1755

Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque

Leonhard Euler

RECHERCHES
SUR LA VERITABLE COURBE QUE DE'CRIVENT LES CORPS JETTÉS DANS L'AIR OU DANS UN AUTRE FLUIDE QUELCONQUE,

PAR M. EULER.

1.

Après la découverte de Galilée, que les corps jettés obliquement dans un espace vuide décrivent toujours une parabole, on s'est bien apperçu, qu'on n'en sauroit faire l'application pour déterminer le mouvement d'une bombe, ou d'un boulet de Canon. Car, puisque la vitesse, dont ces corps traversent l'air, est si rapide, la résistance de l'air devient si grande par rapport à la pesanteur, que son effet détourne très considérablement ces corps d'une route parabolique; de sorte que les calculs fondés sur la nature de la parabole ne sont plus d'aucun usage dans ces occasions. C'est dequoi il ne faut pas être surpris; puisque Galilée dans sa recherche n'a tenu compte d'autres forces, qui agissent sur les corps, que de la seule force de gravité, n'ayant fait aucune attention à la résistance que les corps éprouvent de la part de l'air.

2. Il y a donc en effet deux forces, à l'action desquelles un corps, qui se meut dans un fluide, est assujetti. L'une est la force de gravité, ou la pésanteur du corps, sur laquelle il faut pourtant remarquer, qu'elle est moindre que la pesanteur naturelle du corps, étant diminuée du poids d'un égal volume du fluide, dans lequel le mouvement se fait. L'autre force est celle de la résistance, qu'on fait être proportionelle aux quarrés de la vitesse du corps; & quand le corps est un globe, comme on le suppose ordinairement, la direction de cette force

force eſt diamètralement oppoſée à celle du mouvement du corps. Cette force change donc continuellement tant de quantité que de direction, au lieu que la premiere demeure toujours la même. Il s'agit donc de déterminer la courbe, qu'un corps jetté obliquement doit décrire, étant ſollicité par ces deux forces, dont je viens de parler.

3. Quoique cette queſtion ſe réduiſe aiſément à un problème purement analytique, le grand *Newton* y a inutilement travaillé malgré des recherches très ingénieuſes pour arriver à ſa ſolution. Il étoit même le premier qui l'eut entrepriſe; & ayant ſi bien réüſſi dans la ſuppoſition, que la réſiſtance ſoit proportionnelle à la viteſſe même, il eſt presque inconcevable, qu'il ne ſoit pas venu à bout, lorsque la réſiſtance eſt ſuppoſée proportionelle aux quarrés de la viteſſe, après avoir réſolu quantité de queſtions incomparablement plus difficiles. C'eſt donc feu M. *Jean Bernoulli*, qui a donné le premier la ſolution de ce problème, d'où il a même tiré une conſtruction de la courbe par le moyen des quadratures de quelques courbes transcendantes, dont la deſcription n'eſt cependant pas fort difficile.

4. Voilà donc ce grand probléme réſolu, & même très bien réſolu, il y a longtems. Cependant la ſolution, quelque bonne qu'elle ſoit dans la Théorie, eſt pourtant telle, qu'on n'en a pû tirer jusqu'ici le moindre ſecours pour la Pratique, & pour en corriger la fauſſe Théorie fondée ſur la parabole, à laquelle les Artilleriſtes ſont encore obligés de s'en tenir, quoiqu'ils n'en connoiſſent que trop l'inſuffiſance. Ainſi il eſt certain que cette ſolution n'a apporté aucun avantage réel à l'avancement de l'Artillerie, & il ſemble qu'elle n'a ſervi qu'à mieux aſſeurer les gens du mêtier de la fauſſeté de leurs principes tirés de la nature de la parabole, auxquels ils ne laiſſent pas d'être réduits encore. C'eſt bien quelque choſe que de ſavoir, que les régles ordinaires trompent; mais à moins qu'on ne ſache aſſés préciſément, de combien elles trompent en chaque cas, l'avantage ſe réduit à fort peu de choſe.

5. Il ſemble auſſi d'abord, que ce ſeroit un ouvrage ſans fin que d'entreprendre d'etablir de nouvelles régles pour le jet des bombes & des boulets de canon, qui ſoient conformes à la véritable courbe, que ces corps décrivent dans l'air. Car comme l'hypotheſe de Galilée ne demande que l'élévation du mortier avec la viteſſe, dont la bombe en ſort, il n'a pas été difficile de calculer des Tables, qui marquent pour tous les cas poſſibles, tant la hauteur à laquelle la bombe arrive, que le point, où elle doit retomber en terre. Mais, ſi l'on vouloit faire de ſemblables Tables, qui ſoient d'accord avec la vérité, il faudroit outre les deux élémens mentionnés encore avoir égard, tant au diamètre de la bombe ou boulet, qu'à ſon poids : & partant on ſeroit dans la néceſſité de calculer de telles tables pour chaque diamètre, & tous les poids qui lui pourroient convenir : ce qui rendroit ſans doute impraticable l'exécution d'un tel ouvrage.

6. Cependant ayant bien peſé toutes ces difficultés, je ne les trouve pas tout à fait inſurmontables ; car j'ai remarqué qu'une infinité de cas, qui ſemblent différens, peuvent être compris dans une même Table ; & quoique, ce nonobſtant, le nombre des cas ne laiſſe pas d'être encore infini, comme ils tiennent un certain ordre entr'eux, il ſuffira d'en calculer un certain nombre, pour en pouvoir tirer enſuite tous les autres par la voye d'interpolation. Tout l'ouvrage ſera donc réduit à un certain nombre de Tables calculées, & à une inſtruction, qui en enſeigne l'uſage ; & cela ſera ſuffiſant pour calculer tous les cas, qui ſe peuvent préſenter dans l'Artillerie, & on ſera en état de les expédier preſque auſſi promtement, que dans l'hypotheſe vulgaire de Galilée.

7. Pour mieux expliquer mes idées, je commencerai par tirer la ſolution de cette queſtion des premiers principes de la Mécanique. D'abord donc je conſidére le vrai poids du globe, dont il s'agit de déterminer le mouvement ; & poſant ce poids $= P$, ſoit Π le poids d'un volume égal de l'air, ou du fluide, dans lequel le mouvement ſe fait : cela poſé, on ſait que le poids de ce globe dans le fluide ſera $= P - \Pi$;

 ce

ce qui étant la force qui sollicite le globe actuellement en bas, la force accélératrice de la gravité, qui agit sur ce globe, sera $= \frac{P - \Pi}{P} = 1 - \frac{\Pi}{P}$. Cette force accélératrice se trouvera donc en retranchant de l'unité la fraction $\frac{\Pi}{P}$, qui marque le rapport de la gravité spécifique du fluide à celle du globe. Donc, lorsque le mouvement se fait dans l'air, à moins que le globe ne soit d'une matiere extrèmement legere, on voit bien, qu'on pourra supposer sans erreur cette force accélératrice $= 1$: cependant pour rendre mes recherches générales, j'exprimerai par α dans la suite cette force accélératrice de la gravité, de sorte que $\alpha = 1 - \frac{\Pi}{P}$.

8. Pour découvrir la résistance de ce globe, soit d son diamétre, & v la hauteur, d'où un corps grave dans le vuide acquiert en tombant la même vitesse, dont nous supposons, que le globe se meut dans le fluide. Posant donc le rapport du diamètre à la circonference $= 1 : \pi$, l'aire du plus grand cercle de ce globe sera $= \frac{1}{4} \pi d d$; donc sa surface $= \pi d d$, & la solidité du globe même $= \frac{1}{6} \pi d^3$, qui exprimera donc le volume d'une masse du fluide, dont le poids est $= \Pi$; ainsi que nous venons de supposer. Ensuite, si un plan égal au grand cercle $\frac{1}{4} \pi d d$ se mouvoit directement dans le fluide avec la vitesse du globe, on sait que la résistance seroit égale au poids d'un cylindre du fluide, dont la base seroit $= \frac{1}{4} \pi d d$, & la hauteur $= v$: & la solidité par conséquent $= \frac{1}{4} \pi d d v$. Or on sait aussi que la résistance du Globe ne vaut que la moitié de celle du grand cercle ; donc la résistance du globe sera égale au poids d'une masse du fluide, dont le volume $= \frac{1}{8} \pi d d v$.

9. Or le poids d'un volume de ce fluide $\frac{1}{6} \pi d^3$ étant $= \Pi$, le poids du volume que nous venons de trouver $\frac{1}{8} \pi d d v$ sera

$=$

$= \frac{3v}{4d}\Pi$; qui exprime la force de la résistance, & si nous la divisons par la masse, ou le poids du globe P, nous aurons la force retardatrice, qui resulte de la résistance, $= \frac{3v}{4d} \cdot \frac{\Pi}{P}$; & dont la direction est contraire au mouvement du globe. Or, puisque tant le diamètre du globe d, que le rapport de sa gravité spécifique à celle du fluide, ou P à Π, est supposé être connu, je poserai pour abréger $\frac{4d}{3} \cdot \frac{P}{\Pi} = c$, pour avoir la force retardatrice de la résistance $= \frac{v}{c}$. Or l'on voit que pour l'air, la valeur de la fraction $\frac{P}{\Pi}$ sera toujours un nombre très grand; car si le globe n'étoit pas plus pesant qu'un égal volume d'eau, il y auroit $\frac{P}{\Pi} = 850$ ou environ.

10. Le rapport de la gravité specifique du globe & du fluide se trouve le plus aisément par le moyen de l'eau; car sachant le poids P du globe, on aura d'abord le volume d'une masse d'eau, dont le poids est aussi $=$ P, puisqu'on connoit le poids d'un pied cubique d'eau. Soit donc e^3 le volume de cette masse d'eau dont le poids $=$ P, & que la gravité spécifique de l'eau soit à celle du fluide, dans lequel se fait le mouvement comme 1 à μ, & $\frac{1}{\mu} e^3$ sera le volume de ce fluide, dont le poids est $=$ P. Or Π marque le poids d'une masse du même fluide, dont le volume est $= \frac{1}{6}\pi d^3$, d'où nous tirons $P : \Pi = \frac{1}{\mu} e^3 : \frac{1}{6}\pi d^3$, ou $\frac{P}{\Pi} = \frac{6e^3}{\mu\pi d^3}$: donc nous aurons $c = \frac{8e^3}{\mu\pi dd}$. Et

 partant

partant ſi le mouvement ſe faiſoit dans l'eau, à cauſe de $\mu = 1$, on auroit $c = \frac{8\,e^3}{\pi\,d\,d}$; or, lorsque le mouvement ſe fait dans l'air, on aura à peu près $c = \frac{6666\,e^3}{\pi\,dd}$, ou $c = \frac{2133\,e^3}{d\,d}$.

11. Cette formule aura lieu, lorsque le mouvement du globe n'eſt pas trop vite, pour que l'air puiſſe auſſitôt librement remplir l'espace, que le globe vient de quitter. Mais ſi le mouvement eſt ſi rapide, que l'air ne ſauroit occuper dans le même inſtant l'eſpace, que le globe laiſſe après ſoi, de ſorte que cet eſpace demeure vuide, du moins pour un inſtant, alors le globe ſoutenant ſur ſa partie d'avant toute la preſſion de l'atmosphère, qui n'étant pas contrebalancée par une preſſion égale de derriére, il eſt clair que la réſiſtance ſera augmentée de toute la preſſion de l'atmoſphère ſur la partie anterieure du globe. Donc, poſant k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui eſt en équilibro avec l'atmoſphère, cette preſſion ſera égale au poids d'une maſſe d'eau, dont le volume $= \frac{1}{4}\,\pi\,d\,d\,k$; & partant au poids d'une maſſe d'air dont le volume $= 213\,\pi\,ddk = 669\,d\,d\,k$ à peu près.

