \quad \text{ou} \quad i^4 k = f^4 v.$$

Enſuite ces canaux Ji, Ji, deſcendans doivent être tellement inclinés, qu'ils faſſent avec l'horizon un angle dont la tangente $= \frac{bff\sqrt{v}}{cee\sqrt{u}}$, & partant le ſinus $= \frac{bff\sqrt{v}}{\sqrt{(bbf^4 v + cce^4 u)}} = \frac{ff\sqrt{v}}{ee\sqrt{k}}$, & le coſinus $= \frac{c\sqrt{u}}{b\sqrt{k}}$,

&

& cette inclination doit être dirigée ſelon le mouvement de rotation. C'eſt de là qu'il faut tirer les meſures, pour l'arrangement d'une telle Machine.

CI. Puisque $f^4 v = i^4 k$, & $e^4 k = f^4 v + \frac{cce^4 u}{bb}$, nous aurons en diviſant cette équation par celle-là $\frac{e^4}{i^4} = 1 + \frac{cce^4 u}{bbf^4 v}$: d'où nous voyons que $ii < ee$, ce qui eſt néceſſaire: car il faut bien, que l'eſpace annulaire E, E, E, &c. ſoit plus grand que la ſomme de tous les orifices des canaux Ji, quand même ces canaux feroient tous réünis. Mais puisque ces canaux conduiſent l'eau obliquement dans le vaiſſeau inférieur, il eſt impoſſible que la ſomme des orifices ii puiſſe avoir un plus grand rapport à ee, que le ſinus de l'obliquité $\frac{ff\sqrt{v}}{ee\sqrt{k}}$ au ſinus total. Or l'équation $f^4 v = i^4 k$, ou $ff\sqrt{v} = ii\sqrt{k}$, nous fait voir clairement, que $ii : ee = \frac{ff\sqrt{v}}{ee\sqrt{k}} : 1$. D'où l'on voit que les canaux Ji, Ji, &c. doivent ſe toucher entr'eux, afin que l'eau qui en deſcend rempliſſe tout l'eſpace annulaire E E &c.

CII. Donc au lieu des canaux ſéparés Ji, Ji, comme la figure 3 les repréſente, il faut emploier des canaux contigus repréſentés dans la figure 4, qui ne ſoient ſéparés entr'eux que de minces diaphragmes, Ji, Ji, &c. qui ſervent à diriger l'eau ſous l'inclinaiſon requiſe, de ſorte que ſans ces diaphragmes il y auroit une ouverture unie annulaire, qui régneroit tout autour du reſervoir. Or, puisque alors l'eau tomberoit verticalement par cette ouverture continue, il la faut partager par des lames minces diſpoſées obliquement, afin que l'eau ſoit obligée de découler ſous l'inclinaiſon trouvée, & pour obtenir ce but on jugera aiſément à quelle diſtance ces diaphragmes doivent être éloignés entr'eux. On donnera donc à ces ouvertures la même largeur qu'à l'eſpace annulaire, ne pouvant pas lui donner une plus grande, &

& puiſque les diaphragmes ne manqueront pas de diminuer tant ſoit peu la quantité d'eau, qui deſcend, on ſera obligé, ou de faire l'eſpace annulaire avec la largeur de ces canaux un peu plus grande, qu'on aura trouvé par le calcul, ou de donner aux diaphragmes une inclinaiſon un peu plus petite.

CIII. Il faut encore remarquer que la largeur de l'eſpace annulaire E E ne ſauroit être trop grande par rapport à ſon demi-diametre moyen $= c$, tant pour que le calcul ne s'écarte point de l'expérience, ayant regardé l'amplitude ee comme très petite à l'égard d'un cercle décrit du rayon c, que principalement, afin que le mouvement de rotation par tout cet eſpace annulaire ſoit aſſés égal, pour que la perte continuelle puiſſe être réparée, comme il faut, par la même obliquité. Ainſi poſant la largeur de cet eſpace annulaire $= 2\alpha$, de ſorte que le rayon du cercle intérieur ſoit $= c - \alpha$, & celui de l'extérieur $= c + \alpha$, l'eſpace annulaire ſera $= 4\pi\alpha c$, ce qui donne la valeur de ee. Donc, ſi l'on juge que α ne ſauroit ſurpaſſer $\frac{1}{12}c$, on aura $4\pi\alpha c$, & partant $ee < cc$ à peu près.

