1753

Recherche sur une nouvelle manière d'élever de l'eau proposée par M. de Mour

Leonhard Euler

RECHERCHE
SUR UNE NOUVELLE MANIERE D'E'LEVER DE L'EAU PROPOSE'E PAR M. DE MOUR,

PAR M. EULER.

I.

Cette maniere d'élever de l'eau se trouve dans le Recueil des Machines approuvées par l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'Ann. 1732 No. 363. Elle paroit d'abord très simple, n'étant composée que d'un tuyau incliné à l'horizon CD, & attaché à un axe vertical OO, autour duquel il est mobile. Pour mettre cette machine en action, on l'enfonce sous l'eau VV, & lorsqu'on tourne le tuyau CD assez vite autour de l'axe OO, l'eau montera par ce tuyau, en y entrant en Cc, & se déchargera par l'autre bout Dd. On voit bien qu'on peut attacher au même axe OO d'une manière semblable plusieurs tuyaux CD également inclinés, pour rendre l'effet de la machine d'autant plus considérable. Fig. 1.

II. Or l'élévation de l'eau dépend premièrement de la longueur du tuyau incliné CD; en second lieu de son inclinaison à l'horizon; troisièmement de son élongation de l'axe OO; & enfin de la vitesse de rotation, dont le tuyau tourne autour de l'axe. Car on comprend aisément, qu'il y a un certain dégré de vitesse, que le mouvement de la machine doit surpasser, avant que l'eau monte par le tuyau: de sorte que si la machine tournoit plus lentement, l'eau ne seroit élevée qu'à une certaine hauteur dans le tuyau, ſans monter plus haut.

III. Il eſt auſſi évident, qu'au lieu de faire le tuyau CD droit & partout de la même largeur, on lui pourroit donner une figure quelconque, & en varier la largeur à volonté. Mais, avant que d'étendre mes recherches à ce degré de généralité, je les bornerai au cas particulier que l'Auteur paroit avoir en vuë. Ainſi le tuyau CD ſera droit & partout de la même largeur; enſuite il ſera tellement incliné à l'horizon, qu'il ſe trouve avec l'axe OO dans un même plan vertical.

IV. Soit donc la longueur du tuyau $CD = b$. Sa largeur ou ſon amplitude $= bb$, qui lui convient par toute ſon étenduë; & l'inclinaiſon a l'horizon $= \theta$, qui ſoit dans le même plan avec l'axe OO, de ſorte que θ marque le complément de l'inclinaiſon du tuyau à l'axe OO. Enſuite ayant tiré à l'axe les droites horizontales AC & BD, ſoit $AC = c$, & on aura $BD = c + b \operatorname{cof} \theta$, & la hauteur AB ſera $= b \operatorname{ſin} \theta$. Enfin ſuppoſons, que le mouvement de rotation du tuyau CD ſoit tel, qu'à une diſtance de l'axe $= a$, la viteſſe de rotation ſoit $= \sqrt{k}$ ou duë à la hauteur k, de ſorte que la viteſſe de rotation abſoluë ſoit $= \frac{\sqrt{k}}{a}$.

V. Soit $\sqrt{v}$ la viteſſe, avec laquelle l'eau monte par le tuyau, à l'inſtant préſent, qui étant commune à toute l'eau contenuë dans le tuyau, elle ſe déchargera avec la même viteſſe par l'orifice en haut Dd: & partant la quantité d'eau dégorgée en Dd ſera exprimée par $bb\sqrt{v}$. Soit enfin la profondeur, à laquelle l'ouverture inférieure Cc ſe trouve au deſſous de la ſurface de l'eau, $VV = e$.

VI. Ce mouvement étant regardé comme connu, de ſorte que v ſera une certaine fonction du tems t, que je ſuppoſe déja écoulé depuis le commencement du mouvement; il faut chercher les forces, dont chaque particule d'eau dans le tuyau doit être ſollicitée, pour qu'elle

Tab. VI.