12. La réſiſtance entiere du globe dans l'air ſera donc dans ce cas égale au poids d'une maſſe d'air, dont le volume $= \frac{1}{4}\,\pi\,dd\,v + 213\,\pi\,ddk$. Donc le poids du globe étant égal au poids d'un volume d'air $= 850\,e^3$, la force retardatrice de la réſiſtance ſera $= \frac{\pi\,dd\,v}{6666\,e^3} + \frac{\pi\,dd\,k}{4\,e^3}$. Or nous venons de poſer $c = \frac{6666\,e^3}{\pi\,dd}$, où bien $\pi\,dd = \frac{6666\,e^3}{c}$; donc la force retardatrice de la réſiſtance ſera $= \frac{v}{c} + \frac{6666\,k}{4\,c} = \frac{v + 1666k}{c}$.

13. Cette force aura donc lieu, lorsque la viteſſe du globe eſt plus grande, que celle dont l'air en vertu de ſon reſſort entreroit dans un

un eſpace vuide. Or le reſſort étant égal au poids d'une colomne de même air, dont la hauteur $= 850k$, la viteſſe dont l'air entrera dans un eſpace vuide ſera duë à la hauteur $850k$; donc, toutes les fois que $v > 850k$, la force retardatrice de la réſiſtance de l'air ſera $= \frac{v + 1666\,k}{c}$. Or pour l'état ordinaire de l'air, on ſait qu'il eſt environ $k = 33$ pieds; de ſorte que ce cas aura lieu, lorsque $v > 28050$ pieds, ou que le globe parcourt dans une ſeconde un eſpace plus grand que de 1325 pieds.

14. De là on comprend aiſément, que quand même v ſera plus petit que $850\,k$, la force retardatrice de la réſiſtance ne ſera pas ſubitement réduite à $\frac{v}{c}$; & que la preſſion de l'atmoſphère ſera toujours plus petite ſur la partie de derrière du globe que ſur celle d'avant: d'où réſultera une augmentation de la réſiſtance. Ainſi s'il étoit $v = \frac{1}{2} \cdot 850\,k$, la force retardatrice de la réſiſtance ſera $= \frac{v + \frac{1}{2} \cdot 1666\,k}{c}$; & en général lorsque $v = \frac{1}{n} \cdot 850\,k$, cette force deviendra à peu près $= \frac{v + \frac{1}{n} \cdot 1666\,k}{c}$; où bien $= \frac{3\,v}{c}$. Cependant il s'en faut bien, que cette détermination ſoit aſſés exacte, vu qu'elle dépend de la preſſion de l'atmoſphère ſur le derrière du globe. Or il faut auſſi remarquer que cette recherche n'eſt pas ſuſceptible d'une entiere rigueur de Geometrie, & qu'il faut ſe contenter d'une approximation convenable.

15. Par cette raiſon nous ne nous tromperons gueres, quand nous ſuppoſerons la force retardatrice de la réſiſtance $= \frac{3\,v}{c}$, quoiqu'elle

qu'elle devienne fausse, lorsque $v > 850\,k$. Car, puisque cela ne sauroit arriver que dans les mouvemens les plus rapides, & que ceux-ci sont bientôt réduits à une valeur de v au dessous de $850\,k$, l'erreur qui en résulte ne sera pas considérable. Donc, au lieu de $c = \frac{6666\,e^3}{\pi\,dd}$ si nous supposons $c = \frac{2222\,e^3}{\pi\,dd}$, ou bien $c = 707 \cdot \frac{e^3}{dd}$, la force retardatrice de la résistance sera $= \frac{v}{c}$: & nous nous servirons de cette formule à l'avenir pour la commodité du calcul: où il faut se souvenir, que d marque le diamètre du globe, & e^3 le volume d'eau dont le poids est égal à celui du globe.

16. Donc, pour déterminer le mouvement d'un globe lancé dans l'air, il faut commencer par mesurer exactement tant son diamètre d que son poids, auquel on cherchera un volume d'eau également pesant, qui soit $= e^3$; & alors on en tirera la valeur de $c = 707 \cdot \frac{e^3}{dd}$: sur laquelle le calcul doit être fondé. D'où l'on voit déjà que le calcul sera le même pour tous les globes, dont le poids aura au quarré de leur diamètre le même rapport. Cependant on ne sauroit nier, que le nombre 707 n'est pas trop bien constaté, & qu'il est même variable à cause de la diverse température de l'air. Mais ce sera une affaire à laquelle il faut avoir égard dans l'application du calcul aux expériences; & dans le calcul même on regardera la quantité c comme connue, sans se soucier, comment elle dépend de la grandeur & du poids du globe. Quand on passe ensuite à la pratique, on cherchera par quelque expérience, quelle valeur doit être donnée à la quantité c pour chaque globe proposé & pour chaque état de l'air.

Fig. 1. 17. Soit donc CNAMH la courbe décrite par un globe dans un fluide quelconque, que α marque la force accélératrice de la gravité, &

& que c soit la quantité mentionnée, d'où dépend la résistance. Soit A le point le plus haut de cette courbe, & la horizontale BAE la tangente à ce point ; CNA sera donc la partie de cette courbe, par laquelle le globe est monté, & AMH celle par laquelle il descend. Considerons séparément le mouvement de la montée & de la descente, & soit pour celle-cy une abscisse quelconque prise sur la horizontale $AP = x$, l'appliquée verticale qui y répond $PM = y$; & que v soit la hauteur duë à la vitesse du globe en M; de sorte que la force retardatrice de la résistance y sera $= \frac{v}{c}$.

18. Décomposant le mouvement du corps selon les directions horizontale AP & la verticale PM, celui cy sera premièrement accéléré par la force accélératrice de la gravité $= \alpha$. Ensuite la force retardatrice de la résistance $\frac{v}{c}$ agissant selon la direction de la tangente MT, si nous posons l'élément de la courbe $Mm = ds$, il en résultera une force, qui s'oppose au mouvement horizontal, $= \frac{v\,dx}{c\,ds}$; & une qui s'oppose au mouvement vertical, $= \frac{v\,dy}{c\,ds}$. Donc si nous posons l'élément du tems $= dt$, de sorte que $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, & que nous prenions cet élément dt pour constant, les principes mécaniques de l'accélération nous fourniront ces deux égalités:

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\frac{v\,dx}{c\,ds} \quad \& \quad \frac{2\,ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{v\,dy}{c\,ds}.$$

19. Puisque $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, nous aurons $v = \frac{ds^2}{dt^2}$, d'où nos deux équations deviendront :

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\frac{dx\,ds}{c\,dt^2} \quad \& \quad \frac{2\,ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{dy\,ds}{c\,dt^2}$$

Suppo-

Suppofons de plus $dy = pdx$, de forte que p exprime la tangente de l'angle PTM, ou de l'inclinaifon du mouvement du corps à l'horizon, & à caufe de $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & de $ddy = pddx + dxdp$, nous aurons ces deux équations :

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{dx^2\sqrt{(1+pp)}}{cdt^2} \quad \& \quad \frac{2pddx}{dt^2} + \frac{2dxdp}{dt^2} = \alpha - \frac{pdx^2\sqrt{(1+pp)}}{cdt^2}$$

& fi nous retranchons de celle-cy la premiere multipliée par p, il reftera $\frac{2dxdp}{dt^2} = \alpha$, ou bien $\alpha dt^2 = 2dxdp$; or la premiere donne $-\frac{2ddx}{dx^2} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{c}$. Enfin on aura $v = \frac{dx^2(1+pp)}{dt^2} = \frac{\alpha dx(1+pp)}{2dp}$.

20. Parce que $2dp = \frac{\alpha dt^2}{dx}$; l'autre équation $-\frac{2ddx}{dx^2} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{c}$, multipliée par dp fe réduira à celle-cy $-\frac{2\alpha dt^2 ddx}{dx^3} = \frac{2dp\sqrt{(1+pp)}}{c}$ dont l'intégrale à caufe de l'élément dt conftant eft

$$\frac{\alpha dt^2}{dx^2} = \frac{2dp}{dx} = 2C + \tfrac{2}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}$$

d'où nous tirons :

$$dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}} \quad \& \quad dy = \frac{pdp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}$$

donc $ds = dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}$

Enfuite

Enſuite à cauſe de $\alpha\,dt^2 = 2\,dx\,dp$, nous obtiendrons

$$\tfrac{1}{2}\alpha dt^2 = \frac{dp^2}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}} \quad \& \quad dt\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{dp}{\sqrt{(C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)})}}$$

& enfin pour la viteſſe du corps nous aurons :

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha(1+pp)}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}.$$

21. Pour la formule intégrale $\int dp\sqrt{(1+pp)}$, qui entre dans ces expreſſions, il eſt évident qu'elle exprime un arc parabolique : ou bien on le pourra aſſigner par les logarithmes, puiſque $\int dp\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)})$; prenant l'intégrale en ſorte qu'il évanouiſſe au cas de $p = 0$, ce qui arrive au ſommet A de la courbe, où la tangente eſt horizontale. Ainſi regardant l'inclinaiſon du mouvement du corps à l'horizon, dont la tangente eſt $= p$, comme connuë, pour l'endroit M, où cela arrive, nous pourrons déterminer l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée $PM = y$; l'arc $AM = s$; la hauteur duë à la viteſſe en M, & enfin le tems, que le corps a mis à parcourir l'arc A M.

22. Poſons pour la conſtante C, qui a été introduite par l'intégration, cette fraction $\frac{n}{c}$, & il eſt clair que n déſignera un nombre abſolu. Enſuite mettons pour abréger $\int dp\sqrt{(1+pp)} = P$. vu que pour chaque valeur de p on peut aiſément trouver celle de P ; & pour la branche AMH, par laquelle le corps deſcend, nous aurons les formules ſuivantes :

$$x = c\int\frac{dp}{n+P};\quad y = c\int\frac{p\,dp}{n+P};\quad s = c\int\frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{n+p}$$

$$dt\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{dp\sqrt{c}}{\sqrt{(n+P)}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dp}{\sqrt{(n+P)}}$$

$$\& \quad v = \frac{\frac{1}{2}\alpha\cdot c\,(1+pp)}{n+P}.$$

Ces

Ces intégrales doivent être prises en sorte, qu'elles évanouïssent dans le cas $p = 0$; d'où l'on voit que la hauteur duë à la vitesse en A sera $= \frac{\alpha c}{2n}$.

23. Ces mêmes formules servent aussi à exprimer la nature de l'autre branche ANC, que le corps aura décrite en montant; car on n'a qu'à prendre négative la valeur de p. Ainsi, si la direction du mouvement en N fait avec l'horizon un angle dont la tangente $= p$, on aura:

$$AQ = c\int\frac{dp}{n-P};\ QN = c\int\frac{p\,dp}{n-P};\ \&\ AN = c\int\frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{n-P},$$

le tems par l'arc $AN = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dp}{\sqrt{(n-P)}}$

la hauteur duë à la vitesse en $N = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-P}$.

D'où l'on voit que dans la branche ascendante ANC l'inclinaison de ses tangentes à l'horizon ne sauroit nulle part devenir si grande, qu'il fût $P > n$: & là où $P = n$, la vitesse du corps est infinie.

24. Le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit CNAMH, dépend donc de trois constantes α, c, & n: dont il faut savoir les valeurs pour chaque cas proposé. La premiere α est déterminée par la gravité specifique du fluide à l'égard de celle du globe; & comme elle n'entre pas dans les formules qui déterminent la nature de la courbe, on la connoitra indépendamment de α: ce n'est que le tems & la vitesse qui en dépendent. La quantité c est déterminée par le diamètre & le poids du globe, & comme elle ne fait que multiplier les formules trouvées, elle ne cause aucun embarras dans le calcul. Or la troisième quantité n, qui dépend de la vitesse imprimée au corps, affecte tellement nos formules, qu'on est obli-

gé d'en calculer les valeurs à part pour toutes les différentes valeurs de n.