CIV. Ayant ainſi expliqué ce qui regarde la conſtruction d'une telle Machine en général, voyons auſſi les meſures, qu'il faut donner à toutes les parties de la machine pour chaque cas propoſé. Or il y a ordinairement deux choſes, ſur lesquelles on doit régler cette détermination: l'une eſt la quantité d'eau, que la ſource, ou riviere, fournit par ſecondes pour l'entretien de la machine; & l'autre eſt la hauteur, qu'il ſera permis de donner à toute la machine, afin que l'eau, qui ſort en bas, puiſſe encore découler; cette hauteur eſt nommée dans la Pratique la chûte de l'eau. Ces deux choſes ne dépendent pas communément de nôtre volonté, mais nous ſont preſcrites par les circonſtances, & alors il faut arranger la machine en ſorte qu'elle réponde à ces conditions.

PROBLEME X.

CV. *Lorsque tant la hauteur de la chute que la quantité d'eau eſt donnée, qu'on peut employer à l'entretien de la machine, trouver les*

les déterminations néceſſaires pour la conſtruction d'une telle machine hydraulique.

SOLUTION.

Soit la hauteur de la chute $HA + AC = h$, la quantité d'eau, qui peut être fournie par ſeconde à l'entretien de la machine D ; ces deux choſes étant données on aura d'abord les équations ſuivantes :

$$D = 2ff\sqrt{gv}, \text{ \& } h = a + k = a + \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}.$$

Or nous venons de trouver outre cela ces équations :

$$o = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right), \text{ \& } i^4 k = f^4 v.$$

La premiere équation donne $f^4 v = \frac{DD}{4g}$, & cette valeur ſubſtituée dans les autres équations fournit :

$$h = a + \frac{DD}{4ge^4} + \frac{ccu}{bb};$$

$$o = a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) - v + \frac{DD}{4ge^4};$$

$$\frac{DD}{4ge^4} + \frac{ccu}{bb} = \frac{DD}{4gi^4}, \text{ ou } u = \frac{DDbb(e^4 - i^4)}{4gcce^4i^4}.$$

Ayant ainſi éliminé la ſomme des embouchures, la première & troiſième équation fournit $a = h - \frac{DD}{4gi^4}$, & cette valeur avec celle de u, ou plutôt avec celle de $\frac{cc}{bb} = \frac{DD}{4gu}\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4}\right)$, donne pour la ſeconde : $o = h - \frac{DD}{2gi^4} + \frac{DD}{4ge^4} + u - v + \frac{DD}{4ge^4}$, d'où nous tirons : $v = h + u - \frac{DD}{2gi^4} + \frac{DD}{2ge^4}$.

Voilà

Voilà donc les déterminations ſuivantes, qu'on doit obſerver :

I. $a = h - \frac{DD}{4gi^4}$;

II. $\frac{cc}{bb} = \frac{DD}{4gu}\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4}\right)$;

III. $v = h + u - \frac{DD}{2gi^4} + \frac{DD}{2ge^4} = h + u - \frac{DD}{2g}\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4}\right)$;

IV. $f^4 = \frac{DDi^4}{4gi^4(h+u) - 2DD\left(1 - \frac{i^4}{e^4}\right)} = \frac{DD}{4gv}$,

& la tangente de l'inclinaiſon des canaux Ji à l'horizon ſera

$$\frac{bff\sqrt{v}}{cee\sqrt{u}} = \frac{ii}{\sqrt{(e^4 - i^4)}}, \quad \text{\& le ſinus} = \frac{ii}{ee}.$$

De plus il faut remarquer que ff doit être beaucoup plus petit que ee, & ii moindre que ee, & enfin $cc > ee$. C. Q. F. T.

COROLL. 1.

CVI. Les deux choſes D & h étant données, le calcul renferme trois quantités ee, ii, & u qu'on peut prendre à volonté, & enſuite, puiſque ce n'eſt que le rapport des quantités b & c, qui ſe détermine, l'une & l'autre demeure encore indéterminée. Cependant les valeurs de ces quantités doivent être tellement priſes, qu'il devienne $cc > ee$, $ii < ee$, & $ff < \frac{1}{2}ee$, ou $< \frac{1}{3}ee$, comme il a été remarqué cy-deſſus (92).

COROLL. 2.

CVII. Donc ſi nous poſons $ee = \lambda ff$, $cc = \mu ee$, & $ii = \eta ee$, de ſorte que η marque le ſinus de l'angle, ſous lequel les canaux Ji doivent être inclinés à l'horizon ; & il faut qu'il ſoit $\mu > 1$, & $\lambda > 2$, ou $\lambda > 3$. De là nous aurons :

I.

