1756

De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air

Leonhard Euler

DE LA
RÉFRACTION DE LA LUMIERE
EN PASSANT PAR L'ATMOSPHERE SELON LES DIVERS DEGRÉS TANT DE LA CHALEUR QUE DE L'ELASTICITÉ DE L'AIR.

PAR M. EULER.

I.

Pour déterminer la réfraction, que les rayons de la lumiere souffrent en passant par l'Atmosphère, il faut commencer par la réfraction, que les rayons de la lumiere souffrent en passant du vuide dans un air d'une densité donnée: car il est certain que cette réfraction dépend de la densité de l'air, dans lequel les rayons entrent du vuide. Or comme les rayons, qui sont de diverses couleurs, souffrent des réfractions differentes, je considère ici seulement les rayons d'une telle nature moyenne, qui est également eloignée de ceux, qui subissent ou la plus grande, ou la plus petite réfraction : car c'est par rapport à ces rayons moyens, que les Astronomes sont accoutumés de dresser leurs tables de réfraction.

II. Considèrons donc une masse d'air dont la densité soit fixe, & à laquelle je comparerai ensuite les divers degrès de densité, que l'air puisse avoir, & que cette densité soit $= c$. Que $1 : \alpha$ marque la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons, qui en-

entrent du vuïde dans cet air. Les Expériences qu'on a faites sur cette réfraction, ont fait voir, que la raison $1:\alpha$ est à peu près comme 3325 à 3324, & partant $\alpha = \frac{3324}{3325}$: mais comme la densité de l'air n'est pas marquée assés exactement, je regarderai la valeur de α comme inconnuë, quoiqu'elle ne sauroit différer considèrablement de $\frac{3324}{3325}$, lorsque c marque la densité de l'air, telle qu'elle est ordinairement.

III. Il est aussi clair, que si les rayons passoient de cet air, dont la densité $= c$, dans un autre air d'une densité double $2c$, ils souffriroient la même réfraction. D'où il s'ensuit, que si les rayons passent immédiatement du vuide dans l'air de la densité $2c$, la raison de réfraction sera $1:\alpha\alpha$, ou doublée de la raison $1:\alpha$. Donc, lorsque les rayons passent du vuide dans un air de la densité nc, le sinus d'incidence sera à celui de réfraction, comme $1:\alpha^n$. De sorte que si q marque une densité quelconque de l'air, posant $n = \frac{q}{c}$, la raison de réfraction des rayons, qui entrent du vuide dans cet air, sera comme $1:\alpha^{\frac{q}{c}}$.

IV. Donc, si nous avons deux masses d'air, dont la densité de l'une soit $= q$, & de l'autre $= r$, & que les rayons passent de la premiere dans la seconde, la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction sera $\alpha^{\frac{q}{c}}:\alpha^{\frac{r}{c}}$. Car on n'a qu'à concevoir un vuide infiniment mince entre ces deux masses d'air, & la raison de réfraction du premier air q dans le vuide étant $\alpha^{\frac{q}{c}}:1$, & du vuide dans l'autre air r comme $1:\alpha^{\frac{r}{c}}$, la raison de réfraction du premier air dans l'autre sera $\alpha^{\frac{q}{c}}$ à $\alpha^{\frac{r}{c}}$.

V.

V. Soit maintenant EOF la surface de la terre, & C son centre, le rayon $CO = a$; & que l'atmosphère soit considérée comme composée des couches sphériques décrites du centre C, & on pourra supposer que les densités de l'air en montant diminuent selon ces couches, de sorte qu'en chaque couche comme PM, la densité soit partout la même. Posant donc pour une couche quelconque PM, le rayon $CP = x$, soit la densité de cette couche $= q$; & la densité à la surface de la terre ou en $O = k$; qui peut varier selon les divers degrés de chaleur & de l'elasticité de l'air.

VI. Que l'Observateur soit maintenant en O, auquel parvienne un rayon OMS, courbé par la refraction de l'atmosphère, & venant d'un astre S infiniment éloigné, soit OD la tangente de cette courbe en O, & l'angle COD, qui soit $= \zeta$, marquera la distance observée de l'Astre au zénith Z, ou bien ζ sera le complément de la hauteur observée. Qu'on tire pareillement à un autre point quelconque M du rayon la tangente MT, & posant $CM = x$, soit l'angle $CMT = \omega$, & pour le point infiniment proche m, on aura $Cm = x + dx$, ou $mn = dx$, & l'angle $Cmt = \omega + d\omega$.

VII. La droite CM, ou Cm étant perpendiculaire aux couches refringentes, l'angle Cmt marquera l'angle d'incidence, & l'angle CmT l'angle de réfraction. Donc la densité de l'air en M étant $= q$ & en $m = q + dq$, nous aurons :

$$\sin Cmt : \sin CmT = \alpha^{\frac{q+dq}{c}} : \alpha^{\frac{q}{c}}.$$

Or par la nature des exponentiels on a $\alpha^{\frac{q+dq}{c}} = \alpha^{\frac{q}{c}}\left(1 + \frac{dq}{c}\, l\alpha\right)$, & partant nous aurons :

$$\sin Cmt = \left(1 + \frac{dq}{c}\, l\alpha\right) \sin CmT.$$

Or puisque α ne diffère de l'unité, qu'extrèmement peu, son logarithme $l\alpha$ sera assés exactement $= \alpha - 1$; donc, à cause de $\alpha < 1$, on aura

$$\sin Cmt = \left(1 - \frac{(1-\alpha)\,dq}{c}\right) \sin CmT.$$

VIII.

VIII. Soit l'angle au centre $OCM = \phi$, & partant $MCm = d\phi$; & puisque l'angle $CmT = CMT - MCm$, nous aurons :

$$Cmt = \omega + d\omega \quad \& \quad CmT = \omega - d\phi; \quad \text{donc}$$

$$\sin Cmt = \sin\omega + d\omega \cos\omega \quad \& \quad \sin CmT = \sin\omega - d\phi \cos\omega$$

d'où nous tirons l'équation suivante:

$$\sin\omega + d\omega\cos\omega = \sin\omega - d\phi\cos\omega - \frac{(1-\alpha)\,dq}{c}\sin\omega, \quad \text{ou bien}$$

$$-\frac{(1-\alpha)\,dq}{c} = \frac{(d\phi + d\omega)}{\text{tang}\,\omega} = \frac{d\omega}{\text{tang}\,\omega} + \frac{d\phi}{\text{tang}\,\omega} = \frac{dq}{c}\,l\alpha$$

en remettant $l\alpha$ pour $\alpha - 1$; afin que rien ne soit négligé.

IX. Or, puisque $mn = dx$ & $Mn = x\,d\phi$, la fraction $\frac{x\,d\phi}{dx}$ exprime la tangente de l'angle CmT, ou bien de l'angle ω, de sorte que $\text{tang}\,\omega = \frac{x\,d\phi}{dx}$, & partant $\frac{d\phi}{\text{tang}\,\omega} = \frac{dx}{x}$. D'où l'équation trouvée se changera en cette forme :

$$\frac{dq}{c}\,l\alpha = \frac{d\omega}{\text{tang}\,\omega} + \frac{dx}{x}$$

dont l'intégrale est : $\frac{q}{c}\,l\alpha = l\sin\omega + lx + \text{Const.}$ ou bien $\alpha^{\frac{q}{c}} = Cx\sin\omega$. Or pour le point O il devient $x = a$; $q = k$ & $\omega = \zeta$; donc $\alpha^{\frac{k}{c}} = Ca\sin\zeta$, & partant la constante $C = \frac{\alpha^{k:c}}{a\sin\zeta}$; d'où nous aurons cette équation determinée :

$$\alpha^{\frac{q}{c}} a\sin\zeta = \alpha^{\frac{k}{c}} x\sin\omega, \quad \text{ou} \quad a\sin\zeta = \alpha^{\frac{k-q}{c}} x\sin\omega.$$

X.

X. Mais puisque $\operatorname{tang} \omega = \frac{x\,d\Phi}{dx}$, il s'ensuit :

$$\sin \omega = \frac{x\,d\Phi}{\sqrt{(dx^2 + xx\,d\Phi^2)}} = \frac{a\,\alpha^{\frac{q-k}{c}} \sin \zeta}{x},$$

d'où nous tirons :

$$d\Phi = \frac{a\,\alpha^{\frac{q-k}{c}}\,dx \sin \zeta}{x\sqrt{(xx - aa\,\alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \sin \zeta^2)}}$$

ce qui est une équation, où les variables x & Φ sont séparées, puisque la densité q peut être regardée comme une fonction de x. Cette équation exprime donc la nature de la courbe du rayon O M S, d'où l'on pourroit aisément tirer une construction par le moyen de la quadrature ou rectification de quelque courbe.

XI. Mais, de quelque maniere qu'on traite cette équation, on ne viendra jamais à bout d'en tirer une expression finie, qui marque la quantité de la réfraction pour toutes les hauteurs, quoiqu'il soit fort aisé d'en assigner les réfractions, qui répondent à des hauteurs considérables ; or pour les hauteurs fort petites, ces expressions, quelques exactes qu'elles soient pour de plus grandes, s'écarteront toujours beaucoup de la vérité. Ainsi tout revient ici à la decouverte d'une méthode tout particuliere, qui nous conduise à la connoissance de la véritable courbure du rayon O M S.

XII. Dans cette vuë il sera bon de déveloper quelques propriétés de cette courbe ; or d'abord je remarque, que si l'on tire du centre C la perpendiculaire C T sur la tangente C M, cette perpendiculaire C T sera $= x \sin \omega = \alpha^{\frac{q-k}{c}} a \sin \zeta$. D'où nous voyons, qu'en éloignant le point M à l'infini, où la densité q deviendra $= 0$,

la

la perpendiculaire à la tangente sera $= \alpha^{\frac{-k}{c}} a \sin \zeta$: & il est évident que cette tangente est l'asymtote de la courbe cherchée OMS: de sorte que nous connoissons déjà la distance de cette asymtote au centre C.

XIII. Posant pour un point M quelconque la perpendiculaire $CT = p$, de sorte que $p = \alpha^{\frac{q-k}{c}} a \sin \zeta$, on fait que le rayon de la dévelopée en M est $= \frac{x\,dx}{dp}$. Or, ayant $dp = \alpha^{\frac{q-k}{c}} \frac{a\,dq}{c} l\alpha . \sin \zeta$.

ce rayon de la developée en M sera $= \frac{c\,\alpha^{\frac{k-q}{c}} x\,dx}{a\,dq\,l\alpha . \sin \zeta}$. Donc au point O où $x = a$ & $q = k$, le rayon de courbure, ou de la dévelopée, est $= \frac{c\,dx}{dq\,l\alpha . \sin \zeta}$, où il faut supposer que le rapport entre x & q, & partant entre dx & dq, est connu.

