1754

Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite

Leonhard Euler

SUR
LE MOUVEMENT DE L'EAU
PAR DES TUYAUX DE CONDUITE,
PAR M. EULER.

I.

Je me propoſe ici de déveloper par les principes de l'Hydrodynamique le cas, où l'on ſe ſert des pompes pour refouler l'eau dans les tuyaux de conduite, qui la dégorgent enfin dans un réſervoir ſitué à une certaine hauteur au deſſus du niveau de l'eau. L'action des pompes produit alors un double effet ; car pendant qu'on leve le piſton, l'eau monte par le tuyau aſpirant, & remplit le corps de pompe en y entrant par la ſoupape, qui ſe trouve au fond de la pompe : enſuite, lorsque le piſton eſt repouſſé en bas, cette ſoupape ſe ferme, & une autre, qui a fermé jusqu'ici la communication avec le tuyau de conduite, s'ouvre ; & c'eſt par cette ouverture que l'eau eſt refoulée du corps de la pompe dans le tuyau de conduite ; qui devenant par cette action réïterée enfin plein d'eau, la dégorge dans le réſervoir : & alors le tuyau de conduite fournit au réſervoir autant d'eau, que les pompes en attirent par leurs tuyaux aſpirans.

II. La force, qui agit ſur les pompes, étant donnée avec le tuyau de conduite, on aura à conſidérer deux queſtions, dont la ſolution eſt de de la derniere importance dans l'Hydraulique. Dans la premiere on demande la quantité d'eau, que les pompes ſeront capables de fournir au réſervoir pendant un tems donné. L'autre queſtion roule ſur les forces, que tant les corps de pompes, que les tuyaux de conduite, ont à ſoutenir pendant que la machine jouë. La ſolution de l'une & de l'autre de ces queſtions eſt abſolument néceſſaire dès qu'on a formé le projet d'une machine de cette nature: car il eſt toujours fort important de ſavoir d'avance, combien une telle machine ſera capable de fournir d'eau dans le réſervoir, afin que ſi elle ne répond pas aux intentions, qu'on s'eſt formées, on puiſſe changer de projet, avant qu'on ait fait les dépenſes pour ſon exécution.

III. L'autre queſtion n'eſt pas moins importante; car, dés qu'on aura trouvé la machine projettée, propre aux deſſeins qu'on s'en eſt propoſés, il faut ſavoir les forces, que tant la machine que les tuyaux de conduite auront à ſoutenir, pour y régler la ſolidité des pompes & des tuyaux. Sans cette connoiſſance on risque de leur donner ou trop ou trop peu de ſolidité; or l'un & l'autre eſt toujours un défaut fort conſidérable. Car une trop grande ſolidité ne ſert qu'à augmenter inutilement les dépenſes, quoiqu'elle ne ſoit pas d'ailleurs nuiſible à la deſtination de la machine. Mais ſi l'on fait les pompes ou les tuyaux de conduite trop foibles, ne pouvant pas réſiſter aux efforts qu'ils ont à ſoutenir, ils crèveront, & toute la machine en devient inutile. Pour prévenir donc ce grand inconvénient, il faut abſolument qu'on ſache aſſez préciſément les forces, auxquelles tant les pompes que les tuyaux ſeront aſſujettis, afin qu'on ſoit état de leur donner la juſte ſolidité, dont ils auront beſoin.

IV. Si l'on regarde le grand nombre des Auteurs, qui ont ecrit ſur l'Hydraulique, & qui ſe vantent pour la plus-part fort de la Théorie, on devroit croire, qu'ils euſſent tout à fait approfondi ces queſtions, qui renferment le fondement de la Théorie de la conduite des eaux. Mais ſi l'on examine de plus près tout ce qu'ils ont écrit

ſur

ſur cette matiere, on ne ſera pas peu ſurpris, qu'on n'y trouve rien du tout, qui pourroit ſervir à nous éclaircir ſur des queſtions ſi importantes. D'où l'on voit combien eſt défectueuſe la Théorie de l'Hydraulique, ſur laquelle on a établi jusqu'ici la Pratique; & que ceux-là n'ont pas tort, qui reprochent ordinairement à la Théorie, qu'elle n'eſt presque d'aucun uſage dans la Pratique, & qu'on ne ſauroit compter ſur le ſuccés d'une Machine projettée, quelque fondée qu'elle puiſſe être dans la Théorie, avant que l'expérience nous ait convaincu de ſa bonté. Mais il eſt auſſi clair que ces reproches ne touchent pas tant la vraie Théorie, que ſeulement la connoiſſance ſuperficielle qu'on honore mal à propos de ce titre.

V. Pour mieux comprendre ce défaut de la Théorie ordinaire, il faut diſtinguer deux cas: l'un où l'eau, qui fait l'objet d'une Machine hydraulique eſt encore en repos, & l'autre, où elle ſe trouve actuellement en mouvement. Le premier appartient à l'Hydroſtatique, dont les principes ſont déjà ſi conſtatés, qu'il n'y reſte plus aucun doute. Selon ces principes, ſi l'eau ſe trouve dans un tuyau montant en repos, on ſait que ce tuyau à chaque endroit porte le poids d'une colomne d'eau, dont la hauteur eſt égale à celle de l'eau dans le tuyau au deſſus de cet endroit; & ſi cette eau doit être ſoutenue par une force, qui agit ſur le piſton de la pompe, qui a refoulé l'eau dans ce tuyau montant, cette force doit égaler le poids d'un cylindre d'eau, dont la baſe eſt égale à celle du piſton, & la hauteur égale à celle de l'eau dans le tuyau au deſſus de la baſe du piſton: & à cette même force ſera aſſujettie la cavité de la pompe.

VI. De là on comprend, que tandis que la force, qui agit ſur le piſton pour le pouſſer en bas, n'eſt pas ſupérieure à celle que je viens d'indiquer, elle ne ſera capable que d'entretenir l'eau en équilibre, en empêchant qu'elle ne retombe: & il ſera impoſſible que cette force imprime à l'eau le moindre mouvement pour la pouſſer plus haut dans le tuyau, ou la faire dégorger dans le réſervoir. Donc, pour que l'eau monte actuellement, & qu'elle se décharge dans le réservoir, il faut que la force, qui agit sur le piston soit plus grande, que dans le cas précédent, & on comprend d'abord que plus cette force sera augmentée, plus aussi elle sera capable de fournir d'eau dans le reservoir: dans ce cas il est évident que la pompe soutiendra un plus grand effort, & par conséquent aussi le tuyau, par lequel l'eau est obligée de monter.

VII. Mais on ne trouve dans tous les livres, qui traitent cette matiere, aucune régle, par laquelle on puisse connoitre, (l'excès de la force, qui pousse le piston, sur celle qui est requise pour le cas d'équilibre, étant donné,) quelle sera la vitesse, dont l'eau sera poussée par le tuyau, ni quelle sera la force, qu'elle exerce sur le tuyau. Les Auteurs ne touchent presque point du tout ces questions, & pour ce qui regarde la derniere, il semble qu'ils pensent, que la pression sur le tuyau est à peu près toujours la même, que si l'eau étoit en équilibre, & sur la quantité de cette pression ils reglent l'épaisseur, qu'il faut donner aux tuyaux pour être assés forts à y résister. Cependant, avertis sans doute par des expériences fâcheuses, qu'ils ont éprouvées, ils conseillent de donner aux tuyaux considérablement plus d'épaisseur, que leur régle n'exige: & par là ils avouënt eux-mêmes, combien peu fondée est leur Theorie. Or pour le mouvement même de l'eau, on observe partout un profond silence, de sorte qu'il semble que les Auteurs n'ont pas voulu se hazarder à décider rien sur cet article.

VIII. Mais on cessera d'être surpris de cette négligence des Auteurs Hydrauliques, si l'on remarque, que les principes de l'Hydrostatique peuvent être expliqués par la simple Geometrie, avec le secours de l'Analyse élémentaire; mais qu'il n'en est pas de même des principes de l'Hydraulique, où l'on traite du mouvement actuel de l'eau. Car, pour découvrir ces principes, il faut absolument recourir à l'Analyse des infinis, & pour faire l'application de ces principes à quantité de cas, l'Analyse même des infinis, quelque cultivée qu'elle puisse paroître

déjà,

déjà, ne l'eſt pas encore aſſés, & il s'en faut beaucoup, pour nous mettre en état, de déveloper ces cas. Donc, ſi l'on conſidere, que ſans le ſecours de l'Analyſe des infinis, il eſt abſolument impoſſible de faire les moindres progrés dans l'Hydraulique, on ne s'étonnera plus, qu'on ne trouve presque rien dans tous les Auteurs, qui ont traité cette matiere, qui nous puiſſe fournir des éclairciſſemens ſolides.

IX. Or, quoiqu'il y ait longtems, qu'on a fait la découverte de l'Analyſe des infinis, il a falu par ſon ſecours porter les principes de la Mecanique à un plus haut degré de clarté, avant qu'on fût en état de s'attacher avec ſuccés à l'Hydraulique. C'eſt principalement à M. *Daniel Bernoulli*, à qui nous ſommes redevables des premieres lumieres dans cette Science, qu'il a ſi heureuſement dévelopées dans ſon excellent Traité ſur l'Hydrodynamique, où il s'eſt ſervi avec tant de ſuccés du principe de la Conſervation des forces vives. Enſuite, ce principe ayant été conteſté par pluſieurs Mathematiciens, qui n'en pénétrerent pas la force, feu M. ſon Père a traité cette matiere avec autant de ſuccés par le ſeul moyen des premiers principes de la Mecanique, que perſonne ne peut revoquer en doute: & depuis M. d'*Alembert* a produit une methode tout particuliere pour parvenir au même but. D'où l'on voit, que la connoiſſance ſolide, que nous avons déjà de la vraie Théorie de l'Hydraulique, n'eſt encore rien moins que générale, & qu'elle doit être tout à fait inconnuë à ceux, qui traitent ordinairement cette matiere ſans le ſecours de l'Analyſe des infinis.