I. $a = h - \frac{DD}{4g\eta\eta e^4}$; II. $\frac{\mu ee}{bb} = \frac{DD}{4ge^4 u}\left(\frac{1}{\eta\eta} - 1\right)$;

III. $v = h + u - \frac{DD}{2ge^4}\left(\frac{1}{\eta\eta} - 1\right)$; & IV. $\frac{e^4}{\lambda\lambda} v = \frac{DD}{4g}$;

ou $\lambda\lambda DD = 4ge^4(h+u) - 2DD\left(\frac{1}{\eta\eta} - 1\right)$.

COROLL. 3.

CVIII. Ou bien ſi nous poſons l'angle de l'inclinaiſon des canaux Ji à l'horizon $= \varrho$, pour avoir $\eta = \sin \varrho$, & $\frac{1}{\eta\eta} - 1 = \frac{\cos\varrho^2}{\sin\varrho^2} = \cot \varrho^2$, nous aurons :

$$4ge^4(h+u) = DD(\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2), \quad \& \quad ee = \frac{D\sqrt{(\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2)}}{2\sqrt{g(h+u)}},$$

&

$$\frac{DD}{4ge^4} = \frac{h+u}{\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2}, \text{ donc } v = h + u - \frac{2(h+u)\cot\varrho^2}{\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2} = \frac{\lambda\lambda(h+u)}{\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2}$$

&

$$\frac{\mu ee}{bb} = \frac{(h+u)\cot\varrho^2}{u(\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2)} = \frac{\mu D\sqrt{(\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2)}}{2bb\sqrt{g(h+u)}}, \text{ d'où l'on tire}$$

$$bb = \frac{\mu D u(\lambda\lambda + 2\cot\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}{2(h+u)^{\frac{3}{2}}\cot\varrho^2\sqrt{g}}, \quad \& \quad a = h - \frac{h-u}{\lambda\lambda\sin\varrho^2 + 2\cos\varrho^2}.$$

COROLL. 4.

CIX. Donc ſi les nombres λ & μ avec l'angle ϱ ſont donnés, il ne reſte que la quantité u, qu'on puiſſe prendre à volonté, ou bien la viteſſe $\sqrt{u}$, avec laquelle les embouchures F, F, tournent autour de l'axe de la machine. Mais la conſidération de la réaction fournira des déterminations plus propres à la Pratique.

PROBLEME XI.

CX. *Une telle Machine hydraulique étant construite pour une*
Fig. 3. *chûte & dépense d'eau donnée, trouver le moment de la réaction de l'eau, & l'effet de la machine lorsqu'elle est tournée autour de l'axe avec une vitesse donnée.*

SOLUTION.

Soit comme jusqu'ici D la quantité d'eau, que le reservoir peut fournir par seconde; h la hauteur de la chute entiere; a la hauteur du vaisseau tournant BBFF; b la distance des embouchures F, F, à l'axe; ff la somme de toutes ces embouchures; ζ l'angle que la direction des embouchures fait avec la direction de leur mouvement de rotation; $\sqrt{u}$ la vitesse de ce mouvement; $\sqrt{v}$ la vitesse respective dont l'eau sort par ces embouchures; c la distance moyenne des orifices supérieurs E, E, à l'axe; ee leur amplitude totale unie dans l'espace annulaire E, E, E, &c.; ii la somme des embouchures des canaux Ji, Ji, par lesquels l'eau descend du réservoir immobile DDJJ dans le vaisseau mobile BBFF; & g la hauteur de la chute pendant une seconde, qu'on fait être de $15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin. Cela posé, il faut qu'on ait satisfait à ces quatre équations:

$$\text{I.} \quad a = h - \frac{DD}{4gi^4};$$

$$\text{II.} \quad \frac{cc}{bb} = \frac{DD}{4gu}\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4}\right);$$

$$\text{III.} \quad v = h + u - \frac{DD}{2g}\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4}\right) = h + u - \frac{2cc}{bb}u;$$

$$\text{IV.} \quad f^4 = \frac{DD}{4gv} = \frac{DDbb}{4g\,[bbh + (bb - 2cc)u]}.$$

& de plus les canaux Ji doivent être tellement inclinés à l'horizon, que le sinus de leur inclinaison soit $= \frac{ii}{ee}$, & il faut que ee soit considérablement plus grand que ff, & que ee ne surpasse point cc.

