



1755

Remarques sur les memoires precedens de M. Bernoulli

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Remarques sur les memoires precedens de M. Bernoulli" (1755). *Euler Archive - All Works*. 213.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/213>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



R E M A R Q U E S
 SUR LES MÉMOIRES PRÉCEDENS
 DE M. B E R N O U L L I,
 PAR M. E U L E R.

I.

Il n'y a aucun doute, que M. *Bernoulli* n'ait infiniment mieux développé la partie physique, qui renferme la formation du son dans le mouvement des cordes, qu'aucun autre n'a fait avant lui. On s'étoit presque uniquement arrêté à la détermination mécanique du mouvement, dont une corde tendue peut être ébranlée, sans rechercher assez soigneusement la nature des sons, qui en sont produits. Malgré l'infinité de manières différentes dont on a trouvé qu'une corde peut être mise en vibrations, on ne voyoit pas comme il seroit possible, qu'une même corde puisse rendre à la fois plusieurs sons différens; & c'est à M. *Bernoulli*, que nous sommes redevables de cette heureuse explication, qui est sans doute de la dernière importance dans la Physique. Il est aussi évident, que cette belle idée s'étend à toutes les autres espèces des corps sonores, & que le même corps peut rendre à la fois tous les sons différens, dont il est susceptible séparément; & c'est le sujet que M. *Bernoulli* a traité avec le même succès dans son second Mémoire.

II. M. *Bernoulli* tire toutes ces excellentes réflexions uniquement des recherches, que feu M. *Taylor* a faites sur le mouvement des cordes, & soutient contre M. d'*Alembert* & moi, que la solution de *Taylor* est suffisante à expliquer tous les mouvemens, dont une corde est susceptible; de sorte que les courbes, qu'une corde prend pendant son

mouve-



mouvement, soit toujours, ou une trochoïde allongée simple, ou un mélange de deux ou plusieurs courbes de la même espèce. Or quoiqu'un tel mélange ne pût plus être regardé comme une trochoïde, & que la seule possibilité de la combinaison de plusieurs courbes de *M. Taylor* rende déjà sa solution insuffisante; il me semble qu'elle est encore insuffisante à d'autres égards, & que le mouvement d'une corde pourroit être tel, qu'il seroit impossible de le rapporter à l'espèce des trochoïdes Tayloriennes.

III. Si toutes les courbes, auxquelles la corde s'applique pendant son mouvement, étoient comprises dans cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \epsilon \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

le sentiment de *M. Bernoulli* seroit juste; vu que prenant chaque terme séparément, une telle équation $y = \mu \sin \frac{m\pi x}{a}$ donne toujours une des trochoïdes assignées par *Taylor*; & notre équation seroit formée de plusieurs trochoïdes. Mais, dès que le nombre des termes dans cette équation devient infini, il me paroît encore douteux, si l'on peut dire, que la courbe soit composée d'une infinité de trochoïdes: le nombre infini semble détruire la nature d'une telle composition. Cependant j'avouë, que *M. Bernoulli* auroit pu parvenir à la découverte de toutes ces courbes par le seul raisonnement fondé sur la composition des trochoïdes Tayloriennes, & que l'équation rapportée, quand même elle seroit continuée à l'infini, en est une suite fort naturelle.

IV. Mais il y a des cas, où cette équation s'étendant à l'infini est réductible à une équation finie, & alors surtout ce seroit parler fort improprement, si l'on disoit, que la courbe étoit composée d'une infinité de trochoïdes; l'équation même en fournissant une idée & construction beaucoup plus simple. Ainsi, lorsque les coefficients α , ϵ ,



γ, δ &c. forment une progression géométrique, l'équation infinie se réduit à cette équation finie :

$$y = \frac{c \sin \frac{\pi x}{a}}{1 - n \cos \frac{\pi x}{a}}$$

qui renferme sans contredit des courbes, qui peuvent convenir au mouvement d'une corde, même de l'aveu de M. *Bernoulli*, pourvu que n marque un nombre plus petit que l'unité. Cette corde devoit donc bien rendre à la fois une infinité de sons, dont les plus hauts deviendroient de plus en plus foibles ; mais l'équation nous offre une idée beaucoup plus simple de cette courbe, que si nous voulions dire, qu'elle étoit composée d'une infinité de trochoïdes Tayloriennes.

V. Mais il y a plus : je n'avois donné cette équation,

$$y = a \sin \frac{\pi x}{a} + \epsilon \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

que comme une solution particulière de la formule, qui contient en général toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde mise en mouvement : & il y a une infinité d'autres courbes, qui ne fauroient être comprises dans cette équation. Si M. *Bernoulli* tomboit d'accord là dessus, il n'auroit pas avancé, que toutes les courbes d'une corde frappée résulteroient uniquement de la combinaison de deux ou plusieurs courbes Tayloriennes ; & il auroit reconnu, que le raisonnement fondé sur cette combinaison n'est pas suffisant à fournir une solution complète de la question, dont il s'agit. Il n'auroit pas non plus regardé la méthode, dont M. *d'Alembert* & moi nous sommes servis, comme trop embarrassée pour arriver à une solution générale, qui se pourroit tirer d'une simple considération physique. La question principale, que j'ai à développer, est donc : si toutes les courbes d'une corde mise en mouvement sont comprises dans l'équation rapportée, ou non ?



VI. M. *Bernoulli* ne conteste pas directement la négative, que j'avois avancée: il se contente de dire, qu'il n'est pas encore assés éclairci là dessus; cependant c'est uniquement sur ce point qu'est fondée la préférence, qu'il tache de donner à sa méthode sur celle, dont M. d'*Alembert*, & moi, nous sommes servis. Car si la considération de M. *Bernoulli* fournissoit toutes les courbes, qui peuvent avoir lieu dans le mouvement des cordes, il est certain qu'elle seroit infiniment préférable à notre méthode, qu'on ne pourroit plus regarder que comme un détour extrêmement épineux pour parvenir à une solution si aisée à trouver. Mais au contraire, si la considération de M. *Bernoulli* ne découvre pas toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde mise en mouvement, & qu'il y ait des cas, où la figure de la corde est absolument irréductible aux trochoïdes de M. *Taylor*; il est aussi incontesteable, que la méthode de M. *Bernoulli*, quelque belle qu'elle soit en elle-même, ne soit de beaucoup inferieure à la méthode directe, qui fournit toutes les solutions possibles.