X. Comme cette Science n'a presque point de bornes, on ne ſera pas ſurpris, ſi pluſieurs cas, qu'on rencontre dans la pratique, ne ſont pas encore aſſés dévelopés, & j'y puis rapporter à juſte titre le cas, que je me propoſe d'examiner ici. Car, quoique les Auteurs allégués ayent déjà conſideré le mouvement de l'eau par des tuyaux d'une figure quelconque, on y chercheroit pourtant envain l'application au cas déterminé, que j'ai en vuë: du moins les Praticiens n'en ſauroient tirer presqu'aucun ſecours pour diriger leurs ouvrages. Je tâcherai donc de dèveloper cette matiere en ſorte, que ceux auſſi, qui s'appliquent uniquement à la pratique, y puiſſent trouver les éclairciſſemens, qui leur ſont néceſſaires. Mais auſſi employerai-je une methode differente de celles, dont on s'eſt ſervi jusqu'ici, ce qui ne manquera pas de faciliter les recherches, qu'on a encore à entreprendre dans cette Science.

Fig. 1. XI. Soit ABCD le corps de pompe, dans lequel le piſton joüe, dont je ſuppoſe la cavité cylindrique, & on ſait que le piſton doit être un cylindre de même diametre pour remplir exactement la cavité de la pompe. Avec la pompe ſoit uni en bas DE le tuyau montant DEYZGH, par lequel l'eau eſt refoulée de la pompe, pour ſe dégorger en haut à FH à gueule bée dans le reſervoir I. Je ſuppoſe ce tuyau d'une figure quelconque, mais en ſorte que ſes ſections faites perpendiculairement ſur ſa longueur ſoient partout circulaires, dont les diametres varient ſelon une raiſon quelconque par rapport aux divers endroits de ce tuyau. Comme ce tuyau n'eſt pas ſuppoſé cylindrique, on ne pourra pas dire que ſes ſections circulaires ſoient perpendiculaires à ſes côtés; mais elles le feront plutôt à une ligne, qu'on conçoit tirée par tous les centres de ces cercles, & qu'on nomme la ligne centrique. Pour ne pas trop embrouïller la figure, ſoit DYG cette ligne centrique, à laquelle les transverſales DE, YZ, yz, GH, ſoient partout perpendiculaires, qui expriment en même tems les diametres du tuyau dans ces points-là.

XII. Que la hauteur BE repréſente le jeu du piſton, de ſorte que dans le tems de l'aſpiration il monte depuis E jusqu'en AB, & enſuite lorsqu'il refoule, qu'il ſoit pouſſé depuis AB jusqu'en E. Pendant le tems de l'aſpiration la communication entre la pompe & le tuyau montant étant fermée par le moyen d'une ſoupape placée en DE, l'action du piſton ne fait qu'emplir d'eau toute la cavité de la pompe jusqu'en AB; qui y monte par une ſoupape pratiquée au fond de la pompe CD. Depuis le piſton étant repouſſé en bas, cette ſoupape au fond CD ſe ferme, & l'autre en DE s'ouvre, pour donner paſſage à l'eau l'eau refoulée par le tuyau montant, qui la dégorge enfin dans le réservoir I. De cette manœuvre il est clair, que pendant chaque descente du piston, il se doit dégorger dans le réservoir précisément autant d'eau, qu'il faut pour remplir la pompe.

XIII. Pour faire l'application de la Théorie à ce cas, faisons les dénominations suivantes :

Soit le diametre de la cavité de la pompe $AB = a$;
Le jeu du piston ou la hauteur $BE = b$;
le Diametre du trou DE, par lequel le tuyau communique avec la pompe $= c$.
Et pour répresenter la figure du tuyau DEGH, qu'on mene une ligne horizontale DF pour servir d'axe ;
& ayant pris une abscisse quelconque $DX = x$
soit la hauteur du point Y, qui y répond, ou $XY = y$,
& l'arc répondant dans la courbe centrique $DY = s$
où il est à remarquer que y sera une certaine fonction de x,
& que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$
De plus soit au point Y le diametre du tuyau $YZ = z$
& pour le dernier bout G H du tuyau
soit la distance horizontale $DF = f$
la hauteur verticale $FG = g$
& le diametre de l'orifice $GH = h$.
Cela posé, je m'en vais considérer les problèmes suivans.

PROBLEME I.

XIV. *Le piston étant poussé en bas par une force donnée, trouver à chaque instant le mouvement de l'eau & la pression, qu'elle exerce sur tous les points du tuyau.*

SOLUTION.

Soit K un poids égal à la force, qui pousse le piston en bas; or il convient pour la commodité du calcul, de réduire cette force au

 poids

poids d'une colomne d'eau, dont la base soit égale à celle du piston, dont le diametre AB est posé $= a$. Soit k la hauteur de cette colomne, & posant la raison du diametre à la circonférence $= 1 : \pi$, la base du piston sera $= \frac{1}{4}\pi aa$, & partant le volume de cette colomne $= \frac{1}{4}\pi aak$; donc K sera le poids d'une masse d'eau, dont le volume $= \frac{1}{4}\pi aak$: & cette force K fera le même effet, que si le piston étoit pressé en bas par le poids d'une colomne d'eau de la hauteur $= k$. Maintenant je suppose qu'au commencement la pompe ait été remplie d'eau jusqu'à AB, & le tuyau jusqu' à GH, & que dans le premier instant l'eau ait été en repos par tout, comme cela arrive effectivement; car, après que le piston est levé jusqu'en AB, il faut qu'il demeure en repos pendant un instant, avant qu'il puisse commencer la descente

Qu'aprés un tems $= t$, le piston ait été réduit jusqu' à MN, ayant descendu par la hauteur $AM = BN = r$: & il est clair que la quantité d'eau refoulée pendant ce tems dans le réservoir sera $= \frac{1}{4}\pi aar$. Soit de plus la vitesse, dont le piston continue de descendre en MN, $= \sqrt{v}$, ou que v marque la hauteur, dont un grave en tombant acquiert la même vitesse: donc, puisque le piston parcourra avec cette vitesse $= \sqrt{v}$ pendant le differentiel du tems dt, le différentiel de l'espace $Mm = Nn = dr$, il sera $dt = \frac{dr}{\sqrt{v}}$, & $dr = dt\sqrt{v}$.

Si nous regardons la vitesse de l'eau en MN comme connuë, nous en pourrons assigner sa vitesse partout, tant dans la pompe que dans le tuyau DG: car entant que la pompe a la même largeur jusqu'à E, la vitesse de l'eau sera aussi la même $= \sqrt{v}$, & en chaque point du tuyau Y, la vitesse sera d'autant plus grande ou plus petite, plus que la largeur du tuyau en Y, qui est exprimée par $\frac{1}{4}\pi zz$, sera ou plus petite ou plus grande que la largeur de la pompe $= \frac{1}{4}\pi aa$. De là

la

la viteſſe de l'eau en YZ ſera $= \frac{aa}{zz}\sqrt{v}$: & la viteſſe dont l'eau ſera dégorgée en GH ſera $= \frac{aa}{hh}\sqrt{v}$.

La viteſſe de la ſection d'eau en YZ étant $= \frac{aa}{zz}\sqrt{v}$, pendant le tems dt elle parcourra dans le tuyau l'eſpace $YY' = \frac{aa}{zz}dt\sqrt{v} = \frac{aa}{zz}dr$ à cauſe de $dr = dt\sqrt{v}$: ainſi pendant que le piſton descend par l'eſpace $Mm = Nn = dr$, la ſection d'eau ZY parcourra l'eſpace YY' & parviendra en Y' Z'.

Or le piſton étant parvenu en mn, ſa viteſſe ſera $= \sqrt{(v + dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$: & pour trouver alors la viteſſe de la ſection Y'Z' il faut avoir égard à ſa largeur, qui dépend de la longueur de la partie du tuyau $DY = s$. Car puiſque z peut être regardé comme une fonction de s, poſons $dz = S\,ds$. Donc, après que la ſection YZ aura parcouru l'eſpace ds, ſon diametre deviendra $= z + S\,ds$; mais dans nôtre cas l'eſpace parcouru eſt $= \frac{aa}{zz}dr$, donc le diametre de la largeur en Y'Z' ſera $= z + \frac{aa}{zz}S\,dr$: & partant la viteſſe en Y' Z' ſera $= \frac{aa}{(z + \frac{aa}{zz}S\,dr)^2}\sqrt{(v + dv)}$, & la hauteur duë à cette viteſſe $= \frac{a^4}{(z + \frac{aa}{zz}S\,dr)^4}(v + dv)$. Or il eſt:

$\frac{1}{(z + \frac{aa}{zz} S dr)^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{4aa}{z^7} S dr$: donc cette hauteur sera $=$ $\left(\frac{a^4}{z^4} - \frac{4a^6}{z^7} S dr\right)(v + dv)$, & surpassera par conséquent celle en YZ qui est $= \frac{a^4}{z^4} v$ de la particule $\frac{a^4}{z^4} dv - \frac{4a^6}{z^7} S v dr$.

Cette particule $\frac{a^4}{z^4} dv - \frac{4a^6}{z^7} S v dr$ sera donc l'effet de la force accelératrice, dont la section YZ est sollicitée selon $YY' = \frac{aa}{zz} dr$. Car, si nous posons cette force accélératrice $= V$, on sait par les principes de Méchanique, que l'incrément de la hauteur duë à la vitesse, qui est $\frac{a^4}{z^4} dv - \frac{4a^6}{z^7} S v dr$, est égal au produit de la force accélératrice V par l'espace parcouru $\frac{aa}{zz} dr$, ce qui donne cette équation

$$\frac{aa}{zz} V dr = \frac{a^4}{z^4} dv - \frac{4a^6}{z^7} S v dr, \text{ qui se réduit à}$$

$$V = \frac{aa}{zz} \cdot \frac{dv}{dr} - \frac{4a^4}{z^5} S v.$$

Il s'agit donc maintenant de trouver la force accélératrice qui agit sur la section YZ: or pour cet effet il faut donner à cette section une épaisseur infiniment petite comme Yy, pour avoir la couche d'eau $YZzy$. Puisque nous avons nommé $DX = x$: $XY = y$, & $DY = s$: il sera $Xx = dx$; $xy = y + dy$ & $Yy = ds$: d'où la masse de cette couche sera $= \frac{1}{4} \pi zz ds$.