XIV. Comme la courbure de la courbe en chaque point est déterminée par le rayon de la dévelopée, ainsi la variabilité de la courbure se connoitra par la courbure de la dévelopée même, ou bien par le rayon de courbure de la dévelopée. Posons donc le rayon de courbure en M, $\frac{c\,\alpha^{\frac{k-q}{c}} x\,dx}{a\,dq\,l\alpha \sin \zeta} = r$, & l'élément de la courbe $Mm = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx - aa\alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \sin \zeta^2)}} = ds$ le second rayon de courbure, ou celui de la dévelopée, sera $= \frac{r\,dr}{ds}$.

XV.

XV. Puisque q eſt fonction de x, ſoit $dx = pdq$, pour avoir en général $r = \frac{c\alpha^{\frac{k-q}{c}} px}{a l\alpha \sin\zeta}$: d'où nous tirons :

$$dr = \frac{c\alpha^{\frac{k-q}{c}}}{a l\alpha \sin\zeta}\left(p\,dx + x\,dp - \frac{px\,dq}{c} l\alpha\right):$$

donc le ſecond rayon de courbure :

$$\frac{r\,dr}{ds} = \frac{cc\alpha^{\frac{2k-2q}{c}} p}{aa(l\alpha.\sin\zeta)^2}\left(p + \frac{x\,dp}{dx} - \frac{x}{c} l\alpha\right)\sqrt{(xx - aa\alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \sin\zeta^2)}.$$

Or je ferai bientôt voir, combien la connoiſſance des rayons de courbure, tant du premier que du ſecond ordre, contribuë à la détermination de la courbe OMS, & par conſéquent à la decouverte de la réfraction.

XVI. Mais, avant que de paſſer outre, il faut chercher le rapport entre les deux variables x & q; ou bien il faut déterminer la denſité de l'atmoſphère à chaque hauteur P. Pour cet effet ſoit la hauteur du barometre en $O = h$, au tems de l'obſervation, & en montant le barometre en P, ſoit ſa hauteur $= u$, & en $p = u + du$. De plus ſoit la denſité du mercure $= nc$, & le poids d'une colonne de mercure de la hauteur $= du$ ſera $= nc\,du$.

XVII. Or la denſité de l'air en P étant $= q$, le poids d'une colomne d'air de la hauteur $Pp = dx$ ſera $= q\,dx$; dont la preſſion de l'atmoſphère en p ſera plus petite qu'en P. Donc, puisque la preſſion de l'atmoſphère balance le mercure dans le barometre, il faut être $q\,dx = -nc\,du$. Or ſi nous ſuppoſons, que la denſité de l'air ſoit proportionelle à la hauteur du barometre, nous aurons $u:q = h:k$, ou bien $u = \frac{hq}{k}$, donc à cauſe de $du = \frac{h\,dq}{k}$, nous obtiendrons

 $q\,dx$

$q\,dx = -\frac{nch\,dq}{k}$, ou $dx = -\frac{nch\,dq}{kq}$; de ſorte qu'il ſeroit $p = \frac{dx}{dq} = -\frac{nch}{kq}$.

XVIII. Cette ſuppoſition auroit lieu, ſi l'atmoſphère étoit doüée, par toute ſa hauteur, du même degré de chaleur; mais lorſqu'en P régne un autre degré de chaleur qu'en O, il ne ſera plus permis de ſuppoſer $u:q = h:k$; donc, pour rendre cette détermination plus juſte, il faut avoir égard à la chaleur, dont l'effet conſiſte dans l'augmentation du reſſort de l'air, qui ſoutient proprement la colomne du mercure dans le barometre.

XIX. Conſidérons donc une maſſe d'air dont la denſité ſoit $= c$ & qui ſoit doüée d'un certain degré de chaleur $= \gamma$: dans cet état la maſſe d'air aura un certain degré d'élaſticité par laquelle elle ſoutiendra une certaine colomne de mercure dans le barometre, qui ſoit $= b$. Si à la même denſité convenoit un plus grand degré de chaleur, elle ſoutiendroit auſſi une plus grande hauteur du barometre: or, ſi la chaleur γ demeurant la même, la denſité de l'air étoit, ou plus grande, ou plus petite, la hauteur ſoutenuë du barometre ſeroit augmentée ou diminuée dans la même raiſon.

XX. Puiſque les degrés des chaleurs ne ſont pas fixés, mais qu'ils s'eſtiment ordinairement des diviſions arbitraires des thermometres; je concevrai ici un thermometre tellement diviſé, que les hauteurs, qu'il marque pour chaque chaleur, ſoient égales aux hauteurs du barometre, qu'un air doüé de cette chaleur, mais dont la denſité ſoit conſtamment $= c$, eſt capable de ſoutenir: ou que les hauteurs marquées par le thermometre ſoient ſeulement proportionnelles aux hauteurs du barometre, tandis que la denſité de l'air demeure la même.

XXI. Cela poſé, ſi la denſité de l'air eſt $= C$, ſa chaleur $= \Gamma$, & que cet air ſoutienne la hauteur du barometre $= B$: il eſt clair qu'on aura: $B : b = C\Gamma : c\gamma$.

D'où

D'où l'on voit, que le thermometre dont je parle, doit être tellement divisé, que tant que la hauteur du barometre est la même, les nombres indiqués par le thermometre Γ & γ soient toujours réciproquement proportionnels aux densités de l'air.

XXII. Soit maintenant la chaleur, ou plutôt le nombre indiqué par le thermometre en $O = g$, & en $P = v$; & puisque la densité de l'air est supposée en $O = k$ & en $P = q$; or la hauteur du barometre en $O = h$ & en $P = u$; nous aurons $h:b = gk:\gamma c$, & $u:b = vq:\gamma c$; ou bien

$$\frac{b}{\gamma c} = \frac{h}{gk} = \frac{u}{vq}, \quad \text{donc} \quad u = \frac{hqv}{gk} = \frac{bqv}{\gamma c}$$

& partant

$$dx = -\frac{nb}{\gamma}\left(\frac{v\,dq}{q} + dv\right); \quad \text{donc} \quad p = -\frac{nb}{\gamma}\left(\frac{v}{q} + \frac{dv}{dq}\right).$$

XXIII. Cette formule servira donc à trouver la densité de l'atmosphère à chaque hauteur: mais pour cela il faut qu'on sache la chaleur, ou le degré marqué par le thermometre, que je viens d'indiquer, à chaque hauteur: ainsi, si la chaleur étoit par tout la même, ou $v = g$, nous aurions $dx = -\frac{nbg\,dq}{\gamma q}$; ou bien $x - a = \frac{nbg}{\gamma}\, l\, \frac{k}{q}$; de sorte que prenant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, on auroit $\frac{k}{q} = e^{\frac{\gamma(x-a)}{nbg}}$, ou $q = k e^{\frac{-\gamma(x-a)}{nbg}}$.

XXIII. Mais, puisque la chaleur diminuë plus on s'éloigne en montant, si nous supposons que la chaleur diminuë en montant en même raison que la densité, de sorte qu'il seroit: $v:g = q:k$, nous aurions $v = \frac{gq}{k}$, & partant:

$dx =$

$$dx = -\frac{nbg}{\gamma k}(dq + dq) = -\frac{2nbgdq}{\gamma k}, \qquad \text{donc:}$$

$$x - a = \frac{2nbg}{\gamma k}(k - q), \quad \text{ou} \quad q = k - \frac{\gamma k(x-a)}{2nbg}.$$

Donc cette ſuppoſition ne ſauroit avoir lieu, puisque la denſité deviendroit enfin négative, de même que la chaleur.

XXIV. Poſons $OP = x - a = z$; & ſoit $v = \frac{fg}{f+z}$; de ſorte qu'à la hauteur $z = f$, la chaleur ſoit la moitié de celle en O; & puisque $dx = dz$ nous aurons:

$$-\frac{\gamma dz}{nb} = \frac{fgdq}{(f+z)q} - \frac{fgdz}{(f+z)^2},$$

qui étant multipliée par $f + z$, & intégrée donne:

$$\frac{-\gamma}{nb}(fz + \tfrac{1}{2}zz) = -fg\,l\frac{k}{q} - fg\,l\frac{f+z}{f},$$

ou bien $\quad \frac{k(f+z)}{fq} = e^{\frac{\gamma z(2f+z)}{2nbfg}}$, de ſorte que

$$q = \frac{k(f+z)}{f} e^{-\frac{\gamma z(2f+z)}{2nbfg}}.$$

XXV. Cette hypotheſe paroit aſſés conforme à la vérité, puisqu'on peut prendre pour f une telle quantité, qui ſatisfait en toutes occaſions. Car, parce que f marque la hauteur, où la chaleur eſt réduite à la moitié, il paroit très probable, qu'à une hauteur quelconque $z = x - a$, la chaleur ſoit $v = \frac{fg}{f+z}$, de ſorte que poſant $z = mf$ on ait $v = \frac{1}{1+m}g$.

XXVI.

XXVI. J'adopterai donc cette hypothese pour en tirer la détermination des refractions : & puisque $z = x - a$, & $dx = dz = p\,dq$, nous aurons $p = \frac{-nbfg(f+z)}{\gamma(f+z)^2 q - nbfgq}$. Donc pour le commencement de la courbe, où $z = 0$; & $q = k$, nous aurons $p = \frac{-nbfg}{\gamma fk - nbgk}$. De plus pour le second rayon de courbure, nous aurons :

$$dp = \frac{n\gamma bfg(f+z)^2 q\,dz + nnbbffggq\,dz + n\gamma bfg(f+z)^3 dq - nnbbffgg(f+z)\,dq}{(\gamma(f+z)^2 - nbfg)^2 qq}$$

ou bien :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dz}{f+z} - \frac{dq}{q} - \frac{2\gamma(f+z)\,dz}{\gamma(f+z)^2 - nbfg} = -\frac{dq}{q} - \frac{\gamma(f+z)^2 p\,dq - nbfgp\,dq}{(f+z)(\gamma(f+z)^2 - nbfg)}$$

Or à cause de $dx = p\,dq$, le second rayon de courbure sera $\frac{r\,dr}{ds} =$

$$\frac{cc\alpha^{\frac{2k-q}{c}}pp}{aa(l\alpha.\sin\zeta)^2}\left(1 - \frac{xl\alpha}{cp} - \frac{x}{pq} - \frac{\gamma(f+z)^2 x - nbfgx}{(f+z)(\gamma(f+z)^2 - nbfg)}\right)\sqrt{(xx - aa\alpha^{\frac{2q-2k}{c}}\sin\zeta^2)}$$

XXVII. De là nous tirerons pour le commencement de la courbe en O, premièrement le premier rayon de courbure

$$r = \frac{cp}{l\alpha.\ \sin\zeta} = -\frac{nbcfg}{(\gamma fk - nbgk)\ l\alpha.\ \sin\zeta}$$

& à cause de $q = k$; $x = a$; $z = 0$; & $p = -\frac{nbfg}{(\gamma f - nbg)k}$

le second rayon de courbure : $\frac{r\,dr}{ds} =$

$$\frac{nnbbccffgg}{akk(\gamma f - nbg)^2(l\alpha.\sin\zeta)^2}\left(1 + \frac{ak(\gamma f - nbg)l\alpha}{nbcfg} + \frac{ak(\gamma f - nbg)}{nbfgk} - \frac{a\gamma f - nabg}{\gamma ff - nbfg}.\right)\text{cf}\,\zeta$$

De

De plus cette courbe ayant une aſymtote, la perpendiculaire, qui y eſt tirée du centre C, ſera $= a^{\frac{-k}{c}} a \sin \zeta$: & ζ marque l'angle que fait la tangente de la courbe en O avec la verticale OZ.