Main-

Maintenant, puisque la direction des tuyaux mobiles en E est nécessairement verticale, & que l'un & l'autre mouvement est supposé uniforme, le moment de la réaction de la machine sera :

$$2ff\left(\frac{cc}{bb}-b\right)\sqrt{vu} - 2ffbv\cos\zeta\text{ ; par le §. 57.}$$

Ce moment produira donc le même effet, que s'il y avoit appliquée à la machine en F une force égale au poids d'une masse d'eau, dont le volume seroit :

$$2ff\left(\frac{cc}{bb}-1\right)\sqrt{vu} - 2ffv\cos\zeta,$$

cette force agissant perpendiculairement sur le levier $CF = b$, pour accélérer le mouvement de rotation. Or cette force se mouvant de la vitesse $\sqrt{u}$, elle sera capable de surmonter une résistance R, & de la faire mouvoir d'une vitesse $\sqrt{w}$, de sorte qu'il soit :

$$R\sqrt{w} = 2ff\left(\left(\frac{cc}{bb}-1\right)\sqrt{vu} - v\cos\zeta\right)\sqrt{u},$$

& cette expression représente l'effet de la machine. Ou si l'on veut déterminer l'effet de la machine par le produit de la résistance R, par le chemin décrit dans une seconde, qui est $2\sqrt{gw}$, cet effet sera :

$$4ff\left(\left(\frac{cc}{bb}-1\right)\sqrt{vu} - v\cos\zeta\right)\sqrt{gu},$$

ou la machine sera capable de mouvoir une résistance R, par un tel espace pendant une seconde, que le produit de la résistance R par cet espace soit précisément égal à l'expression trouvée. C. Q. F. T.

COROLL. I.

CXI. L'effet de la machine pourra donc être exprimé en sorte

$$4ff\sqrt{gv}.\left(\frac{cc}{bb}u - u - \cos\zeta.\sqrt{.vu}\right).$$

Or puisque $2ff\sqrt{gv} = D$, cet effet sera :

$$2D\left(\frac{cc}{bb}u - u - \cos\zeta.\sqrt{vu}\right),$$

& mettant pour $\frac{cc}{bb}$, & v leurs valeurs trouvées, l'effet ſera encore :

$$2D\left(\frac{DD}{4g}\left(\frac{1}{i^4}-\frac{1}{e^4}\right)-u-\operatorname{cof}\zeta\sqrt{\left(hu+uu-\frac{DDu}{2g}\left(\frac{1}{i^4}-1\right)\right)}\right).$$

COROLL. 2.

CXII. Donc, ſi l'on met pour abréger $\frac{DD}{4g}\left(\frac{1}{i^4}-\frac{1}{e^4}\right)=k$, l'effet de la machine ſera $=2D\,[k-u-\operatorname{cof}\zeta\sqrt{(hu+uu-2ku)}]$, & on aura $\frac{cc}{bb}=\frac{k}{u}$, & outre cela : $a=h-\frac{DD}{4gi^4}$; $v=h+u-2k$, & $f^4=\frac{DD}{4g(h+u-2k)}$, d'où l'on déduira les déterminations néceſſaires pour la conſtruction de la machine.

COROLL. 3.

CXIII. Connoiſſant la viteſſe $\sqrt{u}$, & la diſtance $CF=b$, on pourra déterminer le tems, que la machine met à achever une révolution autour de l'axe AC. Car poſant $1:\pi$ pour le rapport du diamètre à la circonférence, la circonférence du cercle FF &c. eſt $=2\pi b$, & puiſque l'eſpace parcouru avec la viteſſe $\sqrt{u}$ dans une ſeconde eſt $=2\sqrt{gu}$, le tems d'une révolution de la machine ſera $=\frac{\pi b}{\sqrt{gu}}$ ſecondes.

PROBLEME XII.

CXIV. *Les conditions du problème précedent demeurant les mêmes, trouver les déterminations néceſſaires pour que l'effet de la machine devienne le plus grand, qu'il eſt poſſible.*

SOLUTION.