Les

Les forces qui agiſſent actuellement ſur cette couche ſont, premièrement ſon propre poids exprimé par ſa maſſe $= \frac{1}{4}\pi zzds$, dont la direction eſt la verticale YX : de là on tirera la force qui agit ſelon la direction yY, $= \frac{1}{4}\pi zzdy$, qui eſt contraire à l'accélération trouvée.

Outre cela cette couche ſe trouve du côté YZ ſollicitée par la preſſion de l'eau ſuivante, & du côté yz de la preſſion de l'eau précédente : & ſi ces deux preſſions étoient égales, l'une détruiroit l'effet de l'autre, & il n'en réſulteroit aucune accélération ou retardation. Que la hauteur p exprime la preſſion de l'eau ſur la ſurface YZ, & p étant une fonction de x ou s, la preſſion ſur la ſurface yz ſera exprimée par la hauteur $p + dp$.

Pour expliquer cette maniere d'exprimer les preſſions de l'eau, il faut remarquer que p exprime la hauteur à laquelle l'eau jailliroit, ſi l'on faiſoit en Z un trou infiniment petit. Ou, ce qui revient au même, la preſſion de l'eau en YZ contre les parois du tuyau ſera équivalente à une colomne d'eau dont la hauteur $= p$: d'où l'on voit, que quand nous aurons trouvé la valeur de p, elle nous marquera en même tems les efforts, que le tuyau aura à ſoutenir en chacun de ſes points.

Cette colomne d'eau de la hauteur $= p$ agiſſant ſur la baſe YZ, qui eſt $= \frac{1}{4}\pi zz$, donnera une force égale au poids d'un volume d'eau $= \frac{1}{4}\pi zzp$: dont la couche ſera pouſſée dans la direction YY′: or de l'autre côté yz elle ſera repouſſée par la force, qui vaut un volume d'eau $= \frac{1}{4}\pi zz(p + dp)$: où il faut remarquer, que quoique la baſe yz ne ſoit peut-être pas égale à la baſe YZ, on ne doit pas réfléchir à cette différence ; car, quoique les baſes ſoient inégales, on ſait que des preſſions exprimées par des égales hauteurs ſont toujours en équilibre : ainſi la preſſion ſur yz ne ſurpaſſe celle ſur YZ qu'entant que $p + dp$ eſt plus grand que p, quelque grande que ſoit la différence des baſes YZ & yz.

De ces deux forces résultera donc une force motrice, qui pousse la couche $YZzy$ en arrière, & qui sera $= \frac{1}{4}\pi zz dp$: à laquelle ajoutant la force, qui résulte du poids de la couche qui étoit $= \frac{1}{4}\pi zz dy$, cette couche sera conjointement poussée en arrière par la force motrice $\frac{1}{4}\pi zz (dp + dy)$, qui étant divisée par la masse même de la couche $\frac{1}{4}\pi zz ds$, donne la force accélératrice $= \frac{dp + dy}{ds}$, qui étant contraire à la direction YY', il faut égaler V à $-\frac{dp - dy}{ds}$.

De là nous obtiendrons cette équation

$$dp + dy = -\frac{aa\,ds}{zz} \cdot \frac{dv}{dr} + \frac{4a^4 S\,ds}{z^5} \cdot v$$

qui servira à déterminer la vraye valeur de la pression p. Pour cet effet il faut regarder le mouvement de l'eau dans la pompe par l'élément $Mm = Nn = dr$ avec les quantités r, v, dr & dv, qui en dépendent, comme constantes, pour ne faire varier que les quantités qui regardent la position du point Y. Et l'intégrale de nôtre équation prise sous ces conditions nous donnera la pression de l'eau sur le tuyau dans l'instant, que le piston se trouve en MN, & qu'il y ait tant la vitesse, que l'accélération, que nous venons de supposer.

Puisque nous avons supposé $dz = S\,ds$, nôtre équation prendra cette forme :

$$dp = -dy - \frac{aa\,dv}{dr} \cdot \frac{ds}{zz} + 4a^4 v. \frac{dz}{z^5}$$

où les facteurs $\frac{aa\,dv}{dr}$ & $4a^4 v$ étant considérés comme constans, l'intégrale sera

$$p = C - y - \frac{aa\,dv}{dr} \int \frac{ds}{zz} - a^4 v. \frac{1}{z^4}$$

Pour

Pour déterminer la valeur de cette constante C, prenons la valeur du terme intégral $\int\frac{ds}{zz}$ depuis la surface MN, où les pressions de l'eau commencent : car on peut regarder la partie de la pompe MNCD comme continuë avec le tuyau, & puisqu'il est $EN = b - r$, & le diametre de la pompe $= a$, la valeur de $\int\frac{ds}{zz}$ pour cette partie de la pompe sera $= \frac{b-r}{aa}$; & que $\int\frac{ds}{zz}$ marque la valeur de cette intégrale depuis le commencement du tuyau DE jusqu'à la section YZ, où l'on cherche la pression : il sera donc

$$p = C - y - \frac{aadv}{dr}\cdot\frac{b-r}{aa} - \frac{aadv}{dr}\int\frac{ds}{zz} - \frac{a^4 v}{z^4}.$$

Posant donc cette intégrale $\int\frac{ds}{zz} = o$, on trouvera la pression à l'endroit DE, où il devient $y = o$ & $z = c$; ainsi la pression en DE sera $= C - \frac{aadv}{dr}\cdot\frac{b-r}{aa} - \frac{a^4 v}{c^4}$: Mais si nous montons jusqu'à la surface MN, où devient la hauteur $y = b - r$, l'amplitude $z = a$, & l'intégrale entiere $\frac{b-r}{aa} + \int\frac{ds}{zz}$ evanouït pour ce cas : d'où la pression à la surface MN résulte $= C - b + r - v$. Or cette pression doit être précisément la même, dont l'eau en MN est pressée par le piston ; cette pression donc étant représentée par la hauteur k, nous aurons $k = C - b - r + v$, d'où se détermine la constante C ainsi

$$C = k + b - r + v.$$

En général donc la pression de l'eau à une section quelconque YZ du tuyau montant, sera

$$p = k + b - r + v - y - \frac{(b-r)dv}{dr} - \frac{aadv}{dr}\int\frac{ds}{zz} - \frac{a^4 v}{z^4}$$

ou bien $p = k - y + (b-r)\left(1 - \frac{dv}{dr}\right) - \frac{aadv}{dr}\int\frac{ds}{zz} + v\left(1 - \frac{a^4}{z^4}\right)$

d'où l'on pourra déterminer la preſſion de l'eau ſur le tuyau dans tous ſes points, pourvu qu'on ſache la viteſſe, dont le piſton deſcend en MN & ſon accélération. Car le diametre du tuyau z dépendant de la longueur du tuyau $DY = s$, puiſque la figure du tuyau eſt ſuppoſée connuë, z ſera donné par s, & de là on aura l'intégrale $\int\frac{ds}{zz}$.

Pour trouver la preſſion au bout même GH du tuyau, il faut prendre la valeur de l'integrale $\int\frac{ds}{zz}$ pour toute la longueur du tuyau depuis DE jusqu'en GH; cette valeur ſe réduiſant à une quantité conſtante, ſoit H cette quantité, de ſorte que $\int\frac{ds}{zz} = H$ lorsqu'on transporte le point indéfini Y jusqu'en G. Alors on aura de plus $y = g$ & $z = h$. De là donc la preſſion de l'eau à l'extrémité GH du tuyau ſera exprimée par

la hauteur $= k - g + (b-r)\left(1 - \frac{dv}{dr}\right) - \frac{Haadv}{dr} + v\left(1 - \frac{a^4}{h^4}\right)$.

Or comme ici en GH l'eau ſe dégorge, il n'y ſauroit plus être de preſſion, & partant il faut que cette derniere expreſſion ſoit $= 0$; ce qui nous conduit à une équation, par laquelle on pourra déterminer la viteſſe même du piſton, quand il a été pouſſé jusqu'à MN. Cette équation ſera donc

$$k - g + (b-r)\left(1 - \frac{dv}{dr}\right) - \frac{Haadv}{dr} + v\left(1 - \frac{a^4}{h^4}\right) = 0.$$

Nous

Nous voilà donc parvenus à une équation, par laquelle le mouvement même de l'eau, ou celui du piston eſt déterminé. Cette équation ſe réduit en cette forme :

$$dv(b + \mathrm{H}aa - r) - vdr\left(1 - \frac{a^4}{h^4}\right) = (k - g + b - r)\, dr$$

ou
$$dv + \frac{vdr\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right)}{b + \mathrm{H}aa - r} = \frac{(k - g + b - r)\, dr}{b + \mathrm{H}aa - r}$$

dont la réſolution n'a aucune difficulté, puisque la variable v n'y monte qu'à une ſeule dimenſion. Je ne m'arrêterai donc pas à l'évolution de cette intégration; puisqu'il eſt à préſent aiſé de déterminer la viteſſe du piſton pour chaque moment de ſon jeu.

XV. Quoique cette derniere équation ſoit abſolument intégrable, il importe pourtant fort peu d'en ſavoir l'intégrale, puisque l'expreſſion devient ſi compliquée, qu'on n'en ſauroit tirer beaucoup de fruit, à moins qu'on n'en faſſe l'application à un cas déterminé : car en général les conſéquences, qu'on en pourroit conclure, ſeroient trop compliquées de toutes les circonſtances, qui entrent dans le calcul, pour qu'elles puſſent être employées au ſecours de la Pratique. Mais comme on ne ſe ſert ordinairement de cette maniere d'élever de l'eau, que lorsque le réſervoir eſt fort élevé au deſſus du niveau de l'eau, d'où la pompe puiſe : ce ſera principalement à ce cas, auquel je m'en vais appliquer la ſolution trouvée. A' cette fin je ſuppoſerai, que le reſervoir eſt incomparablement plus haut, que la hauteur de la pompe, & alors les formules auxquelles on parvient, ne deviendront pas ſeulement beaucoup plus ſimples, mais elles fourniront auſſi des régles generales, qui ſeront de la derniere importance dans la diſpoſition & la conduite des ouvrages de cette eſpece.