XXVIII. Ce ſont les élémens, qui ſeront ſuffiſans, comme je ferai voir, pour connoitre la courbe entiere OMS, que le rayon forme en ſon paſſage par l'atmoſphère. Car, puisqu'on ſçait, que la courbure eſt partout extrèmement petite, on la pourra regarder comme une partie d'une courbe aſymtotique, qui eſt déjà très éloignée du commencement, de ſorte que l'équation pour cette courbe doit devenir très
Fig. 2. ſimple. Car ſoit ADS l'aſymtote de cette courbe, & A le commencement, qu'on nomme l'abſciſſe AV $= t$ & l'appliquée VO $= y$; & lorsque t eſt déjà extrèmement grande, de quelque nature que ſoit la courbe, il eſt certain que la nature de la portion OS, ſera toujours compriſe dans cette formule, $t = \frac{C}{y^m}$.

XXIX. Il eſt d'abord clair, que les conditions expoſées à l'égard de la perpendiculaire CD tirée du centre C à l'aſymtote, & des deux rayons de courbure au point O avec l'angle ZOT que la tangente OT fait avec la verticale OZ; que ces conditions, dis-je, ſont ſuffiſantes pour déterminer tant l'eſpece que la poſition de la courbe OS. Il ne s'agit dont que de déterminer la poſition de l'aſymtote ADS, l'abſciſſe AV $= t$, la conſtante C avec l'expoſant m, pour avoir la vraye courbe OS du rayon.

XXX. Puisque $t = \frac{C}{y^m}$, nous aurons $dt = -\frac{mC\,dy}{y^{m+1}}$; ou bien poſons $dt = -\frac{E\,dy}{y^\mu}$; de ſorte que $m = \mu - 1$, & $C = \frac{E}{\mu}$, ou plutôt ſoit $dt = -\frac{E\,dy}{y^\mu}$ l'équation différentielle de la courbe

cher-

cherchée, & la ſoutangente ſera $VT = -\frac{y\,dt}{dy} = \frac{E}{y^{\mu-1}}$. Soit l'angle $OTV = \theta$, & il eſt clair que cet angle exprime la réfraction même, lorsque la diſtance de l'Aſtre S eſt regardée comme infinie; de là nous aurons $\operatorname{tang}\theta = \frac{OV}{VT} = \frac{y^{\mu}}{E}$.

XXXI. Enſuite, puisque l'angle $TOZ = \zeta$, nous aurons l'angle $ORV = \zeta + \theta$, donc $ROV = OCD = 90° - \zeta - \theta$. Et partant nous en tirerons la valeur de la perpendiculaire $CD = y + a \sin(\zeta + \theta)$: laquelle devant être $= \alpha^{\frac{-k}{c}} a \sin\zeta$, nous aurons cette équation $y + a\sin(\zeta+\theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}} a \sin\zeta$: qui eſt la ſeconde, la premiere étant $\operatorname{tang}\theta = \frac{y^{\mu}}{E}$ pour déterminer les quatre inconnues, θ, E, y & μ; de ſorte que nous avons beſoin encore de deux équations.

XXXII. L'élément de la courbe Oo ſera $ds = -\frac{dy}{y^{\mu}}\sqrt{(EE+y^{2\mu})}$ à cauſe de dy négatif en avançant de O vers S: donc prenant le différentiel dy conſtant, à cauſe de $ddt = \frac{\mu E\, dy^2}{y^{\mu+1}}$, le premier rayon de courbure ſera $r = -\frac{ds^3}{dy\,ddt} = \frac{(EE+y^{2\mu})^{\frac{3}{2}}}{\mu E y^{2\mu-1}}$; qui nous fournit cette troiſième équation: $\frac{(EE+y^{2\mu})^{\frac{3}{2}}}{\mu E y^{2\mu-1}} = -\frac{nbcfg}{(\gamma f - nbg)k/\alpha \sin\zeta}$.

XXXIII.

XXXIII. Pour trouver le ſecond rayon de courbure, prenons les differentiels :

$$dr = -\frac{dy\,((2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu})\,\sqrt{(EE+y^{2\mu})}}{\mu E y^{2\mu}}$$

pour avoir

$$\frac{dr}{ds} = \frac{(2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu}}{\mu E y^{\mu}}$$

laquelle valeur doit être égale au ſecond rayon de courbure diviſé par le premier ; ce qui donne la quatrième équation

$$\frac{(2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu}}{\mu E y^{\mu}} = -\frac{nbcfg}{ak(\gamma f-nbg)l\alpha.\mathrm{tg}\zeta}\left(1+\frac{ak(\gamma f-nbg)l\alpha}{nbcfg}+\frac{ak(\gamma f-nbg)}{nbcfg}-\frac{a(\gamma f+nbg}{f(\gamma f-nbg}\right.$$

ou bien

$$\frac{(2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu}}{\mu E y^{\mu}} = -\frac{cf}{akl\alpha.\mathrm{tg}\zeta}\left(\frac{nbg}{\gamma f-nbg}+\frac{akl\alpha}{cf}+\frac{a\gamma(\gamma f-3nbg)}{(\gamma f-nbg)^2}\right)$$

XXXIV. Or il faut ſe ſouvenir que $bgk = \gamma ch$ par le §. XXII. & poſant pour abréger :

$$-\frac{nbcfg}{(\gamma f-nbg)\,kl\alpha} = A$$

$$-\frac{nbcfg}{a\,(\gamma f-nbg)\,kl\alpha} - 1 - \frac{\gamma cf(\gamma f-3nbg)}{(\gamma f-nbg)^2\,kl\alpha} = B$$

nos quatre équations ſeront :

I. $y^{\mu} = E\ \mathrm{tang}\,\theta$;

II. $y + a\ \mathrm{ſin}\,(\zeta+\theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}}\,a\ \mathrm{ſin}\,\zeta$

III.

$$\text{III.}\quad \frac{(EE + y^{2\mu})^{\frac{3}{2}}}{\mu E y^{2\mu - 1}} = \frac{A}{\sin\zeta} \quad \&$$

$$\text{IV.}\quad \frac{(2\mu - 1)EE - (\mu + 1)y^{2\mu}}{\mu E y^{\mu}} = \frac{B}{\tang\zeta}.$$

XXXV. Puisque $y^{\mu} = E \operatorname{tang}\theta$, il ſera $\sqrt{(EE + y^{2\mu})} = E \operatorname{ſec.}\theta$, d'où la III. & IV. prendront les formes ſuivantes :

$$\text{III.}\quad \frac{y \operatorname{ſec.}\theta^3}{\mu \operatorname{tang}\theta^2} = \frac{A}{\sin\zeta},\quad \text{ou}\quad y = \frac{\mu A \sin\theta^2 \operatorname{coſ}\theta}{\sin\zeta}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{2\mu - 1 - (\mu + 1)\operatorname{tang}\theta^2}{\mu \operatorname{tang}\theta} = \frac{B}{\operatorname{tang}\zeta};\quad \text{d'où nous tirons :}$$

$$\mu = \frac{\operatorname{tang}\zeta . \operatorname{ſec.}\theta^2}{\operatorname{tang}\zeta(2 - \operatorname{tg}\theta^2) - \operatorname{tang}\theta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{\operatorname{tg}\zeta(2\operatorname{coſ}\theta^2 - \sin\theta^2) - B\sin\theta\operatorname{coſ}\theta}$$

& partant $y = \dfrac{A \sin\theta^2 \operatorname{coſ}\theta}{\sin\zeta\,(2\operatorname{coſ}\theta^2 - \sin\theta^2) - B\operatorname{coſ}\zeta\sin\theta\operatorname{coſ}\theta}$.

XXXVI. Cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde équation donnera :

$$\frac{A \sin\theta^2 \operatorname{coſ}\theta}{\sin\zeta(2\operatorname{coſ}\theta^2 - \sin\theta^2) - B\operatorname{coſ}\zeta\sin\theta\operatorname{coſ}\theta} + a\sin(\zeta + \theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}} a\sin\zeta,$$

laquelle ne contenant que la ſeule inconnuë θ, qui marque la réfraction qui convient à la hauteur obſervée $= 90° - \zeta$, ou à la diſtance au zenith $= \zeta$; elle nous découvrira cette réfraction.

XXXVII. Puiſque nous ſavons que la réfraction θ eſt toujours aſſés petite, pour emploier les approximations, poſons

$$\sin\theta = \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3, \quad \& \quad \cos\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta\theta,$$

& à cauſe de $\sin(\zeta+\theta) = \sin\zeta\cos\theta + \cos\zeta\sin\theta$, nous aurons :

$$\sin(\zeta+\theta) = \sin\zeta + \theta\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\theta\theta\sin\zeta - \tfrac{1}{6}\theta^3\cos\zeta.$$

Donc poſant $\frac{A}{a} = \frac{-\;nbcfg}{a(\gamma f - nbg)k/\alpha} = D$ nous aurons :

$$\frac{D\theta\theta(1-\frac{5}{6}\theta\theta)}{\sin\zeta(2-3\theta\theta)-B\theta\cos\zeta} + \sin\zeta + \theta\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\theta\theta\sin\zeta = \alpha^{\frac{-k}{c}}\sin\zeta.$$

XXXVIII. Mais, puisque aſſés exactement $\alpha^{\frac{-k}{c}} = 1 - \frac{k}{c}l\alpha$, & $l\alpha = -(1-\alpha)$, nous aurons $\alpha^{\frac{-k}{c}} = 1 + \frac{(1-\alpha)k}{c}$, & partant en négligeant les termes, où θ a plus de deux dimenſions :

$$D\theta\theta + 2\theta\sin\zeta\cos\zeta - \theta\theta\sin\zeta^2 - \frac{2(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta^2$$

$$-B\theta\theta\cos\zeta^2 + \frac{B(1-\alpha)k}{c}\theta\sin\zeta\cos\zeta + \frac{3(1-\alpha)k}{c}\theta\theta\sin\zeta^2 = 0.$$

Or parce que $1-\alpha$ eſt ſi extrêmement petit, cette équation ſe réduit à celle-cy :

$$\theta\theta = \frac{-2\theta\sin\zeta\cos\zeta - \frac{B(1-\alpha)k}{c}\theta\sin\zeta\cos\zeta + \frac{2(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta^2}{D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2},$$

qui donne $\theta =$

$$\frac{-\left(1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right)\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{\left(\left[1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right]^2\cos\zeta^2 + \frac{2(1-\alpha)k}{c}D - \frac{2(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta^2 - \frac{2(1-\alpha)k}{c}B\cos\zeta^2\right)}}{D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2}$$

ou

$$\theta = \frac{-\left(1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right)\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{\left(\left[1-\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right]^2\cos\zeta^2 + \frac{2(1-\alpha)k}{c}[D-\sin\zeta^2]\right)}}{D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2}$$

XXXIX.