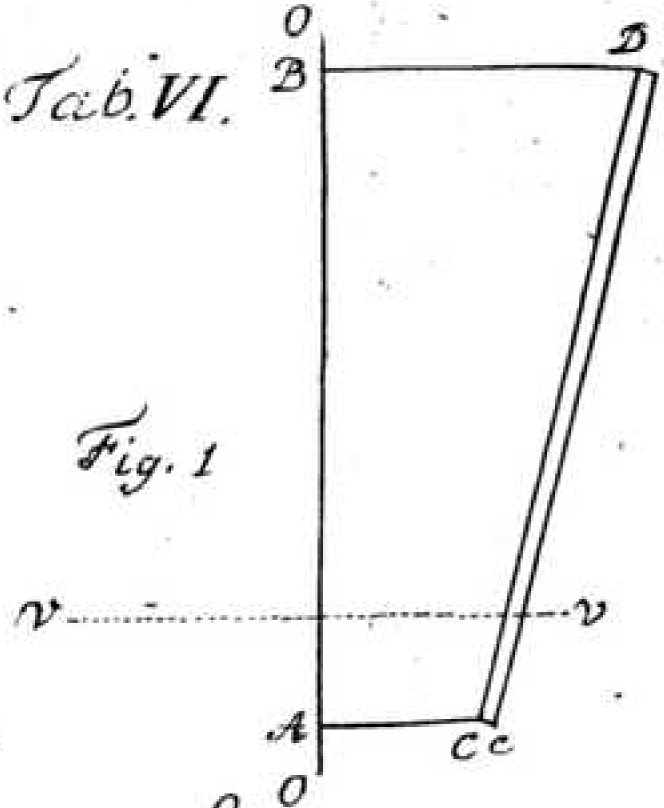

Fig. 1

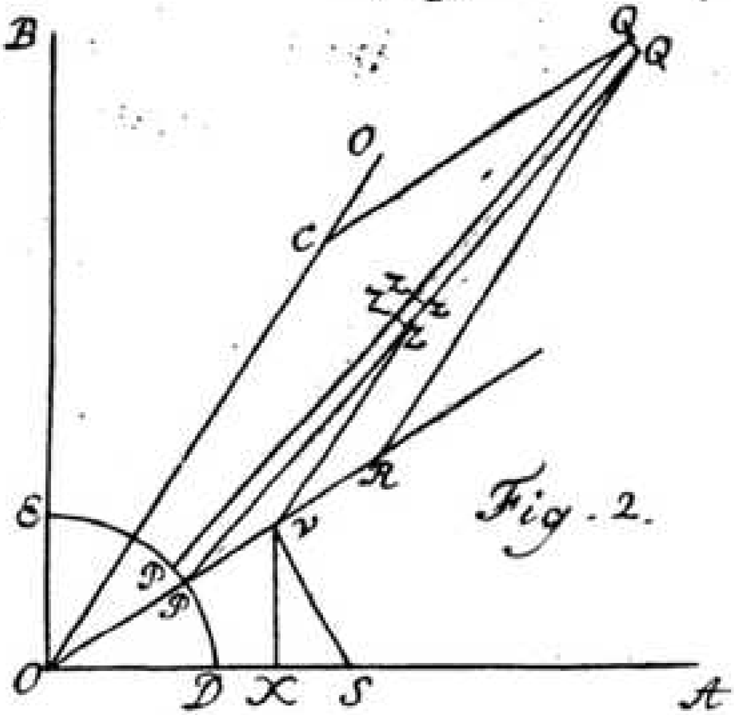

Fig. 2.

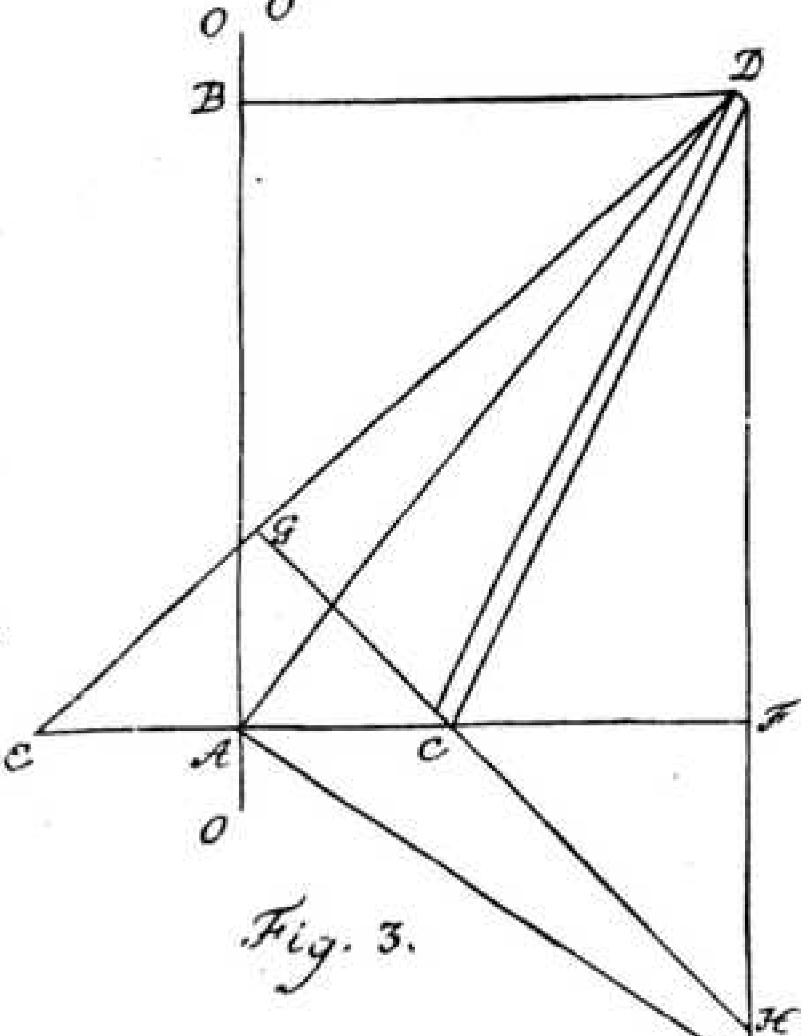

Fig. 3.