PROBLEME II.

XVI. *Si la hauteur du réservoir* FG *est extrémement grande, déterminer le mouvement & les pressions de l'eau, lorsqu'elle est poussée par le tuyau montant* DG; *la force qui agit sur le piston de la pompe étant donnée.*

SOLUTION.

Toutes les dénominations demeurant les mêmes comme dans le problème précédent, nous n'avons qu'à considérer la quantité $FG = g$ & celle qui en dépend H, comme incomparablement plus grandes que b & r. Dans ce cas donc la pression à un endroit quelconque du tuyau Y sera $p = h - y - \frac{aadv}{dr}\int\frac{ds}{zz} + v\left(1 - \frac{a^4}{z^4}\right)$

& le mouvement du piston sera déterminé par cette équation

$$Haadv + vdr\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right) = (k - g)\,dr$$

qui se réduit à celle-cy

$$dr = \frac{Haadv}{k - g - v\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right)}; \text{ dont l'intégrale est}$$

$$r = \frac{Haa}{\frac{a^4}{h^4} - 1}\, l\, \frac{k - g}{k - g - v\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right)}$$

puisque v doit évanouïr lorsque r devient $= o$. Comme ce terme $v\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right)$ sera fort petit par rapport à la grande quantité $k - g$, il sera à peu près

$$l\, \frac{k - g}{k - g - v\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right)} = - l\left(1 - \frac{v}{k - g}\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right)\right) = \frac{v}{k - g}\left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right)$$

&

& partant assés exactement $r = \frac{Haav}{k-g}$, d'où nous aurons

$$v = \frac{(k-g)r}{Haa}, \quad \& \quad \frac{dv}{dr} = \frac{k-g}{Haa}.$$

De là nous obtiendrons la pression au point Y

$$p = k - y - \frac{(k-g)}{H}\int\frac{ds}{zz} + \frac{(k-g)r}{Haa}\left(1 - \frac{a^4}{z^4}\right).$$

Mais ayant négligé les termes qui contiennent r, il faut aussi ici effacer le dernier, de sorte qu'il soit

$$p = k - y - \frac{(k-g)}{H}\int\frac{ds}{zz}$$

& partant la pression au même point Y seroit toujours la même, en quelque endroit de son jeu que le piston se trouve.

Mais ces déterminations ne sont vrayes qu'à peu près: & pour approcher davantage des véritables, on n'a qu'à considérer l'équation générale, qui posant $\frac{aa}{hh} = n$, de sorte que $n : 1$ marque le rapport de la base du piston à l'amplitude de l'orifice GH, se réduit à

$$Haadv + (b-r)\,dv + v\,dr\,(nn-2) = (k-g)\,dr + (b-r)\,dr$$

d'où prenant l'intégrale par approximation, on trouve

$$v = \frac{(k-g)r}{Haa} + \frac{(2b-r)r}{2Haa} - \frac{(k-g)br}{HHa^4} - \frac{(nn-2)(k-g)rr}{2HHa^4}$$
$$- \frac{bbr}{HHa^4} - \frac{(nn-3)brr}{2HHa^4} + \frac{(nn-3)r^3}{6HHa^4} + \frac{(k-g)bbr}{H^3a^6} + \frac{(nn-2)(k-g)brr}{H^3a^6}$$
$$+ \frac{(nn-2)(nn-3)(k-g)r^3}{6H^3a^6}$$

d'où l'on aura

$\frac{dv}{dr} =$

$$\frac{dv}{dr}=\frac{k-g}{Haa}+\frac{b-r}{Haa}-\frac{(k-g)b}{HHa^4}-\frac{(nn-2)(k-g)r}{HHa^4}-\frac{bb}{HHa^4}-\frac{(nn-3)br}{HHa^4}$$
$$+\frac{(nn-3)rr}{2HHa^4}+\frac{(k-g)bb}{H^3a^6}+\frac{2(nn-2)(k-g)br}{H^3a^6}+\frac{(nn-2)(nn-3)(k-g)rr}{2H^3a^6}.$$

Maintenant la pression au point Y étant en général

$$p=k-y+b-r-(b-r)\frac{dv}{dr}-\frac{aadv}{dr}\int\frac{ds}{zz}-v\left(\frac{a^4}{z^4}-1\right)$$

elle sera après les substitutions faites

$$p=k-y+b-r-\frac{(k-g)(b-2r)}{Haa}-\frac{aa(k-g)r}{Hz^4}$$
$$-\frac{1}{H}\left(k-g+b-r-\frac{(k-g)b}{Haa}-\frac{(nn-2)(k-g)r}{Haa}\right)\int\frac{ds}{zz}.$$

Or pour le mouvement même on peut se contenter de cette formule

$$v=\frac{(k-g)r}{Haa}+\frac{(2b-r)r}{2Haa}-\frac{(k-g)br}{HHa^4}-\frac{(nn-2)(k-g)rr}{2HHa^4},$$

ou $v=\frac{r}{Haa}\left(k-g+b-\frac{(k-g)b}{Haa}\right)-\frac{rr}{2Haa}\left(1+\frac{(nn-2)(k-g)}{Haa}\right).$

Cependant si l'élevation du reservoir est extrémement grande, il suffira de se servir de ces formules :

$$v=\frac{(k-g)r}{Haa}, \quad \& \quad p=k-y-\frac{(k-g)}{H}\int\frac{ds}{zz}.$$

XVII. Le piston descendra donc dans ce cas presque d'un mouvement uniformement acceleré : or quand il sera parvenu en bas jusqu'en E, ayant fait le chemin BE $=b$, sa vitesse se trouvera de cette formule

$$v=\frac{b(k-g)}{Haa}+\frac{bb}{2Haa}-\frac{(k-g)bb}{HHa^4}-\frac{(nn-2)(k-g)bb}{2HHa^4},$$

qui

qui ſe réduit à $\bar{v} = \frac{b(k-g)}{Haa} + \frac{bb}{2Haa} - \frac{nn(k-g)bb}{2HHa^4}$

& ce ſera la plus grande viteſſe que le piſton peut acquérir : d'où l'on voit, qu'elle ſera d'autant plus petite, plus la valeur de la formule H ſera grande. Or H étant la valeur de l'intégrale $\int \frac{ds}{zz}$ priſe ſur toute la longueur du tuyau DEGH, on voit que cette quantité H ſera d'autant plus grande, plus le tuyau ſera long, & plus il ſera étroit. Enſuite puisque $n = \frac{aa}{hh}$, où h marque le diametre de l'orifice en GH, on connoit que plus cet orifice ſera petit, plus auſſi la viteſſe du piſton en ſera diminuée.

XVIII. Pour la preſſion de l'eau dans le tuyau à un endroit quelconque YZ, au premier inſtant, que le piſton eſt pouſſé en bas, lorsqu'il ſe trouve encore en AB, & que $r = o$, cette preſſion ſera

$$p = k + b - y - \frac{b(k-g)}{Haa} - \frac{1}{H}\left(k + b - g - \frac{b(k-g)}{Haa}\right)\int \frac{ds}{zz}.$$

Mais lorsque le piſton ſera parvenu en bas jusqu'en E où $r = b$, cette preſſion ſera

$$p = k - y + \frac{b(k-g)}{Haa} - \frac{aab(k-g)}{Hz^4} - \frac{1}{H}\left(k - g - \frac{(nn-1)(k-g)b}{Haa}\right)\int \frac{ds}{zz}.$$

Donc, pour l'endroit le plus bas DE du tuyau montant, où $y = o$, $z = c$, & $\int \frac{ds}{zz} = o$, la preſſion ſera pour le commencement de la deſcente du piſton, où $r = o$.

$$p = k + b - \frac{b(k-g)}{Haa}$$

& pour la fin de la deſcente, où $r = b$, la preſſion ſera

$$p = k + \frac{b(k-g)}{Haa} - \frac{aab(k-g)}{Hc^4}.$$

Or en général la pression en cet endroit sera

$$p = k + b - r - \frac{(k-g)}{Haa}\left(b - 2r + \frac{a^4}{c^4}r\right)$$

Cette pression augmente donc pendant la descente du piston, s'il est $\frac{(k-g)}{Haa}\left(2 - \frac{a^4}{c^4}\right) > 1$, ou si $Haa < (k-g)\left(2 - \frac{a^4}{c^4}\right)$ ce qui ne peut arriver, à moins qu'il ne soit $a^4 < 2c^4$: or la pression diminuë pendant que le piston descend si $Haa > (k-g)\left(2 - \frac{a^4}{c^4}\right)$. Le premier cas aura donc lieu si $\frac{a^4}{c^4} < 2 - \frac{Haa}{k-g}$, & l'autre si $\frac{a^4}{c^4} > 2 - \frac{Haa}{k-g}$. D'où il est clair, que plus l'ouverture DE sera grande, plus sera aussi grande la pression vers la fin de la descente du piston. Mais si b & r sont des quantités fort petites par rapport aux autres, la pression en DE sera constamment la hauteur $= k$.

PROBLEME III.

XIX. *La hauteur du réservoir* FG $= g$ *étant extrémement grande par rapport à la hauteur de la pompe, déterminer le tems, pendant lequel le piston est poussé en bas depuis* AB *presqu'en* E, *lorsqu'il est poussé par la force constante* $=$ K.

SOLUTION.

