1755

Élémens de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits

Leonhard Euler

ÉLÉMENS
DE LA TRIGONOMETRIE SPHEROÏDIQUE
TIRÉS DE LA MÉTHODE DES PLUS GRANDS ET PLUS PETITS.

PAR M. EULER.

1.

Ayant établi les Elémens de la Trigonométrie Sphérique ſur le principe des plus grands & plus petits, mon but principal étoit de fixer un tel principe général, duquel on pût tirer la réſolution des triangles formés non ſeulement ſur une ſurface ſphérique, mais en général ſur une ſurface quelconque. Puisque les côtés d'un triangle ſphérique ſont des arcs de grands cercles, qui étant les lignes les plus courtes, qu'on puiſſe tirer ſur la ſurface d'une ſphère d'un point à un autre; c'eſt ſur le même pied que j'enviſage les côtés d'un triangle décrit ſur une ſurface quelconque, de ſorte qu'ils ſoient les chemins les plus courts, qui conduiſent d'un angle à un autre ſur cette ſurface. Ainſi concevant trois points ſur une ſurface quelconque, qu'on tire de chacun aux autres les lignes les plus courtes, & le triangle ſera formé, dont il s'agit d'enſeigner la réſolution.

2. Or je me borne ici aux ſurfaces ſphéroïdiques, qui ſont formées par la révolution d'une ellipſe autour d'un de ſes axes, & je conſidérerai en particulier les triangles formés ſur la ſurface de la terre par des côtés, qui ſont les plus courts entre leurs termes. Car, ſoit qu'on forme les côtés par des cordes tenduës d'un point à l'autre, ou qu'on les tire en ſuivant la direction des rayons de lumiere, en ſorte que le plan

plan qui contient deux élémens contigus quelconques, soit partout perpendiculaire à la surface de la Terre, ils représenteront le chemin le plus court d'un bout à l'autre. C'est aussi en effet la méthode qu'on suivroit dans la pratique, s'il faloit tirer la ligne la plus courte d'un point à un autre sur la surface de la terre; & quand on parle dans la Géographie de la distance entre deux lieux, on entend toujours le plus court chemin qui conduit de l'un à l'autre. Il faut donc bien distinguer ce plus petit chemin, de la loxodromie qu'on suit dans la navigation, & qui demande des recherches particulieres.

3. Soit donc AEB la demi-ellipse, par la révolution de laquelle autour de l'axe ACB résulte le sphéroïde de la Terre; & posons le demi-axe $CA = CB = a$; & le demi-diametre de l'équateur $CE = e$. Or la demi-ellipse AEB représentera un méridien quelconque, & quelque point qu'on puisse concevoir sur la surface de la terre, pour en connoitre la situation, il faut considérer le méridien qui passe par ce point, qui soit M: & alors on aura trois choses à déterminer. 1°. La distance de ce point M à l'axe, ou la perpendiculaire MQ. 2°. Sa distance au plan de l'équateur mesurée par la perpendiculaire MP égale à CQ: & 3°. La latitude ou l'élévation du pole observée dans cet endroit. On voit bien que connoissant une de ces trois choses, il est aisé de déterminer les deux autres par les propriétés de l'ellipse. Ensuite il conviendra encore de chercher le rayon osculateur du méridien au point M, avec la quantité de l'arc du méridien MA, dont ce point est éloigné du pole A. Fig. 1.

4. Soit $CP = MQ = x$, $PM = CQ = y$, & on aura:

$$y = \frac{a}{e} V(ee - xx) \quad \text{donc} \quad dy = -\frac{a x d x}{e V(ee - xx)}.$$

Qu'on tire maintenant la droite MN perpendiculaire au méridien, laquelle marquant la direction de la gravité, l'angle ENM mesurera la latitude, ou l'élévation du pole à l'endroit M. Posons donc cet angle ENM $= \Phi$, qui eſt ordinairement le premier élément qu'on connoiſſe : & ayant la ſous-normale $PN = -\frac{ydy}{dx} = \frac{aa}{ee}x$, nous en tirons : $\operatorname{tang}\Phi = \frac{PM}{PN} = \frac{e\sqrt{(ee-xx)}}{ax}$, & partant :

$$CP = x = \frac{ee\cos\Phi}{\sqrt{(aa\sin\Phi^2 + ee\cos\Phi^2)}}, \quad \& \quad PM = y = \frac{aa\sin\Phi}{\sqrt{(aa\sin\Phi^2 + ee\cos\Phi^2)}}.$$

D'où connoiſſant la latitude d'un endroit M, on en déterminera aiſément ſa diſtance tant de l'axe de la Terre, que du plan de l'équateur. De là on pourra auſſi aſſigner la diſtance de ce point M au centre de la Terre C, ou la droite $CM = \sqrt{\frac{a^4\sin\Phi^2 + e^4\cos\Phi^2}{aa\sin\Phi^2 + ee\cos\Phi^2}}$, & l'angle CMN, que cette droite fait avec la direction de la gravité MN, car on trouve :

$$\operatorname{tg} CMN = \frac{(ee-aa)\sin\Phi\cos\Phi}{aa\sin\Phi^2 + ee\cos\Phi^2}, \quad \& \quad \sin CMN = \frac{(ee-aa)\sin\Phi\cos\Phi}{\sqrt{(a^4\sin\Phi^2 + e^4\cos\Phi^2)}}.$$

5. Cherchons auſſi le rayon oſculateur MO, dont l'expreſſion poſant $\frac{dy}{dx} = p$, eſt $MO = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Or ayant $\frac{dy}{dx} = -\frac{aax}{eey}$, on aura $p = -\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi}$, & $dp = \frac{d\Phi}{\sin\Phi^2}$, & de plus $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sin\Phi}$, donc $(1+pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin\Phi^3}$,

& partant $\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} = \frac{1}{d\Phi\sin\Phi}$.

Mais

Mais à cauſe de $x = \frac{ee \operatorname{cof} \Phi}{\sqrt{(aa \operatorname{fin} \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)}}$, nous aurons :

$$dx = -\frac{aaee\, d\Phi \operatorname{fin} \Phi}{(aa \operatorname{fin} \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par conſéquent le rayon oſculateur ſera

$$MO = \frac{aaee}{(aa \operatorname{fin} \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, ſi nous prenons ſur le même méridien un point infiniment proche m, dont la latitude ſoit $= \Phi + d\Phi$, l'élément Mm ſera un arc de cercle décrit du rayon MO, dont la longueur eſt

$$Mm = \frac{aaee\, d\Phi}{(aa \operatorname{fin} \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

6. L'intégrale de cette formule donnera la longueur de l'arc elliptique EM, & pour en trouver la valeur approchée on n'a qu'à mettre $\operatorname{fin} \Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cof} 2\Phi$ & $\operatorname{cof} \Phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cof} 2\Phi$, pour avoir $Mm = \frac{aaee\, d\Phi}{[\frac{1}{2}(aa+ee) + \frac{1}{2}(ee-aa) \operatorname{cof} 2\Phi]^{\frac{3}{2}}}$.

Car, puisque $ee - aa$ eſt extrêmement petit par rapport à $aa + ee$ en poſant $\frac{ee-aa}{ee+aa} = \delta$, notre formule ſe change en

$$Mm = \frac{2aaee\, d\Phi \sqrt{2}}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} (1 + \delta \operatorname{cof} 2\Phi)^{-\frac{3}{2}},$$

dont l'intégrale à cauſe de

$(1 + \delta \operatorname{cof} 2\Phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{15}{16}\delta\delta - \frac{3}{2}\delta \operatorname{cof} 2\Phi + \frac{15}{16}\delta\delta \operatorname{cof} 4\Phi$, ſera

 EM

$$EM = \frac{2aaee\sqrt{2}}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{8}\delta\delta\right)\Phi - \tfrac{3}{4}\delta \sin 2\Phi + \tfrac{3}{16}\cdot\tfrac{5}{4}\delta\delta \sin 4\Phi \right]$$

expreſſion qui ſatisfait très à peu près, & on pourroit même encore rejetter les termes affectés par le quarré de δ.

7. On peut auſſi ſe ſervir de la formule differentielle pour déterminer la grandeur de chaque degré du méridien: on n'aura qu'à donner à $d\Phi$ la valeur d'un degré, ou la 180me partie de 3,14159265, qui eſt la longueur de l'arc de 180° le rayon étant poſé $= 1$. On mettra donc $d\Phi = 0,017453292$, & Φ marquera la latitude au milieu de ce degré. Alors la grandeur de ce degré

$$\text{ſera} = \frac{2aaeed\Phi\sqrt{2}}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \tfrac{3}{2}\delta \cos 2\Phi\right)$$

en negligeant les quarrés de δ, & cette formule ſuffit pour déterminer à chaque élevation du pole la grandeur d'un degré du Méridien. De là on pourra donc auſſi réciproquement déterminer la grandeur des deux demi-diametres de la Terre par la meſure actuelle de quelques degrés, en ſuppoſant que la figure de la Terre ſoit un ſpheroïde elliptique. Deux degrés meſurés ſeroient ſuffiſans pour cet effet, ſi la meſure étoit exacte au dernier point: mais, puiſqu'une erreur d'une ſeconde en produit une de 16 toiſes environ dans la grandeur du degré; il ſera bon d'y employer pluſieurs degrés meſurés en avouant à chacun une petite erreur de 32 toiſes au moins, pour mettre enſuite d'accord les concluſions.

8. Poſons pour abréger $\frac{2aaeed\Phi\sqrt{2}}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} = A$, puiſque cette quantité eſt la même pour tous les degrés; & les meſures d'un degré faites au Perou, au Cap, en France & en Laponie nous fourniront les quatre équations ſuivantes.

