1756

Réflexions sur un problème de geométrie traité par quelques geométres et qui est néanmoins impossible

Leonhard Euler

RÉFLEXIONS
SUR UN PROBLÈME DE GEOMÉTRIE
TRAITÉ PAR QUELQUES GEOMÉTRES, ET QUI EST NÉANMOINS IMPOSSIBLE.

PAR M. EULER.

Il y a des personnes qui prétendent, que la Geométrie & l'Analyse ne demandent pas beaucoup de raisonnemens; ils s'imaginent que les régles, que ces Sciences nous prescrivent, renferment déjà les raisonnemens nécessaires pour parvenir à la solution, & qu'on n'a qu'à executer les opérations conformément à ces régles, sans se mettre en peine des raisonnemens, sur lesquels ces régles sont fondées. Cette opinion, si elle étoit fondée, seroit bien contraire au sentiment presque général, où l'on regarde la Geométrie & l'Analyse comme les moyens les plus propres à cultiver l'esprit, & à mettre en exercice la faculté de raisonner. Quoique ces gens ayent une teinture des Mathématiques, il faut pourtant qu'ils se soient peu appliqués à la resolution des problèmes un peu difficiles: car ils se seroient bientôt apperçus, que la seule application des régles prescrites est d'un fort foible secours pour résoudre ces sortes de problèmes, & qu'il faut auparavant examiner bien soigneusement toutes les circonstances du problème, & faire là dessus quantité de raisonnemens, avant qu'on puisse employer ces régles, qui renferment le reste des raisonnemens, dont nous ne nous appercevons presque point, en poursuivant le calcul. C'est cette préparation nécessaire avant que de recourir au calcul, qui exige très souvent une plus longue suite de raisonnemens, que peut-

être

être aucune autre Science n'exige jamais ; & où l'on a ce grand avantage, qu'on peut s'assurer de leur justesse, pendant que dans les autres Sciences on est souvent obligé de s'arrêter à des raisonnemens peu convaincans. Mais aussi le calcul même, quoique l'Analyse en prescrive les régles, doit partout être soutenu par un raisonnement solide, au défaut duquel on risque de se tromper à tout moment. Le Geométre trouve donc par tout occasion d'exercer son esprit par des raisonnemens, qui le doivent conduire dans la solution de tous les problèmes difficiles, qu'il entreprend ; & à moins qu'il ne soit bien sur ses gardes, il est à craindre, qu'il ne tombe sur des solutions fausses. Un problème de Geométrie qu'on trouve amplement traité dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, & dans les Actes de Leipzig, peut servir d'une preuve bien remarquable de ce que je viens d'avancer ; ce problème étoit conçu dans ces termes :

Fig. 1. *Trouver une ligne courbe* MAN *autour d'un point fixe* C, *telle, que si l'on tire par ce point* C *une ligne droite quelconque* MCN, *qui coupe la courbe en deux points* M & N, *les tangentes* MT & NT *menées à ces points fassent entr'elles en* T *un angle donné.*

Quoiqu'on trouve de ce problème diverses solutions, je soutiens qu'il est toujours impossible, à moins que l'angle T ne soit, ou droit, ou nul ; à l'exception de ces deux cas, les solutions prétenduës péchent contre le principe de continuité, qu'on ne doit jamais perdre de vuë dans ces sortes de problèmes, où il s'agit de deux points, qui doivent appartenir à la même ligne courbe. C'est ce grand principe de continuité qu'il faut étudier à fond, avant qu'on puisse se promettre un bon succès dans ces recherches ; & c'est de là, qu'on doit puiser non seulement les fondemens de la solution, mais aussi le jugement, si le problème est possible ou non ? Pour déveloper solidement tout ce qui regarde le problème en question, je m'en vais faire là dessus les réflexions suivantes.

1. Réflexion.

Pour représenter une telle courbe, en cas qu'elle soit possible, je conçois une ligne fixe CA tirée du point C, autour duquel on fasse tourner une ligne CM, dans le sens AM, de sorte que l'angle ACM, s'ouvre de plus en plus, jusqu'à ce que la ligne CM, après avoir achevé un tour entier, revienne dans la situation CA. Et d'abord je remarque qu'à chaque angle ACM doit répondre à une seule valeur de la ligne CM, puisqu'elle ne doit couper la courbe que dans un seul point M; car si elle la coupoit en plusieurs, cela seroit contraire à la nature de la question, qui suppose que chaque ligne MCN prolongée de part & d'autre du point C ne rencontre la courbe qu'en deux points M & N. Or je distingue ici les deux parties CM & CN de cette ligne droite, entant que la partie CM répond à l'angle ACM, & l'autre CN à l'angle pointu, qui surpasse celui-là de deux droits.

2. Réflexion.

Posant donc l'angle $ACM = \phi$, & la droite $CM = z$, la nature de la courbe déterminera z par une certaine fonction de l'angle ϕ, ou des quantités qui en dépendent. Telles quantités sont le sinus & cosinus de l'angle ACM, qui sont d'autant plus propres à former la détermination de la ligne $CM = z$, puisqu'elles reprennent toutes les fois les mêmes valeurs, que la ligne mobile CM revient après un ou plusieurs tours dans la même situation CM; au lieu que si l'angle lui-même $ACM = \phi$ entroit dans cette détermination, il en résulteroit après chaque tour une nouvelle valeur de la ligne CM. Il ne faut pas non plus, que les sinus ou cosinus de la moitié, ou du tiers, ou quart &c. de l'angle ACM entrent dans la détermination de la ligne $CM = z$, puisque ces quantités donneroient à la fois deux ou plusieurs valeurs pour la ligne CM. Pour éviter donc ces cas contraires à la nature du problème, il faut que la ligne $CM = z$ soit exprimée par une fonction uniforme de $\sin\phi$ & $\cos\phi$.

3. Ré-

3. RÉFLEXION.

Concevons donc que la ligne $CM = z$ soit égale à une fonction uniforme de sin ϕ & cos ϕ ; & en vertu du principe de continuité, si l'on met pour ϕ un autre angle quelconque $AC\mu = \psi$, & partant sin ψ & cos ψ pour sin ϕ & cos ϕ, ladite fonction donnera la valeur de la ligne $C\mu$, qui répond à l'angle $AC\mu = \psi$. Donc, pour arriver à la droite CN, qui est en opposition avec la première CM, il faut augmenter l'angle ϕ de deux angles droits ; ou bien ladite fonction donnera la quantité de la ligne CN, lorsqu'on met au lieu de l'angle ϕ l'angle $180° + \phi$. Or puisque $\sin(180° + \phi) = -\sin\phi$, & $\cos(180° + \phi) = -\cos\phi$, si dans la fonction de sin ϕ & cos ϕ, qui exprime la quantité de la ligne $CM = z$, on met pour sin ϕ & cos ϕ leurs négatifs $-\sin\phi$ & $-\cos\phi$, la fonction exprimera la quantité de la ligne droite CN. Et partant si nous nommons cette ligne $CN = z'$, la fonction z se changera en z', lorsqu'on mettra $-\sin\phi$ & $-\cos\phi$ au lieu de sin ϕ & cos ϕ.