XXXIX. On pourroit encore plus exactement assigner la valeur de la réfraction θ, en ne point négligeant les plus hautes puissances de θ; ou bien on n'auroit qu'à resoudre cette équation :

$$D\sin\theta^2 \cos\theta = [\sin\zeta(2\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - B\cos\zeta\sin\theta\cos\theta]\,[\sin\zeta(1-\cos\theta) - \cos\zeta\sin\theta + \frac{(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta]$$

qui se reduit à une équation du sixième degrè ; mais on verra bientôt, que les termes que j'ai négligés, sont si petits, que la valeur trouvée pour θ ne sauroit différer sensiblement de la vérité : du moins la différence ne sauroit jamais à beaucoup prés monter à une seconde.

XL. En posant pour $l\alpha$ sa valeur $-(1-\alpha)$ nous aurons

$$D = \frac{nbcfg}{(1-\alpha)ak(\gamma f - nbg)}, \qquad \&$$

$$B = \frac{nbcfg}{(1-\alpha)ak(\gamma f - nbg)} - 1 + \frac{\gamma cf(\gamma f - 3nbg)}{(1-\alpha)k(\gamma f - nbg)^2}.$$

Or, puisque la densité de l'air k doit être concluë de la hauteur du barometre h, & du nombre g indiqué par le thermometre, nous aurons $\frac{k}{c} = \frac{\gamma h}{bg}$ ou $\frac{c}{k} = \frac{bg}{\gamma h}$, & partant

$$D = \frac{nbbfgg}{(1-\alpha)a\gamma h(\gamma f - nbg)}, \qquad \&$$

$$B = D - 1 + \frac{bfg(\gamma f - 3nbg)}{(1-\alpha)h(\gamma f - nbg)^2}.$$

XLI. La valeur trouvée pour θ fait dabord voir qu'au zenith, lorsque $\zeta = 0$, la réfraction evanouït aussi : mais pour les Astres vus dans l'Horizon, lorsque $\zeta = 90°$, la réfraction se trouve

$$\theta = \sqrt{\frac{2(1-\alpha)k}{c(D-1)}} = \sqrt{\frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg(D-1)}}$$

ou

ou en remettant pour D sa valeur, la réfraction horizontale sera

$$\frac{(1-\alpha)\gamma h}{bg} \sqrt{\frac{2abg(\gamma f - nbg)}{nbbfgg - (1-\alpha)a\gamma h(\gamma f - nbg)}},$$

qui est exprimée en parties du sinus total $= 1$; donc, pour avoir sa valeur en secondes, on n'a qu'à multiplier cette formule par le nombre 206265.

XLII. De là on voit, que si la valeur de D étoit infinie, ce qui arriveroit lorsque $f = \frac{nbg}{\gamma}$, la réfraction horizontale évanouïroit; & qu'elle augmente, plus la valeur de D sera petite, ou plus la valeur de f sera grande. Mais par rapport à la hauteur f, où la chaleur est réduite à la moitié de celle qui régne en bas, je remarque qu'elle est toujours très grande; car puisque la chaleur se réduit à la moitié, lorsque la densité de l'air devient double, la hauteur du barometre demeurant la même; il est clair que ce seroit l'effet d'un très horrible froid, qu'on ne sauroit supposer dans l'atmosphère, qu'à une distance très éloignée. Donc la quantité f surpassera toujours de beaucoup la valeur de $\frac{nbg}{\gamma}$, puisque nb est environ une mile d'Allemagne, & la fraction $\frac{g}{\gamma}$ ne sauroit jamais s'éloigner considérablement de l'unité.

XLIII. Si nous supposons que le plus grand froid, qui régne dans les régions polaires, augmente la densité de l'air d'un tiers, le ressort demeurant le même, il semble très probable que dans les pays chauds un tel degré de froid ne sauroit être admis dans l'atmosphère qu'à une hauteur très grande, & qui surpasse de beaucoup une mile d'Allemagne. Supposons donc qu'à une hauteur $z = 2$ Miles d'Allegne, le degré de chaleur v soit deux tiers du degré g qui régne en bas,

bas, de ſorte que $v = \frac{2}{3} g$; & puisque j'ai ſuppoſé $v = \frac{fg}{f+z}$, nous aurons $\frac{2}{3} = \frac{f}{f+z}$, d'où nous tirons la hauteur f, où la chaleur ne ſera que la moitié de g, $=$ 4 miles d'Allemagne, & partant à peu près $f = \frac{4nbg}{\gamma}$.

XLIV. Poſons donc $f = \lambda n b$, où λ marque un nombre probablement plus grand que 4, & il ſemble même que ce nombre ſera d'autant plus grand, plus la chaleur en bas g ſera petite: car s'il fait déjà aſſés froid en bas, la chaleur ne ſauroit diminuer ſi vite en montant, que s'il y faiſoit plus chaud. D'où il s'enſuit, que le nombre λ ſera plus grand, lorsque g eſt plus petit: ou bien en Eté le nombre λ ſera plus petit qu'en Hyver. Cela remarqué, nous aurons:

$$D = \frac{\lambda n b b g g}{(1-\alpha) a \gamma h (\lambda\gamma - g)} \qquad \alpha$$

$$B = D - 1 + \frac{\lambda b g (\lambda\gamma - 3g)}{(1-\alpha) h (\lambda\gamma - g)^2}.$$

XLV. De là, puisque $\frac{k}{c} = \frac{\gamma h}{bg}$, nous aurons pour les quantités, qui entrent dans l'expreſſion trouvée pour la réfraction θ:

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}.B = \frac{\lambda n b g}{2a(\lambda\gamma - g)} - \frac{(1-\alpha)\gamma h}{2bg} + \frac{\lambda\gamma(\lambda\gamma - 3g)}{2(\lambda\gamma - g)^2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D - \sin\zeta^2) = \frac{2\lambda n b g}{a(\lambda\gamma - g)} - \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D - \sin\zeta^2 - B\,\mathrm{cs}\,\zeta^2 = \frac{\lambda n b b g g \sin\zeta^2}{(1-\alpha) a \gamma h (\lambda\gamma - g)} - \sin\zeta^2 + \mathrm{cs}\,\zeta^2 - \frac{\lambda b g (\lambda\gamma - 3g)\,\mathrm{cs}\,\zeta^2}{(1-\alpha) h (\lambda\gamma - g)^2}$$

 Donc

Donc, s'il étoit $\lambda\gamma = 3g$, nous aurions :

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}B = \frac{3nbg}{4a\gamma} - \frac{(1-\alpha)\gamma h}{2bg}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D-\sin\zeta^2) = \frac{3nbg}{a\gamma} - \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2 = \frac{3nbbgg\sin\zeta^2}{2(1-\alpha)aggh} - \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2.$$

XLVI. Or, si nous posons $\lambda = \infty$, ce qui est le cas où l'atmosphère auroit par toute sa hauteur le même degré de chaleur, ces quantités deviendroient :

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}B = \frac{nbg}{2a\gamma} - \frac{(1-\alpha)\gamma h}{2bg} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D-\sin\zeta^2) = \frac{2nbg}{a\gamma} - \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2 = \frac{nbbgg\sin\zeta^2}{(1-\alpha)a\gamma\gamma h} - \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2 - \frac{bg\cos\zeta^2}{(1-\alpha)\gamma h},$$

Or, quelque hypothese qui puisse avoir lieu, la réfraction sera :

$$\theta = \frac{-\left(1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right)\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{\left(\left[1-\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right]^2\cos\zeta^2 + \frac{2(1-\alpha)k}{c}\left[D-\sin\zeta^2\right]\right)}}{D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2}$$

XLVII. S'il arrivoit que le dénominateur $D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2$ devint quelque part $=0$, alors nous aurions :

$$\theta = \frac{\frac{(1-\alpha)k}{c}.\tang\zeta}{1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}.B}$$

Pour

Pour ce cas l'hypothese $\lambda\gamma = 3g$ donneroit, à cause de l'extrème petitesse des termes $\frac{nbg}{a\gamma}$, & $\frac{(1-\alpha)\gamma h}{bg}$, la réfraction $\theta = \frac{(1-\alpha)\gamma h}{bg}\,\mathrm{tg}\,\zeta$; mais l'autre hypothese $\lambda = \infty$ donneroit $\theta = \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{3bg}\,\mathrm{tang}\,\zeta$.

XLVIII. Dévelopons ces deux hypotheses, entre lesquelles la Nature semble consister, plus en détail: & puisque nb est environ une Mile d'Allemagne, & le rayon de la terre en contient environ 858, la valeur de $\frac{nb}{a}$ sera $= \frac{1}{858}$. Ensuite, puisqu'il est à peu près $1-\alpha = \frac{1}{3432}$, il sera $\frac{nb}{(1-\alpha)a} = 4$, & les raisons $g:\gamma$ & $h:b$ ne différeront pas beaucoup de celle d'égalité. Cela remarqué, il sera aisé de voir, quels termes sont si petits par rapport aux autres, qu'on les puisse négliger.