25. Pour déveloper mieux la nature de cette courbe, il sera bon d'avoir aussi égard au rayon de sa dévelopée qui mesure sa courbure dans chacun de ses points. Or on sait que posant $dy = pdx$, le rayon de courbure est $= \frac{dx(1+pp)V(1+pp)}{dp}$. Donc, puisque $\frac{dx}{dp} = \frac{c}{n+P}$ pour la branche descendante, le rayon de courbure en M sera $= \frac{c(1+pp)V(1+pp)}{n+P}$. Or pour la branche ascendante en N, où est aussi $dy = pdx$, le rayon de courbure sera $= \frac{c(1+pp)V(1+pp)}{n-P}$. Ainsi là où $P = n$, & la vitesse du corps est infinie, le rayon de courbure devient aussi infiniment grand: & l'on voit que dans les deux branches, où leurs tangentes sont également inclinées à l'horizon, le rayon de courbure, de même que les autres quantités, x, y, s, t, & v, sont plus grandes dans la branche ascendante que dans la descendante.

26. Donc dans un milieu résistant, les deux branches de la courbe décrite par un corps, sont dissemblables, en sorte que la branche descendante est plus courbée que l'ascendante, & le mouvement par celle-cy plus rapide que par celle-là. Or dans le vuide les deux branches sont, comme on sait, égales & semblables, & le mouvement aussi le même: ce que nos formules déclarent aussi évidemment; car pour le vuide la quantité c devient infinie, de même que le nombre n, puisque $\frac{ac}{2n}$ marque la hauteur duë à la vitesse en A. Donc

 P éva-

P évanouit par rapport à n, & puisque $\alpha = 1$, si nous posons $\frac{c}{2n} = b$; nous aurons pour le vuide :

$x = 2bp$; $y = bpp$; $s = 2b\int dp\,\sqrt{(1+pp)}$; $t = 2bp$; & $v = b(1+pp)$, & le rayon de courbure $= 2b(1+pp)^{\frac{3}{2}}$, d'où il est évident, que la courbe est une parabole, & le mouvement tel, qu'il est connu.

27. C'est donc de la quantité $P = \int dp\,\sqrt{(1+pp)}$, que résulte la différence entre les trajectoires dans le vuide & dans un fluide; & l'on voit que cette différence sera d'autant plus grande, plus sera grande la quantité P par rapport au nombre n. Or la quantité P évanoüit au sommet A; & de là de part & d'autre elle croit avec l'angle MTP, que la tangente de la courbe fait avec l'horizon; en sorte que lorsque cet angle devient droit, la quantité P sera même infinie. Par conséquent quelque petite que soit la résistance, la courbe CNAMH s'ecarte enfin à l'infini de la parabole; puisqu'en continuant ses branches il doit arriver nécessairement, que la quantité P devienne enfin égale au nombre n, quelque grand qu'il soit, & qu'elle le surpasse même infiniment.

28. Mais, lorsqu'on veut seulement connoitre une telle partie de la courbe comme NAM, que l'inclinaison des tangentes à ses extrémités M & N soit si petite, que la quantité P qui en résulte, soit fort petite par rapport au nombre n, alors on pourra trouver des approximations assés commodes pour décrire cette portion de la courbe. Car, puisque P est fort petite par rapport à n, on aura $\frac{1}{n+P} = \frac{1}{n} - \frac{P}{nn}$ & $\frac{1}{n-P} = \frac{1}{n} + \frac{P}{nn}$; & $\frac{1}{\sqrt{(n+P)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{P}{2n\sqrt{n}}$; & $\frac{1}{\sqrt{(n-P)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{P}{2n\sqrt{n}}$. Donc pour la branche descendante

AM

AM nous aurons:

$$AP = x = \frac{c}{n}\left(p - \frac{1}{n}\int P\,dp\right) = \frac{c}{n}\left(p - \frac{1}{n}Pp + \frac{1}{3n}\left((1+pp)^{\frac{3}{2}}-1\right)\right)$$

$$PM = y = \frac{c}{n}\left(\tfrac{1}{2}pp - \frac{1}{n}\int Pp\,dp\right) = \frac{c}{n}\left(\tfrac{1}{2}pp - \frac{1}{2n}Ppp - \frac{1}{8n}P + \frac{1}{8n}p(1+pp)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$AM = s = \frac{c}{n}\left(P - \frac{1}{n}\int P\,dp\,\sqrt{(1+pp)}\right) = \frac{c}{n}\left(P - \frac{1}{2n}PP\right)$$

le tems par AM $= t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha n}}\left(p - \frac{1}{2n}Pp + \frac{1}{6n}\left((1+pp)^{\frac{3}{2}}-1\right)\right)$

la hauteur duë à la viteſſe en M, $v = \frac{\alpha c\,(1+pp)}{2\,n}\left(1 - \frac{P}{n}\right)$

Et prenant p & P négatifs ces mêmes expreſſions ſerviront pour la branche aſcendante AN.

29. Or ces approximations n'auront lieu, que tandis que la quantité P demeure extrémement petite par rapport au nombre n. Donc, plus le nombre n ſera grand, plus ſera auſſi grande la portion de la courbe MAN, qu'on connoitra au juſte par le moyen de ces formules. Mais, dès qu'on en veut connoitre une plus grande portion, ces approximations ne ſont plus d'aucune uſage; & alors, puisqu'il n'y a pas moyen d'intégrer les formules trouvées pour x, y, & le tems t, on ſera réduit à en chercher la valeur par la voye des quadratures. Or, avant que d'entreprendre cet ouvrage, il ſera bon de remarquer quelques phènomenes, que nous decouvre la conſidération de cette courbe.

30. Et d'abord je remarque, que l'arc de la courbe AM $= s$ ſe peut exprimer par un logarithme; car, puisque $dp\sqrt{(1+pp)} = dP$, on aura $s = c\int\frac{dP}{n+P}$, & partant $s = c\,l\,\frac{n+P}{n}$, puisque en A où $s = 0$, il eſt $P = 0$; & cette formule eſt déjà fort commode pour

pour décrire la courbe; car calculant pour un grand nombre de valeurs de p, celle de s, on trouvera autant de portions de la courbe, & fachant de chacune l'inclinaifon à l'horizon, on en tirera aifément les portions de l'abfciffe & de l'appliquée, qui leur conviennent; lesquelles étant ajoutées enfemble donneront tant l'abfciffe que l'appliquée entiere, qui répondent à chaque point de la courbe. Enfuite, ayant la viteffe à chaque point de la courbe par la formule $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}$, chaque particule de la courbe divifée par $\sqrt{v}$ donnera le tems, que le corps met à la parcourir: & pourvu qu'on prenne les particules de la courbe affés petites, on obtiendra affés exactement tant la figure de la courbe, que le mouvement du corps.

31. Puisque pour la branche defcendante nous venons de trouver $s = c\, l\, \frac{n+P}{n}$, nous voyons que cette courbe approche de plus en plus de la direction verticale, qu'elle n'atteint pourtant qu'à l'infini. Car l'arc s ne devient infini, que lorsque P eft infini, ce qui arrive, quand p eft pris infini, ou que la tangente de la courbe devient verticale. Or pour la branche afcendante ANC, nous aurons l'arc $AN = -c\, l\, \frac{n-P}{n} = c\, l\, \frac{n}{n-P}$; donc cet arc fera infini, lorsque $P = n$: de là on obtiendra une certaine valeur pour p, d'où l'on connoitra l'inclinaifon de la tangente de cette courbe à l'infini, qui fera fon afymtote.

32. Ayant pour la branche afcendante $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-P}$ nous voyons qu'à l'infini où $P = n$, la viteffe du corps eft infinie; & qu'en montant jusqu'en A elle devient continuellement plus petite; car en diminuant p, le numérateur $\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)$ en devient plus petit, & le dénominateur $n - P$ plus grand; l'un & l'autre contribuant à

diminuer

diminuer la viteſſe. Or pour la branche deſcendante ayant $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}$; on aura pour le ſommet A, $v = \frac{\alpha c}{2n}$; or de là il ne s'enſuit pas, que plus le corps deſcend, plus auſſi ſon mouvement ſera accéléré; mais plutôt après que le corps aura paſſé par le ſommet A, ſon mouvement ne laiſſera pas de ſouffrir encore quelque diminution, jusqu'à ce qu'il parvienne à un certain point I, où ſa viteſſe ſera la plus petite.

33. Ce point I où le corps aura la moindre viteſſe, ſe trouvera donc en ſuppoſant le differentiel de $\frac{1+pp}{n+P}$ égal à zéro; d'où l'on aura $2p(n+P) = (1+pp)\sqrt{(1+pp)}$. Or ayant $P = \frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)})$, nous aurons

$$2np + pl(p+\sqrt{(1+pp)}) = \sqrt{(1+pp)}$$

Comme cela arrive ordinairement fort près du point A, la valeur de p ſera fort petite, & partant à peu près:

$P = p + \frac{1}{6}p^3$, & $(1+pp)\sqrt{(1+pp)} = 1 + \frac{3}{2}pp + \frac{3}{8}p^4$

donc: $2np + 2pp + \frac{1}{3}p^4 = 1 + \frac{3}{2}pp + \frac{3}{8}p^4$, où $2np = 1 - \frac{1}{2}pp + \frac{1}{24}p^4$

d'où, à moins que le nombre n ne ſoit très petit, on tirera $p = \frac{1}{2n} - \frac{1}{16n^3}$ pour le point I; & partant la hauteur duë à la plus petite viteſſe en I ſera à peu près $v = \frac{\alpha c}{2n}\left(\frac{4nn+1}{4nn+2}\right)$ ou $v = \frac{\alpha c}{2n}\left(1 - \frac{1}{4nn}\right)$.

34. Depuis ce point I le mouvement du corps ſera de nouveau accéléré; mais quoique l'accélération continuë à l'infini, la viteſſe ne ſurpaſſera jamais une certaine limite; car à l'infini de cette courbe où $p = \infty$, on aura $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c pp}{P}$, puisque n evanouït par rapport à P, dont la valeur

 ſera

ſera auſſi infinie. Mais à cauſe de $p = \infty$, le nombre $l(p + \sqrt{(1+pp)})$ quoiqu'infini, évanouït par rapport à $p\sqrt{(1+pp)}$, de ſorte que dans ce cas $P = \frac{1}{2}pp$, & partant $v = \alpha c$; qui ſera donc la hauteur duë à la viteſſe, de laquelle le corps en deſcendant par l'arc IMH approche de plus en plus, & qu'il n'atteint qu'à l'infini.

35. Il eſt auſſi à remarquer, que le rayon de courbure en M étant $= \frac{c(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{n+P}$, la plus grande courbure ne ſe trouvera pas au ſommet même A, mais à un autre point K dans l'arc deſcendant, qu'on trouvera par la réſolution de cette équation

$$3p(n+P) = (1+pp)\sqrt{(1+pp)}, \text{ ou bien}$$

$$3np + \tfrac{3}{2}pp\sqrt{(1+pp)} + \tfrac{3}{2}pl(p+\sqrt{(1+pp)}) = \sqrt{(1+pp)}$$

Donc, à moins que le nombre n ne ſoit trés petit, il y aura à peu près $p = \frac{1}{3n}$; d'où l'on voit que ce point K ſera plus près du ſommet A, que le point I, où la viteſſe du corps eſt la plus petite.