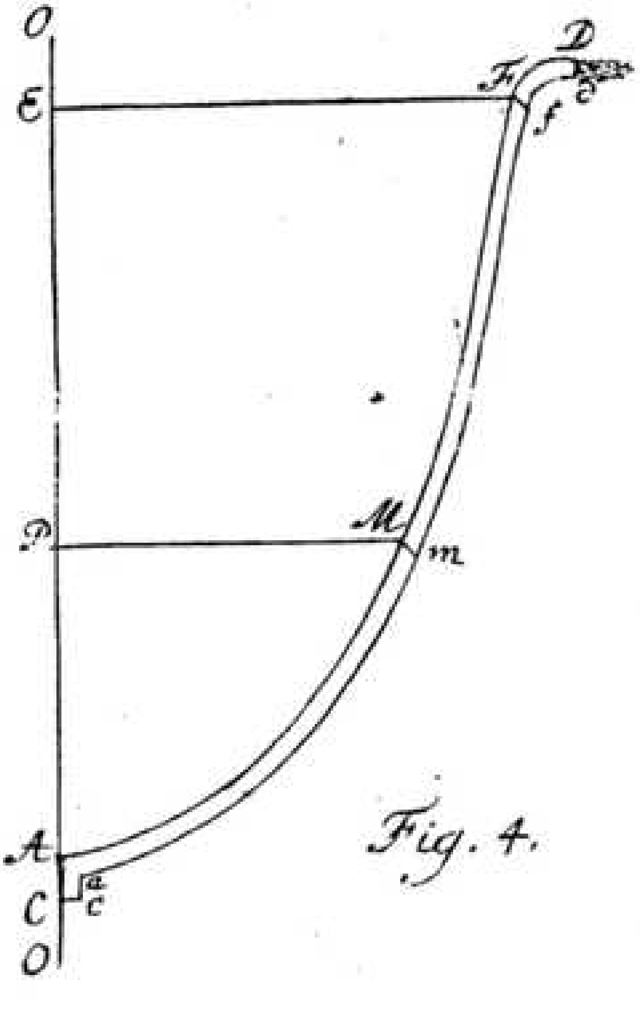

Fig. 4.

qu'elle pourſuive le mouvement ſuppoſé. Car ce ſera de ces forces comparées à celles, dont l'eau eſt ſollicitée actuellement, qu'on pourra déterminer non ſeulement le mouvement actuel, mais auſſi la force, qu'il faut employer pour maintenir la machine dans le mouvement.

VII. Pour cet effet, rapportons le mouvement à trois axes fixes, perpendiculaires entr'eux, dont l'un OO ſoit vertical, & le même autour duquel la machine tourne, & les deux autres OA & OB ſoient pris dans le plan horizontal, ſur lequel on décrive avec le rayon $OD = c$ le cercle DPE, & après un tems quelconque $= t$, où la viteſſe de l'eau par le tuyau eſt ſuppoſée $= \sqrt{v}$, le tuyau ſe trouve dans la ſituation PQ, ayant depuis le commencement déjà décrit par ſon mouvement de rotation l'angle $DOP = \Phi$. Donc, puiſque la viteſſe, dont le point P eſt porté vers E, eſt $= \frac{c\sqrt{k}}{a}$, dont il parcourt dans le tems dt l'arc $= c\,d\Phi$, nous aurons $d\Phi = \frac{dt\sqrt{k}}{a}$, & partant $\Phi = \frac{t\sqrt{k}}{a}$, ou bien $t = \frac{a\Phi}{\sqrt{k}}$, de ſorte que l'angle DOP $= \Phi$ nous ſervira de meſure du tems. Fig. 2.

VIII. Conſidérons maintenant un élément d'eau quelconque dans le tuyau Zz, poſant la diſtance $PZ = s$, & ayant $Zz = ds$, la maſſe de cet élément d'eau ſera $= bb\,ds$. Du point Z tirons la verticale ZY, & à cauſe de l'angle $YPZ = \theta$, nous aurons $YZ = s \sin\theta$ & $PY = s \cos\theta$. Et ſi la goutte d'eau en Z parvient en z après le tems dt, nous aurons $Zz = ds = dt\sqrt{v}$. Tirons de plus du point Y à l'axe OA la perpendiculaire YX, & à cauſe de l'angle $AOY = \Phi$, on aura $OX = (c + s\cos\theta)\cos\Phi$, & $XY = (c + s\cos\theta)\sin\Phi$.

IX. Nommons ces trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, de ſorte que

$x = (c + s \cos \theta) \cos \Phi$; $y = (c + s \cos \theta) \sin \Phi$ & $z = s \sin \theta$; & prenant l'élément du tems dt constant, il faut par les principes de Méchanique, que la particule d'eau en Z soit sollicitée par trois forces accélératrices, qui sont

selon la direction OX $= \dfrac{2\,ddx}{dt^2}$

ou bien $= \dfrac{2}{dt^2}\left(\begin{array}{l} -c\,dd\Phi \sin\Phi - c\,d\Phi^2 \cos\Phi + dds \cos\theta \cos\Phi - ds\,d\Phi \cos\theta \sin\Phi \\ - s\,dd\Phi \cos\theta \sin\Phi - s\,d\Phi^2 \cos\theta \cos\Phi \end{array}\right)$

selon la direction XY $= \dfrac{2\,ddy}{dt^2}$

ou bien $= \dfrac{2}{dt^2}\left(\begin{array}{l} c\,dd\Phi \cos\Phi - c\,d\Phi^2 \sin\Phi + dds \cos\theta \sin\Phi + 2\,ds\,d\Phi \cos\theta \cos\Phi \\ + s\,dd\Phi \cos\theta \cos\Phi - s\,d\Phi^2 \cos\theta \sin\Phi \end{array}\right)$

selon la direction YZ $= \dfrac{2\,ddz}{dt^2}$.

ou bien $= \dfrac{2}{dt^2}\,(dds \sin\theta)$

X. Si nous tirons YS perpendiculaire à la droite OY, les deux premieres forces se réduiront à deux autres selon les directions OY & YS, dont celle-là selon OY sera $= f$, OX $\cos\Phi + f$, XY $\sin\Phi$, & celle-cy selon YS $= f$, OX $\sin\Phi - f$, XY. $\cos\Phi$. Par conséquent nous aurons pour le point d'eau en Z ces trois forces accélératrices

I. selon OY $= \dfrac{2}{dt^2}\,(-c\,d\Phi^2 + dds \cos\theta - s\,d\Phi^2 \cos\theta)$

II. selon YS $= \dfrac{2}{dt^2}\,(-c\,dd\Phi - 2\,ds\,d\Phi \cos\theta - s\,dd\Phi \cos\theta)$

III. selon YZ $= \dfrac{2}{dt^2}.\ dds \sin\theta$

XI.