XLIX. Soit donc pour la premiere hypothese $\lambda\gamma = 3g$, & nous aurons:

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}\,\mathrm{B} = \frac{1}{1144}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{6864}\cdot\frac{\gamma h}{bg}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(\mathrm{D} - \sin\zeta^2) = \frac{1}{286}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$\mathrm{D} - \sin\zeta^2 - \mathrm{B}\cos\zeta^2 = 6\cdot\frac{bgg}{\gamma\gamma h}\sin\zeta^2 - \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2$$

Or

Or, pour l'autre hypothese $\lambda = \infty$ nous aurons :

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}\,\mathrm{B} = \frac{1}{1716}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{6864}\cdot\frac{\gamma h}{bg} + \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(\mathrm{D}-\sin\zeta^2) = \frac{1}{429}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$\mathrm{D}-\sin\zeta^2-\mathrm{B}\,\mathrm{cf}\,\zeta^2 = 4\cdot\frac{bgg}{\gamma\gamma h}\sin\zeta^2 - \sin\zeta^2 + \mathrm{cf}\,\zeta^2 - 3432\,\frac{bg}{\gamma h}\,\mathrm{cf}\,\zeta^2.$$

L. Soit la distance de l'astre au zenith, ou l'angle ζ, extrêmement petit, & ayant pour ce cas :

$$\theta = \frac{-\dfrac{(1-\alpha)k}{c}\,\mathrm{B}\sin\zeta\cos\zeta + \dfrac{\dfrac{(1-\alpha)k}{c}(\mathrm{D}-\sin\zeta^2)\sin\zeta}{\left(1-\dfrac{(1-\alpha)k}{2c}\,\mathrm{B}\right)\cos\zeta}}{\mathrm{D}-\sin\zeta^2-\mathrm{B}\cos\zeta^2}$$

Donc, en négligeant les plus petits termes, nous aurons pour la premiere hypothese $\lambda\gamma = 3g$: $\theta =$

$$\frac{-\left(\frac{1}{572}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\right)\sin\zeta\cos\zeta+\left(\frac{1}{572}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\cdot\sin\zeta^2\right)\mathrm{tg}\,\zeta}{\cos\zeta^2}$$

ou bien $\theta = \dfrac{1}{572}\cdot\dfrac{g}{\gamma}\,\mathrm{tang}\,\zeta^3 + \dfrac{1}{3432}\cdot\dfrac{\gamma h}{bg}\cdot\dfrac{\mathrm{tang}\,\zeta\cdot\cos 2\zeta}{\cos\zeta^2}$.

Et pour l'autre hypothese $\lambda = \infty$ nous aurons : $\theta =$

$$\frac{-\left(1+\frac{1}{858}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\right)\sin\zeta\,\mathrm{cf}\,\zeta+2\left(\frac{1}{858}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\sin\zeta^2\right)\mathrm{tg}\,\zeta}{-3432\cdot\frac{bg}{\gamma h}\cos\zeta^2}$$

ou

ou $\theta = \frac{1}{3432} \cdot \frac{\gamma h}{bg} \operatorname{tang} \zeta$; donc dans l'un & l'autre cas la réfraction eſt à peu près la même.

LI. Pour la réfraction horizontale ou $\zeta = 90$ ayant

$\theta = \frac{\sqrt{\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D-1)}}{D-1}$, nous aurons pour la premiere hypotheſe

$$\lambda\gamma = 3g:$$

$$\theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{286} \cdot \frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}}{6 \cdot \frac{bgg}{\gamma\gamma h} - 1} = \frac{\frac{\gamma h}{bg}}{\sqrt{10296\left(\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}}$$

& pour l'autre hypotheſe $\lambda = \infty$:

$$\theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{429} \cdot \frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}}{4 \cdot \frac{bgg}{\gamma\gamma h} - 1} = \frac{\frac{\gamma h}{bg}}{\sqrt{6864\left(\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}}$$

LII. Ces formules ſont fondées ſur un certain état fixe de l'air, qu'il faut expliquer plus diſtinctement : dans cet état de l'air je ſuppoſe, que la hauteur du mercure dans le barometre étant $= b$, il ſoit exactement $\frac{nb}{a} = \frac{1}{858}$: de plus je ſuppoſe que le degré de chaleur γ de cet air ſoit tel, qu'il en réſulte une telle denſité de l'air, que la raiſon de réfraction des rayons, qui entrent du vuide dans cet air, ſoit exactement comme 1 à $1 - \frac{1}{4 \cdot 858}$, ou comme 3432 à 3431; de ſorte que $1 - \alpha = \frac{1}{3432}$; & $\frac{nb}{(1-\alpha)a} = 4$.

 Et

Et il n'y a aucun doute, qu'un tel état de l'air tant par rapport à ſon élaſticité qu'à ſa chaleur ne ſoit poſſible ; & qu'il ne puiſſe même exiſter quelquefois.

LIII. Car poſant la hauteur du barometre $b = 2\frac{1}{3}$ pieds ; & la denſité du mercure à celle de cet air, comme 10000 à 1, on aura $nb = 23333$ pieds, ou bien à une mile d'Allemagne ; donc $\frac{nb}{a} = \frac{1}{858}$. Cette même valeur proviendroit, ſi la hauteur du barometre b étoit ou plus grande ou plus petite, & que la denſité de l'air fut augmentée ou diminuée en même raiſon. Or parmi cette infinité de cas, qui produiſent tous $\frac{nb}{a} = \frac{1}{858}$, il s'en trouvera un certainement, où $1 - \alpha$ devient $= \frac{1}{3432}$, laquelle fraction eſt aſſés d'accord avec ce qu'on a trouvé par les expériences : & alors γ marque le degré de chaleur de cet air.

LIV. Ayant donc une fois établi ces deux quantités b & γ, il faut chercher pour chaque autre état de l'air les quantités h & g : dont la quantité h marque la hauteur du barometre, & ſe trouve par conſéquent ſans aucune difficulté. L'autre quantité g, ſe conclura du thermometre, dont les diviſions montrent le volume, qu'une certaine maſſe d'air occupe à chaque degré de chaleur, le reſſort étant le même. De là on aura pour chaque état de l'air, tant le rapport de h à b que de g à γ, exprimé en nombres.

LV. Or nous voyons que ces deux rapports $\frac{g}{\gamma}$ & $\frac{\gamma h}{bg}$, entrent dans nos formules : ſoit donc

$$\frac{g}{\gamma} = M, \quad \& \quad \frac{\gamma h}{bg} = N.$$

Poſons

Posons de plus pour voir mieux le rapport des nombres $\frac{1}{3432} = \mu$, & nous aurons pour l'hypothese $\lambda\gamma = 3g$:

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}B = 3\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D - \sin\zeta^2) = 12\mu M - 2\mu N \sin\zeta^2$$

$$D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2 = \frac{6M}{N}\sin\zeta^2 - \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2$$

& pour l'hypothese $\lambda = \infty$:

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}B = 2\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N + \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D - \sin\zeta^2) = 8\mu M - 2\mu N \sin\zeta^2$$

$$D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2 = \frac{4M}{N}\sin\zeta^2 - \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2 - \frac{1}{\mu N}\cos\zeta^2.$$

LVI. En substituant ces valeurs, nous trouverons la réfraction θ qui répond à la distance observée au zenith $= \zeta$.

Pour la premiere hypothese $\lambda = \frac{3g}{\gamma} = 3M$:

$$\theta = \frac{-[1+3\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N]\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{[(1-3\mu M+\tfrac{1}{2}\mu N)^2\cos\zeta^2 + 12\mu M - 2\mu N\sin\zeta^2]}}{\frac{6M}{N}\sin\zeta^2 - \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2}$$

ou bien en négligeant les termes qui renferment μ^2:

$$\theta = \frac{-N[1+3\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N]\sin\zeta\cos\zeta + N\sin\zeta\sqrt{[\cos\zeta^2 + 6\mu M(2-\cos\zeta^2) + \mu N(\cos\zeta^2 - 2\sin\zeta^2)]}}{6M\sin\zeta^2 + N(\cos\zeta^2 - \sin\zeta^2)}$$

& pour la ſeconde hypotheſe $\lambda = \infty$:

$$\theta = \frac{+\mu N\left[\tfrac{3}{2}+2\mu M-\tfrac{3}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[\tfrac{1}{4}\cos\zeta^2+2\mu M(4-\cos\zeta^2)+\tfrac{1}{2}\mu N(\cos\zeta^2-4\sin\zeta^2)\right]}}{\cos\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)-4\mu M\sin\zeta^2}$$

ou en négligeant les termes, que ſont extrèmement petits à l'égard des autres

$$\theta = \frac{+\tfrac{3}{2}\mu N\sin\zeta\cos\zeta-\tfrac{1}{2}\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[\cos\zeta^2+8\mu M-2\mu N\sin\zeta^2\right]}}{\cos\zeta^2+\mu N\sin\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2}.$$

LVII. Dans cette derniere formule il faut diſtinguer deux cas, l'un où $\cos\zeta^2+\mu N\sin\zeta^2$ eſt plus grand que $4\mu M\sin\zeta^2$; & l'autre où il eſt plus petit : cependant dans l'un & l'autre cas la valeur de θ provient affirmative. Mais, lorsque le dénominateur devient extrèmement petit, alors on ne doit plus négliger aucun terme, quelque petit qu'il paroiſſe : on aura donc pour ce cas :

$$\theta = \frac{\mu N\left[\tfrac{3}{2}+2\mu M-\tfrac{3}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[\left(\tfrac{1}{2}-2\mu M+\tfrac{3}{2}\mu N\right)^2\cos\zeta^2+8\mu M-2\mu N\sin\zeta^2\right]}}{\cos\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)}$$

ou bien

$$\theta = \frac{\mu N\left[\tfrac{3}{2}+2\mu M-\tfrac{3}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[\left(\tfrac{3}{2}+2\mu M-\tfrac{3}{2}\mu N\right)^2\cos\zeta^2-2\cos\zeta^2+8\mu M\sin\zeta^2+2\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)\right]}}{\cos\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)}$$

LVIII. Poſons maintenant pour abréger

$$\tfrac{3}{2}+2\mu M-\tfrac{3}{2}\mu N = L$$

$$\cos\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2) = Q$$

& nous aurons :

$$\theta = \frac{\mu N L\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{(LL\cos\zeta^2-2Q)}}{Q}.$$

Cette

Cette formule dont on peut se servir en général trés commodément, nous fait d'abord voir, que lorsque le dénominateur Q est très petit, on aura :

$$\theta = \frac{\mu N}{L} \operatorname{tang} \zeta + \frac{\mu N Q \operatorname{tang} \zeta}{2 L^3 \operatorname{cof} \zeta^2} + \frac{\mu N Q Q \operatorname{tang} \zeta}{2 L^5 \operatorname{cof} \zeta^4}.$$

Donc si $Q = 0$, il deviendra $\theta = \frac{\mu N}{L} \operatorname{tang} \zeta$.

LIX. Voyons maintenant plus en détail, quelles Tables de réfractions résultent de l'une & de l'autre de ces deux hypotheses, pour chaque degré de chaleur & d'élasticité de l'air. La base de ces tables sera tirée de l'état de l'air fixe, pour lequel je suppose que le barometre montre la hauteur b, & le thermometre le degré γ. Ou bien je suppose que la densité de l'air est telle, que pour le passage des rayons du vuide dans cet air, le sinus d'incidence soit au sinus de réfraction comme 3432 à 3431, ou comme 1 à $1 - \mu$: ensuite je suppose que la densité de cet air est à celle du mercure exactement comme la hauteur du barometre b au rayon de la terre.