A(1

$$A(1 - \tfrac{3}{2}\delta \operatorname{cof} 1^\circ) = 56753 + p \text{ Toifes}$$
$$A(1 - \tfrac{3}{2}\delta \operatorname{cof} 66^\circ, 36') = 57037 + q \text{ Toifes}$$
$$A(1 - \tfrac{3}{2}\delta \operatorname{cof} 98^\circ, 46') = 57074 + r \text{ Toifes}$$
$$A(1 - \tfrac{3}{2}\delta \operatorname{cof} 132^\circ, 40') = 57438 + s \text{ Toifes.}$$

en marquant par p, q, r, s les erreurs, qui peuvent s'être gliſſées dans ces meſures; lesquelles peuvent être ou poſitives ou négatives; & on les ſuppoſera auſſi petites qu'il eſt poſſible, puisqu'on y a apporté tant de ſoins, que les erreurs ne ſauroient ſurpaſſer quelques ſecondes, à l'exception de la troiſième, dont l'erreur r pourroit bien être plus grande que 32 toiſes.

9. Si nous ſubſtituons les valeurs de ces coſinus, nous aurons les quatre équations ſuivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & A(1 - 1{,}4997715\,\delta) = 56753 + p \\ \text{II.} & A(1 - 0{,}5957219\,\delta) = 57037 + q \\ \text{III.} & A(1 + 0{,}2286163\,\delta) = 57074 + r \\ \text{IV.} & A(1 + 1{,}0165980\,\delta) = 57438 + s. \end{array}$$

Otons la premiere de chacune des autres pour avoir ces trois équations:

$$\begin{aligned} 0{,}9040496\,\delta A &= 284 + q - p \\ 1{,}7283878\,\delta A &= 321 + r - p \\ 2{,}5163696\,\delta A &= 685 + s - p \end{aligned}$$

& diviſant par la premiere les deux autres on aura

$$\frac{321 + r - p}{284 + q - p} = \frac{65}{34} \quad \& \quad \frac{685 + s - p}{284 + q - p} = \frac{437}{157}$$

d'où il s'enſuit:

$$31p - 65q + 34r = 7546 \quad \& \quad 280p - 437q + 157s = 16563.$$

10. Si

10. Si nous éliminons p de ces deux équations il en résultera

$$-150q+307r-157s=51594$$

d'où nous voyons que les erreurs de la mesure au Cap & en Laponie doivent être supposées négatives, tandis que celle de France est positive. Si l'on vouloit supposer ces trois erreurs égales, chacune deviendroit de 84 toises, qui seroit trop exorbitante, pour qu'on la pût concilier avec l'extrème exactitude, dont la seconde & quatrième de ces opérations ont été faites. Mais on ne sauroit plus douter, qu'il ne se soit glissé une erreur assés considérable dans la détermination du degré en France, & qui pourroit bien monter à 100 toises & au delà ; & si nous voulions supposer entièrement justes les mesures du Cap & de de Laponie, ou $q=0$ & $s=0$, nous trouverions l'erreur du degré en France $r=168$ toises ; ou on se seroit trompé de $10''$ dans les Observations celestes. Or, si nous supposions $r=100$ toises & $s=q$, on trouveroit $q=s=-68$ toises ; or on ne sauroit admettre une erreur si grande. Posons donc $r=120$, & on aura $q=s=-48$ toises ; qu'on sauroit à peine admettre : mais posant $r=125$ on obtiendra $q=s=-43$ toises.

11. Puisqu'il faut donc absolument reconnoitre des erreurs dans ces mesures de degrés ; & la plus grande dans celle du degré de France, qu'on ne sauroit supposer audessous de 125 Toises, posons $r=125$, & nous aurons :

$-150q-157s=13219$, donc à peu près $q+s=-86$ Toises.

Avant que de décider séparement sur l'une & l'autre des erreurs q & s, considérons, quelle en résulte pour p, de cette egalité :

$$31p-65q=3296, \quad \text{ou} \quad p=106\tfrac{1}{3}+2\tfrac{1}{10}q.$$

Si l'on suppose que $p=0$, on trouve $q=-51$ & partant $s=-35$, mais si l'on suppose $p=15$, on trouve $q=-43\frac{1}{2}$ & partant $s=-42\frac{1}{2}$: d'où l'on voit que si nous voulions supposer l'erreur du degré du Pérou plus grande, nous serions obligés d'attribuer à celui de Laponie une

une plus grande. Donc, à moins que la figure de la Terre ne différe confidérablement d'un fphéroïde elliptique, il femble qu'on doive admettre les erreurs fuivantes :

$p = 15$ toifes; $q = -43$ toifes; $r = +125$ toifes & $s = -43$ toifes.

12. Cela pofé, les véritables grandeurs de nos quatre degrés feront :

		Latitude du milieu
Celui du Pérou	$= 56768$ Toifes	$\phi = 0°, 30'$
Celui du Cap	$= 56994$ Toifes	$\phi = 33°, 18'$
Celui de la France	$= 57199$ Toifes	$\phi = 49°, 23'$
Celui de la Laponie	$= 57395$ Toifes	$\phi = 66°, 20'$

& ayant fait ces corrections, la figure de la Terre deviendra réductible à une fphéroïde elliptique, qu'on pourra déterminer par deux quelconques de ces quatre degrés mefurés. Choififfons donc le premier & le dernier, qui donnent :

$$A(1 - 1{,}4997715\delta) = 56768 \text{ Toifes}$$
$$A(1 + 1{,}0165890\delta) = 57395 \text{ Toifes},$$

d'où l'on tire : $\dfrac{1 + 1{,}0165980\delta}{1 - 1{,}4997715\delta} = \dfrac{57395}{56768}$ & partant

$$143789\delta = 627 \quad \text{donc} \quad \delta = 0{,}00436055 = \frac{ee - aa}{ee + aa}.$$

Enfuite

$$\frac{ee}{aa} = \frac{1 + \delta}{1 - \delta} = 1 + 2\delta + 2\delta\delta = 1{,}0087593 \quad \& \quad \frac{e}{a} = 1{,}00437.$$

Donc le diametre de l'équateur fera à l'axe de la Terre comme 230 à 229, ce qui eft précifément le rapport que *Newton* a établi; d'où l'on peut conclure que les hypothefes, que ce grand Géométre a faites fur la ftructure & l'attraction de la Terre, font d'accord avec la vérité.

13. Ayant trouvé la valeur de δ, nous en tirerons d'abord

$$A = 57142 = \frac{2aaee\sqrt{2}}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} \cdot 0{,}01745329$$

$$\text{donc } \frac{aaee}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} = 1157526 \text{ Toiſes.}$$

Or poſons $\frac{e}{a} = \tang \omega$, de ſorte que $\omega = 45°, 7', 30''$ & nous aurons : $a \sin \omega^2 \cos \omega = 1157526$, d'où nous tirons :

le demi-axe de la Terre $a = 3266892$ Toiſes

le demi-diametre de l'équateur $e = 3281168$ Toiſes.

Or *Newton*, quoiqu'il ait établi le même rapport entre l'axe & le diametre de l'équateur, donne au demi-axe 3262166 toiſes, & au demi-diametre de l'équateur 3276433 toiſes. La raiſon de cette difference eſt, que j'ai ſuppoſé ici le degré meſuré en France plus grand que *Newton*. Maintenant ayant découvert la véritable grandeur de l'axe & du diametre de la terre, on pourra à chaque élévation du pole déterminer la grandeur du degré du méridien. Car, poſant Φ pour la latitude au milieu du degré, la grandeur de ce degré ſera.

$$57142 \,(1 - 0{,}00654082 \cos 2\Phi)$$

14. Je remarque ici encore, que ſi l'on omettoit entierement le degré de Frauce, les trois autres feroient admirablement bien d'accord entr'eux : on n'auroit qu'à ſuppoſer à chacun une erreur de 19 toiſes, dont les degrés du Pérou & de Laponie devroient être augmentés, ou celui du Cap diminué. De là réſulteroit une plus grande difference entre l'axe & le diamètre de l'Equateur, tout comme on a déjà remarqué avant que les meſures au Cap ayent été connuës. Mais alors, ſuppoſant $p = 19$, $q = -19$ & $s = 19$ on trouveroit $r = 169$ toiſes, dont le degré de France devroit être augmenté ; dans ce cas la

cor-

correction à faire sur le degré de Laponie devroit être positive, au lieu que je l'ai supposée négative cy-devant; ce qui est une marque bien seure de la justesse de cette mesure. Or, soit qu'on rejette la mesure du degré de France ou non, il faut toujours supposer q négatif, d'où l'on doit conclure, que le degré mesuré au Cap est marqué trop grand. On voit aussi que la mesure faite à Quito est très juste, & qu'on ne lui sauroit supposer une erreur plus grande que de 20 toises, de quelque maniere qu'on se prenne pour mettre d'accord ces quatre mesures. Pour le degré mesuré en Laponie, il faut aussi remarquer qu'on y a negligé la réfraction des étoiles près du zenith, dont on a tenu compte dans les autres mesures. Or, si l'on y apporte cette petite correction, on trouve que le degré de Laponie se réduit de 57438 à 57422 toises; ce qui s'approche d'avantage de la correction précedente, où j'ai supposé ce degré de 57395 toises; & l'erreur ne seroit que de 27 toises, au lieu de 43.