Conſidérons l'expreſſion de l'effet, qui a été donné §. 112. comme la plus ſimple, & qui poſant $\frac{DD}{4g}\left(\frac{1}{i^4}-\frac{1}{e^4}\right)=k$

eſt

est $2\,D\,[k - u - \cos\zeta . \sqrt{(hu + uu - 2ku)}]$,

& pour procurer à cette expression la plus grande valeur possible, il est d'abord clair que, par rapport à l'angle ζ, elle ne sauroit devenir plus grande, que lorsque $\cos\zeta = -1$, & partant $\zeta = 180°$. Voilà donc la première condition à remplir, en vertu de laquelle la direction des embouchures F, F doit être diamétralement opposée à la direction de leur mouvement. Ayant donc rempli cette condition, l'effet de la machine sera :

$$2\,D\,[k - u + \sqrt{(hu + uu - 2ku)}].$$

Maintenant cherchons quelle valeur il faut donner à u, pour rendre cette expression un *Maximum*, & on trouvera

$$1 = \frac{\frac{1}{2}h + u - k}{\sqrt{(hu + uu - 2ku)}},\ \text{d'où l'on tire}$$

$$0 = \tfrac{1}{4}hh - hk + kk,\ \text{ou bien}\ k = \tfrac{1}{2}h.$$

Par conséquent il faut arranger la machine en sorte qu'il soit

$$\frac{DD}{4g}\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4}\right) = \tfrac{1}{2}h,$$

& alors l'effet de la machine sera :

$$2\,D\,(\tfrac{1}{2}h - u + \sqrt{uu}) = D\,h,$$

& à cette heure il est évident, qu'il ne sauroit en aucune façon être rendu plus grand, puisqu'il est déterminé uniquement par la dépense d'eau D, & la hauteur de la chûte entiere h.

Donc, pour obtenir ce plus grand effet, la condition requise outre l'angle $\zeta = 180°$ exige qu'il soit :

$$\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} = \frac{2gh}{DD},\ \text{ou}\ \frac{1}{i^4} = \frac{1}{e^4} + \frac{2gh}{DD},$$

& cette valeur étant substituée dans les formules précedentes donne

$$a = \tfrac{1}{2}h - \frac{DD}{4ge^4};\ \frac{cc}{bb} = \frac{h}{2u};\ v = u,\ \&\ f^4 = \frac{DD}{4gu}.$$

Nous

Nous n'avons donc plus que deux quantités indéterminées u & ee, mais qu'il faut prendre en sorte, que $\frac{DD}{ggu}$ devienne plusieurs fois plus petit que e^4, ou posant $ee = \lambda ff$, qu'il soit $\frac{e^4}{\lambda\lambda} = \frac{DD}{4gu}$, ou bien $ee\sqrt{gu} = \frac{1}{2}\lambda D$, ou $2ee\sqrt{gu} = \lambda D$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

CXV. La quantité du plus grand effet Dh, que la machine est capable de produire, est bien remarquable à cause de sa simplicité, par laquelle nous voyons, que la dépense d'eau par seconde D multipliée par la hauteur de la chûte h donne le même produit, que la résistance multipliée par l'espace parcouru dans une seconde: pourvu qu'on exprime la résistance par un volume d'eau, au poids duquel elle est égale.

COROLL. 2.

CXVI. Il est aussi fort remarquable que, pour procurer le plus grand effet, la vitesse respective de l'eau par les embouchures F doit être précisément égale à la vitesse même des embouchures: d'où il s'ensuit, que la vitesse vraye, dont l'eau sort par les embouchures F évanouit: & partant l'eau en tombera perpendiculairement. Ainsi il n'y aura point à craindre que les jets d'eau, qui sortent par les embouchures, frappent les embouchures suivantes, & qu'ils causent par là quelque obstacle au mouvement de la machine.

COROLL. 3.

CXVII. Puisque les quantités ee & u demeurent indéterminées, & que $2ee\sqrt{gu}$ doit du moins être quelquefois plus grand que la dépense d'eau D, il faut prendre l'amplitude ee, & la vitesse $\sqrt{u}$ telles, que la quantité d'eau, qui couleroit dans une seconde par une ouverture $= ee$ avec la vitesse $= \sqrt{u}$, soit quelquefois plus grande que la dépense d'eau D par seconde.

COROLL. 4.

CXVIII. Il faut aussi considérer, que l'angle, que les canaux Ji font avec l'horizon, ne doit pas être trop petit, puisque cela demanderoit

roit trop de diaphragmes dans la Fig. 4. & diminueroit par conſéquent trop conſidérablement la juſte quantité d'eau: au lieu que, ſi l'eau devoit tomber perpendiculairement par ces canaux, on pourroit s'en paſſer entièrement. Poſant donc cet angle de l'inclinaiſon $=\varrho$, de ſorte que $ii = ee \sin\varrho$, on aura $\frac{1}{e^4 \sin\varrho^2} = \frac{1}{e^4} + \frac{2gh}{DD}$, ou $\frac{\cos\varrho^2}{e^4 \sin\varrho^2} = \frac{2gh}{DD}$, d'où l'on tire $ee \tang\varrho = \frac{D}{\sqrt{2gh}}$.