4. RÉFLEXION.

Mais, pour nous approcher davantage de la question proposée, qui demande que l'angle T soit constant, il sera bon d'introduire dans le calcul l'angle CMT, que fait la droite CM, avec la tangente de la courbe MT. La suite de nos recherches nous fera voir, qu'il est le plus à propos d'introduire la tangente de cet angle CMT, qui soit $= t$. Or il est aisé de voir qu'il y aura $t = \frac{zd\phi}{dz}$: au lieu que le sinus & cosinus de cet angle CMT auroient été exprimés par des formules irrationnelles $\frac{zd\phi}{\sqrt{(dz^2 + zzd\phi^2)}}$, & $\frac{dz}{\sqrt{(dz^2 + zzd\phi^2)}}$, qui à cause de l'ambiguité du signe radical introduiroient une ambiguité dans le calcul, que nous devons éviter : ce qui est la raison, qu'il convient de se servir plutôt de la tangente de l'angle CMT.

5. RÉ-

5. RÉFLEXION.

Ayant donc posé la tangente de l'angle CMT $= t$, puisque $t = \frac{z d\phi}{dz}$, si z est une fonction de sin ϕ & cos ϕ, comme nous supposons, il est évident que t sera aussi exprimé par une fonction de sin ϕ & cos ϕ. Nous pourrons nous donc passer d'abord dans le calcul de la longueur de la ligne CM $= z$, & considérer immédiatement la quantité t comme une fonction de sin ϕ & cos ϕ: & ce que nous avons remarqué sur l'uniformité de la fonction z, aura aussi lieu à l'égard de la fonction t, qui doit être telle, qu'à chaque angle ACM $= \phi$, il ne réponde qu'une valeur pour t, ou pour la tangente CMT. Donc, si nous mettons pour ϕ un autre angle quelconque AC$\mu = \psi$, la même fonction donnera alors la tangente de l'angle CμM, que la droite Cμ fait en μ avec la courbe.

6. RÉFLEXION.

Mais, puisque chaque ligne CM fait avec la courbe deux angles, l'un CMT en avant, & l'autre CMμ en suite du mouvement, il faut bien fixer d'abord, lequel de ces deux est introduit dans le calcul. Cela dépend bien de notre volonté, mais il faut bien prendre garde, qu'après avoir choisi l'un ou l'autre pour une situation de la droite CM, on suive pour toutes les autres situations le même choix. Ayant donc pris $t = \frac{z d\phi}{dz}$ pour marquer la tangente de l'angle, que fait la droite CM avec la courbe en avant par rapport au mouvement de gyration, que nous supposons à la ligne mobile CM, nous devons suivre dans toute autre situation la même régle. Ainsi mettant ψ pour ϕ, la valeur de t donnera la tangente de l'angle CμM; & lorsqu'on tourne la ligne CM jusqu'à parvenir à CN, alors l'expression de t donnera la tangente de l'angle CNν, & non pas celle de l'angle CNT.

7. RÉFLEXION.

Soit donc t' la tangente de l'angle $CN\nu$, que fait la ligne CN avec la courbe en avant ; & de quelque maniere que t, ou la tangente de l'angle CMT soit exprimée par sin ϕ & cof ϕ, cette même expreſſion fournira en vertu du principe de continuité la valeur de t', ſi l'on met au lieu de l'angle ϕ, l'angle $180° + \phi$, ou bien ſi l'on met $-$ sin ϕ & $-$ cof ϕ au lieu de sin ϕ & cof ϕ. Donc ſi nous ſuppoſons que t eſt égal à une certaine fonction de sin ϕ & cof ϕ, alors t' ſera égal à une ſemblable fonction de $-$ sin ϕ & $-$ cof ϕ ; ou la fonction t' reſultera de la fonction t, ſi l'on prend dans celle-cy tant sin ϕ que cof ϕ négatifs. D'où l'on comprend réciproquement, que la fonction t' fournira la fonction t, ſi l'on y prend auſſi négativement le sin ϕ & cof ϕ : & partant t & t' ſont deux fonctions de sin ϕ & cof ϕ tellement rapportées entr'elles que l'une nait de l'autre, en poſant $-$ sin ϕ & $-$ cof ϕ au lieu de sin ϕ & cof ϕ.

8. RÉFLEXION.

On trouve donc de la tangente t de l'angle CMT, celle de l'angle $CN\nu$, ou t', en prenant les sin ϕ & cof ϕ négativement : & puiſque t' marque la tangente de l'angle $CN\nu$, la tangente de l'angle CNT ſera $= -t'$. Or le problème exige, que la ſomme des angles $CMT + CNT$ ſoit conſtante, ou ſi nous poſons l'angle $MTN = \alpha$, il faut qu'il ſoit

$$\alpha = CN\nu - CMT.$$

Donc, puiſque tang $CN\nu = t'$ & tang $CMT = t$, nous aurons:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{t' - t}{1 + tt'}.$$

Et partant pour réſoudre le problème, il faut chercher une telle fonction de sin ϕ & cof ϕ, que poſant $-$ sin ϕ & $-$ cof ϕ pour $+$ sin ϕ & $+$ cof ϕ, il en réſulte t' en ſorte qu'il devienne

$$\frac{t' - t}{1 + tt'} = \text{tang}\,\alpha, \text{ ou } t' - t = \text{tang}\,\alpha - tt'\,\text{tang}\,\alpha.$$

9. RÉ-

9. Réflexion.

Ayant établi un tel rapport entre les deux fonctions t & t', que l'une nait de l'autre en prenant négativement les élémens $\sin\phi$ & $\cos\phi$, dont elles sont fonctions : il s'agit de déterminer la nature de ces fonctions, afin qu'il soit

$$t' - t = \text{tang}\,\alpha + tt'\,\text{tang}\,\alpha, \text{ ou } t' - t - tt'\,\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\alpha.$$

Pour tirer commodément de cette équation l'une & l'autre quantité t & t', je la multiplie par tang α, & j'ajoute de part & d'autre l'unité, d'où j'obtiens

$$1 + t'\,\text{tang}\,\alpha - t\,\text{tang}\,\alpha - tt'\,\text{tang}\,\alpha^2 = 1 + \text{tang}\,\alpha^2 = \text{sec.}\,\alpha^2.$$

Je fais ces opérations, pour rendre le premier membre résoluble en deux facteurs, où les deux quantités t & t' soient séparées, car on aura : $$(1 - \text{tang}\,\alpha)(1 + t'\,\text{tang}\,\alpha) = \text{sec.}\,\alpha^2,$$
& voyons, comment on doit satisfaire à cette équation.