VII. Or il me semble que cette circonstance ne sauroit être révoquée en doute, dès qu'on considère, qu'on peut donner d'abord à la corde une figure quelconque. Car concevons, qu'on ait donné à la corde avant que de la relâcher, une figure, qui n'est pas comprise dans l'équation $y = a \sin \frac{\pi x}{a} + \epsilon \sin \frac{2 \pi x}{a} + \dots$ &c. & il n'y a aucun doute que la corde, après avoir été relâchée subitement, ne soit déterminée à un certain mouvement. Il est aussi certain que la figure qu'elle aura après le premier instant fera encore bien différente de cette équation; & quand même on voudroit soutenir, qu'après plusieurs instans elle s'assujettisse enfin à une figure comprise dans la dite équation, on ne sauroit disconvenir, qu'avant que cela arrive, le mouvement de la corde ne soit bien différent de celui, que la considération de M. *Bernoulli* renferme. Ce premier mouvement n'étant donc pas certainement conforme aux loix tirées de la théorie de *Taylor*, me semble



ble tout à fait suffisant à faire voir, que cette théorie n'est pas capable de nous éclairer sur tous les mouvemens, dont une corde est susceptible.

VIII. On fera donc obligé d'avouër, que le mouvement de la corde, du moins pendant quelque tems depuis le commencement, dépend de la figure, qu'on aura donnée d'abord à la corde; laquelle étant absolument arbitraire, il est impossible de soutenir, que ce mouvement soit toujours d'accord avec lesdites loix. Il semble encore fort incertain, si un tel mouvement se réduise enfin parfaitement à la trochoïde de *Taylor*; & quand même cela arriveroit, comme *M. Bernoulli* a remarqué très ingénieusement qu'il arrive dans le mélange de deux ou plusieurs trochoïdes, la cause ne sauroit être attribuée, qu'au ralentissement du mouvement, causé par des circonstances externes, auxquelles on ne fait point réflexion dans le calcul. Ainsi cela ne doit pas même entrer dans la solution, qu'on fait abstraction de toutes causes, qui peuvent ralentir & altérer le mouvement. De là il s'ensuit, qu'une solution ne sauroit être jugée complète, à moins qu'elle n'embrasse tous les cas du mouvement, pour toutes les figures possibles, qu'on pourroit donner à la corde au commencement.

IX. Mais peut-être repliquera-t-on, que l'équation $y = a \sin \frac{\pi x}{a} + \dots$ à cause de l'infinité de coefficients indéterminés, est si générale, qu'elle renferme toutes les courbes possibles: & il faut avouër, que si cela étoit vray, la méthode de *M. Bernoulli* fourniroit une solution complète. Mais, outre que ce grand Géometre n'a pas fait cette objection, toutes les courbes comprises dans cette équation, quoiqu'on augmente le nombre des termes à l'infini, ont de certains caractères, qui les distinguent de toutes autres courbes. Car si l'on prend l'abscisse x négative, l'appliquée devient aussi négative, & égale à celle qui repond à l'abscisse positive x ; de même l'appliquée qui répond à l'abscisse $a - x$, est négative, & égale à celle qui con-

vient



vient à l'abscisse x . Donc si la courbe, qu'on aura donnée à la corde au commencement, n'a point ces propriétés, il est certain qu'elle n'est pas renfermée dans ladite équation. Or aucune courbe algébrique ne fauroit avoir ces propriétés, qu'il faut donc toutes exclure de cette équation; & il n'y a aucun doute, qu'il n'en faille aussi exclure une infinité de courbes transcendentes.

X. Mais, puisque la première courbe qu'on donne à la corde, est absolument arbitraire, il peut arriver, & il arrivera même le plus souvent, que cette première courbure n'est expressible par aucune équation, soit algébrique, soit transcendente, & qu'elle n'est renfermée dans aucune loi de continuité. Une telle courbe ne fera donc pas à plus forte raison comprise dans l'équation alleguée. Supposons donc que la corde ait eu au commencement une telle figure quelconque, supposition d'autant moins impossible, que c'est plutôt la seule, qui puisse avoir lieu dans la pratique; & je demande quel sera son mouvement, après qu'elle aura été relâchée? Il est bien certain que ce mouvement étant réel doit être déterminable, & il est aussi certain, qu'il ne fauroit être renfermé du moins pour les premiers instans, dans celui que M. *Bernoulli* a tiré des trochoïdes Tayloriennes: & partant cette solution, toute belle qu'elle est d'ailleurs, ne fauroit avoir lieu que dans les cas, où par quelque hazard la corde a reçu au commencement une des figures comprises dans l'équation mentionnée; tous les autres cas seront exclus de cette solution.

XI. Voilà donc l'étendue, qu'il faut donner à mon avis au problème sur les mouvemens des cordes: *Ayant donné au commencement à la corde une figure quelconque, soit algébrique, soit transcendente, soit même mécanique, il s'agit de déterminer le mouvement, que la corde poursuivra après avoir été relâchée.* Sur ce pied il est bien clair, que la solution tirée de la combinaison des trochoïdes ne fauroit être regardée, que comme très particulière. Or, me demandera-t-on, une solution générale est-elle bien possible? Je crois que la solution, que j'en ai



donnée, n'est limitée à aucun égard, du moins je n'y puis decouvrir aucune faute, & personne n'en a encore montré l'insuffisance. Il est bien vrai que M. d'*Alembert*, quoiqu'il m'ait reproché que ma solution n'étoit pas différente de la sienne, a avancé, mais sans alléguer la moindre preuve, que ma solution ne s'étend pas à toutes les figures possibles, que la corde aura pu avoir au commencement; & il est dans le même sentiment, que M. *Bernoulli* semble soutenir, que le mouvement d'une corde ne sauroit être déterminé, à moins que sa figure initiale ne soit comprise dans l'équation, que j'ai déjà plusieurs fois rapportée.