COROLL. 5.

CXIX. Donc, ſi l'on regarde l'angle ϱ comme connu, on aura $ee = \frac{D}{\tang\varrho . \sqrt{2gh}}$. De là ayant $2ee\sqrt{gu} = \lambda D$, on déterminera auſſi la viteſſe de rotation $\sqrt{u} = \frac{1}{2}\lambda \tang\varrho . \sqrt{2h}$; avec laquelle donc un corps parcourra dans une ſeconde l'eſpace $= \lambda \tang\varrho . \sqrt{2gh}$. Enſuite on aura $ii = \frac{D \cos\varrho}{\sqrt{2gh}}$, & $a = \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h \operatorname{tg}\varrho^2 = \frac{1}{2}h(1 - \operatorname{tg}\varrho^2)$, d'où l'on voit que l'angle ϱ doit abſolument être plus petit qu'un demi-droit: & que la hauteur du vaiſſeau mobile AC doit être moindre que celle du reſervoir HA.

COROLL. 6.

CXX. Or ayant choiſi convenablement l'angle ϱ, & déterminé par là $ee = \frac{D}{\tang\varrho \sqrt{2gh}}$, $ii = ee\sin\varrho$, $ff = \frac{ee}{\lambda}$, $\sqrt{u} = \frac{1}{2}\lambda \operatorname{tg}\varrho . \sqrt{2h}$, & $a = \frac{1}{2}h(1 - \operatorname{tg}\varrho^2)$, on a encore cette équation $\frac{cc}{bb} = \frac{h}{2u} = \frac{1}{\lambda\lambda \operatorname{tg}\varrho^2}$, ou $\frac{c}{b} = \frac{1}{\lambda \operatorname{tg}\varrho}$. Or cc ne pouvant être plus petit que ee, ſi nous poſons $cc = \mu ee$, nous obtiendrons $bb = \frac{\lambda\lambda\mu D \tang\varrho}{\sqrt{2gh}}$, ou $b =$

$b = \lambda c \tang \varrho$, & par là toute la machine ſera déterminée : & le tems d'une révolution ſera $= \frac{2\pi c}{\sqrt{2gh}}$ ſecondes.

COROLL. 7.

CXXI. Afin que le mouvement de rotation, ou la viteſſe $\sqrt{u}$, ne devienne pas trop rapide, ce qui pourroit cauſer un empêchement de la part de la réſiſtance de l'air, il faut prendre la quantité $\lambda \tang \varrho$ auſſi petite qu'il ſera poſſible, ſur tout lorsque la hauteur h eſt aſſés grande. Or on ne ſauroit mettre cette valeur moindre que l'unité, puisque la viteſſe de rotation de l'anneau EE, eſt conſtamment $= \frac{b\sqrt{u}}{c} = \sqrt{\frac{1}{2}h}$, donc, pour que la viteſſe en F ne devienne pas plus grande, il faut qu'il ſoit $b = c$, & partant $\lambda \tang \varrho = 1$.

COROLL. 8.

CXXII. Cependant dans ce cas il ſeroit à craindre, qu'on ne pût pratiquer dans le fond des ouvertures F, auſſi larges qu'il faut, ou qu'il fut $ff = \frac{1}{\lambda} ee$, à moins qu'on ne donne au nombre λ une valeur plus grande. Mais alors l'angle ϱ devroit être pris trop petit, & on auroit à craindre l'inconvénient des diaphragmes, dont les canaux Ji doivent être ſéparés entr'eux. Par cette raiſon il conviendra de donner à $\lambda \tang \varrho$ une valeur plus grande que l'unité, par exemple $\lambda \operatorname{tg} \varrho = \frac{3}{2}$; & mettre $\lambda = 3$; $\tang \varrho = \frac{1}{2}$, ou l'angle $\varrho = 26^\circ, 34'$. Alors on aura: $ee = \frac{2D}{\sqrt{2gh}}$; $cc = \mu ee$; $b = \frac{3}{2}c$; $ff = \frac{1}{3}ee$; $ii = \frac{ee}{\sqrt{5}}$, & $a = \frac{5}{8}h$, & chaque tour de la machine s'acheveroit en $\frac{2\pi c}{\sqrt{2gh}}$ ſecondes.