XI. Or ayant $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{k}}{a}$ & $\frac{ds}{dt} = \sqrt{v}$, il ſera $\frac{dd\Phi}{dt^2} = 0$ $\frac{dds}{dt^2} = \frac{dv}{2dt\sqrt{v}}$ & $\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{k}{aa}$ & $\frac{ds\,d\Phi}{dt^2} = \frac{\sqrt{kv}}{a}$: donc nos trois forces accélératrices ſeront

I. ſelon $OY = -\frac{2ck}{aa} + \frac{dv \operatorname{cof}\theta}{dt\sqrt{v}} - \frac{2ks\operatorname{cof}\theta}{aa}$

II. ſelon $YS = -\frac{4\operatorname{cof}\theta\sqrt{kv}}{a}$

III. ſelon $YZ = \frac{dv\operatorname{fin}\theta}{dt\sqrt{v}}$.

XII. Si ces forces n'agiſſoient pas ſur chaque particule d'eau, elles pourſuivroient leur mouvement en vertu de leur inertie: c'eſt donc l'impénétrabilité des parois du tuyau, qui fournit ces forces; & par conſéquent ces parois ſeront réciproquement ſollicitées par des forces égales en ſens contraire. Or de ces trois forces il n'y a que celle qui agit ſelon YS, qui s'oppoſe au mouvement de rotation de la machine. Cette force motrice pour l'élément $Zz = hhds$ ſera donc $= \frac{4hhds\operatorname{cof}\theta\sqrt{kv}}{a}$, dont le moment eſt $= \frac{4hh}{a}ds(c+s\operatorname{cf}\theta)$ $\operatorname{cof}\theta\sqrt{kv}$. Et partant de toute l'eau contenuë dans le tuyau réſultera le moment ſuivant, qui s'oppoſe au mouvement de la machine

$$\frac{2hh}{a}(2bc + bb\operatorname{cof}\theta)\operatorname{cof}\theta\sqrt{kv} = \frac{2hhb\operatorname{cof}\theta}{a}(2c+b\operatorname{cof}\theta)\sqrt{kv}.$$

XIII. Enſuite la particule d'eau en Z ſera pouſſée ſelon la direction du tuyau en haut, ou ſelon ZQ, par la force accélératrice = force OY. cofθ + force YZ. finθ, qui ſera par conſéquent $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$

$- \frac{2ck\cos\theta}{aa} - \frac{2ks\cos\theta^2}{aa}$. Il faut donc que l'eau en Z soit actuellement sollicitée par cette force selon la direction du tuyau ZQ.

XIV. Or il y a actuellement deux forces qui agissent sur l'eau en Z, la première est la gravité, dont la direction étant ZY ne produit aucun moment à l'égard du mouvement de la machine, mais l'eau en Z en sera sollicitée selon ZP avec la force, accélératrice $= \sin\theta$. L'autre force résulte de l'état de compression de l'eau dans le tuyau. Soit donc la pression en Z exprimée par la hauteur $= p$, & en z par $p + dp$: & de là chaque particule d'eau en Zz sera poussée vers le bas du tuyau selon ZP par la force accélératrice $= \frac{dp}{ds}$. Ajoutant ces deux forces ensemble, nous en tirerons cette équation

$$\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{2ck\cos\theta}{aa} - \frac{2ks\cos\theta^2}{aa} = -\sin\theta - \frac{dp}{ds} \text{ ou bien}$$

$$dp = -\frac{dv}{dt\sqrt{v}}.\, ds + \frac{2ckds\cos\theta}{aa} + \frac{2ksds\cos\theta^2}{aa} - ds\sin\theta$$

XV. Comme v est une fonction du tems t, & que nous cherchons pour l'instant présent l'état de compression dans chaque endroit du tuyau, nous devons regarder l'expression $\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ comme une quantité constante, d'où nous aurons en intégrant

$$p = C - \frac{sdv}{dt\sqrt{v}} + \frac{2cks\cos\theta}{aa} + \frac{kss\cos\theta^2}{aa} - s\sin\theta$$

Or en Q, où l'eau sort, la pression doit évanouïr; cette circonstance sert à déterminer la constante C, qui sera

$$C = \frac{bdv}{dt\sqrt{v}} - \frac{2bck\cos\theta}{aa} - \frac{bbk\cos\theta^2}{aa} + b\sin\theta$$

& marquera l'état de compression de l'eau à l'orifice en bas P.

XVI.

XVI. Or cet orifice ſe trouvant ſous l'eau à la profondeur $= c$, puisque l'eau eſt ſuppoſée d'y entrer avec la viteſſe $= \sqrt{v}$, la preſſion y doit être $= c - v$, d'où nous gagnons cette équation

$$c - v = \frac{b\,dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{2bck\cos\theta}{aa} - \frac{bbk\cos\theta^2}{aa} + b\sin\theta$$

dont je ne m'embarraſſerai pas à chercher l'intégrale, puisque le mouvement parvient bientôt dans un état d'uniformité, qu'il ſuffit de connoitre. Soit donc $\sqrt{v}$ la viteſſe, dont l'eau monte uniformement par le tuyau, & nous aurons d'abord cette équation

$$v = c + \frac{bk\cos\theta}{aa}(2c + b\cos\theta) - b\sin\theta$$

où $b\sin\theta - c$ marque la hauteur de l'orifice ſupérieur du tuyau au deſſous du niveau V V.