XII. Je souhaiterois fort, que M. d'*Alembert* m'eut indiqué en quoi je me suis trompé, quand je donnai ma solution pour générale, & applicable à toutes les courbes initiales, qu'on puisse donner à la corde. Mais, quoiqu'il en soit, cela ne fait rien à la recherche présente, attendu qu'il est certain, qu'il y a une infinité de cas, où le mouvement d'une corde ne sauroit être déterminé par le mélange de plusieurs trochoïdes. Pour le reste je ne m'attends pas, que M. d'*Alembert* dise, que dans ces cas le mouvement de la corde ne suive aucune loi; il sera donc déterminable par sa nature, & si ma solution est fautive, personne ne sera plus capable de suppléer à ce défaut, que M. d'*Alembert* lui-même. Mais je doute fort, qu'il trouve jamais une solution différente de la mienne, du moins s'il veut s'arrêter aux mêmes hypothèses, qu'il a faites dans sa solution, & qui l'ont conduit à l'équation :

$$y = a \sin \frac{\pi x}{a} + \epsilon \sin \frac{2 \pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3 \pi x}{a} + \&c..$$

XIII. Cependant, pour m'assurer mieux de ma solution, je m'en vais traiter de nouveau ce même problème par une méthode un peu différente, & examiner plus soigneusement tous les raisonnemens, qui m'ont conduit à la détermination générale du mouvement des cordes, quelle qu'ait été leur figure initiale. Or d'abord il faut remarquer qu'on fonde le calcul sur quelques hypothèses, qui sont fort souvent peu conformes à la vérité. On suppose premièrement la corde
parfai-



parfaitement flexible, & destituée de toute roideur; on ne tient pas non plus compte du ressort de la corde, quoique ces circonstances puissent très considérablement altérer le mouvement; & partant on ne peut pas alléguer les effets qui en sont causés, contre la bonté de la solution. Ensuite on suppose les vibrations de la corde infiniment petites, de sorte que la corde ne change pas de longueur pendant son mouvement, & que chaque point de la corde demeure toujours dans la même ligne droite perpendiculaire à l'axe: or il est évident que la petite augmentation de la longueur de la corde dans ses excursions, peut aussi contribuer quelque chose à l'altération du mouvement.

XIV. Il s'agit donc seulement d'une solution, qui soit conforme à ces hypothèses, & point du tout d'une telle, qui satisfasse parfaitement aux phénomènes, que l'expérience nous offre. *Mrs. Bernoulli* & *d'Alembert* ont fait ces mêmes hypothèses; & ils n'attendent donc rien de la mienne, qui approche davantage de la vérité. On n'a fait ces hypothèses que pour la facilité du calcul; car on pourroit bien tenir compte dans la solution, tant de la roideur de la corde, que de son allongement dans ses excursions, & donner aux vibrations une grandeur finie; mais on parviendroit à des formules si compliquées, qu'on n'en sauroit déduire aucune conclusion satisfaisante. Ce ne sont pas les principes mécaniques, qui nous abandonnent dans ces recherches; c'est plutôt l'analyse, qui n'est pas encore portée à ce degré de perfection, qu'il faudroit pour ces sortes de questions. Les bornes de l'analyse nous obligent à de telles hypothèses, pour faciliter en sorte la solution, qu'elle ne s'écarte pas trop sensiblement de la vérité.

XV. Considérons donc une corde fixée par les deux bouts aux points A & B, & posons la distance, ou la longueur de la corde $AB = a$; soit l'épaisseur de la corde partout la même, & la masse ou le poids de toute la corde $= M$: soit de plus la tension de la corde, ou la force dont elle est tendue $= F$, exprimée par un poids: donc si nous prenons

Fig. 1



une partie quelconque $AP = x$, sa masse sera $= \frac{Mx}{a}$, & la masse de l'élément $Pp = \frac{M dx}{a}$. Supposons maintenant, que la corde ait été détournée au commencement à une figure quelconque, & qu'après un tems écoulé $= t$, elle soit parvenue à la figure AMB . Posant donc pour cette figure l'abscisse $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$, celle-cy sera exprimée par une certaine fonction de l'abscisse x , & du tems t , que nous indiquerons par $y = \Phi: (x, t)$. Cette équation doit être telle, que si l'on pose $t = 0$, elle exprime la courbe qu'on avoit donnée à la corde au commencement; ensuite si l'on donne à t une valeur déterminée, qui convient au tems écoulé, cette même équation exprimera la nature de la courbe, que la corde aura à cet instant.

XVI. Tout revient donc à trouver de quelle nature doit être la fonction de x & t , qui exprime la valeur de l'appliquée y . Pour cet effet il faut recourir aux principes mécaniques, par lesquels le mouvement de la corde est déterminé: mais, avant que de procéder à cette recherche, l'état de la corde nous découvre quelques propriétés, qui doivent nécessairement convenir à notre fonction $y = \Phi: (x, t)$. Car, puisque la corde est fixée au point A , il est évident que posant $x = 0$, cette fonction doit évanouir, quelque valeur qu'on donne au tems t . Ensuite, puisque la corde est aussi fixée en B , si l'on pose $x = a$, la fonction doit aussi se réduire à zéro, quelque valeur que puisse avoir le tems t . Nous connoissons donc déjà, indépendamment des principes mécaniques, trois propriétés de notre fonction $y = \Phi: (x, t)$, dont la première est que posant $t = 0$, elle exprime la courbe initiale de la corde, & les deux autres, que quelque valeur que le tems t puisse avoir, l'appliquée y évanouisse toujours; tant pour $x = 0$, que pour $x = a$.

XVII. Puisque la corde, après le tems t , est réduite à la figure AMB , voyons par quelle force chacun de ses élémens est sollicité; & il



il est clair que dans cette recherche le tems t doit être regardé comme invariable. Or, en vertu de l'hypothese que les excursions de la corde sont infiniment petites, la tension de la corde dans l'état AMB , fera la même dans tous les points de la corde, & partant $= F$. Donc, par la tension de l'élément précédent $M\mu$, le point M fera sollicité vers la direction MP par la force $F \left(\frac{dy}{dx} \right)$, où $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ marque la valeur de la fraction $\frac{dy}{dx}$ en posant le tems t constant. Or par la tension de l'élément suivant Mm , prenant $Pp = Mm = dx$, le point M fera sollicité en sens contraire par la force $F \left(\left(\frac{dy}{dx} \right) + d \left(\frac{dy}{dx} \right) \right)$: & partant combinant ces deux forces ensemble, le point M fera sollicité selon la direction MP par la force $- F d \left(\frac{dy}{dx} \right)$. Puisque dans ce différentiel le tems t est encore pris pour constant, cette force fera $= - F dx \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$, où la formule $\left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$ exprime la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ en supposant le tems t constant.