15. Cependant je ne détermine rien de précis sur la figure de la terre, puisqu'on a encore lieu de douter, si on la peut regarder comme un spheroïde elliptique parfait, dont les deux moitiés de part & d'autre de l'équateur soient égales & semblables: quoique, quelqu'autre hypothese qu'on fasse, on soit obligé de reconnoitre quelques petites erreurs dans les Observations, & surtout dans celle de France. Mes recherches rouleront sur la surface d'un spheroïde elliptique parfait en général, dont le demi-axe soit $= a$, & le demi-diametre de l'équateur $= e$, entre lesquels je supposerai la difference fort petite. Or, pour abréger les formules trouvées cy-dessus, je poserai:

$$\frac{ee - aa}{ee + aa} = \delta \quad \& \quad \frac{2aaee\sqrt{2}}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} = c$$

où il suffit de remarquer, que si l'on en veut faire l'application à la Terre, les valeurs de ces deux lettres seront assés exactement.

$$\delta = 0,00436055 \quad \& \quad c = 3273980 \text{ toises.}$$

 Alors

Alors ce que j'ai trouvé se réduit à

$Mm = \frac{c\,\delta\,\Phi}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\Phi)^{+\frac{3}{2}}}$ & en intégrant par approximation.

$$EM = c\left((1+\tfrac{15}{16}\delta\delta)\Phi - \tfrac{3}{4}\delta \operatorname{fin} 2\Phi + \tfrac{15}{64}\delta\delta \operatorname{fin} 4\Phi\right).$$

XVI. Je regarde ici comme connuë la latitude du point M, ou l'angle ENM, que je nomme $= \Phi$: & de là on trouve le plus aisément la longueur de l'arc EM : d'où l'on voit que posant $\Phi = 90°$, ou $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, posant π pour le nombre 3,14159265 &c. le quart de l'ellipse sera $EMA = \frac{1}{2}\pi(1+\frac{15}{16}\delta\delta)c$. Ensuite en employant ces abbréviations on aura le rayon osculateur du Méridien au point M ou $MO = \frac{c}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$. Par la même latitude du point M $= \Phi$, on connoitra aussi d'abord sa distance $MQ = CP$ à l'axe, ayant $\frac{CP^3}{MO} = \frac{e^4}{aa}\operatorname{cof}\Phi^3$, & partant $CP = \frac{\operatorname{cof}\Phi}{\sqrt{(1+\delta \operatorname{cof} 2\Phi)}}\sqrt[3]{\frac{ce^4}{aa}} = \frac{ee\sqrt{2}}{\sqrt{(aa+ee)}}\cdot\frac{\operatorname{cof}\Phi}{\sqrt{(1+\delta \operatorname{cof} 2\Phi)}}$, & de même $PM = CQ = \frac{aa\sqrt{2}}{\sqrt{(aa+ee)}}\cdot\frac{\operatorname{fin}\Phi}{\sqrt{(1+\delta \operatorname{cof} 2\Phi)}}$. Or pour la Terre nous venons de trouver $\frac{e}{a} = \frac{230}{229}$; & $a = 3266892$ toises & $e = 3281168$ toises. Ou, en employant les seules lettres δ & c, on a $a = \frac{c}{(1+\delta)\sqrt{(1-\delta)}}$; $e = \frac{c}{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta)}}$, donc $CP = MQ = \frac{c}{1\cdot\delta}\cdot\frac{\operatorname{cof}\Phi}{\sqrt{(1+\delta \operatorname{cf} 2\Phi)}}$ & $PM = CQ = \frac{c}{1+\delta}\cdot\frac{\operatorname{fin}\Phi}{\sqrt{(1+\delta \operatorname{cof} 2\Phi)}}$. PRO-

PROBLEME I.

17. *Ayant observé l'élévation du pole en deux lieux* M *&* M′ *situés sous le même méridien, déterminer la grandeur de l'arc du méridien* MM′ *compris entre ces deux lieux.*

SOLUTION.

Soit Φ l'élévation du pole en M, & ψ en M′: & puisque ces deux lieux sont situés sous le meme méridien, il est evident que l'arc du méridien MM′ compris entr'eux est le chemin le plus court, qui méne d'un lieu à l'autre. Donc, introduisant les lettres c & δ, qui déterminent l'espece & la grandeur du Spheroïde elliptique, la grandeur de l'arc MM′ sera exprimée en sorte

$$MM' = c\left(\left(1 + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4}\delta\delta\right)(\psi - \Phi) - \tfrac{3}{4}\delta(\sin 2\psi - \sin 2\Phi) + \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{4}\delta\delta(\sin 4\psi - \sin 4\Phi)\right)$$

en négligeant les termes affectés par le cube & les plus hautes puissances de δ. Mais en tout cas il seroit aisé de pousser l'approximation plus loin, & même à l'infini. On pourra aussi assigner la situation de chaque endroit par rapport à l'axe & à l'équateur, & cela exactement sans approximation; car on aura

$$CQ = \frac{c \sin \Phi}{(1+\delta)\sqrt{(1+\delta \cos 2\Phi)}}; \quad QM = \frac{c \cos \Phi}{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta \cos 2\Phi)}}$$

$$CQ' = \frac{c \sin \psi}{(1+\delta)\sqrt{(1+\delta \cos 2\psi)}}; \quad Q'M' = \frac{c \cos \psi}{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta \cos 2\psi)}}$$

& outre cela les rayons osculateurs seront

$$\text{en M} = \frac{c}{(1+\delta \cos 2\Phi)^{\frac{3}{2}}} \;\&\; \text{en M}' = \frac{c}{(1+\delta \cos 2\psi)^{\frac{3}{2}}}$$

& ces déterminations renferment tout ce qu'on peut demander par rapport à ces deux lieux.

SCHOLIE.

18. Je me propose de considérer deux points quelconques sur la surface de la Terre, en cherchant tant leur distance entr'eux, que leur situation par rapport au Méridien. Or le cas le plus simple est, lorsque ces deux points sont situés sous le même Méridien, par lequel j'ai commencé mes recherches, puisqu'il est évident que l'arc du Méridien compris entre ces deux points est en même tems le chemin le plus court, qui conduit de l'un à l'autre. Mais, lorsque les deux points ne sont pas au même Méridien, il faut employer la méthode des plus grands & plus petits pour déterminer le chemin le plus court entr'eux: & j'entreprendrai cette recherche dans le problème suivant.

PROBLEME II.

Fig. 2. 19. *Connoissant la Latitude de deux lieux* L & M *avec leur différence en Longitude, trouver le chemin le plus court sur la surface de la Terre* LM, *qui méne de l'un à l'autre.*

SOLUTION.

Qu'on méne par l'un & l'autre de ces points L & M les Méridiens ALE & AMR, & l'angle que ces deux Méridiens forment au pole A mesurera la différence en longitude, laquelle étant donnée posons

la difference en Longitude ou l'angle LAM $= \omega$
la Latitude du Lieu L $= \lambda$
& la Latitude du Lieu M $= \phi$

ce qui sont les trois quantités données outre la grandeur & la figure de la Terre. Soit maintenant la ligne LM le chemin le plus court entre les points L & M, & qu'on la prolonge infiniment peu en m suivant sa direction en m; qu'on méne par ce point m le Méridien infiniment proche Amr, sur lequel on prenne $A\mu = AM$, de sorte que la Latitude

tude en μ soit la même qu'en M, savoir $= \Phi$, & la Latitude en m sera $= \Phi + d\Phi$, donc l'élément du Méridien entre m & μ sera $m\mu = \frac{c\,d\Phi}{(1+\delta\cos 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$. De plus on aura l'angle élémentaire MA$\mu = d\omega$, qui est égal à l'angle, que les lignes perpendiculaires tirées des points M & μ à l'axe de la Terre comprendront entr'elles. Or ces lignes perpendiculaires représentées dans la premiere figure par MQ sont $= \frac{c\cos\Phi}{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta\cos 2\Phi)}}$; d'où l'on tire l'élément M$\mu = \frac{c\,d\omega\cos\Phi}{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta\cos 2\Phi)}}$; & partant l'élément du chemin LM sera

$$Mm = c\sqrt{\left(\frac{d\Phi^2}{(1+\delta\cos 2\Phi)^3} + \frac{d\omega^2\cos\Phi^2}{(1-\delta)^2(1+\delta\cos 2\Phi)}\right)}$$

dont l'intégrale doit être un plus petit. Posons $d\Phi = p\,d\omega$ pour rendre un *minimum* cette formule intégrale

$$\int d\omega\sqrt{\left(\frac{pp}{(1+\delta\cos 2\Phi)^3} + \frac{\cos\Phi^2}{(1-\delta)^2(1+\delta\cos 2\Phi)}\right)}.$$

Posons $\sqrt{\left(\frac{pp}{(1+\delta\cos 2\Phi)^3} + \frac{\cos\Phi^2}{(1-\delta)^2(1+\delta\cos 2\Phi)}\right)} = V$, & j'ai démontré que si le differentiel de V est exprimé en sorte $dV = M\,d\omega + N\,d\Phi + P\,dp$, l'équation qui renferme le *minimum* est exprimée en sorte $o = N - \frac{dP}{d\omega}$, ou puisque dans ce cas $M = o$, cette équation se réduit à cette forme : $V - Pp = \text{Const.}$

Or

Or la différentiation de V nous donne

$$P = \frac{p}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^3 V} \text{ d'où nous tirons}$$

$$VV - \frac{pp}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^3} = \frac{\operatorname{cof}\phi^2}{(1-\delta)^2(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)} = \frac{V}{\alpha}$$

& partant prenant les quarrés, notre équation deviendra

$$\frac{\alpha\alpha \operatorname{cof}\phi^4}{(1-\delta)^4(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^2} = \frac{pp}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^3} + \frac{\operatorname{cof}\phi^2}{(1-\delta)^2(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)}$$

donc l'élément du chemin le plus court $Mm = \frac{\alpha c\, d\omega \operatorname{cof}\phi^2}{(1-\delta)^2(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)}$

Or mettant pour p sa valeur $\frac{d\phi}{d\omega}$ nous aurons

$$\frac{d\omega^2 \operatorname{cof}\phi^2 (\alpha\alpha \operatorname{cof}\phi^2 - (1-\delta)^2(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi))}{(1-\delta)^4(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^2} = \frac{d\phi^2}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^3}$$

d'où nous tirons:

$$d\omega = \frac{(1-\delta)^2\, d\phi}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cof}\phi \sqrt{(\alpha\alpha \operatorname{cof}\phi^2 - (1-\delta)^2(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi))}}$$

$$\& Mm = \frac{\alpha c\, d\phi \operatorname{cof}\phi}{(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\alpha\alpha \operatorname{cof}\phi^2 - (1-\delta)^2(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi))}}$$

Mais, avant que d'intégrer ces formules, on en peut déjà déterminer l'angle, AMm, que fait l'arc LM avec le Méridien AM, car on aura

$$\operatorname{fin} AMm = \frac{M\mu}{Mm} = \frac{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta \operatorname{cof} 2\phi)}}{\alpha \operatorname{cof}\phi}.$$

D'où posant $\phi = \lambda$ on aura l'angle ALM, de sorte que

$$\operatorname{fin} ALM = \frac{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta \operatorname{cof} 2\lambda)}}{\alpha \operatorname{cof}\lambda}.$$

Posons

Posons cet angle $ALM = \zeta$, pour l'introduire dans le calcul au lieu de la constante α, & nous aurons

$$\alpha = \frac{(1-\delta)\sqrt{(1+\delta \operatorname{cos} 2\lambda)}}{\operatorname{sin}\zeta \operatorname{cos}\lambda}$$