SCHOLIE.

CXXIII. Cet arrangement de la machine paroit le plus commode pour la plûpart des circonſtances, qu'on peut rencontrer. Dans ce ce cas donc les diaphragmes, qui féparent les canaux Ji, feront un angle de 26°, 34′, dont la tangente eft $= \frac{1}{2}$, & ces canaux avec leurs diaphragmes Ji feront difpofés, comme la Fig. 5. les repréfente. Or pour calculer les quantités $\frac{2}{\sqrt{2gh}}$ & $\frac{2\pi}{\sqrt{2gh}}$ pour chaque nombre de pieds de la hauteur que la chute h peut contenir, j'ai ajouté ici la table fuivante, où je fuppofe la hauteur h donnée en pieds de Rhin:

la hauteur h en pieds de Rhin	valeur de $\frac{2}{\sqrt{2gh}}$	valeur de $\frac{2\pi}{\sqrt{2gh}}$
1	0,35777	1,12397
2	0,25298	0,79477
3	0,20656	0,64892
4	0,17888	0,56198
5	0,16000	0,50265
6	0,14606	0,45886
7	0,13523	0,42482
8	0,12649	0,39738
9	0,11925	0,37465
10	0,11314	0,35543
11	0,10787	0,33889
12	0,10328	0,32446
13	0,09923	0,31173
14	0,09562	0,30040
15	0,09238	0,29021
16	0,08944	0,28098
17	0,08677	0,27260
18	0,08433	0,26492
19	0,08208	0,25787
20	0,08000	0,25132

Or alors la dépenſe d'eau fournie par ſeconde D doit auſſi être exprimée en pieds cubiques, & on trouvera les largeurs ee, ff, ii en pieds quarrés : comme nous allons voir dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE I.

CXXIV. *La dépenſe d'eau fournie par ſeconde étant* $=1$ *pied cubique, & la hauteur de la chûte* $h=6$ *pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuſe.*

Puisque $h=6$, la hauteur du vaiſſeau mobile AC ſera $=2\frac{1}{4}$ pieds, & partant la hauteur du reſervoir $HA=3\frac{3}{4}$ pieds. Enſuite, à cauſe de $D=1$, on aura $ee=0,14606$ pieds quarrés; donc $ff=0,04868$ pieds quarrés. Enſuite on pourra bien prendre le rayon $c=1$ pied, & on aura $b=1\frac{1}{2}$ pieds, & le tems d'une révolution de la machine ſera $0,45886$ ſecondes, ou de $27\frac{1}{2}$ tierces.

Ou bien ſi l'on veut prendre $c=2$ pieds, & $b=3$ pieds, le tems d'une révolution ſera de 55 tierces, & en quelque raiſon qu'on prenne c plus grand, tant le rayon b que le tems d'une révolution ſeront augmentés dans la même raiſon. Or l'effet que cette machine ſera capable de produire eſt $=1.6=6$.

EXEMPLE II.

CXXV. *La dépenſe d'eau fournie par ſeconde étant* $=2$ *pieds cubiques, & la hauteur de la chûte* $h=6$ *pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuſe.*

Puisque $h=6$, la hauteur du vaiſſeau mobile AC ſera comme auparavant $a=2\frac{1}{4}$ pieds, & la hauteur du reſervoir $HA=3\frac{3}{4}$ pieds. Enſuite, à cauſe de $D=2$, on aura l'eſpace annulaire $ee=0,29212$ pieds quarrés, & $ff=0,09737$ pieds quarrés. On pourra encore prendre $c=1$ pied, & $b=1\frac{1}{2}$ pieds, & le tems d'une révolution de la machine ſera de $27\frac{1}{2}$ tierces.

Si

Si l'on vouloit prendre $c = 2$ pieds, on auroit $b = 3$ pieds, & la machine devroit tourner en 55 tierces. Or l'effet de cette machine sera toujours double de celui du cas précedent, & partant $= 12$.

EXEMPLE III.

CXXVI. *La dépense d'eau fournie par seconde étant* 1 *pied cubique, & la hauteur de la chûte* h $= 12$ *pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h = 12$ pieds, la hauteur du vaisseau mobile sera $AC = 4\frac{1}{2}$ pieds, & de l'immobile $HC = 7\frac{1}{2}$ pieds. Ensuite, à cause de $D = 1$, l'espace annulaire EE doit être pris $= 0,10328$ pieds quarrés, donc $ff = 0,03443$ pieds quarrés. Donc si l'on donne au rayon $c = 1$ pied pour avoir $b = 1\frac{1}{2}$ pied, le tems d'une révolution de la machine doit être de $0,32446$ secondes, ou de $19\frac{1}{2}$ tierces: ou bien elle devroit faire environ trois tours dans une seconde, & l'effet de la machine seroit $= 12$.