XVII. De cette valeur trouvée nous voyons d'abord, que ſi la machine eſt en repos, ou $k = o$, l'eau ne ſauroit monter par le tuyau, à moins qu'il ne fût $c > b\sin\theta$, ou que l'orifice D ſe trouve au deſſous du niveau VV. Donc, pour que l'eau ſoit élevée par le tuyau, il faut que le mouvement de rotation ſurpaſſe une certaine limite, ou il faut qu'il ſoit Fig. 1

$$\frac{k}{aa} > \frac{b\sin\theta - c}{b\cos\theta\,(2c + b\cos\theta)}$$

Car s'il étoit $\frac{k}{aa}$ plus petit que cette valeur, l'eau ne monteroit jamais au bout ſupérieur Dd: & ſi $\frac{k}{aa}$ étoit exactement égal à cette valeur, l'eau monteroit bien jusqu'à Dd, mais elle y ſubſiſteroit en repos ſans ſe décharger.

XVIII. Suppoſons que le mouvement de rotation ſoit tel, que chaque révolution entiere de la machine réponde aux oſcilla-

tions

tions d'un pendule de la longueur $= q$, & on aura $\frac{k}{aa} = \frac{2}{q}$: & partant,

$$v = \frac{2b\,\text{cof}\,\theta}{q}(2c + b\,\text{cof}\,\theta) - b\,\text{fin}\,\theta + e;$$

& donc il faut qu'il foit

$$q < \frac{2b\,\text{cof}\,\theta\,(2c + b\,\text{cof}\,\theta)}{b\,\text{fin}\,\theta - e}$$

& le moment de forces, qui s'oppofe au mouvement de la machine fera $= 2bbb\,\text{cof}\,\theta\,(2c + b\,\text{cof}\,\theta)\,\sqrt{\frac{2v}{q}}$. Donc, fi l'eau ne fort pas en haut du tuyau, il n'y aura befoin d'aucune force pour conferver la machine en mouvement ; mais dès que l'eau fe décharge en haut, il y faudra employer d'autant plus de forces, que le mouvement fera plus vite.

Fig. 3. XIX. Cette limite au deffous de laquelle doit être la longueur du pendule q, fe peut conftruire aifément de cette manière. Ayant pris $AE = AC = c$, qu'on baiffe de D fur la ligne horizontale EAC la perpendiculaire DF. Qu'on tire DE, & qu'on mene par C fur DE la perpendiculaire GCH, jusqu'à la rencontre de la verticale DF prolongée ; & fuppofant la droite EF le niveau d'eau, de forte que $e = o$, il faut qu'il foit $q < 2\,FH$.

XX. Or ces déterminations demandent encore une correction, à l'égard de la preffion de l'eau en C, que nous avons fuppofée $= e - v$, qui feroit bien jufte, fi l'orifice du tuyau C étoit en repos, ce qui arriveroit s'il étoit $c = o$; de forte que dans le cas $c = o$ nos formules n'auroient point befoin de correction. Mais fi l'orifice C tourne autour de l'axe OO avec la viteffe $= \frac{c\sqrt{k}}{a}$, il en eft de même, que fi, le tuyau demeurant en repos, l'eau tournoit avec une viteffe égale

égale autour de l'axe O O. Or dans ce cas la preſſion de l'eau en C ſeroit plus grande à cauſe de la force centrifuge, de manière qu'au lieu de la hauteur e il faut écrire $e + \frac{cck}{aa}$; & partant j'aurois dû écrire $e + \frac{cck}{aa} - v$ au lieu de $e - v$, dans l'équation du §. 16.

XXI. Donc, puisque $\frac{k}{aa} = \frac{2}{q}$, ſi nous mettons $e + \frac{2cc}{q}$ pour e, nous aurons cette équation.

$$v = \frac{2}{q}(c + b \operatorname{cof}\theta)^2 - b \operatorname{fin}\theta + e$$

ou bien, ſi nous regardons la hauteur e comme infiniment petite, ou que nous conſidérions ſeulement la partie de la machine, qui eſt au deſſus de l'eau, nous aurons :

$$v = \frac{2}{q}(c + b \operatorname{cof}\theta)^2 - b \operatorname{fin}\theta$$

Donc, pour que l'eau monte actuellement dans le tuyau, il faut qu'il ſoit

$$q < \frac{2(c + b \operatorname{cof}\theta)^2}{b \operatorname{fin}\theta}$$

Pour conſtruire la valeur de cette formule on n'a qu'à tirer la droite D A, & y joindre en A la perpendiculaire A J, qui coupe la verticale DF en J, & alors il faut qu'il ſoit $q < 2$ F J.

XXII. Si l'on veut que l'eau monte par le tuyau avec une viteſſe donnée $\sqrt{v}$, on peut déterminer la viteſſe de rotation, dont il faut tourner la machine : car chaque révolution ſe doit achever dans le tems d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt

$$q = \frac{2(c + b \operatorname{cof}\theta)^2}{v + b \operatorname{fin}\theta}; \text{ ou bien } \frac{2}{q} = \frac{v + b \operatorname{fin}\theta}{(c + b \operatorname{cof}\theta)^2}$$

Et alors le moment de forces requis pour conſerver la machine en mouvement ſera $= \frac{2bbb \operatorname{cof} \theta (2c + b \operatorname{cof} \theta)}{c + b \operatorname{cof} \theta} \sqrt{v} (v + b \operatorname{fin} \theta)$ Il faudra donc employer ces formules au lieu des précedentes, ſi le tuyau eſt coudé en bas jusqu'à l'axe O, pour y puiſer l'eau.