10. Réflexion.

Donc, si nous posons $1 - t\,\text{tang}\,\alpha = M\,\text{sec.}\,\alpha$, il faut de nécessité que l'autre soit $1 + t'\,\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{M}\,\text{sec.}\,\alpha$: & partant nous aurons : $$t\,\text{tang}\,\alpha = 1 - M\,\text{sec.}\,\alpha, \quad \& \quad t'\,\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{M}\,\text{sec.}\,\alpha - 1.$$

Supposons maintenant que M change en M', si l'on prend négativement les sinus & cosinus de ϕ ; & puisqu'alors t change en t', & t' en t, nous aurons encore ces équations :

$$t'\,\text{tang}\,\alpha = 1 - M'\,\text{sec.}\,\alpha, \quad \& \quad t\,\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{M'}\,\text{sec.}\,\alpha - 1.$$

Celles-cy étant combinées avec celles-là donnent

$$2 = M\,\text{sec}\,\alpha + \frac{1}{M'}\,\text{sec.}\,\alpha, \quad \& \quad 2 = M'\,\text{sec.}\,\alpha + \frac{1}{M}\,\text{sec.}\,\alpha,$$

d'où l'on tire $M' = M$, & de plus $2M = (MM + 1)\,\text{sec.}\,\alpha$,

ce

ce qui fournit une valeur déterminée pour $M = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - \text{sec.}\,\alpha^2)}}{\text{sec.}\,\alpha}$, laquelle étant imaginaire montre ſuffiſamment, qu'il eſt impoſſible de réſoudre le problème en général. Car à cauſe de $\sqrt{(1 - \text{sec.}\,\alpha^2)} = \sqrt{-1}.\text{tang}\,\alpha$, il en ſuivroit $t = \pm\sqrt{-1}$, ou bien la courbe AM ſeroit imaginaire.

11. Réflexion.

C'eſt donc en vertu du principe de continuité, qu'on doit prononcer, que le problème conçû généralement n'admet aucune ſolution; & partant les ſolutions prétendues, que quelques uns en ont données, ſont en contradiction avec ce principe, & ne donnent pas de courbes continues, qui ſatisfaſſent à la queſtion; ce qu'il ſera aiſé de faire voir, en comparant ces ſolutions avec les maximes que je viens de déduire du principe de continuité. Auſſi ne trouve-t-on aucune de ces ſolutions appliquée à une courbe déterminée, pour qu'on en puiſſe voir, de quelle maniere les conditions du problème ſeroient remplies, ſi ce n'eſt pour le cas, où l'angle T formé par les tangentes eſt droit. Mais dans ce cas les raiſons, d'où je viens de conclure l'impoſſibilité du problème, ceſſent, & font voir évidemment, que le problème devient poſſible dans ce cas, & qu'il admet même une infinité de ſolutions, parmi lesquelles il s'en trouve de fort remarquables. Cette impoſſibilité ſe perd auſſi dans le cas, où l'angle T évanouit, ce qu'il ſera important de déveloper plus ſoigneuſement.

12. Réflexion.

Je dis donc que les raiſons, qui viennent de nous convaincre de l'impoſſibilité du problème en général, perdent toute leur force dans le cas, où l'angle $T = \alpha$ eſt ſuppoſé droit. Car, puisqu'alors la ſecante de l'angle α devient infinie, nos deux équations pour M & M′ ſe réduiſent à celles-cy:

$$0 = M + \frac{1}{M'}, \quad \& \quad 0 = M' + \frac{1}{M},$$

aux-

auxquelles satisfait la même condition $MM' + 1 = 0$. Donc pour le cas, où l'angle α est droit, on n'a qu'à chercher une telle fonction de sin Φ & cos Φ pour M, qui en prenant sin Φ & cos Φ négativement devienne M', ensorte qu'il soit $MM' + 1 = 0$, & une telle fonction trouvée pour M fournit d'abord à cause de sec. $\alpha = \mathrm{tg}\, \alpha = \infty$, pour une courbe satisfaisante cette équation $t = -M$, & partant

$$\frac{z\,d\Phi}{dz} = -M, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z} = -\frac{d\Phi}{M}.$$

13. Réflexion.

Pour le cas où l'angle α est $= 0$, je lui ai donné l'exclusion par les opérations faites dans la 5me Réflexion, y ayant multiplié notre équation par tang α, qui évanouït dans ce cas. Il faut donc traiter ce cas séparément, & commencer par la première équation, qui posant $\alpha = 0$ donne d'abord $t' - t = 0$, ou $t' = t$: d'où à cause de $t = \frac{z\,d\Phi}{dz}$, & $t' = \frac{z'\,d\Phi}{dz'}$, l'on tire:

$$\frac{z\,d\Phi}{dz} = \frac{z'\,d\Phi}{dz'}, \text{ ou } \frac{dz}{z} = \frac{dz'}{z'}, \text{ \& partant } z' = z.$$

Il faut donc que chaque droite MCN soit partagée également en C, ou que le point C soit le centre de la courbe: de sorte que toute courbe douée d'un centre fournisse une solution de ce cas. Ce cas admet donc une infinité de solutions, & même par des courbes algébriques, qu'il est fort facile de trouver, & par cette raison je ne m'y arrêterai pas plus long tems.

14. Réflexion.

A moins donc que l'angle T formé par les deux tangentes MT & NT ne soit, ou droit, ou nul, le problème est toujours impossible, de quelque maniere qu'on le regarde; & on ne sauroit jamais trouver une courbe continue, qui donneroit cet angle T constant & oblique. Il est donc d'autant plus remarquable, que ce même problè-

me

me devient possible dans le cas, où l'angle T est droit; & il mérite d'autant plus, que j'en dévelope la solution fournie par les réflexions précedentes, que les solutions, que d'autres en ont données, sont envelopées dans les solutions prétenduës générales, de sorte que ce n'est que par hazard, qu'elles deviennent justes dans ce cas. Il est aussi à remarquer, que dans ce cas il y a même une infinité de courbes algébriques, qui satisfassent, parmi lesquelles se trouve la parabole, dont le foyer répond au point C. Or la méthode de trouver ces courbes algébriques demande une adresse particuliere, que je m'en vais expliquer.

PROBLÈME.

Autour du point C *décrire la courbe* MAN, *que tirant par* C *des droites quelconques* MCN, *qui coupent la courbe en deux points* M & N, *les tangentes* MT & NT *menées à ces deux points soient entr'elles perpendiculaires, ou l'angle* MTN *droit.*

SOLUTION.