36. Mais pour la nature de la branche deſcendante AMH, c'eſt encore une queſtion bien importante, ſi elle a une aſymtote verticale comme EF, ou non? c'eſt à dire, ſi en faiſant $p = \infty$ l'abſciſſe x devient infinie, ou ſi elle obtient une valeur finie comme AE, qui donneroit par conſéquent l'aſymtote EF. Il s'agit donc de chercher la valeur de la formule intégrale $\int \frac{dp}{n+P}$ au cas de $p = \infty$; car pour la valeur de l'appliquée $c\int \frac{p\,dp}{n+P}$, il n'y a aucun doute, qu'elle ne devienne infinie en poſant $p = \infty$. Mais aucune des méthodes, qui ſeroient aſſés propres pour nous marquer ces valeurs, tandis que P eſt plus petit que n, ne ſauroit être employée ici avec ſuccès.

37. Je crois donc, que le plus ſeur moyen ſera de recourir à des limites, en donnant à P ſucceſſivement deux telles valeurs, dont l'une feroit trop grande & l'autre trop petite ; en ſorte qu'on puiſſe pour l'un & l'autre cas exprimer l'intégrale $\int \frac{dp}{n+P}$. Or il eſt évident que $\int dp\, V(1+pp)$, ou P, eſt toujours plus petit que $pV(1+pp)$; & certainement plus grand que p ou $pV(1+0pp)$. Poſons donc pour avoir des limites plus proches ;

$$P = \int dp\, V(1+pp) = pV(1+\delta pp)$$

& prenant les différentiels nous aurons :

$$V(1+pp)(1+\delta pp) = 1+2\delta pp \quad \text{ou bien}$$

$$(1-3\delta)pp+\delta(1-4\delta)p^4 = 0$$

d'où l'on voit, que ſi $\delta = \frac{1}{3}$, cette formule eſt < 0, & ſi $\delta = \frac{1}{4}$, elle eſt > 0. Donc nous aurons ces deux limites aſſés approchantes :

$$P < pV(1+\tfrac{1}{3}pp) \quad \& \quad P > pV(1+\tfrac{1}{4}pp)$$

38. Par là nous ſommes aſſeurés, que dans la branche deſcendante il y aura toujours :

$$x > c\int \frac{dp}{n+pV(1+\frac{1}{3}pp)} \;\&\; x < c\int \frac{dp}{n+pV(1+\frac{1}{4}pp)}$$

Dévelopons donc ces deux limites, & pour qu'une ſeule opération y ſuffiſe, poſons $x = c\int \frac{dp}{n+pV(1+\delta pp)}$, & ſoit pour dégager l'irrationalité $V(1+\delta pp) = pV\delta + q$, & nous aurons $p = \frac{1-qq}{2qV\delta}$; $V(1+\delta pp) = \frac{1+qq}{2q}$, & $pV(1+\delta pp) = \frac{1-q^4}{4qqV\delta}$ de plus $dp = -\frac{dq(1+qq)}{2qqV\delta}$, & partant :

$$x = -2c\int \frac{dq(1+qq)}{1+4nqqV\delta-q^4}.$$

39. Ce dénominateur ayant deux facteurs réels, poſons les $ff+qq$ & $gg-qq$; & on aura $ffgg = 1$ & $gg-ff = 4nV\delta$

ou

ou bien $ff = \frac{1}{gg}$ & $4\,n\,\sqrt{\delta} = \frac{g^4 - 1}{gg}$. De là notre expression deviendra :

$$x = -2c\left(\frac{1-ff}{ff+gg}\int\frac{dq}{ff+qq} + \frac{1+gg}{ff+gg}\int\frac{dq}{gg-qq}\right)$$

& prenant les intégrales :

$$x = \frac{-2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\,\text{A tang}\,\frac{q}{f} - \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}\,l\frac{g+q}{g-q} + \text{Const.}$$

Or puisque $x = 0$; lorsque $p = 0$ & partant $q = 1$, nous aurons :

$$x = \frac{2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\left(\text{A tang}\,\frac{1}{f}\ \text{A}-\text{tang}\,\frac{q}{g}\right) + \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}\,l\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}$$

ou bien à cause de $f = \frac{1}{g}$;

$$x = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}(\text{A tang}\,g - \text{A tang}\,gq) + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}$$

40. Maintenant on n'a qu'à poser $q = 0$, pour avoir le cas de $p = \infty$; & l'abscisse qui répond à l'arc infini AMH sera

$$AE = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\,\text{A tang}\,g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\frac{g+1}{g-1}$$

où il faut remarquer que $gg = 2n\sqrt{\delta} + \sqrt{(1+4\delta nn)}$. Donc prenant $\delta = \frac{1}{3}$, nous aurons $gg = 2n\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \sqrt{(1+\tfrac{4}{3}nn)}$ & partant l'intervalle AE sera ou plus grand ou plus petit que cette expression

$$\frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\,\text{A tang}\,g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\frac{g+1}{g-1}$$

selon qu'on prenne

ou $gg = 2n\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \sqrt{(1+\tfrac{4}{3}nn)}$

ou $gg = n + \sqrt{(1+nn)}$

41.

41. Lorsque n eſt un nombre très grand, g en ſera un auſſi, & A tang g deviendra $= \frac{\pi}{2}$, prenant π pour la meſure de deux angles droits: donc à cauſe de $l\frac{g+1}{g-1} = \frac{2}{g}$, notre formule ſera $\frac{\pi c}{g} + \frac{2c}{gg}$. Donc ayant ou $gg = 4n\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $gg = 2n$; les limites entre lesquels l'intervalle AE eſt compris, feront

$$\frac{\pi c\sqrt{\sqrt{3}}}{2\sqrt{n}} + \frac{c\sqrt{3}}{2n} \quad \& \quad \frac{\pi c\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} + \frac{c}{n}$$

Mais, lorsque n eſt une fraction très petite, nous aurons, ou $gg = 1 + 2n\sqrt{\frac{1}{3}}$, ou $gg = 1 + n$; donc à cauſe de A tang $1 = \frac{\pi}{4}$ les limites de l'intervalle AE feront:

$$\frac{\pi nc}{2\sqrt{3}} + c\,l\,\frac{2\sqrt{3}}{n} \quad \& \quad \frac{\pi nc}{4} + c\,l\,\frac{4}{n}$$

43. La courbe trajectoire donc dans un fluide aura deux aſymtotes, l'une verticale qui eſt convergente avec la branche deſcendante, & l'autre inclinée à l'horizon, pour la branche aſcendante, & qui ſera tellement inclinée à l'horizon, que poſant la tangente de l'inclinaiſon $= p$, on aura $P = n$, ou

$$n = \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \tfrac{1}{2}l(p + \sqrt{(1+pp)})$$

Pour le cas du vuide cette derniere aſymtote devient auſſi verticale, de même que la premiere, & l'une & l'autre ſera infiniment éloignée du ſommet A. Or pour trouver le point L, où l'aſymtote de la branche aſcendante coupe la ligne horizontale BAE, poſant $P = n$, on aura

$$AL = x - \frac{y\,dx}{dy} = c\left(\int\frac{dp}{n-P} - \frac{1}{p}\int\frac{p\,dp}{n-P}\right)$$

43. Après ces remarques générales, venons au fait pour voir, comment on pourroit tirer quelque fruit des formules trouvées pour

la pratique. Et d'abord il eſt évident qu'on ne ſauroit ſe paſſer d'une Table, qui répréſente pour chaque valeur de p celle de P. Donc, puisque p exprime la tangente de l'angle d'inclinaiſon de la courbe à l'horizon, poſons cet angle $= \phi$, de ſorte quo $p = \text{tang}\, \phi$; & à cauſe de $\sqrt{(1+pp)} = \text{ſec.}\, \phi$, nous aurons:

$$P = \tfrac{1}{2}\, \text{tang}\, \phi.\ \text{ſec.}\, \phi + \tfrac{1}{2}\, l\, (\text{tang}\, \phi + \text{ſec.}\, \phi) \text{ ou bien}$$
$$P = \tfrac{1}{2}\, \text{tang}\, \phi.\ \text{ſec.}\, \phi + \tfrac{1}{2}\, l\, \text{tang}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\, \phi)$$

où il faut prendre les logarithmes hyperboliques de la tangente des angles $45^\circ + \frac{1}{2}\, \phi$, qu'on trouve dans l'Ouvrage de Neper ſur les logarithmes.

44. C'eſt donc le contenu de la Table premiere, où la premiere colomne renferme tous les angles d'inclinaiſon à l'horizon de degré en degré depuis 0° jusqu'à 90°: la ſeconde colomne en contient les tangentes, qui ſont les valeurs de la lettre p. La troiſième colomne fournit les valeurs de la formule $\text{tang}\, \phi.\ \text{ſec.}\, \phi$ ou de $p\sqrt{(1+pp)}$, & la quatrième celles de la formule $l\, \text{tang}\, (45^\circ + \frac{1}{2}\, \phi)$, ou de $l(p + \sqrt{(1+pp)})$; qui eſt la même que la Table des degrés des latitudes croiſſantes dans l'Hydrographie. Enfin la cinquième colomne contient les valeurs correſpondantes de la formule intégrale $P = \int dp \sqrt{(1+pp)}$, dont nous avons beſoin dans nos expreſſions.

45. Or, pour connoitre les courbes, qu'un corps peut décrire dans un fluide, il faut remarquer, qu'il y en a une infinité d'eſpeces differentes, qui ſont déterminées par les diverſes valeurs du nombre n. Car, tandis que le nombre n demeure le même, les courbes ſeront toujours ſemblables entr'elles, ou bien de la même eſpece, quelle que ſoit la difference entre les quantités α & c; puisque celles-cy n'entrent dans le calcul, que pour déterminer la grandeur de la courbe, ſans en changer l'eſpece, & outre cela le mouvement même du corps.

46. Le caractère de ces diverſes eſpeces ſera l'angle OLB, dont l'aſymtote de la branche aſcendante eſt inclinée à l'horizon. Pour connoitre cet angle, on n'a qu'à chercher la valeur du nombre n dans

la

la cinquième colomne de notre table, & la premiere colomne indiquera cet angle. Ainsi, si $n = 0$, l'angle OLB évanouïra, ou bien l'asymtote OL sera horizontale; & le sommet A se trouvera à l'infini. Dans ce cas donc la branche ascendante de la courbe évanouït, & le corps descendra toujours, en approchant de plus en plus de l'autre asymtote verticale EF: ce sera donc la premiere espece des trajectoires décrites dans un fluide. Fig.

47. Pour les autres especes, on les aura en donnant à n des valeurs affirmatives. Or, quoique le nombre soit infini, il sera bon pour la pratique d'en fixer un certain nombre en donnant à l'angle OLB des valeurs, qui croissent de 5 à 5 degrés. Ainsi la seconde espece sera, Fig. 1. si $n = 0,0876001$, où l'angle OLB devient de 5 degrés. Voilà donc les diverses especes, qu'on pourroit établir.

Espece.	L'angle OLB	valeur du nombre n	Espece.	L'angle OLB	valeur du nombre n
1	0°	0,0000000	10	45°	1,1477934
2	5	0,0876001	11	50	1,432362
3	10	0,1772365	12	55	1,822067
4	15	0,2711218	13	60	2,390330
5	20	0,3718537	14	65	3,290396
6	25	0,4826944	15	70	4,884250
7	30	0,6079863	16	75	8,223570
8	35	0,7538161	17	80	17,54793
9	40	0,9291380	18	85	67,12291

L'espece suivante ou la dix-neuvième renfermeroit les cas, où le globe est lancé verticalement en haut: or, puisque ces cas sont suffisamment expliqués ailleurs, je n'en tiendrai pas compte ici.

48. On pourroit encore établir autant d'especes, en donnant à n les mêmes valeurs, mais prises négativement; mais, puisque dans

ces

ces cas les courbes ſont deſtituées de la branche aſcendante, elles ne ſauroient avoir lieu, que lorsque le globe ſeroit d'abord lancé en bas. Or, comme dans l'Artillerie il n'arrive guères ſouvent, qu'on baiſſe les canons ou les mortiers au deſſous de l'horizon, il ſeroit ſuperflu de calculer ces eſpeces; & puisque la direction des canons & mortiers eſt toujours, ou horizontale, ou élevée au deſſus de l'horizon, on peut même ſe paſſer de la premiere eſpece, vu qu'elle n'a jamais lieu dans la pratique.