XXIII. Or, à moins qu'il ne ſoit $c = o$, l'eau qui entre dans l'orifice en C fera auſſi quelque effort contraire au mouvement de la machine, & ayant égard à cet effort, le moment de forces total, qui s'oppoſe au mouvement de la machine, ſera $= \frac{2bb}{a}(c + b \operatorname{cof} \theta)^2 \sqrt{kv}$. Donc, puisque $\frac{\sqrt{k}}{a} = \sqrt{\frac{2}{q}} = \sqrt{\frac{v + b \operatorname{fin} \theta}{(c + b \operatorname{cof} \theta)^2}}$, ce moment ſera $= 2bb (c + b \operatorname{cof} \theta) \sqrt{v} (v + b \operatorname{fin} \theta)$

XXIV. Mais, pour mettre dans tout ſon jour le fondement des corrections, qu'il faut apporter à l'égard de la diſtance $AC = c$, où l'orifice inférieur puiſe de l'eau; le meilleur moyen ſera de conſidérer le tuyau courbé ſelon une figure quelconque, & de lui donner une largeur variable. Car cette généralité ſervira à nous faire voir la différence qu'il y a, ſoit que la diſtance $AC = c$ ſoit evanouïſſante, ou non; puisqu'on peut toujours concevoir la figure du tuyau telle, que ſon orifice d'embas C puiſe près de l'axe même, de ſorte qu'il n'y ait plus de difficulté du côté de la diſtance c.

Fig. 2. XXV. Poſons donc que le tuyau PQ ait une figure quelconque, qui ſoit pourtant dans le même plan avec l'axe OO, & poſant la partie $PZ = s$, ſoit la largeur du tuyau en $Z = rr$, or la largeur au boût QQ comme auparavant $= bb$, où l'eau ſorte avec la viteſſe $= \sqrt{v}$. Donc la viteſſe de l'eau en Z ſera $= \frac{bb\sqrt{v}}{rr}$, avec laquelle elle achevera dans l'élément du tems dt l'eſpace $ds = \frac{bb\,dt\sqrt{v}}{rr}$

où

où il faut remarquer que rr eſt une fonction de s indépendante du tems t, dont la quantité v eſt fonction.

XXVI. Soit de plus $ZY = z$ & $OY = u$, qui ſeront les coordonnées pour la figure du tuyau, de laquelle dépend le rapport entre les quantités s, z & u. Soit donc $dz = ds \sin\omega$ & $du = ds \cos\omega$, ou bien $dz = \frac{bb\,dt \sin\omega \sqrt{v}}{rr}$ & $du = \frac{bb\,dt \cos\omega \sqrt{v}}{rr}$ Enſuite, poſant comme cy-deſſus $OX = u\cos\Phi = x$ & $XY = u \sin\Phi = y$, les trois forces accélératrices, qui doivent agir ſur l'eau en Z, ſeront :

I. Selon $OX = \frac{2ddx}{dt^2}$: II. ſelon $XY = \frac{2ddy}{dt^2}$; III. ſelon $YZ = \frac{2ddz}{dt^2}$

XXVII. Or puiſque $dx = du\cos\Phi - u\,d\Phi \sin\Phi$ & $dy = du \sin\Phi + u\,d\Phi \cos\Phi$ nous aurons

la force $OX = \frac{2}{dt^2}(ddu\cos\Phi - 2du\,d\Phi\sin\Phi - u\,dd\Phi\sin\Phi - u\,d\Phi^2\cos\Phi)$

la force $XY = \frac{2}{dt^2}(ddu\sin\Phi + 2du\,d\Phi\cos\Phi + u\,dd\Phi\cos\Phi - u\,d\Phi^2\sin\Phi)$

d'où réſultent ſelon les directions OY & YS

ſelon $OY = \frac{2}{dt^2}(ddu - u\,d\Phi^2)$

ſelon $YS = \frac{2}{dt^2}(-2du\,d\Phi - u\,dd\Phi)$

& la troiſième ſelon $YZ = \frac{2bb}{dt}\left(\frac{d\omega\cos\omega.\sqrt{v}}{rr} - \frac{2dr\sin\omega\sqrt{v}}{r^3} + \frac{dv\sin\omega}{2rr\sqrt{v}}\right)$

XXVIII. Enſuite ayant $\frac{du}{dt} = \frac{bb\cos\omega.\sqrt{v}}{dt}$ & $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{k}}{a}$, nous aurons $\frac{2ddu}{dt^2} = \frac{2bb}{dt}\left(-\frac{d\omega\sin\omega\sqrt{v}}{rr} - \frac{2dr\cos\omega\sqrt{v}}{r^3} + \frac{dv\cos\omega.}{2rr\sqrt{v}}\right)$