Ayant tiré par C une ligne fixe CA, posons l'angle $ACM = \phi$, la droite $CM = z$, & la tangente de l'angle $CMT = t$, de sorte que $t = \frac{z d\phi}{dz}$. Alors tout revient à trouver de telles fonctions M de $\sin\phi$ & $\cos\phi$, qui si l'on prend négativement tant $\sin\phi$ que $\cos\phi$, elles changent en M' en sorte qu'il soit $MM' + 1 = 0$; ou puisque $t = -M$ & $t' = -M'$ & partant $tt' + 1 = 0$, la quantité t doit aussi être une telle fonction de $\sin\phi$ & $\cos\phi$, qu'en écrivant $-\sin\phi$ & $-\cos\phi$, au lieu de $+\sin\phi$ & $+\cos\phi$, elle change en sorte en t', qu'il soit $tt' + 1 = 0$. Voyons donc quelles fonctions de $\sin\phi$ & $\cos\phi$ ont cette propriété, & d'abord se présentent celles-cy:

$t =$

$$t = \pm \frac{\sin\Phi}{1-\cos\Phi} \quad \& \quad t = \pm \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi}, \text{ car :}$$

$$t' = \mp \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi} \quad \& \quad t' = \mp \frac{\sin\Phi}{1-\cos\Phi}, \text{ donc}$$

$$tt' = -\frac{\sin\Phi^2}{1-\cos\Phi^2} = -1 \quad \& \quad tt' = -\frac{\sin\Phi^2}{1-\cos\Phi^2} = -1.$$

Voilà donc la première fonction convenable pour exprimer la valeur de t :

I. Formule $$t = \pm \frac{\sin\Phi}{1\pm\cos\Phi}.$$

On voit aussi que des puissances quelconques de cette formule, dont les exposans sont des nombres impairs, ou même des fractions, dont le numerateur & dénominateur sont impairs, satisfont également. Donc, si m & n marquent des nombres impairs quelconques, nous aurons :

II. Formule $$t = \pm \left(\frac{\sin\Phi}{1\pm\cos\Phi}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Ensuite, par la composition des sinus & cosinus des angles multiples, on sait que, lorsque l'exposant de la multiplication est un nombre impair λ, tant $\sin\lambda\Phi$ & $\cos\lambda\Phi$ changent de signes, lorsqu'on prend les $\sin\Phi$ & $\cos\Phi$ négativement. Donc, prenant pour λ un nombre impair quelconque, nous aurons :

III. Formule $$t = \pm \frac{\sin\lambda\Phi}{1\pm\cos\lambda\Phi}.$$

Comme cette formule résulte de la première en posant l'angle $\lambda\Phi$ pour Φ, de même on tirera de la seconde formule, en marquant par m & n des nombres impairs quelconques,

IV. Formule $$t = \pm \left(\frac{\sin\lambda\Phi}{1\pm\cos\lambda\Phi}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Cette formule renfermant toutes les précedentes, il est bon de faire voir

voir, comme elle satisfait. Qu'on prenne négativement le sin ϕ & cos ϕ, & on aura $t' = \pm\left(\frac{-\sin\lambda\phi}{1\mp\cos\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}}$, & partant

$$tt' = +\left(\frac{-\sin\lambda\phi^2}{1-\cos\lambda\phi^2}\right)^{\frac{m}{n}} = +(-1)^{\frac{m}{n}} = -1.$$

Or outre ces formules on peut en donner une infinité d'autres, qui ont la même propriété. Que P signifie une fonction quelconque paire de sin ϕ & cos ϕ, ou telle qui demeure la même, quoiqu'on prenne sin ϕ & cos ϕ négativement: or que Q soit une fonction impaire de sin ϕ & cos ϕ, qui devienne $-Q$ en prenant sin ϕ & cos ϕ négativement; & il est clair que cette expression $\frac{P+Q}{P-Q}$, devient par ce changement $= \frac{P-Q}{P+Q}$, de sorte que le produit de ces deux valeurs soit $= 1$. Une telle expression ne seroit donc pas propre pour t, mais il est évident, qu'on en peut multiplier les formules données, sans qu'elles perdent leur propriété. D'où si P marque une fonction paire & Q une fonction impaire de sin ϕ & cos ϕ, nous aurons les formules suivantes beaucoup plus générales:

V. Formule $t = \pm \frac{\sin\phi}{1\pm\cos\phi} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

VI. Formule $t = \pm\left(\frac{\sin\phi}{1\pm\cos\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

VII. Formule $t = \pm \frac{\sin\lambda\phi}{1\pm\cos\lambda\phi} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

VIII. Formule $t = \pm\left(\frac{\sin\lambda\phi}{1\pm\cos\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

Il

Il eſt auſſi clair qu'une puiſſance quelconque de $\frac{P+Q}{P-Q}$, peut être employée avec le même ſuccès : donc prenant pour μ & ν des nombres quelconques tant pairs qu'impairs, pendant que m & n & λ ne marquent que des nombres impairs ; d'où nous obtiendrons encore les quatre formules ſuivantes :

IX. Formule $\quad t = \pm \frac{\text{ſin}\,\phi}{1 \pm \text{coſ}\,\phi} \cdot \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$

X. Formule $\quad t = \pm \left(\frac{\text{ſin}\,\phi}{1 \pm \text{coſ}\,\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$

XI. Formule $\quad t = \pm \frac{\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \pm \text{coſ}\,\lambda\phi} \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$

XII. Formule $\quad t = \pm \left(\frac{\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \pm \text{coſ}\,\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$

Donc, chacune de ces formules étant égalée à $\frac{z\,d\phi}{dz}$ fournira une ſolution du problème ; & puiſque la derniere contient toutes les autres, elle nous fournit la ſolution générale ſuivante :

$$\frac{dz}{z} = \pm\, d\phi \left(\frac{1 \pm \text{coſ}\,\lambda\phi}{\text{ſin}\,\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

ou puiſque $\quad \frac{1 \pm \text{coſ}\,\lambda\phi}{\text{ſin}\,\lambda\phi} = \frac{\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \mp \text{coſ}\,\lambda\phi} \quad$ celle-cy,

$$\frac{dz}{z} = \pm\, d\phi \left(\frac{\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \pm \text{coſ}\,\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

laquelle, puisque les deux variables z & ϕ sont séparées, suffit pour construire toutes ces courbes, qui résolvent le problème.

COROLL. 1.

Dans ces équations on peut aussi l'angle PCM prendre pour ϕ: car, outre qu'il est indifférent de prendre la droite CA de l'autre côté, l'ambiguité du signe $\pm$ dont le différentiel $d\phi$ est affecté, ne change rien dans notre équation générale, quoiqu'elle produise toujours deux courbes differentes.

COROLL. 2.

Mais l'ambiguité du signe $\pm$ qui affecte $\cos\phi$, ne produit pas deux courbes differentes ; car, si un signe regarde l'angle $ACM = \phi$, l'autre donnera la même courbe pour l'angle $PCM = \phi$, puisque si le cosinus de l'un est positif, celui de l'autre devient négatif, le sinus demeurant le même.

COROLL. 3.

Ayant trouvé une équation entre la droite $CM = z$, & l'angle ACM ou $PCM = \phi$, il est aisé d'en tirer une équation entre les coordonnées ordinaires $CP = x$ & $PM = y$. Car d'abord on aura $z = \sqrt{(xx + yy)}$, & $\sin\phi = \frac{y}{z}$, & $\cos\phi = \frac{x}{z}$.

COROLL. 4.

De là il est clair, que si l'on trouve une équation algébrique entre z & le sinus & cosinus de l'angle ϕ, sans que l'angle ϕ même y entre par l'intégration; on parviendra aussi à une équation algébrique entre les coordonnées x & y; ou bien la courbe sera algébrique.

COROLL. 5.