Cette valeur étant substituée donne

$$\operatorname{sin} AMm = \frac{\operatorname{sin}\zeta \operatorname{cos}\lambda \sqrt{(1+\delta \operatorname{cos} 2\Phi)}}{\operatorname{cos}\Phi \sqrt{(1+\delta \operatorname{cos} 2\lambda)}}. \quad \&$$

$$d\omega = \frac{(1-\delta)\, d\Phi \operatorname{sin}\zeta \operatorname{cos}\lambda}{(1+\delta \operatorname{cos} 2\Phi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cs}\Phi \sqrt{(\operatorname{cs}\Phi^2(1+\delta \operatorname{cs} 2\lambda) - \operatorname{sn}\zeta^2 \operatorname{cs}\lambda^2 (1+\delta \operatorname{cs} 2\Phi))}}$$

$$Mm = \frac{c\, d\Phi \operatorname{cos}\Phi \sqrt{(1+\delta \operatorname{cos} 2\lambda)}}{(1+\delta \operatorname{cos} 2\Phi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\operatorname{cos}\Phi^2 (1+\delta \operatorname{cs} 2\lambda) - \operatorname{sn}\zeta^2 \operatorname{cs}\lambda^2 (1+\delta \operatorname{cs} 2\Phi))}}$$

Pour intégrer ces formules, il en faut séparer les particules, qui dépendent de la petite fraction δ, & quand on néglige les termes, qui renfermeroient le quarré, ou plus hautes puissances de δ, on aura

$$d\omega =$$

$$\frac{d\Phi \operatorname{sin}\zeta \operatorname{cos}\lambda}{\operatorname{cs}\Phi \sqrt{(\operatorname{cs}\Phi^2 - \operatorname{sin}\zeta^2 \operatorname{cs}\lambda^2)}} - \frac{\delta\, d\Phi \operatorname{sin}\zeta \operatorname{cos}\lambda \operatorname{cos}\Phi}{\sqrt{(\operatorname{cs}\Phi^2 - \operatorname{sn}\zeta^2 \operatorname{cs}\lambda^2)}} - \frac{\delta\, d\Phi \operatorname{sn}\zeta \operatorname{cs}\zeta^2 \operatorname{cs}\lambda^3 \operatorname{cs}\Phi}{(\operatorname{cs}\Phi^2 - \operatorname{sin}\zeta^2 \operatorname{cs}\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dont l'intégrale se trouve comme il suit :

$$\omega = A \operatorname{sin}. \frac{\operatorname{sin}\zeta \operatorname{cos}\lambda \operatorname{sin}\Phi}{\operatorname{cos}\Phi \sqrt{(1 - \operatorname{sin}\zeta^2 \operatorname{cos}\lambda^2)}} - \delta \operatorname{sn}\zeta \operatorname{cs}\lambda\, A\operatorname{sn}. \frac{\operatorname{sin}\Phi}{\sqrt{(1-\operatorname{sn}\zeta^2 \operatorname{cs}\lambda^2)}}$$

$$- \frac{\delta \operatorname{sin}\zeta \operatorname{cos}\zeta^2 \operatorname{cos}\lambda^3 \operatorname{sin}\Phi}{(1 - \operatorname{sin}\zeta^2 \operatorname{cos}\lambda^2) \sqrt{(\operatorname{cos}\Phi^2 - \operatorname{sin}\zeta^2 \operatorname{cos}\lambda^2)}} + \text{Const.}$$

Où la constante se doit déterminer en sorte, que posant $\Phi = \lambda$ l'angle ω, ou la difference en longitude évanouïsse.

Par conséquent on aura :

$$\nu = A\,\mathrm{fin.}\frac{\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cof}\,\lambda\,\mathrm{fin}\,\Phi}{\mathrm{cof}\,\Phi\,\sqrt{(1-\mathrm{fin}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda^2)}} - A\,\mathrm{fin}\frac{\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{fin}\,\lambda}{\sqrt{(1-\mathrm{fin}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda^2)}}$$

$$-\delta\,\mathrm{fn}\,\zeta\,\mathrm{cf}\,\lambda\,A\,\mathrm{fn.}\frac{\mathrm{fin}\,\Phi}{\sqrt{(1-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)}} + \delta\,\mathrm{fn}\,\zeta\,\mathrm{cf}\,\lambda\,A\,\mathrm{fn}\frac{\mathrm{fin}\,\lambda}{\sqrt{(1-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)}}$$

$$-\frac{\delta\,\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cof}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda)^3\,\mathrm{fin}\,\Phi}{(1-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)\sqrt{(\mathrm{cf}\,\Phi^2-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)}} + \frac{\delta\,\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cof}\,\zeta\,\mathrm{fin}\,\lambda\,\mathrm{cof}\,\lambda^2}{1-\mathrm{fin}\,\zeta^2\,\mathrm{uof}\,\lambda^2}.$$

Opérons de la même maniere pour trouver la longueur du chemin LM, & puisque nous aurons

$$\mathrm{M}\,m =$$

$$\frac{c\,d\Phi\,\mathrm{fin}\,\Phi}{\sqrt{(\mathrm{cf}\,\Phi^2-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)}}\left(1+\tfrac{3}{2}\delta+\delta\,\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2-3\,\delta\,\mathrm{cf}\,\Phi^2-\frac{\delta\,\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^4}{\mathrm{cf}\,\Phi^2-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2}\right)$$

l'intégrale avec la juste constante se trouvera :

$$\mathrm{L\,M} =$$

$$c(1-\tfrac{1}{2}\delta\,\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)A\,\mathrm{fn.}\frac{\mathrm{fin}\,\Phi}{\sqrt{(1-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)}} - c(1-\tfrac{1}{2}\delta\,\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)A\,\mathrm{fn}\frac{\mathrm{fin}\,\lambda}{\sqrt{(1-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\lambda^2)}}$$

$$-\tfrac{3}{2}\,\delta c\,\mathrm{fin}\,\Phi\sqrt{(\mathrm{cof}\,\Phi^2-\mathrm{fin}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda^2)} + \tfrac{3}{2}\,\delta c\,\mathrm{cof}\,\zeta\,\mathrm{fin}\,\lambda\,\mathrm{cof}\,\lambda$$

$$-\frac{\delta c\,\mathrm{fin}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda^4\,\mathrm{fin}\,\Phi}{(1-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda^2)\sqrt{(\mathrm{cf}\,\Phi^2-\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda^2)}} + \frac{\delta c\,\mathrm{fn}\,\zeta^2\,\mathrm{cf}\,\zeta\,\mathrm{fn}\,\lambda\,\mathrm{cf}\,\lambda^3}{1-\mathrm{fin}\,\zeta^2\,\mathrm{cof}\,\lambda^2}$$

Ainsi connoissant les deux élévations de pole λ & Φ en L & M, avec l'angle ALM $=\zeta$, que fait la route LM avec le méridien en L, on pourra déterminer tant l'angle AMm, que la route fait en M avec la méridienne, que la difference en longitude, ou l'angle LAM, & la longueur de la route même LM.

COROLL. I.

20. Si nous introduisons aussi l'angle AM$m=\theta$, nous aurons

$$\mathrm{fin}\,\theta = \frac{\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cof}\,\lambda\,\sqrt{(1+\delta\,\mathrm{cof}\,2\,\Phi)}}{\mathrm{cof}\,\Phi\,\sqrt{(1+\delta\,\mathrm{cof}\,2\,\lambda)}}$$

&

& cette valeur a lieu en général, puisqu'aucune approximation n'eft encore employée. Mais, fi l'on en veut faire ufage, on aura

$$\sin\theta = \frac{\sin\zeta\cos\lambda}{\cos\phi}\left(1 - \tfrac{1}{2}\delta\cos 2\lambda + \tfrac{1}{2}\delta\cos 2\phi\right) \text{ ou bien}$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\zeta\cos\lambda}{\cos\phi}\left(1 - \delta\cos\lambda^2 + \delta\cos\phi^2\right)$$

COROLL. 2.

21. Pour abréger le calcul des quantités approchées de ω & de LM, on peut chercher un angle α qui foit:

$$\alpha = A\sin\frac{\sin\zeta\cos\lambda\sin\phi}{\cos\phi\sqrt{(1-\sin\zeta^2\cos\lambda^2)}} - A\sin\frac{\sin\zeta\sin\lambda}{\sqrt{(1-\sin\zeta^2\cos\lambda^2)}}$$

& alors on obtiendra

$$\omega = \alpha - \delta\sin\zeta\cos\lambda\, A\sin\frac{\sin\alpha\cos\phi}{\sin\zeta} - \frac{\delta\sin\alpha\cos\zeta\cos\lambda^2\cos\phi}{\sqrt{(\cos\phi^2-\sin\zeta^2\cos\lambda^2)}} \;\&$$

$$LM = c\left(1-\tfrac{1}{2}\delta\sin\zeta^2\cos\lambda^2\right)A\sin\frac{\sin\alpha\cos\phi}{\sin\zeta} - \frac{\delta c\sin\alpha\sin\zeta\cos\zeta\cos\lambda^3\cos\phi}{\sqrt{(\cos\phi^2-\sin\zeta^2\cos\lambda^2)}}$$
$$-\tfrac{3}{2}\delta c\sin\phi\sqrt{(\cos\phi^2-\sin\zeta^2\cos\lambda^2)} + \tfrac{3}{2}\delta c\cos\zeta\sin\lambda\cos\lambda.$$

COROLL. 3.

22. S'il étoit $\delta = 0$, on tireroit de ces formules toutes les régles connuës de la Trigonométrie Sphérique; mais ayant déjà amplement traité ce fujet, je ne m'y arrêterai point. Cependant on remarquera que les trois élémens ζ, λ, & ϕ étant donnés, on en peut déterminer le quatrième θ fans intégration & approximation, tandis que les deux derniers ω & LM ne fçauroient être affignés fans ces fubfides.

SCHOLIE.