 2u

$$\frac{2u\,d\Phi^2}{dt^2} = \frac{2ku}{aa};\quad \frac{4\,du\,d\Phi}{dt^2} = \frac{4bb\cos\omega.\sqrt{kv}}{\cdot\,arr};\quad dd\Phi = 0$$

donc les forces feront

selon O Y $= -\dfrac{2bbd\omega\sin\omega.\sqrt{v}}{rrdt} - \dfrac{4bbdr\cos\omega.\sqrt{v}}{r^3\,dt} + \dfrac{bbdv\cos\omega}{rrdt\sqrt{v}} - \dfrac{2ku}{aa}$

selon Y S $= -\dfrac{4bb\cos\omega.\sqrt{kv}}{arr}$

XXIX. Cette dernière force étant uniquement opposée au mouvement de la machine, la force motrice qui en résulte sera $= -\dfrac{4bbds\cos\omega\sqrt{kv}}{a}$ & le moment $= \dfrac{4bbudu\sqrt{kv}}{a}$: & partant le moment total sera $= \dfrac{2bbuu\sqrt{kv}}{a}$. Ou bien, si le tuyau commence en P & finit en Q, & qu'on baisse de Q la perpendiculaire, le moment total, qui résulte de toute l'eau contenuë dans le tuyau est

$$\frac{2bb\sqrt{kv}}{a}\,(\mathrm{OR}^2 - \mathrm{OP}^2)$$

XXX. Depuis la force accélératrice, qui pousse l'eau selon la direction du tuyau vers Q, sera

$$-\frac{4bbdr\sqrt{v}}{r^3\,dt} + \frac{bbdv}{rrdt\sqrt{v}} - \frac{2ku\cos\omega}{aa}$$

qui devant être $= -\dfrac{dp}{ds} - \sin\omega$, supposant la pression en Z $= p$

nous aurons

$$dp = -ds\sin\omega + \frac{4bbdsdr\sqrt{v}}{r^3\,dt} - \frac{bbdv}{dt\sqrt{v}}.\,\frac{ds}{rr} + \frac{2kuds\cos\omega}{aa}$$

or puisque $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{bb\sqrt{v}}{rr}$, & $ds\cos\omega = du$ & $ds\sin\omega = dz$

cette

cette équation deviendra

$$dp = -dz + 4b^4 v.\frac{dr}{r^5} - \frac{bb\,dv}{dt\sqrt{v}}.\frac{ds}{rr} + \frac{2\,ku\,du}{aa}$$

dont l'intégrale eſt

$$p = C - z - \frac{b^4 v}{r^4} + \frac{kuu}{aa} - \frac{bb\,dv}{dt\sqrt{v}}\int\frac{ds}{rr}.$$

XXXI. Soit pour toute la longueur du tuyau $\int\frac{ds}{rr} = F$, & puiſque en Q la preſſion doit évanouïr, où devient $z = QR$, $u = OR$, $rr = bb$, nous aurons

$$C = QR + v - \frac{k}{aa}.\ OR^2 + \frac{bb\,dv}{dt\sqrt{v}}.\ F$$

Donc, ſi la largeur du tuyau en P eſt ſuppoſée $= ff$, la preſſion en P ſera

$$QR + v - \frac{k}{aa}.\ OR^2 + \frac{bb\,dv}{dt\sqrt{v}}.\ F - \frac{b^4 v}{f^4} + \frac{k}{aa}.\ OP^2$$

ou bien cette preſſion ſera

$$\frac{F\,bb\,dv}{dt\sqrt{v}} + QR - \frac{k}{aa}(OR^2 - OP^2) + v\left(1 - \frac{b^4}{f^4}\right)$$

XXXII. Maintenant, ſi nous poſons que $OP = o$, ou que le tuyau, de quelque figure qu'il ſoit, ait une courbure en bas, de ſorte que ſon orifice d'embas P ſoit près de l'axe ; il n'y a aucun doute que la preſſion n'y ſoit $= e - \frac{b^4 v}{f^4}$, d'où nous tirons

$$e = \frac{F\,bb\,dv}{dt\sqrt{v}} + QR - \frac{k}{aa}.\ OR^2 + v$$

& ſi le mouvement eſt déjà devenu uniforme, il ſera

$$v = \frac{k}{aa} . OR^2 - QR + c$$

& le moment de forces $= \frac{2bb\sqrt{kv}}{a} . OR^2$

XXXIII. A' préſent il eſt clair, qu'il eſt toujours avantageux de courber le tuyau tellement en bas, que ſon orifice ſoit ſi près de l'axe, qu'il eſt poſſible ; puisqu' alors le terme affirmatif $\frac{k}{aa} . OR^2$ dans l'expreſſion de v devient ſans contredit le plus grand, & partant la viteſſe la plus grande : au lieu, que ſi l'orifice inférieur étoit éloigné de l'axe, on devroit diminuer OR^2 du quarré de cette diſtance. Ainſi pour rendre cette machine auſſi parfaite qu'il eſt poſſible, le bout d'embas du tuyau doit ſe trouver auprès de l'axe OO.

Fig. 4. XXXIV. Soit donc OO l'axe de la machine, & AMED la figure d'un tuyau, dont l'orifice inférieur Cc puiſe l'eau tout proche de l'axe OO, & que l'orifice ſupérieur Dd ſoit plié en dehors pour mieux dégorger l'eau ; dont l'ouverture ſoit $= bb$. Pour la largeur du tuyau dans les autres endroits Mm, il eſt indifférent de la faire ou plus grande ou plus petite que bb; mais pour diminuër l'obſtacle du frottement, & pour rendre le mouvement de l'eau plus libre, il conviendra de donner au tuyau en bas une plus grande largeur.

XXXV. Ce tuyau étant donc tourné autour de l'axe ſi vite, que chaque révolution répond à une oſcillation d'un pendule de la longueur $= q$, à cauſe de $\frac{k}{aa} = \frac{2}{q}$, l'eau montera par le tuyau avec la viteſſe $\sqrt{v}$ de ſorte que

$$v = \frac{2. EF^2}{q} - AE$$

ſuppoſant que AE ſoit la hauteur au deſſus du niveau d'eau, & pour main-

maintenir la machine dans ce mouvement, il y faut employer une force dont le moment eſt

$$2bb.\ EF^2 \sqrt{\frac{2v}{q}}$$

la force étant exprimée par un volume d'eau, dont le poids lui eſt égal.