Donc, pour trouver des courbes algébriques, il faut déterminer notre équation générale $\frac{dz}{z} = \pm d\phi \left(\frac{\sin\lambda\phi}{1 \pm \cos\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$

en

en ſorte, que l'intégrale du dernier membre devienne un logarithme d'une fonction de ſin Φ & coſ Φ. Car, toutes les fois que cette intégrale n'eſt pas réductible à un tel logarithme, la courbe ne ſauroit être algébrique.

Remarque.

A l'égard des courbes algébriques, ce problème eſt très remarquable: car au lieu que dans les autres problêmes de cette eſpece, où il s'agit des courbes algébriques qui leur ſatisfont, il faut rendre abſolument intégrables quelques formules différentielles; ce problème exige, qu'une formule différentielle devienne intégrale par les logarithmes, & cette circonſtance demande une adreſſe tout particuliere dans le calcul. J'ai bien donné autrefois des régles, par le moyen deſquelles on peut rendre intégrables des formules différentielles indéterminées; mais ces régles ne nous prêtent aucun ſecours dans la recherche des courbes algébriques, qui ſatisfont à ce problème. Il faut auſſi remarquer, que lorsqu'il entre dans l'intégrale l'angle Φ même, non ſeulement la courbe ne devient pas algébrique, mais elle ne remplira pas duëment les conditions du problème; parce qu'à chaque angle $ACM = \Phi$, la droite $CM = z$ obtiendra une infinité de valeurs différentes, ou bien chaque droite menée par le point C coupera la courbe dans une infinité de points, ce qui eſt contraire à l'enoncé du problème. De là il faut conclure, que les courbes algébriques ſont proprement celles, qui ſatisfont au problème: & partant ſa ſolution demande principalement des courbes algébriques, dont la recherche eſt par conſéquent très eſſentielle à la ſolution de ce problème. Or, puisqu'il eſt impoſſible de donner une ſolution générale, qui renferme toutes les courbes algébriques; il faut ſe contenter des ſolutions particulieres, dont je m'en vais déveloper les principales.

PROBLÈME PARTICULIER.

Trouver des courbes algébriques, qui ſatisfaſſent au problème précedent, ou telles, qu'ayant mené par le point fixe C, *des droi-*

 tes

tes quelconques MCN, *elles coupent la courbe en ſorte en deux points* M & N, *que les tangentes* MT & NT *tirées à ces points, faſſent entr'elles en* T *un angle droit.*

I. Solution.

Soit dans la ſolution générale $\frac{\mu}{y} = 0$, $\lambda = 1$, & $\frac{m}{n} = 1$, pour avoir cette équation

$$\frac{dz}{z} = \pm \frac{d\phi \sin\phi}{1 \pm \cos\phi}$$

dont l'intégrale priſe par les logarithmes, ſera

$$lz = la \pm l(1 \pm \cos\phi).$$

De là on tirera deux courbes, ſelon que $l(1 \pm \cos\phi)$ eſt affecté, ou par le ſigne $+$, ou par $-$: mais l'ambiguité $\pm \cos\phi$ ne donne pas des courbes differentes, d'où il ſuffit de prendre $+ \cos\phi$.

Examinons ſéparément ces deux courbes.

1. *Courbe.* Que $l(1 + \cos\phi)$ ait le ſigne $-$, & en montant des logarithmes aux nombres, on aura:

$$z = \frac{a}{1 + \cos\phi}, \quad \text{ou} \quad z + x = a$$

à cauſe de $z \cos\phi = x$. Ayant donc $z = a - x$, en prenant les quarrés, à cauſe de $zz = xx + yy$, on trouvera:

$$yy = aa - 2ax, \quad \text{ou} \quad yy = 2a(\tfrac{1}{2}a - x),$$

d'où l'on voit que la courbe eſt une parabole, dont le parametre eſt $= 2a$, & que le point C ſe trouve dans ſon foyer. Savoir la parabole MAN a cette propriété, que menant par ſon foyer C une droite quelconque MCN, les tangentes MT & NT tirées aux points M & N faſſent en T un angle droit. Et poſant depuis l'axe AC l'Angle ACM $= \phi$ & CM $= z$, le parametre de la parabole
Fig. 2.

étant

étant $= 2a$, il y aura $z = \frac{a}{1+\cos\Phi} = CM$, & $CN = \frac{a}{1-\cos\Phi}$; de plus ayant tiré à l'axe CA la perpendiculaire $MP = y$, & posant $CP = x$ de sorte que $AP = \frac{1}{2}a - x$, on aura $yy = 2a(\frac{1}{2}a - x) = 2a.AP$, comme il est clair de la nature de la parabole, & l'angle CMT est toujours le complément de la moitié de l'angle ACM.

2. *Courbe.* Soit maintenant $z = a(1-\cos\Phi)$, qui résulte de $t = \frac{1-\cos\Phi}{\sin\Phi} = \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\Phi$, d'où l'on voit que dans cette courbe l'angle CMT est partout la moitié de l'angle ACM. Puisque $\cos\Phi = \frac{x}{z}$, on aura $zz = az - ax$, ou $xx+yy+ax = a\sqrt{(xx+yy)}$ & partant cette équation du quatrième ordre $(xx+yy)^2 + 2ax(xx+yy) = aayy$, d'où l'on peut voir, que cette courbe est l'épicycloïde décrite, lorsque le cercle mobile est égal à l'immobile, dont le point de rebroussement tient lieu du point fixe C. Mais la nature de la courbe & sa construction se tirent plus aisément de l'équation $z = a(1-\cos\Phi)$. D'où l'on voit que posant l'angle $ACM = \Phi$, il y a $CM = a(1-\cos\Phi)$ & $CN = a(1+\cos\Phi)$, de sorte que toutes les lignes MCN tirées par le point C sont égales entr'elles & $= CB$. Fi

II. Solution.

Qu'il demeure $\frac{\mu}{\nu} = 0$ & $\frac{m}{n} = 1$, mais qu'on prenne pour λ un nombre impair quelconque : de sorte qu'on ait,

ou $\frac{dz}{z} = + \frac{d\Phi \sin\lambda\Phi}{1+\cos\lambda\Phi}$, ou $\frac{dz}{z} = + \frac{d\Phi \sin\lambda\Phi}{1-\cos\lambda\Phi}$,

& l'une & l'autre formule fournira une infinité de courbes algébriques, dont nous examinerons les principales propriétés.

 1. *Cas.*

1. *Cas.* Soit donc $\frac{dz}{z} = + \frac{d\Phi \sin\lambda\Phi}{1+\cos\lambda\Phi}$, & l'intégration donne $lz = la - \frac{1}{\lambda} l(1+\cos\lambda\Phi)$, & partant

$$z^{\lambda} = \frac{a^{\lambda}}{1+\cos\lambda\Phi}, \quad \text{ou bien} \quad z = \frac{a}{\sqrt[\lambda]{(1+\cos\lambda\Phi)}}.$$

Prenons $\lambda = 3$, de forte que nous ayons $z = \frac{a}{\sqrt[3]{(1+\cos 3\Phi)}}$ & pour les différentes valeurs de l'angle Φ nous aurons :

si $\Phi = 0$; $z = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$		si $\Phi = 90°$; $z = a$
$\Phi = 30°$; $z = a$		$\Phi = 120°$; $z = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$
$\Phi = 60°$; $z = \infty$		$\Phi = 150°$; $z = a$
$\Phi = 90°$; $z = a$		$\Phi = 180°$; $z = \infty$

Fig. 4. D'où l'on voit que cette courbe a trois afymtotes Ca, Ce, Cf, qui fe croifent à angles égaux au point C, & trois branches égales, $\alpha A \alpha$, $\epsilon E \epsilon$, & $\zeta F \zeta$.