XVIII. Concevons que toute la masse de l'élément Mm , qui est $= \frac{M dx}{a}$ soit réunie au point M , & elle fera sollicitée dans la direc-

tion MP par la force $= - F dx \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$; c'est donc de cette force que le mouvement de l'élément Mm sera altéré, & puisque ce mouvement se fait suivant la même direction MP , si nous voulons déterminer ce mouvement, nous devons regarder l'abscisse $AP = x$ comme constante, & nous tenir uniquement à la variabilité du tems t . Or les principes mécaniques nous donnent l'accélération de ce mou-

vement selon la direction $MP = -2 \left(\frac{ddy}{dt^2} \right)$, laquelle doit être égale à la force accélératrice, ou à la force motrice $-F dx \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$ divisée par la masse $\frac{M dx}{a}$, d'où nous tirons cette équation :

$$-2 \left(\frac{ddy}{dt^2} \right) = - \frac{F a}{M} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{ddy}{dt^2} \right) = \frac{F a}{2M} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$$

Pour l'intelligence de cette équation il suffit de remarquer, que dans la formule $\left(\frac{ddy}{dt^2} \right)$ le seul tems t est regardé comme variable, & dans la formule $\left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$ la seule abscisse x .

XIX. A' cette occasion il fera à propos d'expliquer davantage cette maniere d'indiquer les différentiels des fonctions de plusieurs variables, en n'en faisant varier qu'une seulement; puisque cette considération est d'une très grande utilité dans quantité de problèmes mécaniques & hydrodynamiques. Soit donc y une fonction quelconque des variables x, t, u , &c. & en les faisant varier toutes, le différentiel de y aura une telle forme $dy = P dx + Q dt + R du$, où le membre $P dx$ marque le différentiel de y , en faisant varier la seule quantité x , & regardant les autres t , & u comme constantes. De même le membre $Q dt$ marque le différentiel de y en faisant varier la seule quantité t , & le membre $R du$ celui en faisant varier la seule quantité u . Cette considération nous donne donc à connoître les quantités finies P, Q , & R : or, pour ne pas avoir besoin de tant de lettres, je les indique de la maniere suivante :

$$P = \left(\frac{dy}{dx} \right); \quad Q = \left(\frac{dy}{dt} \right); \quad R = \left(\frac{dy}{du} \right).$$



XX. Connoissant donc la signification de ces expressions & d'autres semblables, on les peut étendre à des différentiels de plus hauts degrés. Ainsi, puisque $P = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, & que P est encore une fonction finie des quantités x, t, u , on aura une idée juste de l'expression $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, au lieu de laquelle je mets $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, de sorte que posant $\left(\frac{dy}{dx}\right) = P$, cette expression $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ renferme la valeur de $\left(\frac{dP}{dx}\right)$. De même ayant $\left(\frac{dy}{dt}\right) = Q$, l'expression $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ fera la valeur de $\left(\frac{dQ}{dt}\right)$; & pareillement $\left(\frac{ddy}{du^2}\right) = \left(\frac{dR}{du}\right)$. On peut aussi changer dans les différentiations successives les variables, & ainsi la valeur de $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ sera exprimée par $\left(\frac{ddy}{dx dt}\right)$, & celle de $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dt dx}\right)$. En conséquence de cela il y aura aussi :

$$\left(\frac{ddy}{dx du}\right) = \left(\frac{dP}{du}\right); \quad \left(\frac{ddy}{du dx}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddy}{dt du}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right); \quad \left(\frac{ddy}{du dt}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right).$$

XXI. Or on fait que dans un tel différentiel complet $dy = P dx + Q dt + R du$, les quantités finies P, Q, R, sont dans une telle relation entr'elles, que selon la même manière d'exprimer il y a :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \quad \left(\frac{dQ}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right)$$

De



De là nous aurons :

$$\left(\frac{d^2y}{dxdt}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt dx}\right); \left(\frac{d^2x}{dxdu}\right) = \left(\frac{d^2x}{du dx}\right); \left(\frac{d^2y}{dt du}\right) = \left(\frac{d^2y}{du dt}\right)$$

où il est fort remarquable, que si le dénominateur contient deux différens différentiels, il est indifférent en quel ordre ils soient écrits. De là on comprendra aisément la signification de semblables formules, lorsqu'elles renferment des différentiels plus hauts : ainsi pour connoître la valeur de $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, qu'on pose $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = V$, & on aura

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right). \quad \text{Pareillement ayant } \left(\frac{d^3y}{dx^2 dt}\right), \text{ si l'on met}$$

$$\text{ou } \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = V \text{ ou } \left(\frac{d^2y}{dx dt}\right) = U, \text{ la valeur de } \left(\frac{d^3y}{dx^2 dt}\right) \text{ se}$$

$$\text{ra ou } = \left(\frac{dV}{dt}\right) \text{ ou } = \left(\frac{dU}{dx}\right), \text{ \& cela nous éclaircit suffisamment}$$

sur la signification de semblables formules, qui renferment encore de plus hauts différentiels.

XXII. Voilà donc à quoi le problème sur le mouvement de la corde est réduit : il s'agit de trouver pour y une telle fonction des deux variables x & t , qui satisfasse à cette équation :

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{F a}{2M} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \text{ outre qu'elle renferme les propriétés}$$

marquées cy-dessus. Mais, avant que de faire attention à ces propriétés, cherchons en général toutes les fonctions possibles de x & t , qui

$$\text{étant mises pour } y, \text{ rendent } \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{F a}{2M} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right). \quad \text{C'est le}$$

problème, dont M. d'Alembert a donné le premier une solution générale ; & il seroit à souhaiter qu'on découvrit une méthode propre à

résoudre



réfoudre d'autres formules semblables. Une telle méthode serviroit à réfoudre quantité de problèmes, qu'on a été obligé d'abandonner jusqu'ici.

XXIII. Avant que d'entreprendre la résolution de cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{F a}{2M} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, je remarque qu'elle a une étendue infinie. Car si P, Q, R , sont de telles fonctions de x & t , qui satisfont à cette équation, étant posées pour y , de sorte qu'il y ait tant $y = P$, que $y = Q$, & $y = R$, il est clair que cette valeur

$$y = \alpha P + \epsilon Q + \gamma R,$$

satisfera également à ladite équation. La raison en est, puisque y n'a qu'une seule dimension dans notre équation. Cette remarque nous conduit d'abord à la solution de *M. Bernoulli*, prise dans un sens plus général; car si les équations $y = P$, $y = Q$, & $y = R$, renferment chacune une espece particuliere de vibration de la corde, la même corde sera aussi susceptible d'un mouvement représenté par cette équation $y = \alpha P + \epsilon Q + \gamma R$; & cette même composition a aussi lieu dans tous les autres genres de vibrations, pourvu qu'elles soient infiniment petites, puisque l'équation, qui exprime le mouvement, ne contient dans tous ses termes qu'une seule dimension de l'appliquée y . C'est donc ici, qu'il faut chercher le *vray fondement* de la solution de *M. Bernoulli*.