Ayant réduit la force K au poids d'un volume d'eau $= \frac{1}{4}\pi aak$, nous avons trouvé la hauteur duë à la vitesse du piston, lorsqu'il parvient en MN.

$$v = \frac{(k-g)r}{Haa}\left(1 + \frac{2b-r}{2(k-g)} - \frac{bb}{Haa} - \frac{(nn-2)r}{2Haa}\right)$$

d'où

d'où nous tirons

$$\frac{1}{\sqrt{v}}=\sqrt{\frac{Haa}{(k-g)r}}-\frac{(2b-r)\sqrt{Haa}}{4(k-g)\sqrt{(k-g)r}}+\frac{b\sqrt{Haa}}{2Haa\sqrt{(k-g)r}}+\frac{(nn-2)\sqrt{r}}{4\sqrt{Haa(k-g)}}.$$

Or l'elément du tems étant $dt=\frac{dr}{\sqrt{v}}$, nous aurons le tems

$$t=\frac{2\sqrt{Haar}}{\sqrt{(k-g)}}-\frac{b\sqrt{Haar}}{(k-g)\sqrt{(k-g)}}+\frac{r\sqrt{Haar}}{6(k-g)\sqrt{(k-g)}}+\frac{b\sqrt{r}}{\sqrt{Haa(k-g)}}$$
$$+\frac{(nn-2)r\sqrt{r}}{6\sqrt{Haa(k-g)}}.$$

Donc, mettant $r=b$, le tems entier de la descente du piston sera

$$t=\frac{2\sqrt{Haab}}{\sqrt{(k-g)}}-\frac{5b\sqrt{Haab}}{6(k-g)\sqrt{(k-g)}}+\frac{(nn+4)b\sqrt{b}}{6\sqrt{Haa(k-g)}},$$

& si nous exprimons la hauteur du jeu du piston b en millièmes parties du pied de Rhin, ce tems sera

$$\frac{1}{125}\cdot\frac{\sqrt{Haab}}{\sqrt{(k-g)}}\left(1-\frac{5b}{12(k-g)}+\frac{(nn+4)b}{12\,Haa}\right)\text{ secondes.}$$

Donc, si θ marque le tems d'une descente du piston exprimé en minutes secondes, & que la hauteur du jeu b soit donnée en millièmes parties du pied de Rin, il sera

$$\theta=\frac{\sqrt{Haab}}{125\sqrt{(k-g)}}\left(1-\frac{5b}{12(k-g)}+\frac{(nn+4)b}{12\,Haa}\right).$$

Et si la hauteur de la pompe b est fort petite par rapport aux quantités $k-g$ & Haa, ce tems sera assés exactement

$$\theta=\frac{\sqrt{Haab}}{125\sqrt{(k-g)}}=\frac{\sqrt{b}}{125}\cdot\frac{a\sqrt{H}}{\sqrt{(k-g)}}.$$

Or le volume d'eau dégorgé dans ce tems dans le réservoir étant celui de la capacité de la pompe sera $=\frac{1}{4}\pi aab$.

PROBLEME IV.

XX. *Si deux pompes égales, dont les pistons sont aussi poussés par des forces égales, agissent alternativement, de sorte que pendant qu'une aspire l'autre refoule, & que toutes les deux refoulent l'eau dans le même tuyau montant* DEGH, *pour la dégorger dans le reservoir* I *élevé à une hauteur fort grande, déterminer le tems du jeu des pistons, la pression que le tuyau a à soutenir, & la quantité d'eau, qui sera fournie dans le réservoir pendant une heure.*

SOLUTION.

Soit comme auparavant le diametre des pompes $= a$
la hauteur du jeu des pistons $= b$,
& K la force qui agit sur l'un & l'autre piston, pendant qu'il refoule; & $\frac{1}{4}\pi aak$ donne un volume d'eau, dont le poids soit égal à la force K. De plus soit g la hauteur du réservoir FG; & que posant le diametre du tuyau montant, à un endroit quelconque YZ $= z$, & la longueur du tuyau DY $= s$, soit H la valeur de l'intégrale $\int \frac{ds}{zz}$ prise par toute la longueur du tuyau depuis DE jusqu'à GH. Enfin, soit le diametre de l'orifice GH $= h$ & $\frac{aa}{hh} = n$. Puisque ces deux pompes ne refoulent l'eau que l'une après l'autre, il n'y en aura jamais plus d'une, qui pousse l'eau dans le tuyau montant, & puisque ces deux pompes agissent alternativement, l'eau sera sans cesse refoulée dans le tuyau montant. Ainsi ces deux pompes seront équivalentes à une seule, qui refouleroit continuellement. Donc, si nous posons le tems du jeu entier d'une pompe $= t$ secondes, le tems de la descente sera $= \frac{1}{2}t$, que nous avons nommé $= \theta$; & partant si nous exprimons la hauteur du jeu b en milliémes parties du pied de Rhin, nous aurons:

$$t = \frac{2\sqrt{Haab}}{125\sqrt{(k-g)}}\left(1 - \frac{5b}{12(k-g)} + \frac{(nn+4)b}{12Haa}\right)$$

&

& dans ce tems sera dégorgé dans le réservoir autant d'eau qu'il faut pour remplir toutes les deux pompes: le volume de cette eau sera donc $= \frac{1}{2}\pi aab$. Donc, si dans le tems de t secondes, il est fourni dans le réservoir un volume d'eau $= \frac{1}{2}\pi aab$; dans le tems d'une heure ou de 3600 secondes, il y sera fourni le volume d'eau $= \frac{1800\,\pi aab}{t}$, & remettant pour t sa valeur, ce volume d'eau sera

$$= \frac{900.\,125\ \pi aab\,\sqrt{(k-g)}}{\left(1 - \frac{5b}{12(k-g)} + \frac{(nn+4)b}{12Haa}\right)\sqrt{Haab}}$$

où il faut remarquer, qu'on n'a à exprimer b en millièmes parties du pied de Rhin que dans le terme $\sqrt{Haab}$: pour les autres termes & les autres quantités il est indifférent, de quelle mesure on se serve. Enfin la pression, dont l'eau agit sur le tuyau, sera à un endroit quelconque YZ, à peu près

$$p = k - y - \frac{(k-g)}{H}\int\frac{ds}{zz}:$$

faisant abstraction des inégalités qui s'y trouvent pendant chaque descente des pistons; & lesquelles seront d'autant moins considérables, plus le réservoir sera élevé.

COROLL. I.

XXI. Si la hauteur du jeu des pistons b est donnée en pieds de Rhin, pour qu'on n'ait pas besoin de la réduire en millièmes, on n'aura qu'à diviser le coëfficient numerique 900.125 par $\sqrt{1000}$, qui deviendra $= 3557$. Donc, si toutes les quantités sont données aussi en pieds, la quantité d'eau fournie dans le réservoir pendant une heure sera $= \frac{3557\,\pi\sqrt{aab}\,(k-g)}{\left(1 - \frac{5b}{12(k-g)} + \frac{(nn+4)b}{12Haa}\right)\sqrt{H}}$ pieds cubiques, & si

 nous

nous voulons négliger les petits termes du dénominateur, cette quantité d'eau sera $= 3557\,\pi\sqrt{\frac{aab(k-g)}{H}}$ pieds cubiques, ou bien $= 11176\sqrt{\frac{aab(k-g)}{H}}$ pieds cubiques.

COROLL. 2.

XXII. Si le tuyau montant DG est partout de la même largeur de sorte qu'il soit $c = z = h$, il sera $\int\frac{ds}{zz} = \frac{s}{hh} = \frac{s}{cc}$. Donc, si nous posons la longueur du tuyau entier DG $= l$, il deviendra $H = \frac{l}{hh} = \frac{l}{cc}$, & $n = \frac{aa}{cc}$. Dans ce cas donc la pression au point Y sera exprimée par la hauteur $p = k - y - \frac{(k-g)s}{l}$. Mais la quantité d'eau dégorgée dans une heure sera $= \dfrac{3557\,\pi\, ac\sqrt{\frac{b(k-g)}{l}}}{1 - \frac{5b}{12(k-g)} + \frac{(nn+4)b}{12\,nl}}$ pieds cubiques, ou bien de $11176\, ac\sqrt{\frac{b(k-g)}{l}}$ pieds cubiques.

COROLL. 3.

XXIII. Si nous regardons la force absolue K qui agit sur chacun des pistons, & que nous l'exprimions par le poids d'un volume d'eau en pieds cubiques, de sorte que K marque ce nombre de pieds cubiques, à cause de $K = \frac{1}{4}\pi aak$, nous aurons $k = \frac{4K}{\pi aa}$ & partant $k = g = \frac{4K - \pi aag}{\pi aa}$. Alors donc sera la pression $p = \frac{4K}{\pi aa} - y -$

−(4

$= \frac{(4K-\pi aag)s}{\pi aal}$, & la quantité d'eau fournie dans une heure ſera de

$$\frac{3557\,c\sqrt{\frac{\pi b(4K-\pi aag)}{l}}}{1-\frac{5\pi aab}{12(4K-\pi aag)}+\frac{(mn+4)b}{12nl}}$$ pieds cubiques, ou à peu près de $12611\,c\sqrt{\frac{b}{l}(K-\frac{1}{4}\pi aag)}$ pieds cubiques. De là on trouvera le tems t du jeu entier d'un piſton, pendant lequel il ſe dégorge $\frac{1}{2}\pi aab$ pieds cubiques: donc il ſera $t : \frac{1}{2}\pi aab = 3600 : 12611\,c\sqrt{\frac{b}{l}(K-\frac{1}{2}\pi aag)}$ d'où réſulte $t = \frac{1800\,\pi aab}{12611\,c\sqrt{\frac{b}{l}(K-\frac{1}{4}\pi aag)}}$ ſecondes, ou bien

$$t = \frac{0{,}4484\,aab}{c\sqrt{\frac{b}{l}(K-\frac{1}{4}\pi aag)}} = \frac{0{,}4484\,aa\sqrt{bl}}{c\sqrt{(K-\frac{1}{4}\pi aag)}}$$ ſecondes.

COROLL. 4.