PREMIERE HYPOTHESE
où la chaleur de l'air à une hauteur de 3 miles est supposée reduite à la moitié.

LX. Pour cette hypothese nous avons trouvé, que posant

$$M = \frac{g}{\gamma} \quad ; \quad N = \frac{\gamma h}{b g}, \quad \text{\& de plus}$$

$$L = 1 + 2 \mu M - \tfrac{1}{2} \mu N$$

$$Q = 6 M \operatorname{fin} \zeta^2 + N (\operatorname{cof} \zeta^2 - \operatorname{fin} \zeta^2),$$

la réfraction qui répond à la distance observée au zenith $= \zeta$ sera

$$\theta = \frac{- L N \operatorname{fin} \zeta \operatorname{cof} \zeta + N \operatorname{fin} \zeta \sqrt{(L L \operatorname{cof} \zeta^2 + 2 \mu Q)}}{Q}.$$

LXI. Donc pour l'état fixe de l'air, qui nous sert de base, ayant $g = \gamma$, & $h = b$; nous aurons $M = 1$, & $N = 1$, & partant $L = 1 + \frac{5}{2}\mu$, & $Q = 5 \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2$; par conséquent la réfraction sera

$$\theta = \frac{-(1+\frac{5}{2}\mu)\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{[(1+\frac{5}{2}\mu)^2\cos\zeta^2 + 10\mu\sin\zeta^2 + 2\mu\cos\zeta^2]}}{5\sin\zeta^2 + \cos\zeta^2}$$

ou bien

$$\theta = \frac{-(1+\frac{5}{2}\mu)\,\mathrm{tang}\,\zeta + \mathrm{tang}\,\zeta\sqrt{[(1+\frac{5}{2}\mu)^2 + 2\mu + 10\mu\,\mathrm{tang}\,\zeta^2]}}{1 + 5\,\mathrm{tang}\,\zeta^2}.$$

LXII. Tandisque le terme $10\mu\,\mathrm{tang}\,\zeta^2$ est beaucoup plus petit que l'unité, à cause de $\mu = \frac{1}{3432}$, il sera assés exactement :

$$\theta = \mu\,\mathrm{tang}\,\zeta - \tfrac{1}{2}\mu\mu(6 + 5\,\mathrm{tang}\,\zeta^2)\,\mathrm{tang}\,\zeta.$$

Or lorsque $10\mu\,\mathrm{tang}\,\zeta^2$ est une quantité extrèmement grande, alors on aura :

$$\theta = \tfrac{1}{5}\sqrt{10\mu} - \frac{1}{5\,\mathrm{tang}\,\zeta} + \frac{1}{10\,\mathrm{tang}\,\zeta^2\sqrt{10\mu}} - \frac{\mu}{2\,\mathrm{tang}\,\zeta}.$$

Mais si $10\mu\,\mathrm{tang}\,\zeta^2$ est un nombre médiocre $= t$, puisque $\mathrm{tang}\,\zeta^2 = \frac{t}{10\mu} = 343\frac{1}{5}t$, & partant un nombre très grand, nous aurons :

$$\theta = \left(\sqrt{(1+t)} - 1 - \tfrac{5}{2}\mu + \frac{7\mu}{2\sqrt{(1+t)}}\right)\frac{100}{9263\sqrt{t}},$$

& cette formule sert pour toutes les réfractions médiocres.

LXIII. Pour la réfraction horizontale, où $\zeta = 90$ nous aurons en général $Q = 6M - N$; & partant

$$\theta = N\sqrt{\frac{2\mu}{Q}} = N\sqrt{\frac{2\mu}{6M-N}},$$

d'où

d'où nous tirons pour les cas fuivans :

	I.	II.	III.	IV.	V.
	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{6}{5}$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{4}{5}$
	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = \frac{6}{5}$	$\frac{h}{b} = \frac{4}{5}$	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = 1$
	$M = 1$	$M = 1$	$M = 1$	$M = \frac{6}{5}$	$M = \frac{4}{5}$
	$N = 1$	$N = \frac{6}{5}$	$N = \frac{4}{5}$	$N = \frac{5}{6}$	$N = \frac{5}{4}$
$6M - N$	$= 5$	$= \frac{24}{5}$	$= \frac{26}{5}$	$= \frac{191}{30}$	$= \frac{71}{20}$
$\theta =$	$37', 6\frac{4}{5}''$	$44', 25\frac{1}{5}''$	$29', 6\frac{4}{5}''$	$27', 24\frac{1}{2}''$	$55', 3\frac{2}{5}''$

LXIV. De là nous voyons, que dans l'état fixe de l'air, qui nous fert de bafe, où $g = \gamma$, & $h = b$, la parallaxe horizontale eft de $2227''$: & que, fi la hauteur du barometre h differe un peu de b, de forte que

$$h = (1 + x)b, \quad \text{on aura} \quad \theta = 2227 + 2295x - 550xx.$$

Or fi la hauteur du thermometre g différe un peu de γ, de forte que

$$g = (1 + y)\gamma, \quad \text{on aura} \quad \theta = 2227 - 4148y + 6178yy.$$

D'où nous concluons, que lorsqu'il y aura conjointement :

$h = (1 + x)b$, & $g = (1 + y)\gamma$; la réfraction horizontale fera

$$\theta = 2227 + 2295x - 550xx - 4148y + 6178yy.$$

LXV. Ainfi il eft clair, qu'une plus grande hauteur du barometre augmente la réfraction horizontale : ou qu'une plus grande hauteur du thermometre la diminuë. Donc, puisque la réfraction horizontale fe trouve ordinairement dans nos contrées de $2000''$, cet état de l'air différe tellement de l'état fixe que

$$227 + 2295x - 550xx - 4148y + 6178yy = 0.$$

Et

Et partant ſi c'étoit uniquement la hauteur du barometre qui régle cette différence, on auroit $x = -0,0966$; ou ſi cette différence provenoit uniquement du thermometre, on auroit $y = 0,0508$. Mais ſi l'un & l'autre y contribuoit également, de ſorte que $x = -y$, on auroit $x = -0,0363$, & $y = +0,0363$, de ſorte qu'il ſeroit $h = 0,9673\,b$, & $g = 1,0363\,\gamma$.

LXVI. Conſidérons à préſent auſſi la réfraction à une certaine hauteur, & ſoit la diſtance obſervée au zenith $\zeta = 45°$, de ſorte que $\sin\zeta = \cos\zeta$, & la réfraction qui convient à cette hauteur ſe trouvera

$$\theta = \frac{-(1+3\mu M-\frac{1}{2}\mu N)N + N\sqrt{[(1+3\mu M-\frac{1}{2}\mu N)^2+12\mu M]}}{6M},$$

ou bien aſſés exactement $\theta = \mu N$. Et de là nous aurons pour nos cinq cas conſidérés cy-deſſus

	I.	II.	III.	IV.	V.
	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{6}{5}$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{4}{5}$
	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = \frac{6}{5}$	$\frac{h}{b} = \frac{4}{5}$	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = 1$
$\theta =$	$60'', 1$	$72'', 1$	$48'', 1$	$50'', 1$	$75'', 1$

LXVII. Donc, ſi la hauteur du barometre h différe tellement de la hauteur fixe b, que $h = (1+x)\,b$, la réfraction qui répond à la hauteur de $45°$ ſera $= 60''\tfrac{1}{10} + 60x$. Or ſi la hauteur du thermometre $g = (1+y)\gamma$, la réfraction ſera $= 60\tfrac{1}{10} - 62\tfrac{1}{2}y + 62\tfrac{1}{2}yy$. Et partant lorſqu'il y aura à la fois $h = (1+x)b$, & $g = (1+y)\gamma$ la réfraction à la hauteur de $45°$ ſera

$$\theta = 60'' + 60x - 62\tfrac{1}{2}y, \text{ ou bien } = \frac{1+x}{1+y}\,60 \text{ ſecondes.}$$

LXVIII.

LXVIII. Les tables de M. *Caſſini* marquent la réfraction horizontale $= 32'$, $20'' = 1940''$, & celle qui répond à la hauteur de $45^\circ = 59''$; donc ſuppoſant que ces deux réfractions conviennent au même état de l'air, nous aurons $60 + 60x = 59 + 59y$; ou bien $1 + 60x = 59y$, donc $x = y - \frac{1}{60}y - \frac{1}{60}$: & cette valeur étant ſubſtituée dans l'autre équation horizontale, donnera la valeur de y.

LXIX. Or, puisque $M = 1 + y$, & $N = \frac{1+x}{1+y}$, la réfraction horizontale eſt $= \frac{1+x}{1+y} \sqrt{\frac{2\mu(1+y)}{6(1+y)^2 - 1 - x}}$, & dans le cas $x = 0$, & $y = 0$, elle eſt $\sqrt{\frac{2\mu}{5}} = 2227''$; nous aurons $\sqrt{2\mu} = 2227\sqrt{5}$; donc en général lorsque $h = (1+x)b$, & $g = (1+y)\gamma$, la réfraction horizontale ſera $= 2227 . \frac{1+x}{1+y} \sqrt{\frac{5(1+y)}{6(1+y)^2 - 1 - x}}$. Et partant ayant déjà trouvé $1 + x = \frac{59}{60}(1+y)$, nous aurons pour la réfraction horizontale

$$1940 = \frac{59}{60} . 2227 \sqrt{\frac{5}{6(1+y) - \frac{59}{60}}} = 2190 \sqrt{\frac{300}{301 + 360y}};$$

d'où nous tirons $y = 0{,}2258$, & $x = 0{,}2054$.

LXX. Donc, pour cet état de l'air, auquel répond la table des réfractions de Mr. *Caſſini*, nous aurons :

la hauteur du barometre $= 1{,}2054\, b$

la hauteur du thermometre $= 1{,}2258\, \gamma$

Donc, ſi nous regardons ces deux hauteurs comme connuës, & que nous poſions pour la table des réfractions de Mr. *Caſſini*

 la

la hauteur du barometre $= H$, & du thermometre $= G$, nous en tirerons pour notre état fixe de l'air :

$$\text{la hauteur du barometre} = \frac{H}{1,2054} = 0,8296\,H$$

$$\text{la hauteur du thermometre} = \frac{G}{1,2258} = 0,8158\,G$$

LXXI. Les Tables de *Flamsteed* supposent la réfraction horizontale de $33' = 1980''$ & celle qui répond à la hauteur de $44°$ seulement de $45''$, de sorte que nous ayons :

$$\frac{1+x}{1+y}\,60 = 48 \quad \& \quad 2227.\,\frac{1+x}{1+y}\,\sqrt{\frac{5(1+y)}{6(1+y)^2-1-x}} = 1980$$

Donc, puisque $1+x = \frac{4}{5}(1+y)$, nous aurons :

$$\tfrac{4}{5}.\,2227\,\sqrt{\frac{25}{26+30y}} = 1980 \quad \text{ou} \quad y = -\,0,19209$$ & partant $x = -\,0,35366$: ou bien pour cet état de l'air on aura

la hauteur du barometre $h = 0,64633\,b$

la hauteur du thermometre $g = 0,80701\,\gamma$

de sorte que cet état de l'air seroit extrémement différent de celui qui répond à la table de Mr. *Cassini.*

SECONDE HYPOTHESE

où la chaleur de l'air est supposée la même par toute la hauteur de l'atmosphère.