XXIV. Pour la mesure du tems, que j'ai marqué ici par t , je ne m'arrête pas directement à déterminer la longueur du pendule isochrone. Mon but principal est d'assigner pour chaque moment la figure & l'état, où la corde se trouve alors: c'est de là qu'on connoitra le *vray mouvement* de chaque point de la corde, & il sera ensuite aisé de le comparer avec le mouvement d'un pendule. Il est aussi nécessaire de traiter sur ce pied-là le mouvement des cordes, puisqu'on n'est pas assuré, si tous les élémens de la corde achevent leurs vibrations en même tems. Mais, pour avoir une mesure absoluë du tems, on n'a



qu'à introduire la hauteur g par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, & à écrire $2t\sqrt{g}$ au lieu de t , & alors la quantité t nous donnera le tems exprimé en minutes secondes. Posons donc $2t\sqrt{g}$ pour t , & partant $4g dt^2$ pour dt^2 , & notre équation, qui renferme le mouvement de la corde sera $\frac{1}{4g} \left(\frac{ddy}{dt^2} \right) = \frac{Fa}{2M} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$

ou bien : $\left(\frac{ddy}{dt^2} \right) = \frac{2Fag}{M} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$. Ainsi ce n'est pas sur le pendule isochrone, que je fonde la connoissance du mouvement des cordes comme *M. Bernoulli* me le reproche tant de fois.

XXV. Ayant réduit la considération du tems à une notion précise, posons pour abrégé $\frac{2Fag}{M} = cc$, & il s'agit de résoudre l'é-

quation $\left(\frac{ddy}{dt^2} \right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$, ou de chercher pour y toutes les fonctions de t & x , qui satisfassent à cette équation. Puisque le rapport des différentio-différentiels de y est donné par cette équation; je commencerai par chercher celui des premiers différentiels, ou plutôt

des quantités $\left(\frac{dy}{dt} \right)$ & $\left(\frac{dy}{dx} \right)$. Or comme celui-là est constant, il est aisé de voir que celui-cy le sera aussi. Supposons donc

$\left(\frac{dy}{dt} \right) = k \left(\frac{dy}{dx} \right)$; & prenant de part & d'autre les différentiels en supposant la seule x variable, nous aurons $\left(\frac{ddy}{dt dx} \right) = k \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$.

Ensuite prenons aussi les différentiels en supposant la seule t variable, & nous aurons $\left(\frac{ddy}{dt^2} \right) = k \left(\frac{ddy}{dx dt} \right)$. Donc, puisque $\left(\frac{ddy}{dx dt} \right) =$

$= \left(\frac{ddy}{dt dx} \right) = k \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$, nous en tirerons $\left(\frac{ddy}{dt^2} \right) = kk \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$,

&



& cette équation devant être la même avec la proposée, nous donne $kk = cc$, & partant ou $k = c$ ou $k = -c$.

XXVI. Donc toutes les fonctions de x & t , qui étant mises pour y satisfont à l'une ou à l'autre de ces deux équations,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = +c \left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = -c \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

rempliront aussi en général les conditions renfermées dans notre équation, qui détermine le mouvement de la corde :

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

ou bien cette équation différentio-différentielle renferme les deux équations différentielles précédentes à la fois. Et partant nous sommes

parvenus à résoudre cette égalité $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k \left(\frac{dy}{dx}\right)$, ce qui se fera le plus promptement par la considération, qu'il est

$$dy = dt \left(\frac{dy}{dt}\right) + dx \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

d'où nous tirons à cause de $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k \left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$dy = k dt \left(\frac{dy}{dx}\right) + dx \left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{ou} \quad dy = (dx + k dt) \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Il faut donc que $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ soit une fonction de la quantité $x + kt$,

pour que la formule trouvée soit possible, & par conséquent l'intégration donnera pour y une fonction de $x + kt$.



XXVII. De là nous concluons réciproquement, que toute fonction de $x + kt$, étant mise pour y , satisfait à la condition exprimée par la formule $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k \left(\frac{dy}{dx}\right)$. Cela est aussi clair de soi-même; car mar-

quant par $\Phi(x + kt)$ une fonction quelconque de la quantité $x + kt$, & son différentiel complet par $(dx + k dt) \Phi'(x + kt)$, où $\Phi'(x + kt)$ marquera une autre fonction finie de $x + kt$, qui dépend de la nature de la fonction $\Phi(x + kt)$; si nous posons $y = \Phi(x + kt)$, nous aurons $dy = (dx + k dt) \Phi'(x + kt)$ & partant suivant notre manière d'exprimer

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = k \Phi'(x + kt) \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \Phi'(x + kt)$$

d'où il est évident qu'il est $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k \left(\frac{dy}{dx}\right)$. Nous voilà donc

arrivés à une construction générale de cette formule $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$

qui nous donne en quantités finies pour y une fonction quelconque de la quantité $x + kt$.

XXVIII. Or puisque k est, ou $= +c$, ou $= -c$, à notre équation différentio-différentielle $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ posant

$cc = \frac{2Fag}{M}$, satisfera également & toute fonction de la quantité

$x + ct$, & toute fonction de la quantité $x - ct$. Prenant donc Φ & Ψ pour des marques des fonctions quelconques, & l'une & l'autre de ces deux valeurs :

$$y = \Phi(x + ct) \quad \& \quad y = \Psi(x - ct)$$

satisfera également à l'équation, qui contient le mouvement de la corde:



corde: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, posant $c = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$.

Donc à la même équation satisfera aussi en général cette valeur composée :

$$y = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct).$$

XXIX. Pour éclaircir cela mieux, il faut remarquer que toute fonction, de quelque nature qu'elle soit, peut toujours être représentée par une ligne courbe, dont l'appliquée exprime une certaine fonction de l'abscisse. Ayant donc construit pour la fonction marquée par Φ une ligne courbe ES, & pour la fonction marquée par Ψ une autre ligne courbe FT, si nous prenons dans celle-là l'abscisse EQ = $x + ct$, & dans celle-cy l'abscisse FR = $x - ct$, les appliquées seront :

Fig. 2

$$QS = \Phi(x + ct) \quad \& \quad RT = \Psi(x - ct)$$

& la somme de ces deux appliquées, ou de leur multiple quelconque, nous fournira toujours une valeur convenable pour y , qui satis-

fera à l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, & qui par conséquent sera

propre à nous représenter le mouvement véritable d'une corde, pourvu qu'elle soit conforme aux autres propriétés mentionnées au commencement.