XXIV. De ces formules il eſt auſſi clair, que pour que la force K ſoit capable de mettre l'eau en mouvement, & de la pouſſer dans le réſervoir, il faut qu'elle ſurpaſſe le poids d'un cylindre d'eau dont la baſe eſt égale à celle du piſton, & la hauteur eſt égale à celle dont le réſervoir eſt elevé au deſſus de la pompe; c'eſt à dire, il faut qu'il ſoit $K > \frac{1}{4}\pi aag$. Car ſi cette force eſt égale ou moindre que le poids dudit cylindre d'eau, elle ne ſera pas ſuffiſante pour faire jouër les pompes. Mais, lorsque la force K eſt plus grande que $\frac{1}{4}\pi aag$, nous voyons que la quantité d'eau, qui en ſera fournie dans le réſervoir dans un tems donné, ſera comme la racine quarrée de l'excés de la force K ſur $\frac{1}{4}\pi aag$; ainſi plus cet excés ſera grand, & plus d'eau ſera fournie dans le réſervoir.

XXV.

XXV. La conſidération des formules, que nous venons de trouver, fournit à la Pratique pluſieurs régles fort importantes, pour diſpoſer avantageuſement les pompes & le tuyau montant, afin que la même force, qui agit ſur les piſtons, fourniſſe dans le réſervoir la plus grande quantité d'eau, qu'il eſt poſſible. Or une machine de cette nature eſt eſtimée d'autant plus parfaite, plus d'eau elle eſt capable de fournir dans le réſervoir ; & pour cette raiſon il ſera utile de développer plus ſoigneuſement les principales régles, auxquelles nos formules conduiſent ; afin que ceux, qui ne ſont pas en état d'approfondir le calcul de la théorie, en puiſſent néanmoins tirer toutes les lumieres, dont il auront beſoin pour arranger le plus avantageuſement les ouvrages, à l'exécution deſquels ils ſe ſeront engagés.

REˊGLE I.

XXVI. *Pour que la même force, qui agit ſur les piſtons des pompes, ſoit en état de fournir dans le réſervoir la plus grande quantité d'eau, il faut avoir ſoin de faire le tuyau montant auſſi large qu'il ſera poſſible.*

Il y a conſidérablement à gagner de ce côté, puiſque nous voyons, que la quantité d'eau fournie dans une heure au réſervoir eſt proportionelle au diametre du tuyau montant. Ainſi, ſi l'on fait le diametre de ce tuyau deux fois plus grand, le réſervoir en recevra auſſi deux fois plus d'eau, & un tuyau d'un diametre triple y dégorgera trois fois plus d'eau dans le même tems. Donc, pour perfectionner ces ſortes de machines, les Praticiens ne pourront mieux employer leur ſavoir, que de chercher les moyens de ſe ſervir des tuyaux montans de la plus grande largeur qu'il ſoit poſſible. Il ſemble même qu'il ne ſera pas ſi difficile de réüſſir dans cette entrepriſe, pourvuqu'on renonce aux tuyaux de métal qui ne paroiſſent pas ſuſceptibles d'une trop grande largeur, & qu'on trouve moyen d'employer à leur place des tuyaux formés de poterie ou de maçonnerie, qui auroient la forme de cheminées, & qu'on pourroit alors rendre auſſi larges & auſſi forts, que les circonſtances exigent.

REMARQUE 1.

XXVII. Pour la preſſion, que le tuyau montant ſouffre, il faut principalement regarder celle, qu'il doit ſoutenir en bas, où il eſt joint avec la pompe: car comme c'eſt ici que la preſſion eſt la plus grande, c'eſt auſſi vers cet endroit-là que les tuyaux crêvent ordinairement, lorsqu'ils ne ſont pas aſſés forts. Et ſi les tuyaux ſont aſſés ſolides pour réſiſter aux efforts de la preſſion en bas, il n'y a pas à craindre, qu'ils crèvent en des endroits plus élevés: car ayant trouvé $p = \frac{4K}{\pi aa} - y - \frac{(4K - \pi aag)s}{\pi aal}$, à meſure que le tuyau monte, la preſſion diminuë par une double raiſon, puisqu'il y a deux termes y & $\frac{(4K - \pi aag)s}{\pi aal}$, qu'il faut alors retrancher de $\frac{4K}{\pi aa}$, qui exprime la preſſion en bas. Or, comme dans nôtre cas la preſſion en bas eſt la même, de quelque largeur que ſoit le tuyau montant, on comprend, que plus ce tuyau ſera large, plus il faut lui donner d'épaiſſeur: car il eſt conſtaté par l'expérience, que pour que deux tuyaux de différentes largeurs puiſſent réſiſter à la même preſſion, il faut que leurs épaiſſeurs ſoient dans la raiſon de leurs diametres. Donc, plus on élargit le tuyau montant ſelon la régle, plus il faut lui donner d'épaiſſeur; ainſi quand on double le diametre du tuyau, pour procurer une double quantité d'eau au reſervoir, on ſera obligé de doubler auſſi ſon épaiſſeur.

REMARQUE 2.

XXVIII. Il faut auſſi remarquer, que plus on augmente la largeur du tuyau montant, plus auſſi vîte les piſtons acheveront leur jeu; car dans la même raiſon, qu'on augmente le diametre du tuyau montant, le tems du jeu des piſtons ſera diminué; & partant la force qui agit ſur les piſtons, ſera obligée alors d'agir avec une plus grande viteſſe. Donc, quoique la force ſoit ſuppoſée la même, il faut pourtant un plus grand effort, pour la faire agir plus vite, & partant dans ce

 cas,

cas, ſi l'on veut parler exactement, on ne peut pas dire, que c'eſt la même force, qui fournit dans le réſervoir une plus grande quantité d'eau en même tems. Or cela dépend de la nature de la premiere force mouvante, de laquelle réſultent les forces, qui agiſſent immédiatement ſur les piſtons; & chaque eſpece de machine, qu'on veut employer pour cet effet, demande une recherche particuliere. Pour rendre cette remarque plus évidente, on n'a qu'à conſidérer le cas, où l'on met les piſtons en mouvement par l'action des hommes ou des animaux; car quelque grande que ſoit leur force, qu'ils ſont capables d'exercer ſur un objet, qui eſt en repos; dés que cet objet eſt mis en mouvement, & qu'il échape pour ainſi dire à leurs efforts, ils ne ſeront plus capables de pouſſer avec la même force; & plus que l'objet aura déjà acquis de viteſſe, moins auſſi de force ſeront-ils capables d'y appliquer. Et on comprend aiſément, que cet objet pourroit avoir un mouvement ſi vite, que ni les hommes ni les animaux ne ſeroient plus capables de le ſuivre, & à plus forte raiſon ils n'y pourroient plus exercer la moindre force. Si l'on ſe ſert de la force de l'eau ou du vent pour mettre la machine en mouvement, cette diminution de l'action réelle ſur les piſtons, par rapport à leur viteſſe, ſera différente, & dépendra de l'arrangement de toutes les parties de la Machine. Mais comme c'eſt une recherche d'une tout autre nature, je ne conſidérerai ici, que les forces qui agiſſent immédiatement ſur les piſtons.

RE'GLE II.

XXIX. *Pour fournir une plus grande quantité d'eau dans le réſervoir par le moyen de la même force, qui agit ſur les piſtons, il faut rendre le tuyau montant auſſi court, qu'il ſera poſſible. Par conſéquent, comme la hauteur du réſervoir eſt donnée, il faut faire le tuyau montant non ſeulement droit; mais auſſi ſa direction perpendiculaire, autant que les circonſtances le permettent.*

L'im-

L'importance de cette régle paroit de la formule, qui exprime la quantité d'eau fournie dans une heure : d'où nous voyons, que cette quantité est réciproquement comme la racine quarrée de la longueur du tuyau montant. Ainsi, si ce tuyau est quatre fois plus long, la quantité d'eau en sera réduite à la moitié ; & un tuyau neuf fois plus long ne fournira que le tiers. Donc, si l'elévation du réservoir I est donné avec le niveau DF, où les pompes doivent être établies, pour rendre le tuyau montant DG le plus court, qu'il sera possible, on doit placer les pompes près du point F perpendiculairement au dessous du réservoir, afin que le tuyau montant devienne perpendiculaire à l'horizon : dans ce cas sa longueur l sera égale à l'élevation du réservoir $FG = g$, qui est la plus petite valeur, que la longueur du tuyau puisse avoir : & ainsi l'endroit F sera la plus avantageuse place pour y établir les pompes. Plus on éloigne de cet endroit les pompes, & plus on perdra d'eau de la quantité, qui sera fournie dans le réservoir : & si on est obligé de placer les pompes à une distance considérable du point F, de sorte que le tuyau de conduite EG doive monter obliquement, on préviendra une perte ultérieure dans la quantité d'eau, si l'on évite toutes les courbures dans le tuyau montant, pour le conduire selon une ligne droite, ou sur un plan incliné depuis D jusqu'en G. Mais, quoique l'eau soit souvent fort éloignée du bas du reservoir F, il sera toujours plus avantageux de la conduire par un canal jusqu'au point F, pour y établir plutôt les pompes, qu'à un endroit plus éloigné. Car, quoique la construction d'un tel canal exige souvent des dépenses considérables, on gagne de l'autre côté aussi considérablement dans le racourcissement des tuyaux, dont la matiere, surtout lorsqu'on y employe du métal, coutera de beaucoup moins, que si l'on étoit obligé de donner aux tuyaux une si grande étenduë, & cela outre le profit, qu'on gagnera dans la quantité d'eau, qui sera fournie dans le réservoir.

REMARQUE 1.