49. Le plus ſur moyen de calculer chacune des ces eſpeces ſera de partager toute la courbe en pluſieurs morceaux, & d'en calculer chacun à part: car alors on n'aura qu'à raſſembler les calculs de tous ces morceaux. Soit donc Mm un tel morceau de la courbe, & ſoit la tangente de l'inclinaiſon en M $= p$ & en $m = q$: & poſant $\int dq\sqrt{(1+qq)} = \mathrm{Q}$, de même que $\int dp\sqrt{(1+pp)} = \mathrm{P}$; on aura $\mathrm{AM} = cl\,\frac{n+\mathrm{P}}{n}$ & $\mathrm{A}m = cl\,\frac{n+\mathrm{Q}}{n}$; donc la portion de l'arc Mm ſera $= cl\,\frac{n+\mathrm{Q}}{n+\mathrm{P}}$. Enſuite prenant un milieu entre les inclinaiſons en M & m, qui ſoit $= \eta$, on aura pour la portion de l'abciſſe qui répond à cet arc $\mathrm{P}p = c \operatorname{cof} \eta.\ l\,\frac{n+\mathrm{Q}}{n+\mathrm{P}}$; & pour la portion de l'appliquée $pm - \mathrm{PM} = c \operatorname{fin} \eta.\ l\,\frac{n+\mathrm{Q}}{n+\mathrm{P}}$; pourvu que que la difference entre p & q ſoit aſſés petite.

50. Enſuite pour le mouvement même du corps, la hauteur duë à la viteſſe en M ſera $= \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+\mathrm{P}}$, & en $m =$ $\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+qq)}{n+\mathrm{Q}}$. Prenant donc un milieu entre les viteſſes, qu'on tire de ces formules, qui ſoit $= \sqrt{u}$, le tems, que le corps employe à par-

parcourir l'espace Mm sera $= \frac{Mm}{\sqrt{u}}$. Ou bien on prendra un milieu entre les valeurs $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}}$ & $\frac{\sqrt{(1+qq)}}{\sqrt{(n+Q)}}$ qui soit $= \mu$, & à cause de $\sqrt{u} = \mu \sqrt{\frac{1}{2} \alpha c}$, le tems par l'arc Mm sera $= \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\mu} \, l \, \frac{n+Q}{n+P}$. Et pour avoir ce tems exprimé en minutes secondes, soit g la hauteur par laquelle un corps tombe dans une seconde, & le nombre des secondes sera $= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\alpha g}} \cdot \frac{1}{\mu} \, l \, \frac{n+Q}{n+P}$. On pourra de la même maniere exprimer les vitesses par l'espace, qu'elles sont capables de parcourir dans une seconde, & sur ce pied la vitesse en M est $= \sqrt{2\alpha c g} \cdot \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}}$.

51. Quoiqu'on dût ici prendre les logarithmes hyperboliques, on peut pourtant se servir des logarithmes communs, pourvu qu'on multiplie ensuite les coëfficiens de ces termes par le nombre 2, 302585092994, dont le logarithme commun est $= 0, 3622156$. Ainsi, en se servant des logarithmes communs, un arc quelconque de la courbe sera $2, 302585\, c. \, l \, \frac{n+Q}{n+P}$, & ce coëfficient conviendra aussi aux abscisses & appliquées. Ensuite la vitesse en M sera exprimée par l'espace $\sqrt{2\alpha c g} \cdot \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}}$, qui se parcourt dans une seconde avec cette vitesse; & le tems par l'arc Mm sera de

$$\frac{2, 302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2\alpha g}} \cdot \frac{1}{\mu} \, l \, \frac{n+Q}{n+P} \text{ secondes,}$$

où μ est la valeur moyenne entre $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}}$ & $\frac{\sqrt{(1+qq)}}{\sqrt{(n+Q)}}$

& g marque la hauteur, d'où un corps tombe dans une seconde dans le vuide, & on sait que $g = 15,625$ pieds de Rhin.

52. Sur ce pied je calculerai une Table pour l'espece douzième où $n = 1,822067$, qui contiendra deux parties l'une pour la branche ascendante ANC, l'autre pour la branche descendante AMH; elle pourra servir de modele pour calculer pareillement des Tables semblables pour les autres especes; & à l'aide de 18 Tables de cette forme on sera en état de résoudre toutes les questions, qui peuvent se rencontrer dans l'Artillerie.

53. Par le moyen de cette Table, qui est calculée de 5 à 5 degrés, on construira aisément la forme de la trajectoire de la douzième
Fig. 3. espece; comme elle est exprimée dans la troisième figure. Et lorsqu'on sait la valeur de la quantité c & de α, on connoitra par cette Tabelle la vitesse du corps dans chaque point de la courbe, & encore le tems, par chaque partie de la courbe. Ainsi, si la direction, ou l'élévation du canon ou du mortier est donnée, d'où l'on tire le globe, on cherchera l'élévation dans la premiere colomne de la table pour la branche ascendante, & la colomne V^{me} montrera la vitesse, qui doit être imprimée au globe, pour qu'il décrive une trajectoire de la douzième éspece.

54. Prenons pour exemple une bombe, dont le diamètre soit $\frac{1}{2}$ pied, & le poids de 64 livres, ou bien égal au poids de $\frac{9}{10}$ pied cubique d'eau. Ayant donc $d = \frac{1}{2}$ & $e^3 = \frac{9}{10}$, nous aurons (15) $c = 707 \cdot \frac{18}{5} = 2544$ pieds; & pour α nous prendrons l'unité. Que cette bombe soit jettée sous une élévation de 45° en C, & pour qu'elle décrive une trajectoire de la XII^{me} espece, il faut que sa vitesse en C soit de $1,7222525 \cdot \sqrt{2\alpha g c}$ pieds par seconde, ou qu'elle soit capable de parcourir avec cette vitesse un espace de $434 \frac{9}{10}$ pieds par seconde. Quand sa vitesse seroit plus grande, la trajectoire appartiendroit à une espece anterieure; mais, si elle étoit plus petite, à une

espece

eſpece ſuivante; & dans ces cas il faudroit avoir calculées les Tables de ces autres eſpeces.

55. Suppoſons donc que la viteſſe initiale de la bombe en C ſoit de 434 $\frac{9}{10}$ pieds par ſeconde, & qu'elle ſoit jettée ſur une plaine horizontale, où elle retombe en E. Soit le ſommet en A, d'où l'on baiſſe la perpendiculaire AD, & la Table pour la branche aſcendante nous donnera

l'intervalle	CD = AB	=	2139, 2 pieds
la hauteur	AD	=	1234, 8 pieds
la courbe même	CA	=	2529, 0 pieds
la viteſſe au ſommet A		=	208 $\frac{8}{9}$ pieds par ſeconde
le tems de la montée par CA		=	8, 18 ſecondes.

56. Pour la branche deſcendante il faut chercher par interpolation le point où l'appliquée eſt = 0, 2108126 dans la Table pour cette branche, & on voit que cela arrive entre 60° & 65°, & préciſément à 60°, 13′. Ainſi la bombe tombera en E ſur l'horizon ſous un angle de 60°, 13′: Or de là on trouvera .

l'intervalle	DE	=	1640, 1 pieds
la courbe	AE	=	2153, 6 pieds
la viteſſe en	E	=	275 $\frac{2}{3}$ pied par ſeconde
le tems de la deſcente par	AE	=	9, 50 ſecondes

Ainſi la bombe reſtera dans l'air pendant 17, 68 ou 17 $\frac{2}{3}$ ſecondes, & l'amplitude du jet ſera CE = 3779 $\frac{1}{3}$ pieds. Cet Exemple ſera ſuffiſant à montrer l'uſage de ces Tables dans la reſolution de toute ſorte de problèmes, qu'on propoſe ordinairement dans l'Artillerie.

ESPECE XII.

Pour le branche ascendante

Inclin. en N	L' arc AN, $=2,302585c$ mult. par	L'abscisse AQ $=2,302585c$ mult. par	L'appliquée QN $=2,302585c$ mult. par	La vitesse en N $=\sqrt{2agc}$ mult. par	Le tems par AN $=\frac{2,302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,7408247	0,0000000″
	213983	213779	9334	213820	284763
5	0,0213983	0,0213779	0,0009334	0,7622067	0,0284763
	230448	228477	30080	295427	296594
10	0,0444431	0,0442256	0,0039414	0,7917494	0,0581357
	255349	249296	55268	395510	314747
15	0,0699780	0,0691552	0,0094682	0,8313004	0,0896104
	291646	278148	87699	523866	340273
20	0,0991426	0,0969700	0,0182381	0,8836870	0,1236377
	345303	319018	132142	697094	376196
25	0,1336729	0,1288718	0,0314523	0,9533964	0,1612573
	426536	377472	196952	945651	426723
30	0,1763265	0,1666190	0,0511475	1,0479615	0,2039296
	555745	468711	298602	1331725	499521
35	0,2319010	0,2134901	0,0810077	1,1811330	0,2538817
	778564	617676	473960	2003240	609504
40	0,3097574	0,2752577	0,1284037	1,3814570	0,3148321
	1219806	899335	824089	3407955	790812
45	0,4317380	0,3651912	0,2108126	1,7222525	0,3939133
	2381005	1608581	1755460	7698425	1149287
50	0,6698385	0,5260493	0,3863586	2,4920950	0,5088420

ESPECE

ESPECE XII. Pour la branche descendante.

Inclin. en M	L'arc AM $=2,302585c$ mult par	L'abscisse AP $=2,302585c$ mult. par	L'appliquée PM $=2,302585c$ mult. par	La vitesse en M $=\sqrt{2agc}$ mult. par	Le tems par M $=\frac{2,302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
0°	0,000000	0,0000000	0,0000000	0,7408247	0,0000000
	203933	203739	8895	− 144229	277997
5	0,0203933	0,0203739	0,0008895	0,7264018	0,0277997
	199209	197505	26002	− 82616	275814
10	0,0403142	0,0401244	0,0034897	0,7181402	0,0553811
	199299	194575	43136	− 25702	278019
15	0,0602441	0,0595819	0,0078033	0,7155700	0,0831830
	204125	194677	61381	+ 28920	284687
20	0,0806566	0,0790496	0,0139414	0,7184620	0,1116517
	214049	197755	81913	83320	296214
25	0,1020615	0,0988251	0,0221327	0,7267940	0,1412731
	229898	203922	106155	139390	313328
30	0,1250513	0,1192173	0,0327482	0,7407330	0,1726059
	253104	213465	135993	198950	337196
35	0,1503617	0,1405638	0,0463475	0,7606280	0,2063255
	285969	226875	174086	263895	369608
40	0,1789586	0,1632513	0,0637561	0,7870175	0,2432863
	332130	244872	224384	336125	413278
45	0,2121716	0,1877385	0,0861945	0,8206300	0,2846141
	397389	268470	292985	417430	472492
50	0,2519105	0,2145855	0,1154930	0,8623730	0,3318633
	491194	299018	389688	509230	553474
55	0,3010299	0,2444873	0,1544618	0,9132960	0,3872107
	629347	338148	530786	611670	667116
60	0,3639646	0,2783021	0,2075404	0,9744630	0,4539223
	841010	388335	745985	720310	832818
65	0,4480656	0,3171356	0,2821389	1,0464940	0,5372041
	1178537	451007	1088830	825390	1084230
70	0,5659193	0,3622363	0,3910219	1,1290330	0,6456271
	1754921	527715	1673697	900010	1495880
75	0,7414114	0,4150078	0,5583916	1,2190340	0,7952151
	2851538	617186	2783950	894400	2257818
80	1,0265652	0,4767264	0,8367866	1,3084740	1,0209969
	5513732	719686	5466560	733500	4100500
85	1,5779384	0,5486950	1,3834426	1,3818240	1,4310469