XXX. Or, sans faire encore attention à ces propriétés, & m'arrêtant uniquement à l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, il est impor-

tant de remarquer, que les deux courbes ES & FT sont absolument arbitraires, & qu'on les peut prendre à volonté; car, quelles que soient ces deux courbes, si nous y prenons les abscisses EQ = $x + ct$ & FR = $x - ct$, & que nous posions $y = QS + RT$, ou bien $y = n(QS + RT)$, il est certain que cette valeur satisfait à notre



équation ; ce qu'il seroit aussi aisé de prouver indépendamment de l'analyse, que je viens de développer. Or, ce qui est le principal, ces deux courbes appliquées de la manière enseignée, satisfont également, soit qu'elles soient exprimibles par quelque équation, ou qu'elles soient tracées d'une manière quelconque, de sorte qu'elles ne puissent être assujetties à aucune équation. Le Lecteur est prié de réfléchir bien sur cette circonstance, qui contient le fondement de l'universalité de ma solution, contestée par M. d'Alembert.

XXXI. Mais voyons maintenant, de quelle condition doivent être ces deux courbes, ou la nature des deux fonctions Φ & Ψ , afin que les premières propriétés de la corde soient maintenues. Or d'abord il faut, que posant $x = 0$, l'appliquée y évanouisse toujours, de quelque durée que soit le tems t : soit donc $x = 0$, & il faut qu'il soit :

$$\Phi(ct) + \Psi(-ct) = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi(-ct) = -\Phi(ct)$$

d'où l'on voit que la fonction exprimée par Ψ est égale à celle qui est exprimée par Φ , & que prenant les abscisses négatives, les appliquées deviennent aussi négatives en conservant les mêmes valeurs. Les deux courbes ES & FT se réduisent donc à une seule courbe, qui doit être telle, qu'aux abscisses négatives réponde une branche semblable à celle qui répond aux abscisses positives ; mais qu'elle tombe de l'autre côté de l'axe. Si donc Φ marque une telle fonction, que j'ai nommée autrefois impaire, puisqu'elle ne contient que des puissances impaires de la quantité, dont elle est fonction, notre équation sera : $y = \Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)$.

XXXII. L'autre condition exige, que posant $x = a$, la valeur de y évanouisse également, quelque quantité que puisse avoir le tems t : il faut donc qu'il soit : $\Phi(a + ct) + \Phi(a - ct) = 0$.

La courbe doit donc être telle, que si l'on prend l'abscisse $= a$, & qu'on y ajoute, ou en retranche la même quantité quelconque, les appliquées, qui répondent à deux telles abscisses soient égales, mais affectées



affectées de divers signes. Cette courbe aura donc non seulement autour du point, où est pris le commencement des abscisses, des branches alternativement semblables, mais aussi autour du point, où se termine l'abscisse $= a$. De là il s'enfuit, comme j'ai fait voir, qu'elle doit avoir une infinité de tels points éloignés entr'eux du même intervalle $= a$, auprès desquels les branches de la courbe foyent de part & d'autre alternativement semblables.

XXXIII. Si l'on examine plus exactement les raisons, sur lesquelles je viens de fonder l'identité des fonctions Φ & Ψ , & qu'on fasse surtout attention, que les deux courbes ne sont assujetties à aucune loi, on s'appcevra aisément, que l'égalité $\Psi(-ct) = -\Phi(ct)$ pourroit aussi avoir lieu, sans que les deux fonctions fussent égales. Mais il faut encore avoir égard à une autre circonstance renfermée dans la proposition du problème, qui exige absolument cette égalité des deux fonctions. On suppose que la courbe commence son mouvement du repos; donc il faut que, posant le tems $t = 0$, la vitesse

de chaque point de la corde, qui est exprimée par $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ évanouisse.

Or ayant trouvé $y = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)$, la différentiation fournit $\left(\frac{dy}{dt}\right) = c\Phi'(x + ct) - c\Psi'(x - ct)$.

Posons donc $t = 0$, & il faut qu'il soit $\Phi'(x) = \Psi'(x)$, d'où l'identité des fonctions Φ' & Ψ' & partant aussi des fonctions Φ & Ψ s'enfuit ouvertement. Nous n'avons donc qu'une seule courbe, qui nous servira de règle pour déterminer le mouvement de la corde.

XXXIV. Cette courbe doit donc être telle, comme elle est présentée dans la troisième figure: si AB représente la longueur de la corde $= a$, la courbe ADB s'étendra de l'un & l'autre côté à l'infini, en sorte que la portion $AD'B'$ soit égale & semblable à la courbe ADB , & de l'autre côté de même la branche $B'D'A$ soit égale & sem-

Fig. 3.



semblable à la branche BDA. Or la courbe ADB est absolument arbitraire, comme j'ai déjà fait voir; & il n'importe si elle est régulière, ou comprise dans quelque équation, ou si elle est irrégulière, ou tracée d'une manière quelconque. Ayant donc décrit une telle courbe ADB quelconque, qui passe par les points A & B, on n'a qu'à réitérer la description de la même courbe à l'infini, tant vers la droite que vers la gauche, en la posant alternativement au dessus & au dessous de l'axe, de sorte que partout les bouts semblables soient joints ensemble; ainsi en A on joigne la même courbe ADB par le bout A, & en B par le bout B, tout comme j'en ai enseigné la construction dans mon Mémoire sur cette matière.

XXXV. Ayant donc décrit une telle courbe quelconque, elle nous découvrira toujours un mouvement, dont la corde est susceptible. Car posant $t = 0$, nous en connoissons d'abord la figure, que la corde doit avoir au commencement, pour que ce mouvement s'ensuive. Puisque nous avons pour un tems quelconque t ,

$$y = n \Phi(x + ct) + n \Phi(x - ct)$$

prenant pour n une fraction assez petite, afin que les appliquées dans la figure de la corde demeurent toujours quasi infiniment petites, nous en tirerons pour la figure initiale de la corde cette équation :

$$y = n \Phi(x) + n \Phi(x) = 2n \Phi(x)$$

c'est à dire, prenant sur notre courbe l'abscisse $AP = x$, l'appliquée PM prise $2n$ fois nous donnera l'appliquée pour la figure initiale de la corde, qui convient à l'abscisse x . Donc, si les appliquées de la courbe AMB sont assez petites, on pourra prendre $n = \frac{1}{2}$, & la figure arbitraire ADB elle-même représentera la figure initiale de la corde.