23. Voilà donc les formules, qui renferment en général les principes de la Trigonométrie Sphéroïdique, ayant trouvé la réfolu-

tion

tion du triangle LAM. Car, quoique je ſuppoſe un de ſes angles au pole A, c'eſt une limitation que la nature du problème ſemble abſolument exiger; & ſi aucun des trois angles ne tomboit dans l'un des poles, il faudroit tirer par chacun des méridiens, & réduire par là le cas à la réſolution de deux ou trois tels triangles, que je viens de conſidérer. Puisqu'une ſurface ſpheroïdique ne s'eſt pas ſemblable par tout, pour fixer la ſituation d'un point quelconque, il en faut ſavoir ſon lieu par rapport aux poles du ſpheroïde, qui ſe détermine le plus commodément par la latitude ou l'élevation du pole: & c'eſt dans cette vuë, que pour les points L & M j'ai introduit dans le calcul les angles λ & ϕ, qui en marquent les latitudes. Or de là on eſt en état d'aſſigner les arcs des méridiens mêmes AL & AM, qui donnent les diſtances abſoluës de ces points au pole A. Cependant ces diſtances n'influënt pas immédiatement ſur la ſolution du problème, & il ſuffit de connoitre les latitudes des points. Enſuite pour les côtés, ou les lignes les plus courtes qu'on peut tirer d'un point à un autre quelconque, la principale détermination, à laquelle il faut reflêchir, eſt l'angle qu'une telle ligne fait avec les méridiens. Par ces raiſons ayant deux points quelconques L & M ſur une ſurface ſpheroïdique, pour chercher le chemin le plus court LM qui méne de l'un à l'autre, il faut d'abord avoir égard à la latitude de chacun de ces deux points, comme dans le calcul précédent l'angle λ marque celle du point L, & ϕ celle du point M. Depuis, après avoir tiré par les points L & M les méridiens AL & AM, il s'agit de ſavoir premièrement l'angle $LAM = \omega$, qui marque la difference en longitude des deux lieux propoſés L & M, & enſuite les angles $ALM = \zeta$ & $AMm = \theta$, que la route la plus courte fait avec les méridiens en L & M. Et enfin on aura à déterminer la longueur même du chemin le plus court LM, de ſorte que nous ayons en tout à conſidérer ſix élémens λ, ϕ, ζ, θ, ω, & LM, qui ont, comme dans la Trigonométrie ordinaire un tel rapport entr'eux, qu'en connoiſſant trois, on puiſſe déterminer les trois autres. Dans la ſolution que je viens de donner, j'ai conſidéré les trois élémens λ, ϕ, & ζ, comme donnés,

donnés, desquels on trouve aisément le quatrième θ, par l'équation $\sin\theta = \frac{\sin\zeta \cos\lambda \sqrt{(1+\delta\cos 2\phi)}}{\cos\phi \sqrt{(1+\delta\cos 2\lambda)}}$, de sorte que la solution seroit toujours la même, quelques autres trois de ces quatre élémens λ, ϕ, ζ, & θ, fussent donnés, puisque le quatrième en seroit d'abord connu. Mais il n'en est pas de même, si l'un des deux autres ω, & LM, se trouvoit parmi les connuës; car puisque les formules, qui expriment les valeurs de ω & LM sont si compliquées, & qu'elles n'ont lieu que lorsque la fraction δ est extrèmement petite, on n'en sauroit éliminer les élémens inconnus. Cependant dans le cas ou δ est extrèmement petite, on n'auroit qu'à regarder le problème comme de la Trigonométrie ordinaire, & ensuite chercher les corrections, qui résultent de l'aberration de la figure sphèrique, par la méthode ordinaire des approximations. Mais il semble que l'évolution d'un tel cas ne sera presque jamais nécessaire, vû qu'on peut supposer que tant les latitudes des points L & M, que les angles ζ & θ que la ligne tirée LM fait avec les méridiens en L & M, soient connus étant déterminables par les opérations les plus aisées. Or le plus grand avantage, qu'on puisse tirer de cette solution, est sans doute une nouvelle méthode, qu'elle fournit pour découvrir la veritable ellipticité de la figure de la terre, ou le rapport entre son axe & le diamétre de son équateur: & cela se pourra exécuter, sans qu'on ait besoin de mesurer actuellement quelque ligne, qu'on aura tirée sur la surface de la terre; ce que je m'en vais expliquer plus amplement dans le problème suivant.

PROBLEME III.

24. *Déterminer le rapport du diamétre de l'équateur à l'axe de la terre sans le secours des mesures actuelles de quelques degrés de méridien, par une maniere qui se puisse exécuter dans une seule contrée de la terre.*

SOLU-

SOLUTION.

Pour connoitre la figure de la Terre, on a regardé jusqu'ici comme le ſeul moyen, de meſurer ſous des latitudes fort differentes la grandeur d'un degré du méridien; afin que de leur inégalité on pût conclure celle qui ſe trouve entre l'axe de la Terre & le diamétre de ſon équateur. Mais la méthode que je m'en vai propoſer ici, ne demande que des opérations, qu'on peut faire dans une contrée aſſes bornée, ou dans un pays d'une étenduë mediocre, & cela ſans qu'on ait beſoin de meſurer géométriquement quelque ligne tirée ſur la ſurface de la Terre. Suppoſons donc que le point L ſe trouve à un bout d'une grande plaine, & d'abord il faut qu'on y obſerve la hauteur du pole, & qu'on y tire avec la derniere préciſion la ligne méridienne. Pour l'élévation abſoluë du pole, il ſuffit qu'on la ſache à une minute près; mais il eſt néceſſaire, qu'on y obſerve très exactement la diſtance de quelques étoiles fixes au zenith au tems de leur culmination. Soit donc λ la hauteur du pole au point L. Qu'on parte enſuite du point L ſelon une route, qui faſſe un angle oblique avec la méridienne, mais qu'on meſure le plus exactement qu'il eſt poſſible cet angle, que fait le commencement de la route avec la méridienne en L. Qu'on pourſuive après la même route, en fixant perpendiculairement des piques en ſorte qu'elles paroiſſent toutes diſpoſées en ligne droite; & qu'on continuë cette ligne, qui ſemblera droite, auſſi loin que le terrain le permettra, ayant toujours en vuë que la route ainſi décrite convienne avec celle que formeroit une corde tenduë ſur la Terre. Il feroit bon, qu'on pût pouſſer cette opération par une étenduë de pluſieurs milles d'Allemagne. De cette maniere on ſera aſſeuré avoir tracé la ligne la plus courte ſur la ſurface de la Terre, & on n'aura pas beſoin d'en meſurer la longueur. Soit donc ζ l'angle que fait cette route en L avec la Méridienne; & ayant pourſuivi cette route fort loin jusqu'en M, qu'on y obſerve le plus ſoigneuſément les diſtances des mêmes étoiles fixes au zenith de M à leur paſſage par le Méridien, afin qu'on en puiſſe exacte-

exactement conclure la difference des latitudes en L & M, ce qui se pourra faire à quelques secondes près ; soit donc ϕ l'élévation du Pole en M, & quoique sa quantité absoluë ne soit peut-être pas exacte au dernier degré, que du moins la difference entre λ & ϕ le soit autant qu'il est possible. Enfin, on doit aussi tirer en M la méridienne, & mesurer l'angle A M m, que fait avec elle la continuation de la même route L M, & on nommera cet angle $= \theta$: ce sont toutes les opérations qu'on aura à faire pour déterminer le rapport entre le demi-axe $= a$ & le démi-diamètre de l'équateur $= e$. Car posant $\frac{ee - aa}{ee + aa} = \delta$, de sorte que $\frac{aa}{ee} = \frac{1 - \delta}{1 + \delta}$ & $\frac{a}{e} = \frac{2 - \delta}{2 + \delta}$ à peu près, ou $\frac{e}{a} =$ $1 + \delta$, nous n'aurons qu'à résoudre cette équation :

$$\sin\theta \cos\phi \sqrt{(1 + \delta \cos 2\lambda)} = \sin\zeta \cos\lambda \sqrt{(1 + \delta \cos 2\phi)}$$

d'où les quatre angles λ, ϕ, ζ & θ étant donnés on tire

$$\delta = \frac{\sin\zeta^2 \cos\lambda^2 - \sin\theta^2 \cos\phi^2}{\sin\theta^2 \cos\phi^2 \cos 2\lambda - \sin\zeta^2 \cos\lambda^2 \cos 2\phi}$$

& partant :

$$\frac{ee}{aa} = \frac{\sin\zeta^2 \cos\lambda^2 \sin\phi^2 - \sin\theta^2 \cos\phi^2 \sin\lambda^2}{\sin\theta^2 \cos\phi^2 \cos\lambda^2 - \sin\zeta^2 \cos\lambda^2 \cos\phi^2}$$

ou bien : $$\frac{ee}{aa} = 1 + \frac{\sin\zeta^2 \cos\lambda^2 - \sin\theta^2 \cos\phi^2}{\cos\lambda^2 \cos\phi^2 \, (\sin\theta^2 - \sin\zeta^2)}$$

Ayant donc exactement observé & mesuré les quatre angles λ, ϕ, ζ, & θ, on en pourra conclure le rapport entre l'axe de la Terre & le diametre de son équateur, par le moyen de cette formule que je viens de découvrir ; sur laquelle il faut remarquer, qu'elle est exacte, & ne demande aucune approximation, à laquelle il faut nécessairement recourir en employant la méthode ordinaire. Mais, pour rendre cette conclusion d'autant plus seure, il faut choisir une telle contrée sur la Terre

Terre, & une telle direction de la route qu'on trace, que de petites erreurs commises dans la mesure des angles influent le moins qu'il soit possible sur la conclusion. Or il est évident que, plus le dénominateur $\cos\lambda^2 \cdot \cos\phi^2 \cdot (\sin\theta^2 - \sin\zeta^2)$ sera grand, plus aussi deviendra grand le numérateur, ou la difference entre $\sin\zeta^2 \cos\lambda^2$ & $\sin\theta^2 \cos\phi^2$, ce qui est sans doute le cas le plus favorable, puisqu'alors une petite erreur commise dans la mesure des angles influë moins sur la valeur du numérateur, d'où dépend la justesse de la conclusion.

REMARQUE.