TABLE Subſidiaire.

ang. Φ	$p = \text{tang}\,\Phi$	$\text{tag}\,\Phi\ \text{ſec.}\,\Phi$	$l\,\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\Phi)$	P
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,0174551	0,0174577	0,0174541	0,0174559
2	0,0349208	0,0349420	0,0349136	0,0349278
3	0,0524078	0,0524797	0,0523838	0,0524318
4	0,0699268	0,0700976	0,0698698	0,0699837
5	0,0874887	0,0878229	0,0873773	0,0876001
6	0,1051042	0,1056832	0,1049116	0,1052974
7	0,1227846	0,1237068	0,1224783	0,1230926
8	0,1405408	0,1419220	0,1400823	0,1410022
9	0,1583844	0,1603587	0,1577296	0,1590442
10	0,1763270	0,1790471	0,1754259	0,1772365
11	0,1943803	0,1980185	0,1931766	0,1955976
12	0,2125566	0,2173052	0,2109876	0,2141464
13	0,2308682	0,2369410	0,2288650	0,2329030
14	0,2493280	0,2569609	0,2468144	0,2518877
15	0,2679492	0,2774014	0,2648421	0,2711218
16	0,2867454	0,2983010	0,2829544	0,2906277
17	0,3057307	0,3197000	0,3011576	0,3104288
18	0,3249197	0,3416408	0,3194582	0,3305495
19	0,3443276	0,3641680	0,3378626	0,3510153
20	0,3639702	0,3873290	0,3563784	0,3718537
21	0,3838640	0,4111741	0,3750122	0,3930932
22	0,4040262	0,4357564	0,3937709	0,4147637
23	0,4244748	0,4611325	0,4126623	0,4368974
24	0,4452287	0,4873633	0,4316947	0,4595190
25	0,4663077	0,5145136	0,4508752	0,4826944
26	0,4877326	0,5426522	0,4702126	0,5064324
27	0,5095254	0,5718538	0,4897151	0,5307845
28	0,5417094	0,6021983	0,5093921	0,5557952
29	0,5543091	0,6337714	0,5292525	0,5815120
30	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863

TABLE Subsidiaire.

ang. φ	$p = \tan \varphi$	tag φ sec. φ	$l\,tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$	P
30°	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863
31	0,6008606	0,7009840	0,5695625	0,6352732
32	0,6248694	0,7368323	0,5900326	0,6634325
33	0,6494076	0,7743300	0,6107273	0,6925287
34	0,6745085	0,8136044	0,6316578	0,7226311
35	0,7002075	0,8547958	0,6528363	0,7538161
36	0,7265425	0,8980560	0,6742752	0,7861656
37	0,7535541	0,9435520	0,6959879	0,8197699
38	0,7812856	0,9914657	0,7179875	0,8547266
39	0,8097840	1,0419980	0,7402898	0,8911439
40	,08390996	1,0953666	0,7629093	0,9291380
41	0,8692867	1,1518160	0,7858627	0,9688398
42	0,9004040	1,2116130	0,8091670	1,0103900
43	0,9325151	1,2750535	0,8328403	1,0539469
44	0,9656888	1,3424655	0,8569076	1,0996840
45	1,0000000	1,4142136	0,8813732	1,1477934
46	1,0355303	1,4907040	0,9062752	1,1984896
47	1,0723687	1,5723920	0,9316313	1,2520116
48	1,1106125	1,6597842	0,9574664	1,3086253
49	1,1503684	1,7534530	0,9838076	1,3686303
50	1,1917536	1,8540400	1,0106827	1,4323614
51	1,2348972	1,9622710	1,0381231	1,5001970
52	1,2799416	2,0789700	1,0661613	1,5725657
53	1,3270448	2,2050705	1,0948332	1,6499519
54	1,376 819	2,3416410	1,1241768	1,7329189
55	1,428 480	2,4899000	1,1542341	1,8220670
56	1,48256[illegible]0	2,6512520	1,1850503	1,9181512
57	1,5398650	2,8273130	1,2166746	2,0219938
58	1,6003345	3,0199590	1,2491603	2,1345596
59	1,6642795	3,2313720	1,2825662	2,2569691
60	1,7320508	3,4641020	1,3165572	2,3903296

TA-

TABLE Subsidiaire.

Ang. Φ	$p = $ tang Φ	tang Φ sec. Φ	$l$tg$(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi)$	P
60°	1,7320508	3,464102	1,3165572	2,390330
61	1,8040478	3,721147	1,3524042	2,536776
62	1,8807265	4,006050	1,3889854	2,697518
63	1,9626105	4,323721	1,4267876	2,874904
64	2,0503038	4,677095	1,4659075	3,071501
65	2,1445069	5,074337	1,5064535	3,290396
66	2,2460368	5,522093	1,5485467	3,535320
67	2,3558524	6,029344	1,5923233	3,810834
68	2,4750869	6,60716[illegible]	1,6379381	4,122549
69	2,6050891	7,269313	1,6855678	4,477441
70	2,7474774	8,033085	1,7354146	4,884250
71	2,9042109	8,920438	1,7877114	5,354075
72	3,0776835	9,959592	1,8427293	5,901161
73	3,2708526	11,187310	1,9007861	6,544048
74	3,4874144	12,652184	1,9622566	7,307220
75	3,7320508	14,419540	2,0275887	8,223570
76	4,0107809	16,578823	2,0973231	9,338073
77	4,3314759	19,255193	2,1721209	10,713657
78	4,7046301	22,628020	2,2528019	12,440411
79	5,1445540	26,961800	2,3403999	14,651100
80	5,6712818	32,65962	2,4362452	17,54793
81	6,3137515	40,36036	2,5420894	21,45123
82	7,1153697	51,12605	2,6603052	26,89318
83	8,1443464	66,82850	2,7942178	34,81136
84	9,5143645	91,02174	2,9486992	46,93522
85	11,4300520	131,11452	3,1313001	67,12291
86	14,300666	205,0084	3,3546723	104,1815
87	19,081137	364,5898	3,6425320	184,1162
88	28,636253	820,5348	4,0481241	412,2915
89	57,289962	3282,639	4,7413471	1643,690
89° 30′	114,58865	13131,06	5,4345129	6568,250
89° 44′	214,85762	45[illegible]64,31	6,0631256	23085,19
89° 52′	429,71757	184657,7	6,7[illegible]62739	92332,30
89° 56′	859,43630	738631,4	7,4494211	369319,4
89° 58′	1718,8732	2954[illegible]26,	8,1425680	1477267,

ME'MOI

Tab. I. ad pag. 153.

Fig. 1.

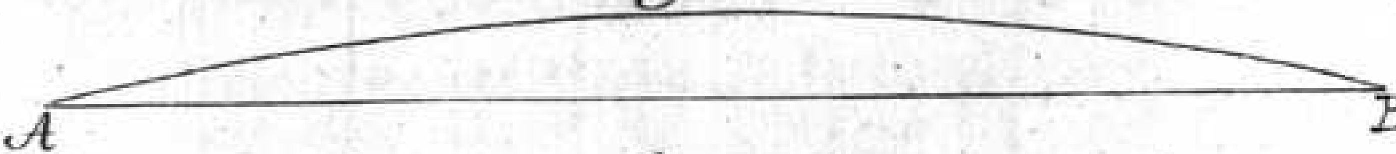


Fig. 2.

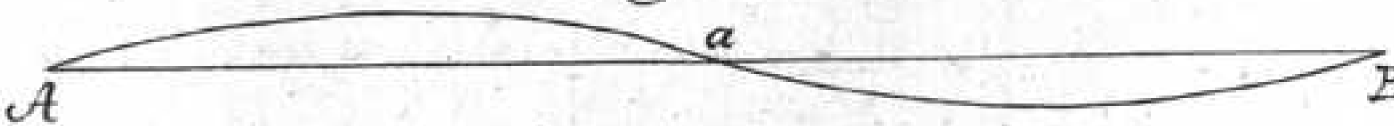


Fig. 3.

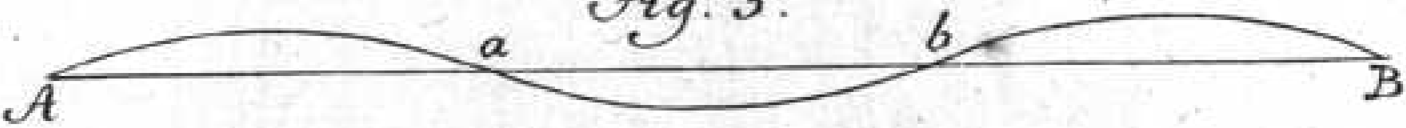


Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

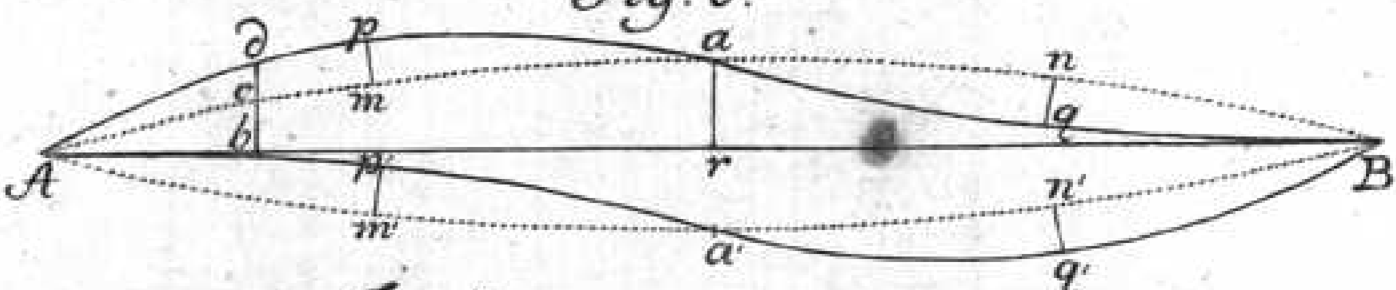
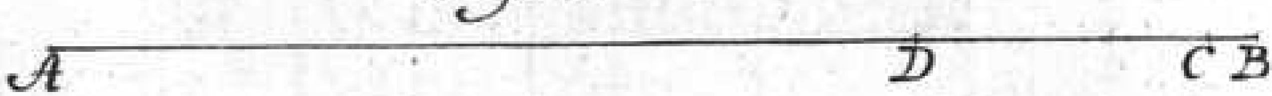


Fig. 7.

Fig. 8.



Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 352 F.H. Frisch sc. Berl.

Fig. 1.

Fig. 2.

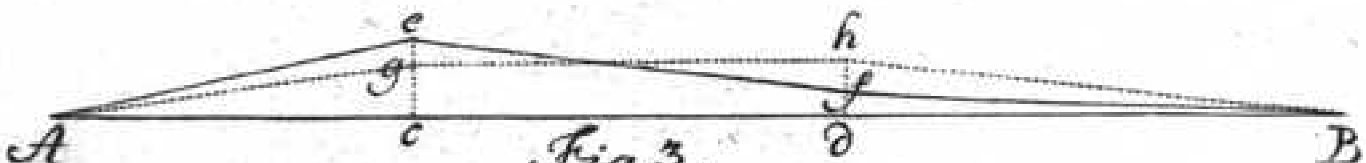


Fig. 3.