XXX. Cependant nous voyons aussi des formules trouvées, qu'on n'est pas obligé de se tenir trop scrupuleusement à l'endroit F pour y mettre les pompes : car quoiqu'on s'écarte assés sensiblement de cet endroit, la perte qu'on en souffre dans la quantité d'eau élevée sera presque imperceptible. Supposons qu'on s'éloigne du point F de la moitié de la hauteur FG, de sorte que DF $= \frac{1}{2} g$, & si l'on dirige le tuyau montant DG selon une ligne droite, sa longueur sera $l = \sqrt{\frac{5}{4} gg} = g \sqrt{\frac{5}{4}}$; & la quantité d'eau fournie dans une heure sera comme $\frac{1}{\sqrt{g \sqrt{\frac{5}{4}}}}$, au lieu que si le tuyau montoit perpendiculairement, la quantité d'eau seroit comme $\frac{1}{\sqrt{g}}$; donc la quantité d'eau fournie dans le cas oblique sera à celle dans le cas perpendiculaire comme 1 à $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$, c'est à dire, comme 1 à 1,0574: de sorte qu'on ne perdroit par cette obliquité, qui est pourtant déjà asses considérable, qu'environ la dix-huitième partie : or, si l'on prenoit la distance DF $= \frac{1}{4} g$, on ne perdroit que la soixante-sixième partie de l'eau, qu'on auroit obtenu par la montée perpendiculaire. Mais dans les conduites fort obliques la perte est aussi très considérable ; ainsi, si la hauteur du reservoir étoit de 130 pieds, & que la longueur des tuyaux de conduite fût de 4500 pieds, de sorte que $g = 130$ & $l = 4500$, cette grande obliquité ne fourniroit que la sixième partie de la quantité d'eau, qu'on pourroit tirer par la même force, si l'on établissoit les pompes perpendiculairement au dessous du réservoir.

REMARQUE 2.

XXXI. Il est aussi à remarquer, comme dans la régle précedente, que plus on augmente par le racourcissement du tuyau montant, la quantité d'eau fournie au réservoir, plus aussi sera diminué le tems du

jeu

jeu des piſtons, qui deviendra plus vite dans la même raiſon. Ainſi les mêmes réfléxions, que je fis alors ſur l'augmentation des efforts, qui mettent la machine en mouvement, auront auſſi lieu ici. Mais la preſſion de l'eau ſur le tuyau en bas demeure la même, & partant, puisque la largeur du tuyau n'eſt plus regardée comme variable, on n'aura rien à changer dans ſon épaiſſeur, qui demeurera la même, ſoit que le tuyau monte plus ou moins obliquement.

XXXII. Ayant donc fait ces remarques, poſons pour rendre nôtre conſidération plus générale, qu'il doit être $K = \frac{\lambda}{4} \pi a a g$, où l'on fait, qu'il eſt $\lambda > 1$; & que pour quelque cas nous ayons trouvé $\lambda = \frac{3}{2}$; or, lorsqu'on a moins à craindre du côté de la force des tuyaux, on pourra faire $\lambda = 2$, ou $\lambda = 3$; ou bien $\lambda = 4$, & il ſemble qu'il n'eſt jamais avantageux d'exceder ce terme $\lambda = 4$, puisqu'on ne gagneroit plus presque rien dans la quantité d'eau élevée, au lieu qu'on perdroit conſidérablement du côté de la force des tuyaux. Poſant donc $K = \frac{\lambda}{4} \pi a a g$ ou $a = \sqrt{\frac{4K}{\lambda \pi g}}$, la quantité d'eau élevée pendant une heure ſera $= 12611 c \sqrt{\frac{(\lambda - 1) \pi a a g b}{4 l}} = 12611 c \sqrt{\frac{(\lambda - 1) K b}{\lambda l}}$ pieds cubiques: elle ſera donc par rapport à λ proportionnelle à $\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}$. Pour le tems du jeu des piſtons t, il ſera $t = \frac{0,4484\, a a \sqrt{b l}}{c \sqrt{\frac{\lambda - 1}{4} \pi a a g}} = \frac{0,4484\, a \sqrt{b l}}{c \sqrt{\frac{\lambda - 1}{4} \pi g}}$ ſecondes, & remettant pour a ſa valeur $\sqrt{\frac{4K}{\lambda \pi g}}$, on aura:

$t =$

$$t = \frac{1,7936}{\pi c g} \sqrt{\frac{K b l}{\lambda(\lambda-1)}} = \frac{0,5709}{c g} \sqrt{\frac{K b l}{\lambda(\lambda-1)}} \text{ fecondes ;}$$

donc ce tems fera proportionel à $\sqrt{\frac{1}{\lambda(\lambda-1)}}$. Enfin la preffion de l'eau fur le tuyau montant en bas, où elle eft la plus grande, vaudra la hauteur $p = \lambda g$. Pour mettre les différences qui réfultent des diverfes valeurs de λ plus clairement devant les yeux, pofons

1. Le diametre du pompes $a = \zeta \sqrt{\frac{K}{g}}$.
2. La quantité d'eau fournie dans une heure $= \eta c \sqrt{\frac{K b}{l}}$ pieds cub.
3. Le tems du jeu des piftons $t = \frac{\theta \sqrt{K b l}}{c g}$ fecondes
4. La preffion fur le tuyau en bas $p = \lambda g$

de forte qu'il foit

$$\zeta = \sqrt{\frac{4}{\lambda \pi}} : \eta = 12611 \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} ; \theta = \frac{0,5709}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}} ; \lambda = \lambda$$

& donnant à λ fucceffivement plufieurs valeurs, ces quantités recevront les valeurs exprimées dans la Table fuivante.

Valeur

Valeur de λ	Diametre des Pompes en pieds.	Quantité d'eau elevée dans 1 h. en pieds cubiques	Tems du Jeu des Pistons en secondes.	Pression sur le Tuyau en bas vaut la hauteur.
1, 00	1, 1283 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	0 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	$\infty \frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	1, 00 g
1, 25	1, 0093 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	5640 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	1, 0213 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	1, 25 g
1, 50	0, 9213 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	7281 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 6592 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	1, 50 g
1, 75	0, 8530 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	8256 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 4983 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	1, 75 g
2, 00	0, 7979 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	8917 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 4037 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	2, 00 g
2, 25	0, 7523 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	9400 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 3404 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	2, 25 g
2, 50	0, 7137 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	9786 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 2948 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	2, 50 g
2, 75	0, 6804 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	10060 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 2603 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	2, 75 g
3, 00	0, 6515 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	10297 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 2331 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	3, 00 g
3, 25	0, 6259 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	10493 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 2111 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	3, 25 g
3, 50	0, 6032 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	10658 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 1930 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	3, 50 g
3, 75	0, 5827 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	10800 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 1778 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	3, 75 g
4, 00	0, 5642 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	10921 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 1648 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	4, 00 g
10, 00	0, 3568 $\sqrt{\frac{K}{g}}$	11964 $c\sqrt{\frac{Kb}{l}}$	0, 0602 $\frac{\sqrt{Kbl}}{cg}$	10, 00 g

RE-

REMARQUE.

XXXIII. Cette Table pourra auſſi ſervir à déterminer le diametre des pompes, lorsque la ſolidité des tuyaux montans eſt donnée ; ou la force, à laquelle ils ſont capables de réſiſter : c'eſt un cas, qui a fort ſouvent lieu, puisqu'il n'eſt pas toujours poſſible de rendre les tuyaux montans auſſi forts qu'on veut ; & partant il faut régler dans ces cas les autres parties de la machine, en ſorte qu'on n'ait rien à craindre du côté de la force des tuyaux. Comme ſi le tuyau étoit capable de ſoutenir une force, exprimée par le triple de la hauteur du réſervoir au deſſus des pompes, on entendra que le diametre des pompes ne doit pas être moindre que $0,6515 \sqrt{\frac{K}{g}}$; il dépendra donc de la force, qui agit ſur les piſtons, à la racine quarrée de laquelle il eſt proportionel. Pour donner un exemple, ſi la hauteur g étoit de 100 pieds, & que la force K, qui agit ſur chaque piſton égalât le poids de 4 pieds cubiques d'eau, ou de 280 Livres, le diametre des pompes a ne devroit pas être moindre que $0,6515 \sqrt{\frac{4}{100}} = 0,1303$: donc, ſa quantité la plus petite ſeroit de 13 lignes ou parties centièmes d'un pied. Soit donc $a = 0,1303$, & la Table nous montre, que la quantité d'eau élevée dans une heure ſera $= 10297\, c \sqrt{\frac{4\,b}{l}}$ pieds cubiques ; pourvu que nous exprimions toutes les longueurs en pieds, comme nous venons d'exprimer la force K en pieds cubiques. Ayant ſuppoſé $g = 100$ pieds, la longueur du tuyau montant l, s'il eſt perpendiculaire à l'horizon, ſera auſſi de 100 pieds ; donc dans ce cas la quantité d'eau fournie dans une heure ſera $= 2059\, c \sqrt{b}$ pieds cubiques. Soit de plus la hauteur du jeu des piſtons $b = 1$ pied ; & le diametre du tuyau montant $c = \frac{1}{5}$ pieds, pour le rendre environ deux fois plus large que les pompes, & la quantité d'eau fournie dans une heure ſera environ de 412 pieds cubiques. Enſuite, puisque $K = 4$, $b = 1$, $g = l = 100$ & $c = \frac{1}{5}$, le tems du jeu des piſtons ſera

ſera $= \frac{0,2331 \sqrt{4.1.100}}{\frac{1}{5}.100} = \frac{20.\ 0,2331}{20} = 0,2331$ ſecondes, de ſorte que chaque piſton acheveroit ſon jeu en moins de la quatrième partie d'une ſeconde : or on comprend aiſément qu'une telle rapidité ne ſçauroit être exécutée dans la pratique : d'où il eſt clair, qu'il faut auſſi avoir égard au tems du jeu des piſtons, afin qu'il ne devienne pas trop rapide. Dans cette vuë je m'en vai regarder le tems du jeu des piſtons, comme donné, avec toutes les meſures de la machine pour en déterminer tant la force, qui doit agir ſur les piſtons, que celle que le tuyau doit ſoutenir en bas.

PROBLEME V.

XXXIV. *Le tems du jeu des piſtons étant donné, avec les meſures de toutes les parties de la machine deſtinée à élever de l'eau, trouver la force qui doit agir ſur les piſtons, & la preſſion, que le tuyau montant aura à ſoutenir en bas.*

SOLUTION.