25. Après avoir observé les deux hauteurs du pole en L & M avec l'angle $ALM = \zeta$, si la Terre étoit sphérique, l'angle $AMm = \theta$ seroit tel qu'il fût $\sin\theta = \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi}$: donc l'ellipticité de la Terre ne pourra être concluë qu'entant que cet angle se trouvera, ou plus grand, ou plus petit. Or à cause de l'ellipticité nous avons

$$\sin\theta = \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi} \sqrt{\frac{1 + \delta\cos 2\phi}{1 + \delta\cos 2\lambda}}$$

ou bien à cause de λ très petit :

$$\sin\theta = \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi} (1 + \delta\cos\phi^2 - \delta\cos\lambda^2)$$

Ici il est évident que la difference entre les latitudes λ & ϕ doit être sensible ; car si elle étoit trop petite, la moindre erreur commise dans leur Observation en produiroit une très considérable dans la conclusion. Il faut donc que la route LM ne soit pas perpendiculaire aux méridiennes, puisqu'alors en avançant sur cette route, on ne changeroit pas sensiblement de latitude. On doit principalement ici avoir égard à la longueur de la route LM, quoiqu'il ne soit pas nécessaire de la mesurer; car il est avantageux qu'on puisse parvenir à une conclusion assés seure, sans qu'on soit obligé de poursuivre cette route trop loin. Soit donc s la longueur de la route LM, ou soit plûtot s l'angle, auquel

quel répond sur une surface sphèrique égale à celle de la Terre un arc égal à ce chemin, & puisque cet angle est assés petit, on aura à peu près $\phi = \lambda + s \operatorname{cos}\zeta$; d'où l'on voit que $\operatorname{cos}\zeta$ ne doit pas être trop petit, & partant l'angle ζ ne point trop approcher d'un droit. Mais il faut également que cet angle ζ ne soit pas trop petit, puisqu'alors la différence entre les angles ζ & θ deviendroit trop petite, ce qui rendroit la conclusion également incertaine. Car ayant $\operatorname{cos}\phi = \operatorname{cos}\lambda - s \operatorname{cos}\zeta \operatorname{sin}\lambda$, à cause de s fort petit, on auroit :

$$\operatorname{sin}\ \theta = \frac{\operatorname{sin}\ \zeta}{1 - s \operatorname{cos}\zeta \operatorname{tang}\lambda} (1 - 2\delta s \operatorname{cos}\zeta \operatorname{sin}\lambda \operatorname{cos}\lambda)$$

d'où l'on voit, que pour que la différence $2\delta s \operatorname{cos}\zeta \operatorname{sin}\lambda \operatorname{cos}\lambda$ devienne sensible, la contrée LM ne doit pas être trop proche, ni du Pole, ni de l'Equateur.

EXEMPLE I.

26. Supposons que le lieu L se trouve à la latitude de 48° de sorte que $\lambda = 48°$, & que la route LM fasse avec la méridienne un angle $\zeta = 30°$; Qu'on ait continué cette route jusqu'à ce qu'on soit parvenu en M à la latitude de 48°, 52′, ce qui arrivera après avoir poussé la route par un espace de 15 miles d'Allemagne à peu près. Ayant donc $\phi = 48°, 52'$, si la terre étoit sphèrique, on trouveroit l'angle $AMm = \theta = 30°, 34', 15''$. Mais à cause de l'ellipticité de la terre, si nous supposons $\delta = \frac{1}{215}$, l'angle θ se trouvera plus petit de 8″, & nous aurons $\theta = 30°, 34', 7'$.

Mais si du même lieu L où $\lambda = 48°$, on étoit parti sous l'angle $ALM = \zeta = 60°$, jusqu'à ce qu'on fut arrivé à la latitude $\phi = 48°, 30'$, ce qui arriveroit aussi après avoir fait un chemin de 15 miles d'Allemagne environ ; dans l'hypothese de la Terre sphèrique on trouveroit l'angle $AMm = \theta = 60°, 59', 23''$. Mais dans l'hypothese de $\delta = \frac{1}{215}$ cet angle seroit $\theta = 60°, 59', 9''$, & partant de 14″ moindre. Ce cas sera donc préférable au précédent pour en connoitre l'ellipticité de la Terre.

 Suppo-

Suppoſons que partant du même lieu L où $\lambda = 48°$, la route L M ſoit telle que l'angle A L M $= \zeta = 80°$, & qu'après avoir fait un chemin de 15 miles environ, on parvienne en M à la latitude $\phi = 48°, 10'$. Alors dans l'hypotheſe de la terre ſphèrique on trouveroit l'angle A M $m = \theta = 81°, 6', 59''$: or dans l'hypotheſe de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{229}$, cet angle ſeroit $\theta = 81°, 6', 42''$, & partant de $17''$ moindre.

EXEMPLE 2.

27. Poſons que la contrée ſoit ſi grande, qu'on puiſſe continuer la route L M à la diſtance de 30 miles environ, & que la latitude du lieu L ſoit la même qu'auparavant ſavoir, $\lambda = 48°$. Suppoſons d'abord que l'angle de la route ſoit A L M $= \zeta = 30°$, & la latitude en M ſera $\phi = 49°, 44'$. Donc, ſi la terre étoit ſphèrique, l'angle A M m ſeroit $\theta = 31°, 10', 20''$; mais dans l'hypotheſe de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{229}$ cet angle ſera $\theta = 31°, 10', 4''$, & partant de $16''$ plus petit.

Mais en partant du même lieu L où $\lambda = 48°$, ſous l'angle A L M $= \zeta = 60°$, par un eſpace de 30 miles environ, jusqu'à ce qu'on parvienne à la latitude $\phi = 49°$, l'hypotheſe ſphèrique de la terre donneroit l'angle A M $m = \theta = 62°, 2', 27''$; mais l'hypotheſe de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{229}$ produiroit $\theta = 62°, 1', 58''$, la différence étant $29''$.

Or ſuppoſons que la route tracée L M faſſe avec la méridienne en L l'angle $\zeta = 80°$, & qu'àprès l'avoir continuée par 30 miles environ, on ſoit parvenu en M à la latitude $\phi = 48°, 21'$. Alors dans l'hypotheſe ſphèrique l'angle A M m ſeroit $\theta = 82°, 32', 53''$; or dans l'hypotheſe de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{229}$ cet angle ſera $\theta = 82°, 32', 11''$ de $42''$ moindre.

Puisque dans ce cas la différence en latitude eſt encore aſſés ſenſible, on pourra l'angle ζ plus approcher de $90°$: ſoit donc l'angle A L M $= \zeta = 85°$, & qu'après un chemin de 30 miles environ on

parvienne

parvienne en M, où la latitude ſoit $\phi = 48°, 10'$. Alors dans l'hypotheſe ſphérique l'angle AM*m* feroit $\theta = 88°, 3', 43''$, or dans l'hypotheſe de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{225}$ cet angle ſera $\theta = 88°, 2', 27''$, & partant de $76''$ moindre.

COROLLAIRE.

28. On voit par là, qu'à moins que la contrée LM ne ſoit fort proche de l'équateur, il eſt toujours avantageux de prendre l'angle HLM à peu près droit. On le pourra même faire tout à fait droit, mais alors le calcul deviendra un peu different de celui, que j'ai employé juſqu'ici, puiſqu'en pourſuivant la route LM, on approchera de plus en plus de l'équateur. Mais il faut bien remarquer, qu'on fait ici abſtraction de toute erreur, qui ſe pourroit trouver dans les hauteurs du Pole. Il vaudra donc la peine de déveloper ce cas particulièrement.

PROBLEME IV.

29. *Si en partant du lieu* L *on trace la route* LM *en ſorte, qu'elle ſoit perpendiculaire à la méridienne* ALE, *& qu'on continuë cette route en* M, *où l'on obſerve la hauteur du pole : trouver l'angle* AML, *que cette route fera avec la méridienne tirée par* M, *tant dans l'hypotheſe de la terre ſphérique, que dans l'hypotheſe de l'ellipticité exprimée par la fraction* δ. Fig. 3.

SOLUTION.

Soit λ la hauteur du Pole obſervée en L, & traçant la route LM perpendiculairement à la méridienne tirée en L, on y trouvera la hauteur du Pole de plus en plus petite. Car ſi dans l'hypotheſe de la terre ſphérique on continuoit l'arc LM, qu'il répondit à l'angle s, & qu'on nommât la hauteur du pole en M $= \phi$, on auroit par la trigonométrie ſphérique $\sin\phi = \sin\lambda \cos s$, & partant $\phi < \lambda$. Soit donc en général ϕ la hauteur du pole obſervée en M, & puiſque $\phi < \lambda$, poſons $\phi = \lambda - \omega$, de ſorte que ω ſoit un angle fort petit par rapport à λ, parce que nous ſuppoſons le lieu L aſſés éloigné de l'équateur, & la ligne LM fort petite.

Cela

Cela posé si la terre étoit sphérique, & que nous nommassions l'angle ALM $= \theta$, nous aurions à cause de $\zeta = 90°$:

$$\sin\theta = \frac{\cos\lambda}{\cos\phi} = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda\,\cos\omega + \sin\lambda\,\sin\omega}$$

& à cause de ω fort petit,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{(2\,\omega\sin\lambda\,\cos\lambda + \sin\lambda^2 - \omega^2\,\cos\lambda^2)}}{\cos\lambda + \omega\sin\lambda}$$

ou

$$\cos\theta = \left(\frac{1}{\cos\lambda} - \frac{\omega\sin\lambda}{\cos\lambda^2}\right)\left(\sqrt{2\,\omega\sin\lambda\cos\lambda} - \frac{\omega^2(\cos\lambda^2 - \sin\lambda^2)}{2\sqrt{2\,\omega\sin\lambda\cos\lambda}}\right)$$

d'où nous tirons :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\omega\sin 2\lambda}}{\cos\lambda} - \frac{\omega^2\,(2 - \cos 2\lambda)}{2\cos\lambda\sqrt{\omega\sin 2\lambda}}$$

Donc, puisque l'angle θ est à peu près droit, si nous posons $\theta = 90° - \mu$, à cause de $\cos\theta = \sin\mu = \mu - \frac{1}{6}\mu^3$, nous aurons

$$\mu = \frac{\sqrt{\omega\sin 2\lambda}}{\cos\lambda} - \frac{\omega^2\,(4 - \cos 2\lambda)}{6\cos\lambda\sqrt{\omega\sin 2\lambda}}.$$

Mais considérons à présent la terre comme un ellipsoïde, & ayant :

$$\sin\theta = \frac{\cos\lambda}{\cos\phi}\,(1 + \delta\cos\phi^2 - \delta\cos\lambda^2)$$

ou bien

$$\sin\theta = (1 - \omega\,\mathrm{tang}\,\lambda)\,(1 + 2\,\delta\,\omega\sin\lambda\,\cos\lambda)$$

Puisque l'angle θ est aussi à peu près droit, posons pour ce cas $\theta = 90° - \mu$ & nous trouverons

$$\mu = \frac{\sqrt{\omega\sin 2\lambda}}{\cos\lambda} - \frac{\omega^2\,(4 - \cos 2\lambda)}{6\cos\lambda\sqrt{\omega\sin 2\lambda}} - \frac{2\,\delta\,\omega\sin\lambda\,\cos\lambda^2}{\sqrt{\omega\sin 2\lambda}}.$$

D'où

D'où l'on voit que la difference entre la figure ſphérique & elliptique de la terre, produit dans l'angle AML $= \theta$ une difference qui monte à $\delta \cos \lambda \sqrt{\omega} \sin 2\lambda$, dont l'angle AML eſt plus grand dans l'hypotheſe de l'ellipſoïde applati, que dans l'hypotheſe ſphérique.