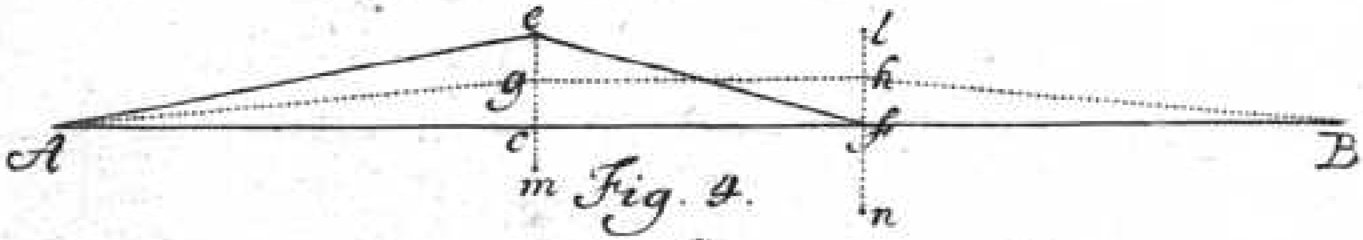


Fig. 4.

Fig. 5.

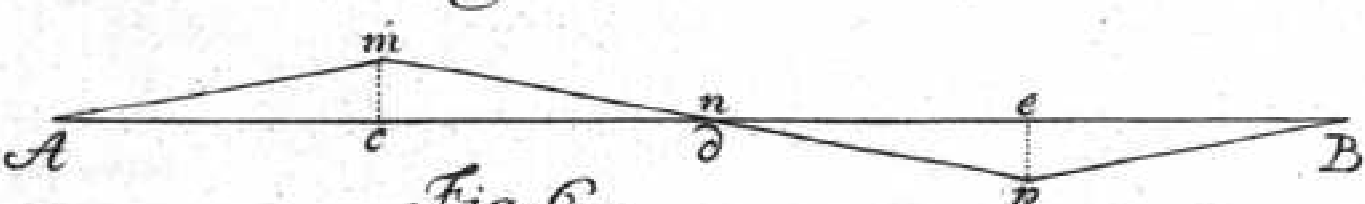


Fig. 6.

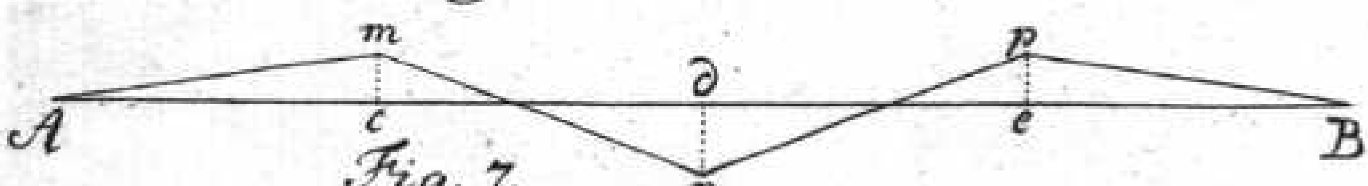
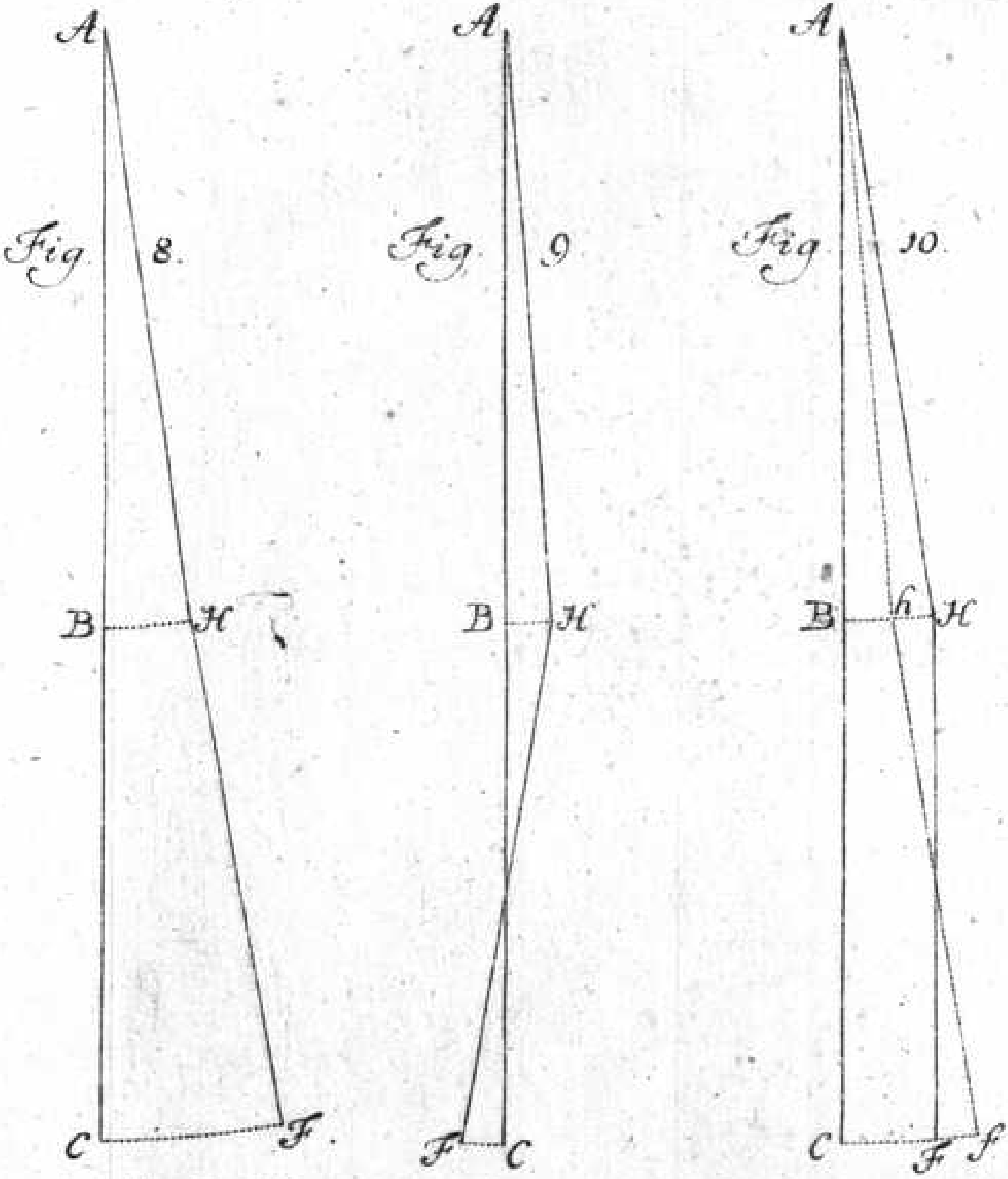


Fig. 7.

Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 352.

F. H. Frisch sc. Berl.

Tab. III. ad pag. 190.

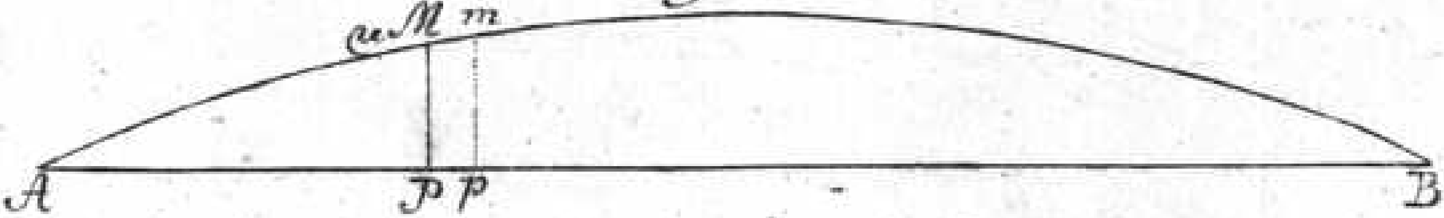


Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 352.

F.H.Frisch sc. Berl.

Tab. IV.

Fig. 1.



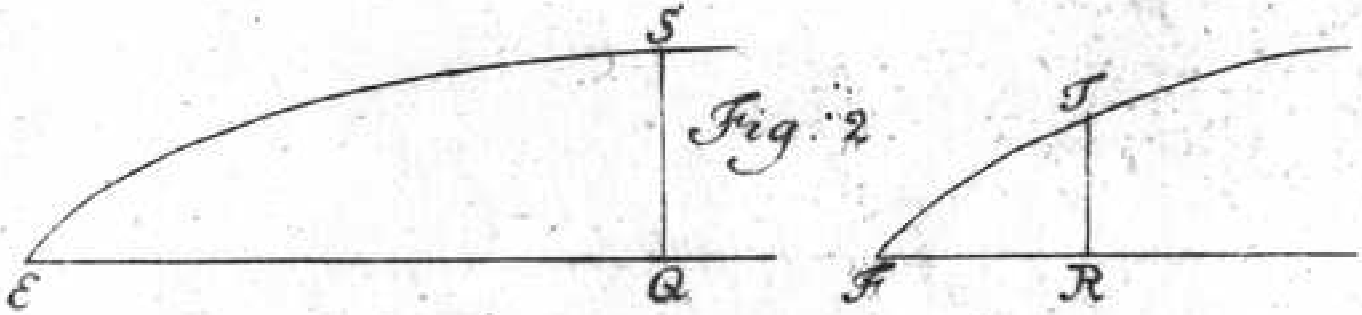
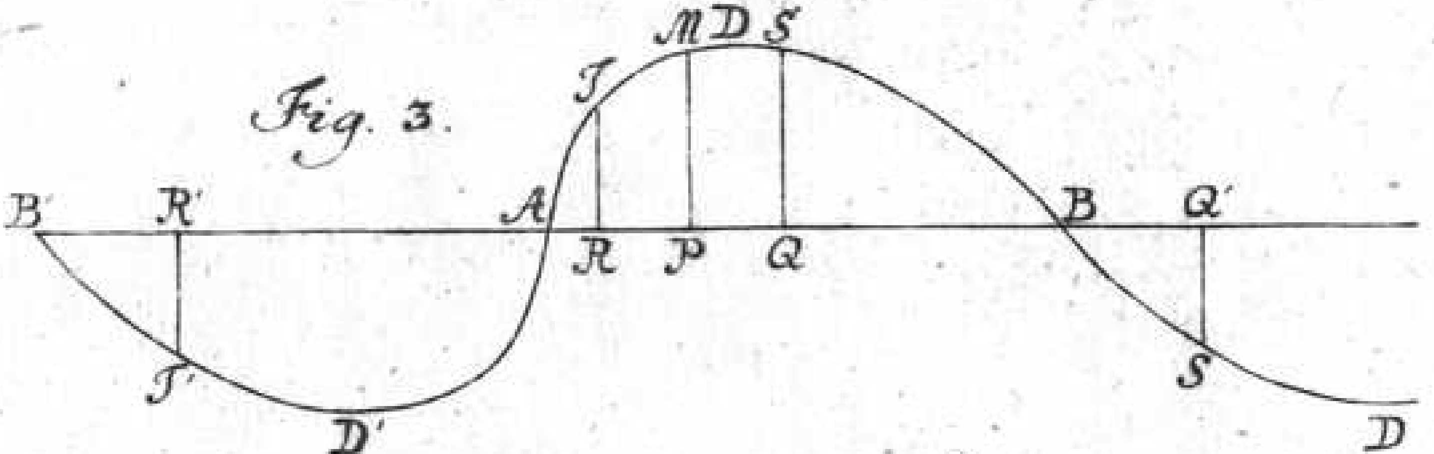


Fig. 3.