Puisque nous regardons la machine même comme donnée, les quantités connuës ſeront :

1. Le diametre des pompes (qui ſont ſuppoſées deux) $= a$
2. La hauteur du jeu des piſtons $= b$
3. Le diametre du tuyau montant $= c$
   qui eſt ſuppoſé par tout de la même largeur.
4. La longueur du tuyau montant $= l$
5. La hauteur du tuyau montant $= g$
   qui eſt l'élevation du réſervoir au deſſus des pompes.

Enſuite le tems du jeu, pendant lequel chaque piſton acheve ſa montée & ſa deſcente, étant donné, ſoit ce tems $= t$ ſecondes. Les autres quantités étant données, on en trouvera d'abord la quantité d'eau, qui ſera dégorgée pendant une heure dans le réſervoir : car puiſque en t ſecondes il ſe dégorge la quantité $\frac{1}{2}\pi aab$, dans une heure ou en 3600 ſecondes il s'y dégorgera la quantité $= \frac{1800\pi aab}{t} = \frac{5654\, aab}{t}$ pieds cubiques. Outre cela l'équation

$$t = \frac{0,4484\, aa\sqrt{bl}}{c\sqrt{(K - \frac{1}{4}\pi aag)}}$$

donnera à connoître la force K, qui doit agir ſur chacun des piſtons en pieds cubiques d'eau : cette force ſera donc

$$K = \frac{1}{4}\pi aag + \frac{0,20106\, a^4 bl}{cctt}$$

D'où l'on trouvera la force de preſſion de l'eau dans le tuyau à un endroit quelconque YZ, dont la hauteur $YX = y$ & la longueur $DY = s$, cette force ſera exprimée par la hauteur

$$p = g - y + \frac{0,80424\, aabl}{\pi cctt} - \frac{0,80424\, aabs}{\pi cctt}$$

ou $$p = g + \frac{0,256\, aab}{cctt}(l - s) - y$$

Donc la preſſion au plus bas point du tuyau montant, c'eſt à dire en D, où $y = o$ & $s = o$ ſera $p = g + \frac{0,256\, aabl}{cctt}$.

COROLL. I.

XXXV. Nous voyons donc que la preſſion au plus bas point D du tuyau montant eſt non ſeulement toujours plus grande que la hauteur g, mais que l'excés eſt comme $\frac{aabl}{cctt}$. Cet excés eſt donc premièrement comme la capacité des pompes aab, multipliée par la longueur du tuyau montant, l; & enſuite réciproquement comme le quarré du diametre du tuyau montant c multiplié par le quarré du tems du jeu des piſtons.

CO-

COROLL. 2.

XXXIX. Donc plus la capacité des pompes sera grande tant par rapport à leur diametre & leur hauteur, plus sera aussi grande la pression de l'eau dans le tuyau : & plus ce tuyau sera long, plus aussi cette pression croîtra. Mais au contraire plus le tuyau montant sera large, & le jeu des pistons plus lent, plus petite deviendra la pression.

COROLL. 3.

XL. Connoissant la pression, qui agit sur le tuyau en bas, que nous venons d'indiquer par la hauteur p, on en connoîtra d'abord la force qui agit sur les pistons: car cette force K sera $= \frac{1}{4} \pi a a p$: ou la force K sera égale au poids d'une masse d'eau, dont le volume $= \frac{1}{4} \pi a a p$.

COROLL. 4.

XLI. Si nous nommons la quantité d'eau élevée dans une heure $=$ M, de sorte que $M = \frac{5654\, a a b}{t}$, ayant $a a b = \frac{M t}{5654}$, la pression sur le tuyau en bas sera $p = g + \frac{0,256\, M l}{5654\, c c t}$. Donc, plus la quantité d'eau dégorgée sera grande, plus aussi la pression p deviendra grande.

REMARQUE.

XLII. Il peut donc arriver, que la pression, que le tuyau montant a à soutenir, soit plusieurs fois plus grande que la simple hauteur g, à laquelle l'eau doit être élevée ; à laquelle seroit pourtant égale la pression si l'eau étoit en repos : & dans ce cas il est fort à craindre que le tuyau ne créve, quoiqu'il soit considérablement plus fort, qu'il ne faudroit pour porter le simple poids de la colomne d'eau, qui y pese. Donc, puisque dans la pratique on ne fait ordinairement attention, qu'à la hauteur de l'élevation de l'eau, pour en régler l'épaisseur des tuyaux montans, ces cas sont fort dangereux pour ceux qui ont entrepris la construction d'une telle machine ; puisque les tuyaux ne manqueront pas de crêver, quoiqu'on ait crû avoir pris toutes les précautions pour prévenir cet accident facheux. Je rapporterai un exemple, d'où l'on verra combien la pression sur le tuyau peut devenir grande au delà de la hauteur simple de l'eau dans le tuyau.

EXEMPLE.

XLIII. La machine proposée avoit ces mesures.

Le diametre des pompes	$= \frac{4}{3}$ pieds	$=$	a
La hauteur du jeu des pistons	$= 4.$ pieds	$=$	b
Le diametre du tuyau montant	$= \frac{3}{4}$ pieds	$=$	c
La longueur du tuyau	$= 3000$ pieds	$=$	l
La hauteur du tuyau	$= 60$ pieds	$=$	g.

Chaque jeu des pistons s'achevoit en 6 secondes. Cela posé, on demande la pression, que le tuyau dût soutenir en bas.

Ayant donc $t = 6''$ & posant cette pression équivalente à la hauteur p, on aura :

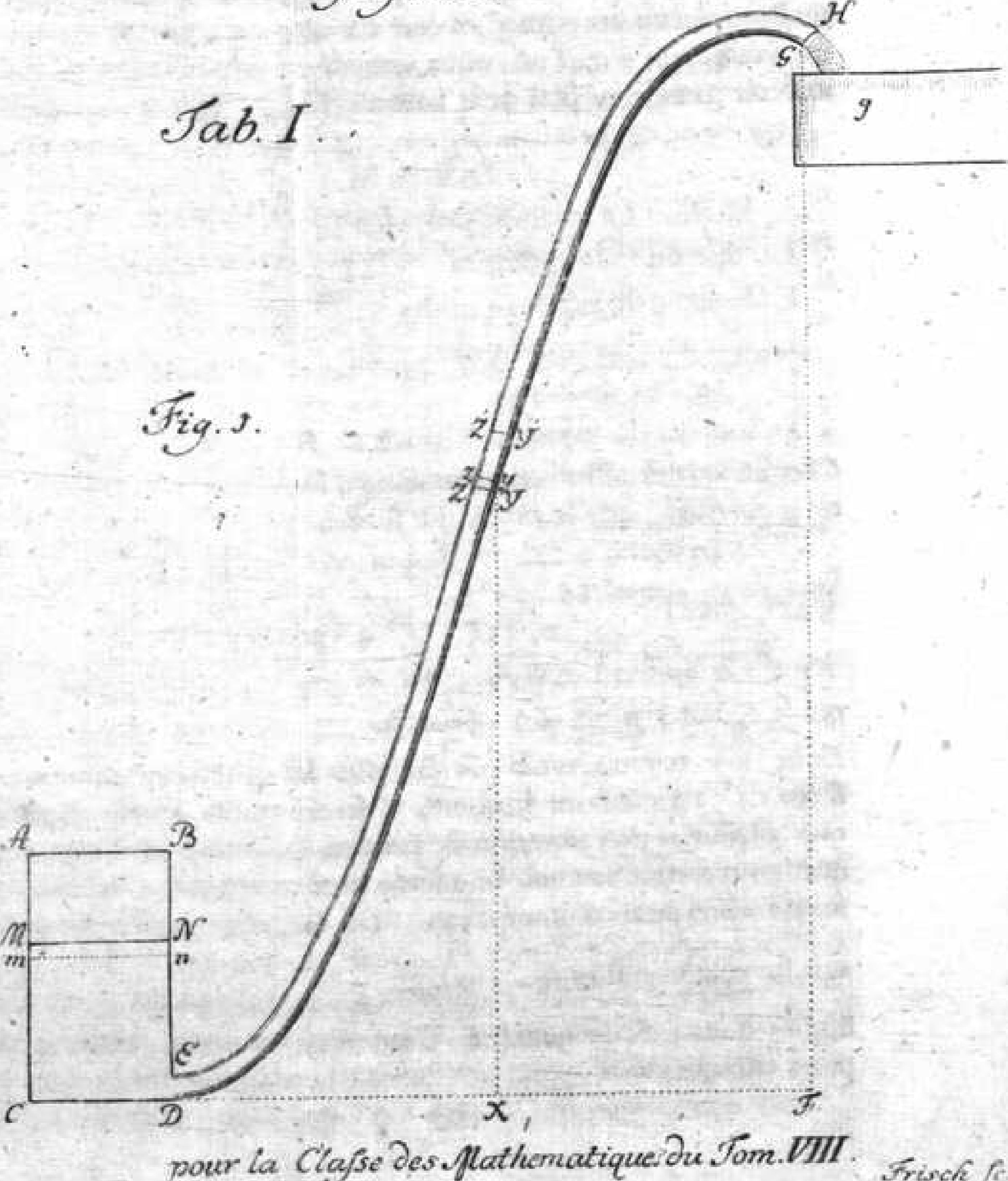
$$p = 60 + \frac{0,256.\ \frac{16}{9}.\ 4.\ 3000}{\frac{9}{16}.\ 36} \text{ pieds.}$$

qui se réduit à $p = 60 + 270 = 330$ pieds.

Donc, si le tuyau n'avoit pas été assez fort pour porter une colomne d'eau de 330 pieds de hauteur, il seroit crévé infailliblement ; quoique la hauteur de l'élevation de l'eau ne fût que de 60 pieds, de sorte que le tuyau dût soutenir une force plus de 5 fois plus grande, que le simple poids de la colomne d'eau. De là on connoîtra la force, qui agit sur chaque piston, qui étoit $= \frac{\pi}{4} . \frac{16}{9} . 330 = 461$ pieds cubiques d'eau, & la quantité d'eau élevée dans une heure $= 6701$ pieds cubiques.

Tab. I.

Fig. 1.



pour la Classe des Mathematique du Tom. VIII.

Frisch sc.