Mais, ſi la route ML eſt meſurée ſur la ſurface ſphérique par l'angle s, ayant $\sin \Phi = \sin \lambda \cos s = \sin \lambda \cos \omega - \cos \lambda \sin \omega$, on aura $\omega = \frac{1}{2} ss \operatorname{tang} \lambda$, & partant la dite difference ſera $= \delta s \sin \lambda \cos \lambda$.

COROLL. 1.

30. De là on voit que cette différence devient la plus grande ſous la latitude de 45°, la longueur de la route s demeurant la même. Or, ſi nous poſons $s = 2°$, $\lambda = 45°$, & $\delta = \frac{1}{229}$ cette différence ne ſe trouve que $\frac{1}{229} \cdot \frac{1}{2} s = 15\frac{2}{3}''$, ce qui eſt de beaucoup moins que dans le dernier cas du ſecond Exemple (27), où pour une route égale ayant pris l'angle $\zeta = 85°$, la différence s'eſt trouvée $76''$.

COROLL. 2.

31. Il n'eſt donc pas avantageux de faire l'angle ALM $= \zeta$ droit, quoique la difference devienne très ſenſible, ſi l'on approche cet angle tant de 90°, qu'il n'en différe plus ſenſiblement: puiſque dans le cas $\zeta = 85°$, la différence s'eſt trouvée de $76''$, tandis que faiſant l'angle ζ droit, elle ne monte qu'à environ $15''$.

COROLL. 3.

32. Il eſt donc fort important de déterminer l'angle ζ, ſuivant lequel, lorsqu'on produit la route LM jusqu'à une certaine diſtance, la différence entre les valeurs de l'angle θ, qui répondent tant à la figure ſphérique qu'elliptique de la terre, devienne la plus grande.

PROBLEME V.

Fig. 2. 33. *Trouver la direction de la route* LM, *qu'il faut choisir pour qu'après être parvenu en* M, *& y avoir observé la hauteur du pole, l'angle de la route avec la méridienne en* M *differe le plus qu'il soit possible dans les hypotheses de la sphéricité & ellipticité de la Terre.*

SOLUTION.

Soit la hauteur du pole en L $= \lambda$, l'angle de la route LM, qu'on cherche, ALM $= \zeta$, & la hauteur du pole en M $= \phi$. Or le principal, à quoi il faut ici réflêchir, est la longeur du chemin LM, afin qu'en la prenant à peu près la même, la différence entre la sphéricité & l'ellipticité de la terre devienne la plus sensible dans l'angle AMm. Que l'angle s marque la longueur de la route LM, si la terre étoit sphérique, & alors on aura par la trigonométrie spherique:

$$\sin\phi = \cos\zeta \cos\lambda \sin s + \sin\lambda \cos s$$

Soit donc cet angle ϕ la hauteur du Pole en M, où il faut bien remarquer, que lorsque la terre n'est pas sphérique, l'angle s ne se rapporte plus à la longueur de la route LM, où il n'en marquera qu'à peu près la grandeur.

Considérons maintenant la terre comme sphérique, & posons l'angle AM$m = \theta$, & nous avons vû qu'il y aura $\sin\theta = \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi}$.

Mais donnant à la terre une ellipticité exprimée par δ, cet angle AMm sera un peu plus petit; posons donc cet angle AM$m = \theta - \omega$, & nous aurons

$$\sin(\theta - \omega) = \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi} \left(1 - \delta(\cos\lambda^2 - \cos\phi^2)\right)$$

or cette équation se reduit à

$$\cos\omega - \cos\theta \sin\omega = 1 - \delta(\cos\lambda^2 - \cos\phi^2)$$

d'où

d'où l'on voit que l'angle ω étant fort petit, le cas ne sauroit être plus favorable, que lorsque $\theta = 90^\circ$, puisqu'alors, à cause de $\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega\omega$, & $\omega^2 = 2\delta(\cos\lambda^2 - \cos\Phi^2)$ la difference ω est déterminée par $\sqrt{\delta}$, & partant beaucoup plus considérable que si elle étoit proportionnelle à δ.

Posons donc $\theta = 90^\circ$, & il faut qu'il y ait: $\sin\zeta = \frac{\cos\Phi}{\cos\lambda}$, ou $\cos\Phi = \sin\zeta\cos\lambda$, donc $\sin\Phi = \sqrt{(1 - \sin\zeta^2\cos\lambda^2)}$. Or cette valeur étant substituée donne

$$1 - \sin\zeta^2 \cos\lambda^2 = \cos\zeta^2 \cos\lambda^2 \sin s^2 + 2\cos\zeta \sin\lambda \cos\lambda \sin s \cos s + \sin\lambda^2 \cos s^2$$

où

$$0 = (\cos\zeta \cos\lambda \cos s - \sin\lambda \sin s)^2 \text{ donc } \cos\zeta = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} s$$

& de là nous tirons:

$$\sin\Phi = \frac{\sin\lambda \sin s^2}{\cos s} + \sin\lambda \cos s = \frac{\sin\lambda}{\cos s}$$

Ayant donc établi la longueur de la route à peu près selon la nature de la contrée, en sorte que quinze miles d'Allemagne soient contées pour un degré: on aura d'abord l'angle ALM $= \zeta$, que la route doit faire avec la méridienne en l, par la formule $\cos\zeta = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} s$: & on parviendra sur cette route à un endroit M, où l'élévation du pole sera Φ, de sorte que $\sin\Phi = \frac{\sin\lambda}{\cos s}$.

Or étant parvenu à cette hauteur du Pole sur la route marquée LM, il est certain que si la terre étoit sphérique, on trouveroit la route perpendiculaire à la méridienne en M; ou bien l'angle θ seroit droit. Mais, dans l'hypothese de l'ellipticité de la Terre, l'angle AMm se trouvera moindre que droit: supposons donc que cet angle soit $= 90^\circ - \omega$, & nous aurons à cause de $\theta = 90^\circ$

$$\cos\omega = 1 - \delta(\cos\lambda^2 - \cos\Phi^2) = 1 - \tfrac{1}{2}\omega\omega$$

donc

donc $\omega = \sqrt{2\delta(\cos\lambda^2 - \cos\Phi^2)}$

or $\cos\Phi^2 = 1 - \frac{\sin\lambda^2}{\cos s^2}$ & partant

$$\cos\lambda^2 - \cos\Phi^2 = -\sin\lambda^2 + \frac{\sin\lambda^2}{\cos s^2} = \sin\lambda^2 \tang s^2$$

Par conséquent nons aurons $\omega = \sin\lambda \tang s \sqrt{2\delta}$

ou, puisque l'arc s eſt toujours ſi petit, qu'on le peut confondre avec la tangente, la différence des angles AMm qui répondent, ou à la ſphéricité ou à l'ellipticité de la Terre, ſera

$$\omega = s \sin\lambda \sqrt{2\delta}$$

Et réciproquement ayant bien obſervé l'angle $AMm = 90° - \omega$, on en déduira la figure elliptique de la terre: $\delta = \frac{\omega^2}{2ss\sin\lambda^2}$ ou à cauſe de $s = \frac{\cos\zeta}{\tang\lambda}$: on aura $\delta = \frac{\omega\omega}{2\cos\zeta^2\cos\lambda^2}$.

COROLL. I.

34. Cette méthode ſemble donc fort avantageuſe dans toutes les régions de la terre, qui ne ſont pas trop proches de l'équateur, puis que à cauſe de $\sin\lambda$ trop petit, la difference ω deviendroit inſenſible. Mais plus le païs eſt éloigné de l'équateur, cette opération ſe pratiquera avec d'autant plus de ſuccés. Cependant il eſt évident, que trop près des Poles cette méthode perd à d'autres égards ſon utilité; puisque ſous les Poles mêmes il n'y a point de lignes méridiennes.

COROLL. 2.

35. Plus on continuë loin la route LM, & plus devient grande la différence ω dans la même raiſon. Mais il n'en eſt pas de même de l'ellipticité δ, dont l'angle ω ſuit la raiſon ſoudoublée: de ſorte que ſi la valeur de δ devenoit quatre fois plus grande, l'angle ω ne ſeroit augmenté

menté qu'au double. Or la grandeur de cet angle ω suppléra suffisamment à ce défaut.

COROLL. 3.

36. Supposons l'ellipticité $\delta = \frac{1}{225}$, & la longueur de la route LM environ de 15 miles d'Allemagne. Soit de plus la hauteur du pole en L de 45°, & à cause de sin $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $s = 1°$, il y aura à peu prés $\omega = \frac{1}{15}$ degré $= 4'$; & cette différence est assés sensible pour découvrir la véritable ellipticité de la terre.

EXEMPLE.