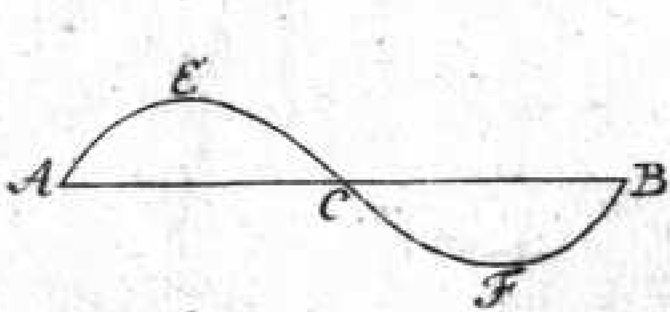


Fig. 5.

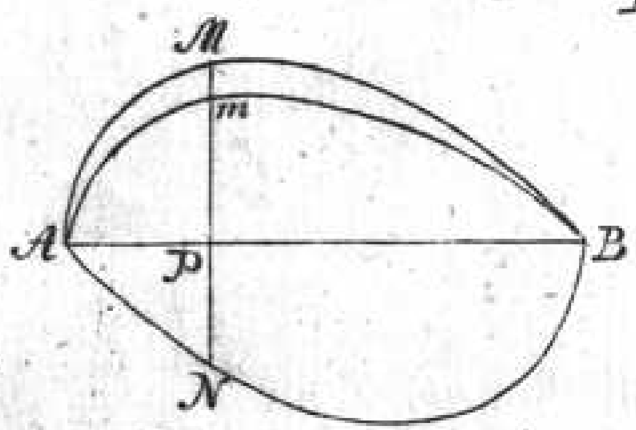


Fig. 4.

F.H. Frisch sc. Berl.

ad pag. 226.

Tab. V.

Fig. 1.

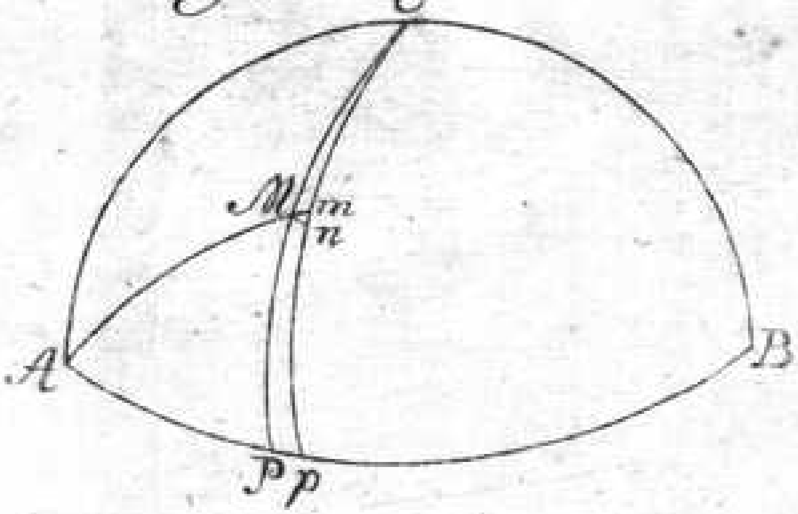


Fig. 2.

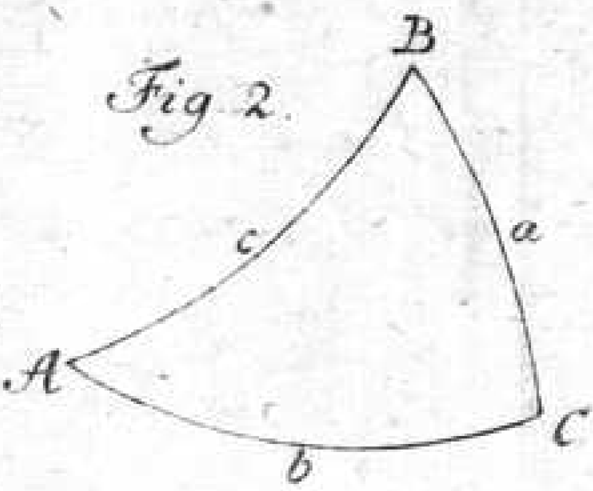


Fig. 3.

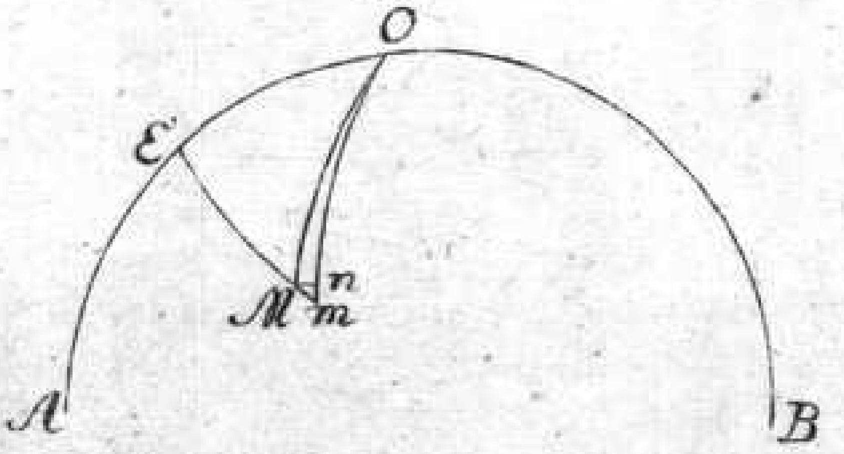
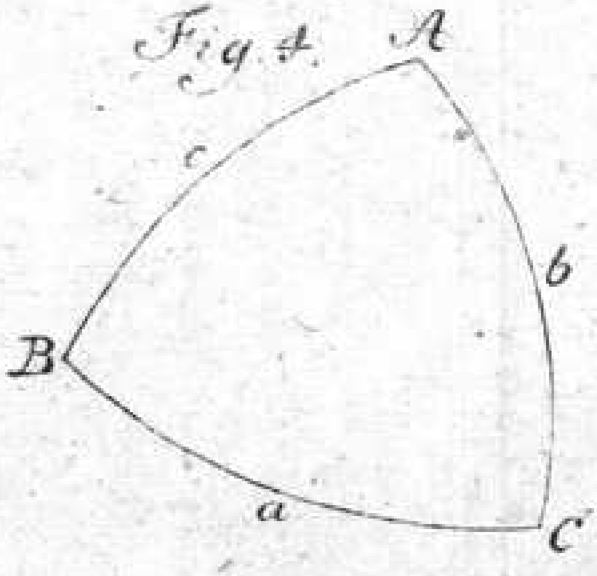


Fig. 4.



Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 352.

F. H. Frisch sc. B.

Tab. VI.

ad pag. 259.

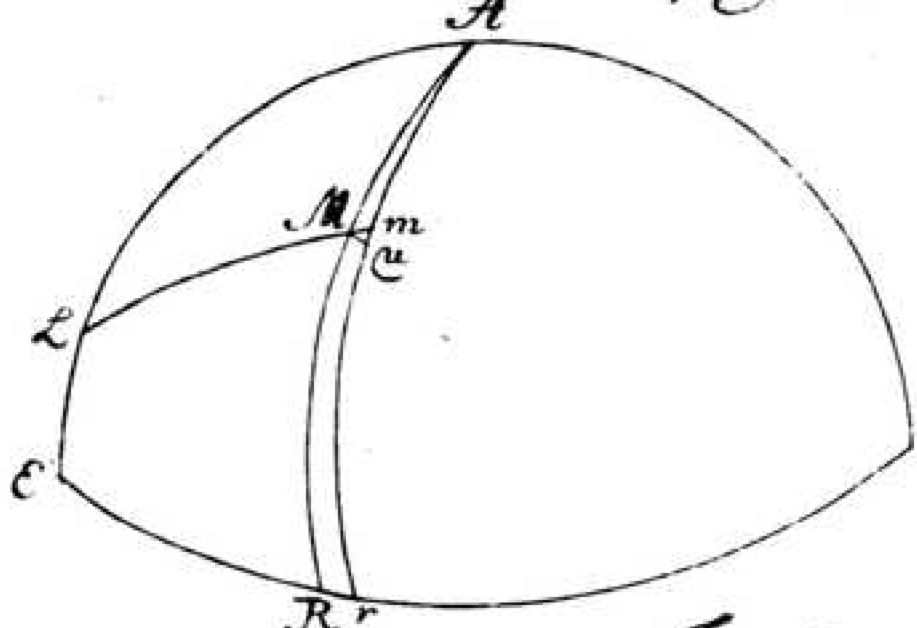


Fig. 2

Fig. 1

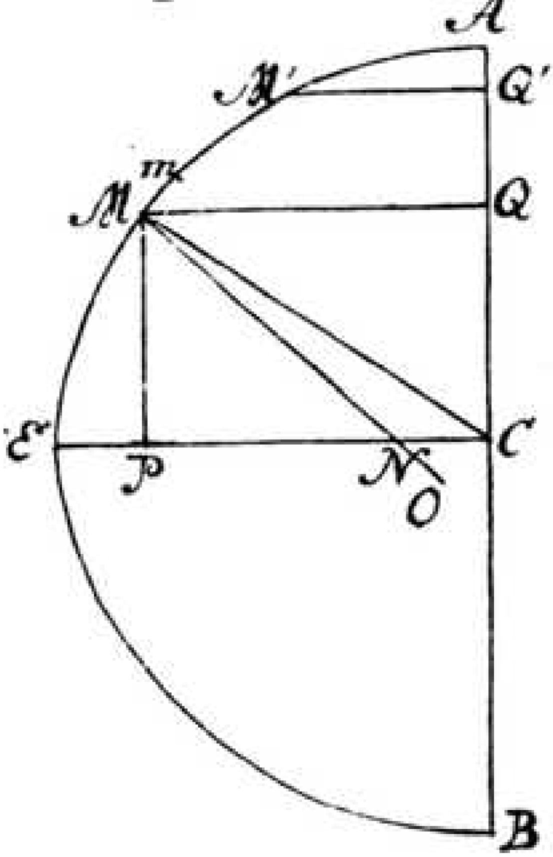
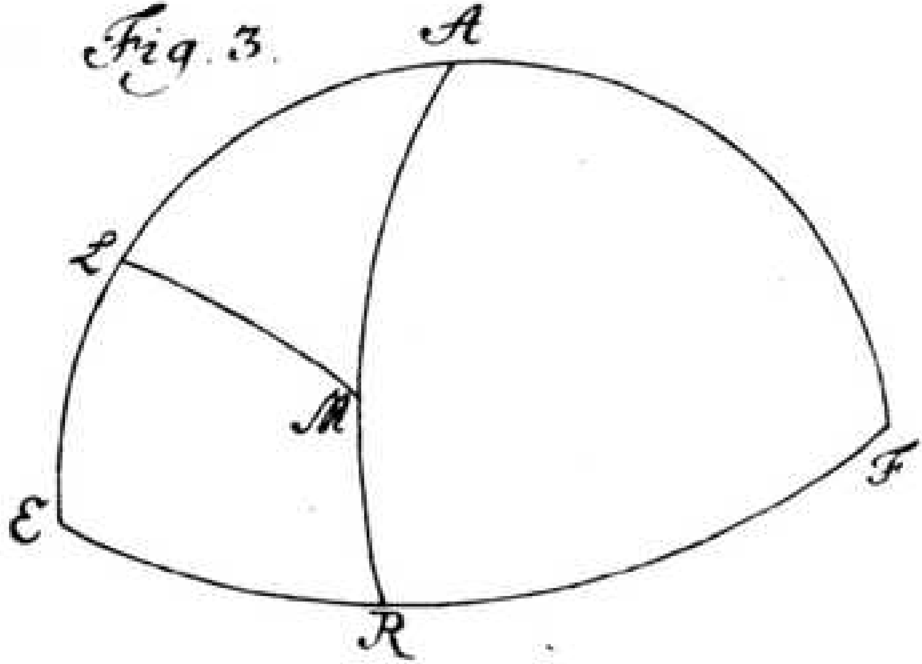


Fig. 3.



F. H. Frisch sc.