XXXVI. Réciproquement donc, dès qu'on connoit la figure initiale, qu'on aura donnée à la corde avant que de la relâcher, rien ne sera plus aisé que de décrire notre courbe infinie $B'D'ADB'D$ &c. qui
nous



nous fera connoître le mouvement, que la corde poursuivra. On tracera la courbe $AMDB$, égale & semblable à la figure initiale de la corde, & on en réitérera la construction, tant vers la gauche au delà du point A , que vers la droite au delà du point B , alternativement au dessus & au dessous de l'axe, en sorte que partout les bouts qu'on a joints ensemble soient les mêmes. Cette construction a toujours lieu, de quelque nature que soit la figure initiale proposée de la courbe, & il ne s'agit ici que de la portion ADB ; laquelle quand elle-même auroit d'autres continuations de part & d'autre en vertu de sa nature, elles n'entrent en aucune considération. Ainsi, si la figure ADB étoit un arc de cercle, sans se soucier de la continuation naturelle du cercle, on répétera la description de ce même arc de cercle ADB à l'infini alternativement au dessus & au dessous de l'axe; & la même règle a toujours lieu, de quelque nature que puisse être la figure initiale de la corde.

XXXVII. Les différentes parties semblables de cette courbe ne sont donc liées entr'elles par aucune loi de continuité, & ce n'est que par la description, qu'elles sont jointes ensemble. Par cette raison il est impossible, que toute cette courbe soit comprise dans quelque équation, à moins que par hasard la figure ADB ne soit telle, que sa continuation naturelle entraîne toutes les autres parties réitérées; & c'est le cas, où la figure ADB est la trochoïde Taylorienne, ou selon *M. Bernoulli* un mélange de plusieurs telles trochoïdes. C'est aussi selon toute apparence la raison, pourquoi *Mrs. Bernoulli* & *d'Alembert* ont cru, que le problème n'étoit résolvable que dans ces cas. Mais, de la manière que je viens de conduire la solution, il n'est pas nécessaire, que la courbe directrice soit exprimée par quelque équation, & la seule considération du trait de la courbe suffit à nous faire connoître le mouvement de la corde, sans l'affujettir au calcul. Je ferai aussi voir, que ce mouvement n'est pas moins régulier, que si la figure initiale étoit une trochoïde, & par conséquent la régularité du



mouvement ne peut être alléguée en faveur des trochoïdes à l'exclusion de toutes les autres courbes, comme M. *Bernoulli* semble le soutenir.

XXXVIII. Or, pour déterminer par cette méthode le véritable mouvement de la corde, supposez que sa figure initiale ait été la courbe *AMB* (Fig. 4.), & il s'agit de déterminer la figure que la corde aura à chaque tems proposé de *t* secondes, depuis le commencement du mouvement. Pour cet effet qu'on décrive par la description réitérée de cette même courbe *AMB*, la courbe directrice *AMDB*, (Fig. 3.) continuée de part & d'autre à l'infini, comme j'ai enseigné cy-dessus; & pour connoître le mouvement du point *M*, qui se fait par hypothèse dans la droite *MP*, qu'on prenne dans la directrice (Fig. 3.) de part & d'autre du point *P* les intervalles $PQ = PR = ct$, & ayant tiré les appliquées *QS* & *RT*, qu'on prenne *Pm* (Fig. 4.) égale à la semi-somme de ces appliquées, ou $Pm = \frac{1}{2}(QS + RT)$; & le point *m* fera le lieu, où le point de la corde *M* se trouvera après le tems *t*. De là il fera aisé de juger de la vitesse du point *m*, en comparant son lieu avec celui, où il se trouvera à l'instant suivant.

XXXIX. Si l'on prend le tems *t* de tant de secondes, qu'il devienne $ct = a$, alors il faut prendre de part & d'autre du point *P* les intervalles $PQ' = PR' = a = AB$; & il est évident qu'il y aura $BQ' = B'R' = AP$, & partant les appliquées *Q'S'* & *R'T'* égales entr'elles. Donc, après ce tems $t = \frac{a}{c}$ le point de la corde *M* se trouvera de l'autre côté de l'axe *AB* en *N*, de sorte que $PN = Q'S'$: d'où il est évident qu'après ce tems toute la corde aura la figure *ANB* égale à la figure *B'T'DA*, & partant aussi égale à la figure initiale *AMB*, mais dans une situation renversée, de sorte que la figure *ANB* soit semblable à la figure *BMA*. Puisque les tangentes en *S'* & *T'* sont également inclinées à l'axe, en reculant les points *Q'* & *R'* infiniment peu également, la somme des



des appliquées demeurera la même, & partant après le tems $\frac{a}{c} + dt$ le point M de la corde fera encore en N: donc, lorsque la corde fera parvenue dans la situation ANB, elle n'aura plus de mouvement.

XL. Une vibration ayant donc commencé par l'état initial AMB, elle finira par l'état ANB, & partant le tems de cette vibration fera $= \frac{a}{c}$ secondes, & il est évident que toutes les autres vibrations suivantes feront de la même durée. Pour mieux connoître ce tems, on n'a qu'à se rappeler, que nous avons mis c pour la quantité $\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$; donc le tems d'une vibration de la corde fera $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes; & cette expression paroît plus propre à nous faire connoître ce tems, que la longueur d'un pendule simple isochrone. Il faut remarquer ici, que M marquant le poids de la corde, & F la force tendante aussi expressible par un poids, ces deux quantités M & F sont homogènes entr'elles, de même que les deux quantités a & g , dont celle-là marque la longueur de la corde, & celle-cy la hauteur, par laquelle un corps pesant tombe dans une seconde, qui est de 15 $\frac{1}{2}$ pieds de Rhin. De là on connoitra promptement le nombre de vibrations, que la corde rend dans une minute seconde, car ce nombre fera $= \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$.