37. Que le lieu L se trouve à la latitude de 52°, 31', & qu'on ait la commodité de tracer une ligne vers l'ouëst, ou environ, par une étenduë de 15 miles environ, & il s'agit de trouver la direction la plus avantageuse de la ligne LM à tracer. Puisque $\lambda = 52°, 31'$ & $s = 1°$, on aura

$$\begin{array}{rll} & l\,\text{tang}\,\lambda = 10,1152811 & \qquad l\,\text{sin}\,\lambda = 9,8995636 \\ + & l\,\text{tang}\,s = \underline{8,2419215} & - \quad l\,\text{cos}\,s = \underline{9,9999338} \\ & l\,\text{cos}\,\zeta = 8,3572026 & \qquad l\,\text{sin}\,\Phi = 9,8996298 \\ \text{donc} & \zeta = 88°, 41', 45'' & \& \qquad \Phi = 52°, 31', 41'' \end{array}$$

Maintenant, puisqu'il feroit impossible d'observer exactement ces mesures, & qu'il suffit de s'en tenir à peu près, supposons qu'on ait tracé la ligne LM en sorte, qu'elle fasse avec la méridienne tirée par L vers le nord un angle de 88°, 41', 30'', & qu'on ait poussé cette ligne jusqu'en M, où l'on ait observé la hauteur du pole de 40'' plus grande qu'en L: de sorte que

$$\lambda = 52°, 31'; \ \zeta = 88°, 41'\ 30'' \ \& \ \Phi = 52°, 31', 40''$$

Cela posé, voyons sous quel angle cette ligne LM sera inclinée à la méridienne tirée par M, tant lorsque la terre seroit sphérique que sphéroïdique

dique elliptique dans l'hypothese $\delta = \frac{1}{225}$. Or d'abord si la terre étoit sphérique, & qu'on posât l'angle A M $m = \theta$, ayant $\sin\theta = \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi}$, nous aurons ce calcul à faire:

$$\begin{array}{rrl}
& l \sin\zeta = & 9,9998868 \\
& l \cos\lambda = & \underline{9,7842824} \\
& & 9,7841692 \\
& l \cos\phi = & \underline{9,7841726} \\
\text{donc} & l \sin\theta = & 9,9999966 \\
\text{\& partant} & \theta = & 89^\circ, 46', 24''
\end{array}$$

Mais si la terre étoit sphéroïdique selon la valeur $\delta = \frac{1}{225}$ & que θ marquât encore l'angle A M m, ayant

$$\sin\theta = \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi} \; (1 - \delta (\cos\lambda^2 - \cos\phi^2))$$

il faudra faire ce calcul:

$$\begin{array}{lcr}
l \cos\lambda^2 = 9,5685648 & \ldots\ldots & \cos\lambda^2 = 0,3703094 \\
l \cos\phi^2 = 9,5683452 & \ldots\ldots & \cos\phi^2 = \underline{0,3701223} \\
& & \cos\lambda^2 - \cos\phi^2 = 0,0001171 \\
& & \delta(\cos\lambda^2 - \cos\phi^2) = 0,0000008
\end{array}$$

& partant $\sin\theta = 0,9999992 \cdot \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi}$

$$\begin{array}{lcl}
\text{or } l \frac{\sin\zeta \cos\lambda}{\cos\phi} & = & 9,9999966 \\
l\, 0,9999992 & = & 9,9999996 \\
\sin\theta & = & 9,9999962 \\
\text{\& partant } \theta & = & 89^\circ, 45', 36''
\end{array}$$

La différence est donc 48'', mais elle monteroit bien à 4', 30'', si l'on avoit suivi exactement les déterminations trouvées par le calcul.

REMAR-

REMARQUE. I.

38. Mais dans cet exemple & d'autres ſemblables, il faut bien remarquer, que la différence des latitudes λ & ϕ eſt ſi petite, que la moindre erreur commiſe dans les obſervations influëroit trop ſenſiblement ſur la concluſion. Car, puiſqu'après avoir obſervé les quatre angles λ, ϕ & ζ, θ, on a pour l'ellipticité de la terre

$$\delta = \left(1 - \frac{\sin\theta \cos\phi}{\sin\zeta \cos\lambda}\right) : (\cos\lambda^2 - \cos\phi^2)$$

pour que la concluſion ſoit ſeure, il faut que le dénominateur ne provienne pas trop petit. Or, pour faire voir combien une erreur commiſe dans la meſure de ces angles influë ſur la concluſion, conſidérons le dernier cas du 2 exemple §. 27. où ſuppoſant $\delta = \frac{1}{217}$ les quatre angles étoient

$$\lambda = 48^\circ;\ \phi = 48^\circ,\ 10';\quad \zeta = 85^\circ,\ \&\ \theta = 88^\circ, 2', 27''.$$

& ſuppoſons que dans la difference des latitudes λ & ϕ, & dans celle des angles ζ & θ, on ſe ſoit trompé de $5''$, de ſorte que des opérations actuelles on ait tiré,

$$\lambda = 48^\circ;\ \phi = 48^\circ, 10', 5'';\ \zeta = 85^\circ;\ \&\ \theta = 18^\circ, 2', 22''.$$

& voyons quelle ſeroit l'ellipticité qu'on en trouvera:

$l \sin\theta$	$=$	9,9997457	$l \cos\lambda^2$	$=$ 9,6510218
$l \cos\phi$	$=$	9,8240919	$l \cos\phi^2$	$=$ 9,6481838
		9,8238376	$\cos\lambda^2$	$=$ 0,4477358
$l \sin\zeta$	$=$	9,9983442	$\cos\phi^2$	$=$ 0,4448195
$l \cos\lambda$	$=$	9,8255109	Den.	$=$ 0,0029163
		9,8238551		
$l \frac{\sin\theta \cos\phi}{\sin\zeta \cos\lambda}$	$=$	9,9999825	donc δ	$= \frac{403}{29163} = \frac{1}{72}$
nombre	$=$	0,9999597		
Numérateur	$=$	0,0000403		

On trouveroit donc l'ellipticité beaucoup plus grande qu'elle ne ſeroit en effet, & cette grande différence réſulte principalement de l'erreur de l'angle ϕ dans le numérateur: car le dénominateur n'en ſouffre pas

con-

considérablement. Car, si l'on se trompe dans l'angle ϕ de $d\phi$, la valeur de δ en devient fausse de $\dfrac{d\phi \sin\theta \sin\phi}{\sin\zeta \cdot \cos\lambda\,(\cos\lambda^2 - \cos\phi^2)}$, ou bien cette erreur sera à la quantité de δ même, comme $d\phi \sin\theta \sin\phi$ à $\sin\zeta \cos\lambda - \sin\theta \cos\phi$. Donc, afin que l'erreur ne soit pas considérable, il faut que $\sin\zeta \cos\lambda - \sin\theta \cos\phi$, & partant aussi le dénominateur $\cos\lambda^2 - \cos\phi^2$ ne devienne pas trop petit.

REMARQUE. 2.

39. Il vaudra donc mieux de faire l'angle ALM $= \zeta$ plus petit, quoique la différence dans l'angle θ pour l'hypothese sphérique & elliptique devienne plus petite ; car les avantages remarqués cy-dessus lorsqu'on prend l'angle ζ presque droit, supposent absolument, qu'on ne commette pas la moindre erreur dans l'observation des latitudes, & dès qu'on y doit soupçonner quelque erreur, il faut abandonner cette route, & lui en préférer d'autres, où l'angle ζ est pris beaucoup plus petit. Ayant donc trouvé en supposant

$\delta = \frac{1}{229}$, $\lambda = 48°$, $\phi = 49°$, $\zeta = 60°$, l'angle $\theta = 62°, 1', 58''$

supposons qu'on ait trouvé par les opérations actuelles :

$\lambda = 48°$; $\phi = 49°, 0', 5''$; $\zeta = 60°$ & $\theta = 62°, 1', 53''$

& cherchons de là l'ellipticité δ :

$l \sin\theta$	=	9,9460614	$l \cos\lambda^2$	=	9,6510218
$l \cos\phi$	=	9,8169308	$l \cos\phi^2$	=	9,6338616
		9,7629922			
$l \sin\zeta$	=	9,9375306	$\cos\lambda^2$	=	0,4477358
$l \cos\lambda$	=	9,8255109	$\cos\phi^2$	=	0,4303894
		9,7630415	Dénom.	=	0,0173464
$l \dfrac{\sin\theta \cos\phi}{\sin\zeta \cos\lambda}$	=	9,9999507	Donc δ	=	$\dfrac{1135}{173464} = \dfrac{1}{153}$
nombre	=	9,9998865			
Numérateur	=	0,0001135			

Dans

Dans ce cas donc l'erreur des obſervations influë beaucoup moins ſur la concluſion. Cependant on trouvera de même, qu'il n'eſt pas avantageux de prendre l'angle ζ trop petit; car ſi nous le prenions de 30°, & que nous fiſſions ϕ de 5'' trop grand, & θ de 5'' trop petit, nous trouverions $\delta = \frac{1}{229}$: d'où l'on peut conclure que le meilleur parti eſt toujours de tracer la ligne LM en ſorte, qu'elle faſſe avec la méridienne un angle moindre que 60°, & plus grand que 30°. Il y a d'autres raiſons qui conſeillent de prendre cet angle ζ de 54°, 44', pour que $\sin \zeta^2 \cos \zeta$ devienne un *maximum*: mais, puiſqu'on eſt incertain, ſi les erreurs affectent les angles λ & ϕ, & quel rapport ces doubles erreurs tiennent entr'elles, on ne ſauroit rien déterminer de précis là deſſus; & il ſuffit d'avoir fixé les limites de 30° & 60° entre leſquels l'angle ζ doit être choiſi. Or le plus avantageux eſt de continuer la ligne LM auſſi loin qu'il eſt poſſible; car plus on la pourra allonger, & plus ſera-t-on ſûr de la concluſion, qu'on en tirera. Cependant je dois avouër que cette méthode ne ſauroit jamais être exécutée dans la pratique: car non ſeulement on rencontreroit des difficultés inſurmontables à tracer la ligne la plus courte; mais auſſi la ligne méridienne ne ſauroit jamais être tracée ſi exactement, que le ſuccès de cette méthode l'exige, une erreur de 20'' y étant preſque inévitable.