Par là on comprend, que fi l'on mettoit $\lambda = 5$, la courbe auroit cinq afymtotes, & autant de branches égales & femblables, ce qui s'étend à tous les autres nombres impairs pofés pour λ. Au refte fi $\lambda = 3$, la courbe fera du 6me ordre, fi $\lambda = 5$, du 10me & en général elle fera de l'ordre 2λ. Le cas précedent de la parabole y eft auffi compris en pofant $\lambda = 1$; mais dans ce cas la courbe n'a pas des branches afymtotiques, comme dans les autres cas, où λ eft un nombre impair plus grand que l'unité.

De

De ces courbes il faut aussi remarquer, que puisque $\frac{z\,d\Phi}{dz} = t = \frac{1+\cos\lambda\Phi}{\sin\lambda\Phi} = \cot \frac{1}{2}\lambda\Phi$, il y aura $CMT = 90^\circ - \frac{1}{2}\lambda\Phi$, ou $CMT = 90^\circ - \frac{\lambda}{2} . ACM$.

2. *Cas.* Soit maintenant $\frac{dz}{z} = + \frac{d\Phi \sin\lambda\Phi}{1-\cos\lambda\Phi}$: & on aura après l'intégration :

$$lz = la + \frac{1}{\lambda} l(1-\cos\lambda\Phi), \quad \text{ou} \quad z = a\sqrt[\lambda]{(1-\cos\lambda\Phi)}.$$

Posons $\lambda = 3$, de sorte que $z = a\sqrt[3]{(1-\cos 3\Phi)}$, & nous aurons pour les différentes valeurs de l'angle Φ :

si	$\Phi = 0^\circ$;	$z = 0$	si	$\Phi = 90^\circ$;	$z = a$
	$\Phi = 30$;	$z = a$		$\Phi = 120$;	$z = 0$
	$\Phi = 60$;	$z = a\sqrt[3]{2}$		$\Phi = 150$;	$z = a$
	$\Phi = 90$;	$z = a$		$\Phi = 180$;	$z = a\sqrt[3]{2}$

Cette courbe sera donc composée de trois feuilles égales & semblables, comme elles sont représentées dans la 5 me Figure, collées au point fixe C. Et si l'on pose $z = 5$ ou $z = 7$, on aura des courbes formées de 5 ou 7 feuilles aussi semblables entr'elles. Et partant ce cas fournit aussi une infinité de courbes algébriques, qui satisfont au problème. Puisque dans l'application de ces courbes on a

$$t = \frac{z\,d\Phi}{dz} = \frac{1-\cos\lambda\Phi}{\sin\lambda\Phi} = \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\lambda\Phi,$$

on voit qu'il y aura toujours $CMT = \frac{\lambda}{2} ACM$, & dans le cas de $\lambda = 3$, l'angle $CMT = \frac{3}{2} ACM$. Pour ce cas $\lambda = 3$, si l'on introduit les coordonnées $x = z \cos\Phi$ & $y = z \sin\Phi$, on aura

$$z^6 = a^3 z^3 - a^3 x^3 + 3a^3 xyy$$

&

& cette équation étant reduite à la rationalité, à cause de $zz = xx + yy$, montera au 12^{me} degré. D'où l'on conclut aisément, que mettant pour λ un nombre impair quelconque, la courbe sera du $4\lambda^{me}$ ordre.

III. SOLUTION.

Tant que nous posons $\frac{\mu}{\nu} = 0$, nous ne pourrons pas trouver d'autres cas, qui conduisent à des courbes algébriques, & il est évident par la forme des différentiels logarithmiques, que l'un & l'autre exposant $\frac{m}{n}$ & $\frac{\mu}{\nu}$ ne sauroient recevoir d'autre valeur que l'unité. D'où nous aurons cette équation à considérer

$$\frac{dz}{z} = \pm\, d\Phi . \frac{\sin\lambda\Phi}{1 \pm \cos\lambda\Phi} . \frac{P - Q}{P + Q}.$$

où P doit être une fonction paire, Q impaire de $\sin\Phi$ & $\cos\Phi$ & λ un nombre impair. Soit donc d'abord $\lambda = 1$, $P = 1$, & $Q = m\cos\Phi$, de sorte que nous ayons :

$$\frac{dz}{z} = \pm\, d\Phi . \frac{\sin\Phi}{1 + \cos\Phi} . \frac{1 - m\cos\Phi}{1 + m\cos\Phi}.$$

Concevons que ce multiplicateur de $\pm\, d\Phi$, se résolve en ces deux parties : $\frac{\alpha\sin\Phi}{1 + \cos\Phi} + \frac{\beta\sin\Phi}{1 + m\cos\Phi}$, & il faut qu'il soit

$$\sin\Phi - m\sin\Phi\cos\Phi = \alpha\sin\Phi + \beta\sin\Phi + (\beta + \alpha m)\sin\Phi\cos\Phi$$

& partant : $\alpha + \beta = 1$ & $\beta + \alpha m = -m$, donc :

$$\alpha(m-1) = -m-1 \quad \& \quad \alpha = \frac{m+1}{1-m} \quad \& \quad \beta = \frac{-2m}{1-m}.$$

De là nous obtiendrons :

$$\pm(1-m)\frac{dz}{z} = \frac{(m+1)\,d\Phi\sin\Phi}{1 + \cos\Phi} - \frac{2m\,d\Phi\sin\Phi}{1 + m\cos\Phi}.$$

&

& en prenant les intégrales :

$$\pm(1-m)\, l\frac{z}{a} = -\, l(1+\operatorname{cof}\phi)^{m+1} + l(1+m\operatorname{cof}\phi)^2,$$

$$\text{I.}\quad z^{1-m} = \frac{a^{1-m}(1+m\operatorname{cof}\phi)^2}{(1+\operatorname{cof}\phi)^{1+m}}\,;\qquad \text{II.}\quad z^{1-m} = \frac{a^{1-m}(1+\operatorname{cof}\phi)^{1+m}}{(1+m\operatorname{cof}\phi)^2}$$

& puisque l'on peut prendre pour m tout nombre poſſible, ces deux équations fourniſſent une infinité de ſolutions ſatisfaiſantes par des courbes algébriques. On voit d'abord que ſi l'on mettoit $m = -1$, on tomberoit dans la première ſolution, & que le cas $m = 1$ ne meneroit à rien. Dévelopons donc quelques uns des plus ſimples cas :