XLI. Il est certain qu'après le tems $t = \frac{a}{c}$ la corde parvienne dans la situation ANB; mais il pourroit bien arriver, qu'elle s'y fût trouvée déjà pendant ce tems une ou plusieurs fois, & dans ces cas le tems d'une vibration se réduiroit à la moitié, ou au tiers, ou à quelque autre partie aliquote. Cela dépend de la figure initiale qu'on aura donnée à la corde, laquelle, lorsqu'elle n'a qu'un ventre, comme dans la quatrième figure, le tems d'une vibration fera sans aucun doute



Fig. 5. $= \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{M\sigma}{2Fg}}$ secondes. Mais, si la figure initiale de la corde avoit deux ventres égaux AEC, CFB, comme dans la cinquième figure, & que la partie AEB fut égale & semblable à la figure BFC, on voit par notre construction, que le point C demeurerait toujours en repos, & que le mouvement de la corde seroit le même que celui d'une corde de la moitié de longueur, & d'une tension égale. Or il faut pour produire ces vibrations deux fois plus rapides, que le nœud de la figure initiale C se trouve précisément au milieu de la longueur, & que les deux ventres AEC, BFC, soient égaux & semblables entr'eux : car sans cette condition le point C ne resteroit point immobile.

XLII. Ce que M. *Bernoulli* a remarqué sur le mélange de deux ou plusieurs trochoïdes, est également applicable à toutes les autres courbes imaginables. Car, quelle que soit la figure initiale de la corde AMB fig. 4. elle peut servir d'axe à une autre figure semblable à la fig. 5 : & celle-cy pourroit encore servir d'axe à d'autres figures semblables à plusieurs ventres. Dans ces cas le son total de la corde sera un mélange de plusieurs sons, dont l'un seroit l'octave, les autres la douzième, la quinzième, la dix-septième, & ainsi de suite. Ce mélange de sons rendus par une corde à la fois, que M. *Bernoulli* a le premier si heureusement expliqué, n'est donc pas un effet si essentiel de la combinaison des trochoïdes Tayloriennes, qu'il ne puisse également être produit par une semblable combinaison d'autres courbes quelconques. Et quand on fait réflexion à la manière, dont on est accoutumé de frapper les cordes, il est très probable, qu'elles ne prennent jamais la figure des trochoïdes, ni qu'elles y approchent de plus en plus : puisque tous les phénomènes, que M. *Bernoulli* allégué, peuvent être également l'effet de toute autre figure quelconque.

XLIII. Il me semble que ces réflexions sont suffisantes à mettre ma solution à l'abri de toutes les objections, qui peuvent l'avoir renduë suspecte à M. *Bernoulli*, & surtout à M. d'*Alembert*. Celui-cy n'ayant allé-



allégué aucune raison, s'est contenté d'avertir les Lecteurs de mon Mémoire, qu'ils ne s'imaginassent pas, que ma solution étoit si générale que je l'avois donnée, & qu'elle ne s'étendoit pas à des figures quelconques, qu'on auroit données à la corde au commencement. Mais *M. Bernoulli* semble soutenir, que pour la production des vibrations isochrones il faille absolument que la force accélératrice soit toujours proportionnelle à l'espace parcouru, jusqu'au lieu naturel. Selon ce sentiment, ayant trouvé en général la force accélératrice $= -\frac{Fa}{M} \cdot \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, il faudroit la poser proportionnelle à la distance y , pour avoir une telle équation $-\frac{Fa}{M} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{y}{c}$, dont l'intégrale, puisque la considération du tems n'y entre plus, seroit $y = n \sin x \sqrt{\frac{M}{Fac}}$, & pour que l'appliquée évanouisse aussi en posant $x = a$, il faudroit qu'il fut $\sqrt{\frac{M}{Fac}} = \frac{\lambda\pi}{a}$, marquant par λ un nombre entier quelconque. On auroit donc $c = \frac{Ma}{\lambda\lambda\pi\pi F}$, d'où résultent en effet toutes les trochoïdes Tayloriennes.

XLIV. Mais, outre que cette supposition seroit aussi contraire à la combinaison de deux ou plusieurs trochoïdes, que *M. Bernoulli* reconnoit pourtant dans le mouvement d'une corde, je remarque que cette hypothese est absolument arbitraire, & qu'une infinité d'autres forces sont aussi propres à produire l'isochronisme dans le mouvement des cordes. Si la force accélératrice devoit uniquement dépendre de l'appliquée y , de sorte qu'elle fut toujours la même à la même distance y , quelque grande qu'ait été l'excursion de la corde, je conviens qu'il n'y en auroit pas d'autres propres à procurer l'isochronisme, que celle qui seroit proportionnelle à la distance y . Mais, dès qu'on accorde, que cette force pourroit aussi dépendre du plus grand éloignement, on ne sauroit



plus disconvenir, qu'une infinité d'autres forces ne fut aussi propre à ce dessein. Or *M. Bernoulli* a fait voir lui-même, qu'il peut y avoir de l'isochronisme en des mouvemens, où la force sollicitante du corps, n'est pas simplement proportionnelle à la distance; & les manieres qu'il rapporte, ne sont qu'un cas particulier de la méthode générale, dont j'envisage ici le mouvement des cordes.

XLV. Tout ce que je viens de dire, ne regarde que les cordes, qui sont de la même épaisseur par toute leur étendue; & je conviens aisément, que si l'épaisseur de la corde étoit variable, il feroit impossible d'en déterminer le mouvement aussi généralement, que j'ai fait ici pour les cordes également épaisses. Mais ce n'est pas l'incommensurabilité des tems de diverses vibrations, dont la même corde est susceptible, qui arrête la solution, comme *M. Bernoulli* semble l'insinuer. C'est plutôt par une imperfection de l'analyse même, qu'il n'est pas possible de construire l'équation differentio-differentielle, qui renferme alors le mouvement. Car, comme pour les cordes d'une épaisseur uniforme j'ai trouvé cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{F a}{2M} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, qui a admis une construction générale; ainsi les cordes d'une épaisseur variable conduisent à une telle équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = X \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où *X* est une certaine fonction de *x*, qui dépend de l'épaisseur. Or, puisqu'il ne paroît pas, de quelle nature doit être la fonction *y*, pour qu'elle satisfasse à cette équation en général, c'est la cause véritable que la détermination du mouvement de ces cordes semble surpasser nos forces: cependant il n'est pas difficile de donner des solutions particulieres pour plusieurs cas, semblables à celles qui sont tirées des trochoïdes pour les cordes uniformément épaisses.