Si l'on vouloit prendre $c = 2$ pieds, & $b = 3$ pieds, le tems d'une révolution devroit être de 39 tierces.

EXEMPLE IV.

CXXVII. *La dépense d'eau fournie par seconde étant 2 pieds cubiques, & la hauteur de la chûte* h $= 12$ *pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h = 12$ pieds, la hauteur du vaisseau mobile sera $AC = 4\frac{1}{2}$ pieds, & de l'immobile $HC = 7\frac{1}{2}$ pieds. Ensuite, à cause de $D = 2$, l'espace annulaire EE doit être pris de $ee = 0,20656$ pieds quarrés, & $ff = 0,06885$ pieds quarrés. Donc, si l'on prend $c = 1$ pieds & $b = 1\frac{1}{2}$ pieds, le tems d'une révolution de la machine sera $19\frac{1}{2}$ tierces. Or si l'on prenoit $c = 2$ pieds, & $b = 3$ pieds, le tems d'une révolution seroit de 39 tierces, mais l'effet sera toujours $= 24$.

EXEMPLE V.

CXXVIII. *La dépense d'eau fournie par seconde étant de* 10 *pieds cubiques, & la hauteur de la chûte* $h = 8$ *pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h = 8$ pieds, la hauteur du vaisseau inférieur mobile sera $AC = 3$ pieds, & du réservoir $HA = 5$ pieds. Ensuite D étant $= 10$, & $h = 8$, l'espace annulaire doit être $ee = 1,26490$ pieds quarrés, & la somme de toutes les embouchures $ff = 0,42163$ pieds quarrés. Donc, puisque cc doit être plus grand que ee, si l'on prend $c = 2$ pieds, & $b = 3$ pieds, le tems d'une révolution doit être de $2 \cdot 0,39738 = 0,79476$ secondes $= 47\frac{2}{3}$ tieres. Or l'effet de la machine sera $= 10 \cdot 8 = 80$.

SCHOLIE.

CXXIX. Maintenant il ne sera plus difficile d'arranger une telle machine hydraulique pour chaque cas proposé. Car ayant la dépense d'eau D fournie par seconde, & la hauteur de la chûte h, toutes les parties de la machine seront déterminées. Ensuite si la résistance, qu'on veut vaincre par cette machine, ou le fardeau qu'on veut élever, est $= R$, où R marque un volume d'eau, dont le poids lui est égal, la machine sera capable de mouvoir cette résistance R dans une seconde par un espace $= \frac{Dh}{R}$. Donc, le point F faisant dans une seconde l'espace $= 2\sqrt{gu} = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$, la vitesse de la résistance sera à celle des points F comme $\frac{Dh}{R}$ à $\frac{2}{3}\sqrt{2gh}$, ou comme ff à $\frac{R}{h}$. Donc, si l'on applique la machine à cette résistance par le moyen d'un tambour, dont le rayon soit $= k$, & qui fasse une révolution, pendant que la machine en fait n, la raison trouvée $\frac{Dh}{R} : \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$ doit être $= k : nb$, d'où l'on voit que $\frac{2}{3}Rk\sqrt{2gh} = nDbh = \frac{3}{2}nDch$;

ou

ou $Rk = \frac{nDch}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}nceeh$. Ou bien, posant le tems d'une révolution de la machine $= \tau$ secondes, à cause de $\frac{c}{\sqrt{2gh}} = \frac{\tau}{2\pi}$, on aura $\frac{n\tau}{2\pi}Dh = Rk$, & partant $\frac{k}{n} = \frac{\tau Dh}{2\pi R}$; & de là on tirera aisément les plus commodes valeurs pour k & n, d'où l'on réglera ensuite l'application de la machine à la résistance proposée. Souvent, comme dans les moulins, on ne connoit que le moment de la résistance, qui est exprimé ici par Rk: donc si Rk est le moment de la résistance d'une meule, on aura d'abord le nombre $n = \frac{2\pi Rk}{\tau Dh}$, qui marque combien de fois on doit faire tourner la machine, pendant que la meule fait un tour.

PRIN-