Cas 1. Soit $m = 2$, & on aura :

$$\text{I.}\quad \frac{z}{a} = \frac{(1+\operatorname{cof}\phi)^3}{(1+2\operatorname{cof}\phi)^2}\,;\qquad \text{II.}\quad \frac{z}{a} = \frac{(1+2\operatorname{cof}\phi)^2}{(1+\operatorname{cof}\phi)^3},$$

d'où pour differentes valeurs de l'angle ϕ, on tirera :

I.	II.
ſi $\phi = 0°$; $z = \frac{8}{9}a$	ſi $\phi = 0$; $z = \frac{9}{8}a$
$\phi = 30°$; $z = \frac{7+4\sqrt{3}}{16}a$	$\phi = 30°$; $z = 16(7-4\sqrt{3})a$
$\phi = 60°$; $z = \frac{27}{32}a$	$\phi = 60°$; $z = \frac{32}{27}a$
$\phi = 90°$; $z = a$	$\phi = 90°$; $z = a$
$\phi = 120°$; $z = \infty a$	$\phi = 120°$; $z = 0a$
$\phi = 150°$; $z = \frac{7-4\sqrt{3}}{16}a$	$\phi = 150°$; $z = 16(7+4\sqrt{3})a$
$\phi = 180°$; $z = 0a$	$\phi = 180°$; $z = \infty a$

La

Fig. 6. La courbe, qui répond à la premiere formule, aura donc la forme representée dans la 6me figure, & est composée de deux branches EAE & γCγ, qui concourent avec les asymptotes *Cc* & *Cc* inclinées à l'axe CB de 60 degrés: & la branche γCγ a un point de rebroussement dans le point C.

Fig. 7. Or la courbe qui répond à l'autre cas, est représentée dans la 7me Figure. Elle a d'abord une feuille ADCDA fermée au point fixe C, où concourent deux points de rebroussement, dont les tangentes sont inclinées à l'axe CB d'un angle de 60° de part & d'autres: & de là partent deux branches paraboliques CE & CE, qui s'éloignent à l'infini.

En posant $z\cos\phi = x$, on aura les équations suivantes:

I. $z^4 + 4xz^3 + 4xxzz = az^3 + 3axzz + 3axxz + ax^3$.

II. $z^3 + 3xzz + 3xxz = azz + 4axz + 4axx$,

entre les coordonnées x & y la première montera au huitième, & l'autre au sixième degré.

Cas. 2. Soit $m = 3$, & on aura:

I. $z^2 = \dfrac{a^2(1+\cos\phi)^4}{(1+3\cos\phi)^2}$; II. $z^2 = \dfrac{a^2(1+3\cos\phi)^2}{(1+\cos\phi)^4}$,

qui en extrayant la racine quarrée se réduisent à:

I. $z = \dfrac{a(1+\cos\phi)^2}{1+3\cos\phi}$; II. $z = \dfrac{a(1+3\cos\phi)}{(1+\cos\phi)^2}$.

Fig. 8. La premiere de ces courbes est représentée dans la 8me figure, qui est composée de deux branches EAE & γCγ, qui concourent avec les asymtotes *ce*, *ce* inclinées à l'axe AB d'un angle 70°, 32′, dont le cosinus est $= \frac{1}{3}$: & la derniere branche γCγ a un point de rebroussement au point C.

L'au-

L'autre courbe est représentée dans la 9^{me} Figure & est formée d'un trait continu ECDADCE, dont les branches CE, CE étenduës à l'infini sont paraboliques. Fig. 9.

Cas. 3. Soit $m = \frac{1}{2}$, & nos deux équations seront

$$\text{I. } \sqrt{\frac{z}{a}} = \frac{(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)^2}{(1 + \operatorname{cos}\phi)^{\frac{3}{2}}} \;; \quad \text{II. } \sqrt{\frac{z}{a}} = \frac{(1 + \operatorname{cos}\phi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)^2},$$

ou prenant les quarrés

$$\text{I. } z = \frac{a(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)^4}{(1 + \operatorname{cos}\phi)^3} \;; \quad \text{II. } z = \frac{a(1 + \operatorname{cos}\phi)^3}{(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)^4},$$

auxquelles répond la tangente de l'angle CMT

$$\text{I. } t = \frac{(1 + \operatorname{cos}\phi)(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)}{\operatorname{sin}\phi(1 - \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)} \;; \quad \text{II. } t = -\frac{(1 + \operatorname{cos}\phi)(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)}{\operatorname{sin}\phi(1 - \frac{1}{2}\operatorname{cos}\phi)}.$$

Ces deux courbes sont plus regulières que les précedentes, la premiere (Fig. 10.) étant semblable à une parabole, & l'autre (Fig. 11.) à une épicycloïde.

IV. Solution.

La solution precédente sera portée à une plus grande généralité en mettant $\operatorname{sin}\lambda\phi$ & $\operatorname{cos}\lambda\phi$, au lieu de $\operatorname{sin}\phi$ & $\operatorname{cos}\phi$, où λ marque un nombre impair quelconque. Posons donc :

$$\pm \frac{dz}{z} = d\phi \cdot \frac{\operatorname{sin}\lambda\phi}{1 + \operatorname{cos}\lambda\phi} \cdot \frac{1 - m\operatorname{cos}\lambda\phi}{1 + m\operatorname{cos}\lambda\phi},$$

& cette équation se reduira à cette forme :

$$\pm (1-m)\frac{dz}{z} = \frac{(m+1)d\phi\operatorname{sin}\lambda\phi}{1 + \operatorname{cos}\lambda\phi} - \frac{2md\phi\operatorname{sin}\lambda\phi}{1 + m\operatorname{cos}\lambda\phi},$$

dont l'intégrale se trouve :

$$\pm (1-m)\, l\frac{z}{a} = -\frac{(m+1)}{\lambda} l(1 + \operatorname{cos}\lambda\phi) + \frac{2}{\lambda} l(1 + m\operatorname{cos}\lambda\phi),$$

d'où

d'où l'on tire les deux équations ſuivantes :

$$\text{I.}\quad z = a.\frac{(1+m\,\text{cof}\,\lambda\phi)^{\frac{2}{\lambda(1-m)}}}{(1+\text{cof}\,\lambda\phi)^{\frac{m+1}{\lambda(1-m)}}}\,;\quad \text{II.}\quad z = a.\frac{(1+\text{cof}\,\lambda\phi)^{\frac{m+1}{\lambda(1-m)}}}{(1+m\,\text{cof}\,\lambda\phi)^{\frac{2}{\lambda(1-m)}}}$$

Et la tangente de l'angle CMT ſera pour ces deux cas :

$$\text{I.}\quad t = +\frac{(1+\text{cof}\,\lambda\phi)(1+m\,\text{cof}\,\lambda\phi)}{\text{fin}\,\lambda\phi.(1-m\,\text{cof}\,\lambda\phi)}\,;\quad \text{II.}\quad t = -\frac{(1+\text{cof}\,\lambda\phi)(1+m\,\text{cof}\,\lambda\phi)}{\text{fin}\,\lambda\phi.(1-m\,\text{cof}\,\lambda\phi)}\,;$$

d'où l'on peut tirer encore une plus grande infinité de courbes algébriques, qui ſatisfont au problème ; puiſqu'il y a ici deux nombres λ & m, qu'on peut prendre à volonté, celui-cy m ſans aucune reſtriction, mais celui-là λ ne ſauroit marquer que des nombres impairs entiers. Il ne ſera pas auſſi difficile de tracer à peu près la figure de ces courbes.