LXXII. Pour cette hypothese posant

$$M = \frac{g}{\gamma}. \qquad N = \frac{\gamma h}{b g}$$

$$L = \tfrac{3}{2} + 2\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N$$

$$Q = \operatorname{cof}\zeta^2 - 4\mu M \sin\zeta^2 - \mu N\,(\operatorname{cof}\zeta^2 - \sin\zeta^2)$$

la

la réfraction qui répond à la distance observée du zenith $= \zeta$ sera

$$\theta = \frac{\mu N L \sin\zeta \cos\zeta - \mu N \sin\zeta \sqrt{(L L \cos\zeta^2 - 2 Q)}}{Q}$$

LXX. Donc pour la réfraction horizontale ou $\zeta = 90°$, on aura $Q = -4\mu M + \mu N$: & la réfraction horizontale sera

$$\theta = \mu N \sqrt{\frac{2}{4\mu M - \mu N}} = N \sqrt{\frac{2\mu}{4M - N}}.$$

Et partant dans notre état fixe de l'air, où $M = 1$ & $N = 1$, la réfraction horizontale sera $= \sqrt{\frac{2\mu}{3}}$, ou bien de $2875'' = 47', 55''$. Donc, pour tout autre état de l'air, à cause de $\sqrt{2\mu} = 2875 \sqrt{3}$, la réfraction horizontale sera

$$\theta = 2875 N \sqrt{\frac{3}{4M - N}}.$$

LXXIV. Ensuite pour la hauteur observée de 45° d'un astre, ou $\cos\zeta = \sin\zeta$ & $Q = (1 - 4\mu M) \sin\zeta^2$, la réfraction sera

$$\theta = \frac{\mu N L - \mu N \sqrt{(L L - 2 + 8\mu M)}}{1 - 4\mu M} \text{ ou bien}$$

$$\theta = \frac{\mu N \left(\left[\tfrac{3}{2} + 2\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N - \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 14\mu M - \tfrac{3}{2}\mu N}\right]\right)}{1 - 4\mu M}$$

& partant $\theta = \frac{\mu N(1 - 12\mu M + \mu N)}{1 - 4\mu M} = \mu N (1 - 8\mu M + \mu N)$

Or pour notre état fixe de l'air cette réfraction devient $= 60''$; & partant dans tout autre état de l'air la réfraction qui répond à la hauteur de 45° sera $= 60$ N secondes.

LXXV. Comparons aussi avec cette hypothese la table des réfractions de M. *Cassini*, & nous aurons :

$$59 = 60 N \ \& \ 1940 = 2875 N \sqrt{\frac{3}{4M - N}}.$$

donc

donc $N = \frac{59}{60}$ & $1940 = 2827 \sqrt{\frac{180}{240 M - 59}}$.

& partant $M = 1,8383 = \frac{g}{\gamma}$ donc $\frac{h}{b} = MN = 1,8077$.

Or la table des réfractions de *Flamſteed* donne

$$48 = 60 N \quad \& \quad 1980 = 2300 \sqrt{\frac{15}{20M - 4}}$$

d'où nous tirons :

$$N = \tfrac{4}{5} \quad \& \quad M = 1,2119 = \frac{g}{\gamma} \quad \& \quad \frac{h}{b} = 0,9696$$

LXXVI. Notre état fixe de l'air convient donc mieux avec les refractions de *Flamſteed*, qu'avec celles de *Caſſini*, dans cette ſeconde hypotheſe : or le contraire arrive dans la premiere hypotheſe, où l'état de l'air requis pour les réfractions de *Caſſini* approche plus de notre état fixe de l'air, que celui qui répond aux réfractions de *Flamſteed*. D'où il ſemble qu'en Angleterre le degré de chaleur de l'atmoſphère en montant diminuë moins qu'à Paris.

LXXVII. Pour juger mieux de l'état de l'air, qui convient à chaque table des réfractions, poſons en général la réfraction horizontale $= u''$, & celle qui répond à la hauteur de $45° = v''$, & la premiere hypotheſe donnera :

$$2227 \sqrt{\frac{5}{6M - N}} = u \quad \& \quad 60 N = v$$

d'où nous tirons :

$$N = \frac{1}{60} v \quad \& \quad M = 1148 \frac{vv}{uu} + \frac{v}{360}.$$

Or la ſeconde hypotheſe donne

$$2875 N \sqrt{\frac{3}{4M - N}} = u \quad \& \quad 60 N = v$$

d'où nous tirons :

$$N = \frac{1}{60} v \quad \& \quad M = 1722 \frac{vv}{uu} + \frac{v}{240}.$$

LXXVIII.

LXXVIII. Si l'une & l'autre hypothese s'écartoit également de la vérité ou auroit pour une hypothese moyenne

$$N = \frac{1}{60} v \quad \& \quad M = 1435 \frac{vv}{uu} + \frac{v}{300}.$$

& partant

$$\frac{g}{\gamma} = 1435 \frac{vv}{uu} + \frac{v}{300} \quad \& \quad \frac{h}{b} = 23 \frac{11}{12} \cdot \frac{v^3}{uu} + \frac{vv}{18000}.$$

Prenons aussi un milieu entre les tables de *Cassini* & de *Flamsteed*, & soit $u = 1960''$ & $v = 54''$, & nous aurons pour cette hypothese moyenne :

$$N = \frac{9}{10} \quad \& \quad M = 1,2688 = \frac{g}{\gamma} \quad \& \quad \frac{h}{b} = 1,1419$$

Donc ordinairement tant la chaleur que l'élasticité de l'air est plus grande, que dans notre état fixe de l'air.

LXXIX. Ramassons tout ce qui vient d'être trouvé ensemble, & sans nous borner à un état d'air déterminé, considérons un état de l'air, dont la densité soit telle, que les rayons qui y entrent du vuide se rompent selon la raison 1 à $1 - \mu$. De plus la hauteur du barometre, qui balance le ressort de cet air, soit $= b$, & le degré de chaleur $= c$: & que la densité de cet air soit à celle du vif-argent, comme b à νa où a marque le demi-diametre de la terre. Que cet air donc nous serve de base fixe, à laquelle nous comparerons tout autre état de l'air, quel qu'il puisse être.

LXXX. Pour un état de l'air donc quelconque, où l'Observateur se trouve, soit la hauteur du barometre $= h$, & le degré de chaleur $= g$. Or que cette chaleur décroisse en montant, en sorte qu'elle soit réduite à la moitié, à la hauteur $= \frac{1}{\delta} n b$, ou bien à la hauteur $= \frac{\nu}{\delta} a$; où il faut remarquer, que tant μ que ν sont des fractions très

 petites

petites, vû qu'il eſt à peu près $\mu = \frac{1}{3300}$ & $\nu = \frac{1}{860}$: or la lettre δ evanouïra auſſi, lorsque la chaleur demeure la même par toute la hauteur de l'atmoſphère, & elle ne ſauroit ſurpaſſer $\frac{1}{4}$ comme nous avons vu ci-deſſus.

LXXXI. Cela poſé, ſoit pour abréger

$$\left(\frac{3c}{g}-\delta\right)\left(\frac{c}{g}-2\delta\right)+\nu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)-\frac{\mu ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2 = \mathrm{P}$$

$$\frac{\nu bg}{ch}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2 = \mathrm{Q}$$

$$\frac{b}{h}\left(\frac{c}{g}-3\delta\right)-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2 = \mathrm{R}$$

& à la diſtance obſervée du zenith $= \zeta$ répondra la réfraction ϱ de ſorte que

$$\varrho = -\frac{\frac{1}{2}\mu \mathrm{P}\sin\zeta\cos\zeta + \frac{1}{2}\mu\sin\zeta\sqrt{\left(\mathrm{PP}\cos\zeta^2 + \frac{8ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2(\mathrm{Q}\sin\zeta^2 - \mathrm{R}\cos\zeta^2\right)}}{\mathrm{Q}\sin\zeta^2 - \mathrm{R}\cos\zeta^2}$$

ou bien

$$\varrho = \frac{1}{2}\mu\tang\zeta\,\frac{\left(-\mathrm{P}+\sqrt{(\mathrm{PP}+\frac{8ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2(\mathrm{Q}\tang\zeta^2-\mathrm{R})}\right)}{\mathrm{Q}\tang\zeta^2 - \mathrm{R}}$$

LXXXII. Nous aurons donc pour la réfraction horizontale

$$\varrho = \frac{1}{2}\mu\sqrt{\frac{\frac{8ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2}{\frac{\nu bg}{ch}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{2\mu\mu ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)}{\frac{\nu bg}{ch}-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)}},$$

ou bien $$\varrho = \frac{ch}{bg}\sqrt{\frac{2\mu}{\frac{\nu g}{\mu(c-\delta g)}-\frac{ch}{bg}}},$$

donc

donc si $g = c$, & $h = b$, on aura $\varrho = \sqrt{\dfrac{2\mu}{\dfrac{\nu}{\mu(1-\delta)} - 1}}$

pour l'état fixe de l'air : soit donc pour cet état la réfraction horizontale $= u''$; & pour tout autre état la réfraction horizontale sera

$$\varrho = \frac{ch}{bg} u \sqrt{\frac{\dfrac{\nu}{\mu(1-\delta)} - 1}{\dfrac{\nu g}{\mu(c-\delta g)} - \dfrac{ch}{bg}}} \text{ secondes.}$$

LXXXIII. Or pour la hauteur de $45°$ la réfraction sera

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}\mu\left(-P+\sqrt{(PP+\frac{8ch}{bg}(\frac{c}{g}-\delta)^2\left(\frac{\nu bg}{ch}(\frac{c}{g}-\delta)-\frac{b}{h}(\frac{c}{g}-3\delta\right)}\right)}{\frac{\nu bg}{ch}(\frac{c}{g}-\delta) - \frac{b}{h}(\frac{c}{g}-3\delta)}$$

d'où l'on tire, en négligeant les petits termes affectés par μ & ν, à moins que $\frac{c}{g} - 3\delta$ ne soit une quantité assés considérable, $\varrho = \frac{\mu ch}{bg}$: or la même valeur résulte lorsque $\frac{c}{g} - 3\delta = 0$, comme nous avons vu cy-dessus, de sorte que la réfraction à la hauteur de $45°$ ne dépend plus de la quantité δ; où je remarque qu'il y aura à plus forte raison pour les hauteurs observées plus grandes $\varrho = \frac{\mu ch}{bg}$ tang ζ; de sorte que toutes ces réfractions ne dépendent pas non plus de la quantité δ.

LXXXIV. Lorsque donc l'état de l'air convient avec notre état fixe, la réfraction qui répond à la hauteur de $45°$ sera $= \mu$: donc si nous posons cette réfraction $= \nu''$, pour tout autre état de l'air la la réfraction de la hauteur de 45° sera $\varrho = \frac{ch}{bg}v$ secondes: & encore pour des hauteurs plus grandes, ou à la distance ζ de zenith, la réfraction sera $= \frac{ch}{bg}v$ tang ζ second. Or posant pour abréger le nombre $206265 = i$, ayant $\mu = \frac{v}{i}$, & $\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{2\mu\mu(1-\delta)}{v-\mu(1-\delta)}}$, on trouvera $v = \frac{2(1-\delta)vv}{uu} + \frac{(1-\delta)v}{i}$, & $\frac{v}{\mu} = (1-\delta)(1+\frac{2iv}{uu})$, donc pour tout état de l'air la réfraction horizontale sera

$$= \frac{ch}{bg}\sqrt{\frac{2iv(\frac{c}{g}-\delta)}{(1-\delta)(1+\frac{2iv}{uu}) - \frac{ch}{bg}(\frac{c}{g}-\delta)}} \text{ secondes.}$$

LXXXV. On voit donc, que la réfraction suit assés exactement jusqu'à une distance très considérable du zenith la raison des tangentes de cette distance; & que cette raison ne commence à s'éloigner de la vérité, que lorsque μ tang ζ^2 ou v tang ζ^2 devient une quantité assés considérable: ce qui n'arrive que lorsque tang ζ^2 surpasse 10, ou bien l'angle ζ même 70 degrés: jusques là on ne risque pas de s'écarter sensiblement de la vérité.

LXXXVI. Ensuite on voit aussi, qu'à moins que l'astre ne soit trop proche de l'horizon, la réfraction est assés exactement proportionnelle à la hauteur du barometre; & réciproquement proportionnelle à la hauteur du thermometre, ou plutôt au degré de chaleur. Mais, pour les hauteurs de l'astre fort petites, le changement causé par le barometre & le thermometre devient plus grand que selon lesdites raisons, & cela surtout à l'égard des changemens de la chaleur.

LXXXVII. Enfin si l'on néglige les petits termes, entant que leur effet ne sçauroit jamais devenir sensible, la réfraction ϱ, qui répond à la distance observée du zenith $= \zeta$, sera

$$\varrho = \frac{\mu c h}{b g} \operatorname{tang} \zeta . \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3c}{g}-\delta\right)\left(\frac{c}{g}-\delta\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{3c}{g}-\delta\right)^2\left(\frac{c}{g}-2\delta\right)^2-\frac{2c}{g}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2\left(\frac{c}{g}-3\delta\right)+2\nu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^3 \operatorname{tg}\zeta^2-\frac{2\mu c h}{b g}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^4 \operatorname{tg}\zeta^2\right)}}{\frac{c}{g}\left(\frac{c}{g}-3\delta\right)-\nu\left(\frac{c}{g}-\delta\right) \operatorname{tang}\zeta^2+\frac{\mu c h}{b g}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2 \operatorname{tang}\zeta^2}$$

Soit pour abréger $\frac{c h}{b g} = \beta$, & $\frac{c}{g} - \delta = \gamma$, & on aura

$$\varrho = \mu \beta \operatorname{tang} \zeta \, \frac{\frac{1}{2}(3\gamma+2\delta)(\gamma-\delta)-\sqrt{\left[\frac{1}{4}(3\gamma+2\delta)^2(\gamma-\delta)^2-2\gamma\gamma(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta)+2\gamma^3(\nu-\mu\beta\gamma)\operatorname{tg}\zeta^2\right]}}{(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta)-\gamma(\nu-\mu\beta\gamma)\operatorname{tang}\zeta^2}$$

LXXXVIII. Pour appliquer cette formule il faut considérer trois cas : le premier a lieu lorsque $(\nu-\mu\beta\gamma) \operatorname{tang}\zeta^2$ est une quantité extrèmement petite : alors à cause de

$$\tfrac{1}{4}(3\gamma+2\delta)^2(\gamma-\delta)^2 - 2\gamma\gamma(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta) = \tfrac{1}{4}(\gamma\gamma+\gamma\delta+2\delta\delta)^2$$

on aura :

$$\varrho = \mu \beta \operatorname{tang}\zeta \left(1 - \gamma \frac{(\nu-\mu\beta\gamma)\operatorname{tang}\zeta^2}{\gamma\gamma+\gamma\delta+2\delta\delta}\right).$$

LXXXIX. Le second cas a lieu, lorsque le dénominateur $(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta)-(\nu-\mu\beta\gamma)\operatorname{tang}\zeta^2$ devient une quantité extrèmement petite ; alors on aura :

$$\varrho = \mu\beta \operatorname{tg}\zeta \left(\frac{2\gamma\gamma}{(3\gamma+2\delta)(\gamma-\delta)} + \frac{4\gamma^4(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta)-4\gamma^5(\nu-\mu\beta\gamma)\operatorname{tg}\zeta^2}{(3\gamma+2\delta)^3(\gamma-\delta)^3}\right)$$

Or lorsque le dénominateur devient une quantité médiocre, aucune approximation n'a lieu, & alors il faut se tenir à l'équation principale ; qui posant

$$\tfrac{1}{2}(3\gamma + 2\delta)(\gamma - \delta) = P \quad \&$$

$$(\gamma + \delta)(\gamma - 2\delta) - \gamma(\nu - \mu\beta\gamma)\,\text{tang}\,\zeta^2 = T$$

devient :

$$\varrho = \mu\beta\,\text{tang}\,\zeta.\frac{P - \sqrt{(PP - 2\gamma\gamma T)}}{T}.$$

Et ce cas subsiste tant avant qu'après qu'on parvient au second cas: car avant qu'on y parvienne, T sera une quantité affirmative, mais après une quantité negative.

XC. Le troisième cas a enfin lieu lorsque l'angle ζ approche tant de $90°$, que même $(\nu - \mu\beta\gamma)\,\text{tang}\,\zeta^2$ devient une quantité très grande: alors on aura asses près

$$\varrho = \mu\beta\sqrt{\frac{2\gamma}{\nu - \mu\beta\gamma}} - \frac{\mu\beta(3\gamma\gamma - \gamma\delta - 2\delta\delta)}{2\gamma(\nu - \mu\beta\gamma)\,\text{tang}\,\zeta},$$

de sorte que la réfraction horizontale sera $= \mu\beta\sqrt{\frac{2\gamma}{\nu - \mu\beta\gamma}}$: d'où l'on voit que si la distance observée au zenith ζ devient plus grande que de $90°$, ce qui peut arriver lorsque l'observateur est fort élevé, la réfraction sera encore plus grande que l'horizontale.

XCI. Mais il faut remarquer, qu'il n'est pas permis de donner à ζ une valeur trop au dessus de $90°$; car quand même le corps de la terre ne s'opposeroit pas au passage des rayons, & que tout l'espace jusqu'au centre de la terre ne seroit rempli que de l'atmosphère, l'épaisseur de l'air deviendroit trop grande en approchant du centre, & partant les rayons souffriroient une trop grande réfraction, pour que notre hypothese, où la courbure du rayon a été considérée comme infiniment petite, pût avoir lieu.

SUPPLEMENT.

XCII. Si l'on veut regarder l'espece de la courbe hyperbolique, que le rayon forme, comme connuë, de sorte que $dt = -\frac{E\,dy}{y^m}$ au §. 30 ; on n'aura pas besoin du second rayon de courbure, & puisqu'en employant les lettres b, c, g, h, μ, ν, & δ, dont les significations sont ici expliquées, on aura :

$$D = \frac{\nu b g}{\mu c h \left(\frac{c}{g} - \delta\right)} \quad \& \quad y = \frac{m a D \sin \theta^2 \cos \theta}{\sin \zeta},$$

d'où à cause de $y + a \sin(\zeta + \theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}} a \sin \zeta$,

vu que $\alpha^{\frac{-k}{c}} = 1 + \frac{(1-\alpha)k}{c} = 1 + \frac{\mu c h}{b g}$, nous aurons :

$\frac{m D \sin \theta^2 \cos \theta}{\sin \zeta} + \theta \cos \zeta - \frac{1}{2} \theta \theta \sin \zeta = \frac{\mu c h}{b g} \sin \zeta$, ou bien

$$\theta\theta = \frac{-2\theta \sin \zeta \cos \zeta + \frac{2 \mu c h}{b g} \sin \zeta^2}{2 m D - \sin \zeta^2}.$$

XCIII. Donc, si la distance observée du zenith est posée $= \zeta$, & la réfraction qui convient $= \theta$, on aura :

$$\theta = \frac{-\sin \zeta \cos \zeta + \sin \zeta \sqrt{\left(\cos \zeta^2 + \frac{2 \mu c h}{b g}(2 m D - \sin \zeta^2)\right)}}{2 m D - \sin \zeta^2}$$

d'où l'on voit que lorsque la distance ζ est si petite que le terme $\cos \zeta^2$ est incomparablement plus grand que $\frac{2 \mu c h}{b g}(2 m D - \sin \zeta^2)$, la réfraction sera $\theta = \frac{\mu c h}{b g} \tang \zeta$, de sorte qu'elle ne dépend plus du nombre m ni de δ.

XCIV.

XCIV. Mais, lorsque $\zeta = 90^{\circ}$ on aura pour la réfraction horizontale :

$$\theta = \sqrt{\frac{2\mu c h}{b g (2 m D - 1)}} = \sqrt{\frac{2\mu\mu c c h h (\frac{c}{g} - \delta)}{2 m \nu b b g g - \mu b c g h (\frac{c}{g} - \delta)}}.$$

Donc, si la courbe du rayon est la logarithmique, ou $m = 1$, la réfraction horizontale sera

$$\theta = \frac{c h}{b g} \sqrt{\frac{2\mu\mu b g (\frac{c}{g} - \delta)}{2 \nu b g - \mu c h (\frac{c}{g} - \delta)}}.$$

Elle est donc plus petite que par la résolution précedente. Car elle seroit bien la même si l'on posoit $m = \frac{1}{2}$, mais alors la courbe n'auroit plus d'asymtote, puisqu'elle deviendroit une parabole. D'où il est clair, que l'exposant m ne sauroit être pris plus petit que l'unité.