V. Solution.

Pour rendre ces ſolutions encore plus générales, je remarque qu'au lieu d'un facteur $\frac{1 - m\,\text{cof}\,\phi}{1 + m\,\text{cof}\,\phi}$, on y peut ajouter autant d'autres qu'on veut de la même forme, ſans que l'intégration par les logarithmes en ſoit troublée. Or pour en rendre l'opération plus évidente, je mettrai pour m des fractions, & prenant m, n, p, q, pour des nombres quelconques, ſoit

$$\pm\frac{dz}{z} = d\phi\,\text{fin}\,\phi.\frac{1}{1-\text{cof}\,\phi}.\frac{m+\text{cof}\,\phi}{m-\text{cof}\,\phi}.\frac{n+\text{cof}\,\phi}{n-\text{cof}\,\phi}.\frac{p+\text{cof}\,\phi}{p-\text{cof}\,\phi}$$

& qu'on dévelope cette fraction compoſée en des fractions ſimples, ſelon la méthode que j'ai enſeignée en regardant cof ϕ comme une ſimple variable.

Qu'on

Qu'on pose pour abréger selon cette méthode :

$$\frac{(m+1)(n+1)(p+1)}{(m-1)(n-1)(p-1)} = \alpha$$

$$\frac{2m \quad (n+m)(p+m)}{(1-m)(n-m)(p-m)} = \beta$$

$$\frac{2n \quad (m+n)(p+n)}{(1-n)(m-n)(p-n)} = \gamma$$

$$\frac{2p \quad (m+p)(n+p)}{(1-p)(m-p)(n-p)} = \delta$$

& notre équation se résoudra dans cette forme :

$$\pm\frac{dz}{z} = \frac{\alpha\, d\phi \sin\phi}{1-\cos\phi} + \frac{\beta\, d\phi \sin\phi}{m-\cos\phi} + \frac{\gamma\, d\phi \sin\phi}{n-\cos\phi} + \frac{\delta\, d\phi \sin\phi}{p-\cos\phi},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{z}{a} \text{ ou } \frac{a}{z} = (1-\cos\phi)^{\alpha}(m-\cos\phi)^{\beta}(n-\cos\phi)^{\gamma}(p-\cos\phi)^{\delta}.$$

VI. Solution.

On peut rendre cette solution encore plus générale en introduisant l'angle multiple $\lambda\phi$ au lieu du simple ϕ, où λ marque un nombre impair. Car alors en prenant pour m, n, p, q, &c. des nombres quelconques, les conditions du problème seront aussi remplies par cette équation :

$$\pm\frac{dz}{z} d\phi \sin\lambda\phi \cdot \frac{1}{1-\cos\lambda\phi} \cdot \frac{m+\cos\lambda\phi}{m-\cos\lambda\phi} \cdot \frac{n+\cos\lambda\phi}{n-\cos\lambda\phi} \cdot \frac{p+\cos\lambda\phi}{p-\cos\lambda\phi} \cdot \frac{q+\cos\lambda\phi}{q-\cos\lambda\phi}.$$

Or ce produit de fractions est aussi résoluble en des fractions simples, dont chacune est un différentiel logarithmique : car en posant v pour $\cos\lambda\phi$, on sait, que cette fraction :

$$\frac{1 \quad (m+v)(n+v)(p+v)(q+v)}{(1-v)(m-v)(n-v)(p-v)(q-v)},$$

puis-

puisque la variable v a moins de dimensions dans le numérateur que dans le dénominateur, est résoluble en ces fractions simples

$$\frac{\alpha}{1-v}+\frac{\beta}{m-v}+\frac{\gamma}{n-v}+\frac{\delta}{p-v}+\frac{\varepsilon}{q-v},$$

dont les numérateurs ont les valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)}{(m-1)(n-1)(p-1)(q-1)}$$

$$\beta = \frac{2m \quad (n+m)(p+m)(q+m)}{(1-m)(n-m)(p-m)(q-m)}$$

$$\gamma = \frac{2n \quad (m+n)(p+n)(q+n)}{(1-n)(m-n)(p-n)(q-n)}$$

$$\delta = \frac{2p \quad (m+p)(n+p)(q+p)}{(1-p)(m-p)(n-p)(q-p)}$$

$$\varepsilon = \frac{2q \quad (m+q)(n+q)(p+q)}{(1-q)(m-q)(n-q)(p-q)}$$

Donc, si nous remettons $\cos\lambda\phi$ pour v, & que nous multiplions toutes ces fractions par $d\phi\sin\lambda\phi$, nous aurons :

$$\pm\frac{dz}{z}=\frac{\alpha d\phi\sin\lambda\phi}{1-\cos\lambda\phi}+\frac{\beta d\phi\sin\lambda\phi}{m-\cos\lambda\phi}+\frac{\gamma d\phi\sin\lambda\phi}{n-\cos\lambda\phi}+\frac{\delta d\phi\sin\lambda\phi}{p-\cos\lambda\phi}+\frac{\varepsilon d\phi\sin\lambda\phi}{q-\cos\lambda\phi}$$

dont l'intégrale est :

$$\frac{z}{a} \text{ ou } \frac{a}{z}=(1-\cos\lambda\phi)^{\frac{\alpha}{\lambda}}(m-\cos\lambda\phi)^{\frac{\beta}{\lambda}}(n-\cos\lambda\phi)^{\frac{\gamma}{\lambda}}(p-\cos\lambda\phi)^{\frac{\delta}{\lambda}}(q-\cos\lambda\phi)^{\frac{\varepsilon}{\lambda}}$$

de sorte que nous ayons une double équation algébrique, dont l'une & l'autre fournit une infinité infinie de courbes algebriques : puisque non seulement les quantités m, n, p, q sont arbitraires, mais que leur nombre peut être augmenté à volonté.

Remarque.

La ſolution de ce problème, que je viens de trouver, eſt ſi générale qu'il n'y a point de doute, que toutes les ſolutions poſſibles n'y ſoient compriſes: ce qui eſt d'autant plus remarquable, que la nature du problème ſembloit d'abord promettre un petit nombre de courbes algébriques, à cauſe de la ſingularité, qu'avant que d'y arriver il faloit paſſer par une équation logarithmique. Or nous venons de voir que cette même circonſtance nous a conduit à cette incompréhenſible infinité de ſolutions algébriques, qui ſurpaſſe bien loin la multitude des ſolutions, qu'on trouve pour d'autres problèmes indéterminés de même genre, où il s'agit des ſolutions algébriques, & auxquels on peut appliquer la méthode, que j'ai donnée autrefois pour cette fin. Le problème mérite donc à cet égard toute l'attention poſſible, & il n'y a point de doute, que ſa conſidération ne conduiſe à quantité d'autres belles recherches.