XXXVI. Ainſi, ſi le tems d'une révolution de la machine eſt donné par le pendule q, il faut qu'il ſoit $EF^2 > \frac{1}{2}q.\ AE$. Mais, puisqu'il eſt également néceſſaire que l'eau ſoit élevée au deſſus de chaque endroit moyen, il faut qu'il ſoit auſſi $PM^2 > \frac{1}{2}q.\ AP$. Car, s'il étoit $PM^2 < \frac{1}{2}.\ AP$, l'eau ne ſauroit être élevée jusqu'a M ; & à plus forte raiſon elle ne monteroit pas jusqu'à Dd, quoiqu'il fût $EF^2 > \frac{1}{2}q.\ AE$.

XXXVII. De là on comprend que la plus propre figure, qu'on puiſſe donner au tuyau AMF, eſt la parabolique, dont l'axe ſoit l'axe de la machine, & le ſommet en A. Soit donc la figure du tuyau AMF une parabole, dont le parametre ſoit $= g$, de ſorte qué $PM^2 = g.\ AP$ & $EF^2 = g.\ AE$, & la viteſſe de l'eau, qui ſera déchargée en haut, eſt duë à la hauteur $v = \left(\frac{2g}{q} - 1\right) AE$; & pour entretenir la machine en mouvement, il y faut appliquer une force, dont le moment eſt $= 2bb.\ EF^2.\sqrt{\frac{2v}{q}} = \frac{2bb}{q}.\ EF^3 \sqrt{\left(4 - \frac{2q}{g}\right)}$, ou bien ce moment ſera $= \frac{2gbb}{g}.\ AE \sqrt{AE\,(4g - 2q)}$

XXXVIII. Il faut donc que le parametre de cette parabole g ſoit plus grand que $\frac{1}{2}q$. Soit donc $\frac{2g}{q} - 1 = \alpha$, ou bien le parametre de la parabole $g = \frac{1}{2}(\alpha + 1)\,q$; & la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée $AE = a$; & on aura $v = \alpha a$, & le moment requis pour mettre la machine en action $= (\alpha + 1)\,bba\sqrt{2\alpha a q}$.

XXXIX.

XXXIX. Soit l la hauteur, par laquelle un corps grave tombe dans une feconde, dont la valeur eft de 15, 625 pieds de Rhin; & s'il étoit $v = l$, la maffe d'eau dégorgée dans une feconde feroit $= 2bbl$; donc puifque $v = \alpha a$, le volume d'eau élevée dans une feconde fera $= 2bb\sqrt{\alpha a l}$.

XL. Soit de plus M le moment de forces, qu'on veut employer pour mettre la machine en mouvement, & on aura $M = (\alpha + 1) abb\sqrt{2\alpha aq}$: d'où l'on tire $bb = \frac{M}{(\alpha+1)a\sqrt{2\alpha aq}}$: & partant la quantité d'eau élevée pendant une feconde fera $\frac{2M}{(\alpha+1)a}\sqrt{\frac{l}{2g}}$: d'où l'on voit que, plus on fait rapide le mouvement de la machine, plus deviendra auffi grande la quantité d'eau qu'on fera en état d'élever. Enfuite on voit auffi, que pour augmenter l'effet de la machine, il convient de faire la valeur de α auffi petite que cela fe pourra.

XLI. Mais on comprend auffi aifément que ces diminutions ne peuvent aller à l'infini: car en diminuant α & q l'orifice fupérieur du tuyau bb en devient augmenté, & puifque l'inférieur ne fauroit être plus petit, fon étenduë s'éloigneroit trop de l'axe, de forte que la fuppofition faite à cet égard ne fauroit plus avoir lieu. Pour cette raifon il faut donner au parametre de la parabole g une valeur raifonnable, en forte que Cc foit beaucoup plus petit que EF: & puifqu'il eft Cc au moins égal à b: il faut que EF^2 ou $\frac{1}{2}(\alpha + 1)aq$ furpaffe confidérablement la valeur de $bb = \frac{M}{(\alpha+1)a\sqrt{2\alpha ag}}$, ou qu'il foit $\frac{1}{2}(\alpha+1)^2 \alpha aq\sqrt{2\alpha aq} > M$, & cela de beaucoup.

XL. Pofant donc $\frac{1}{2}(\alpha + 1)^2 \alpha aq\sqrt{2\alpha aq} = \beta M$, de forte que β foit un nombre beaucoup plus grand que l'unité, & on aura $\sqrt{q} = \sqrt[3]{\frac{2\beta M}{(\alpha+1)^2 \alpha a\sqrt{2\alpha a}}}$; & de là la quantité d'eau élevée par

feconde

feconde fera $= \sqrt[6]{\frac{4\alpha l^3 M^4}{(\alpha+1)^2 \beta\beta a}}$, d'où l'on voit que cette quantité deviendra la plus grande fi $\alpha = 1$.

XLIII. Soit donc $\alpha = 1$, & on aura $g = q$; $\sqrt{q} = \sqrt[3]{\frac{\beta M}{2aa\sqrt{2a}}}$ ou $q = \sqrt[3]{\frac{\beta\beta MM}{8a^5}}$; $bb = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{MM}{\beta aa}}$; & la quantité d'eau élevée par feconde fera $= \sqrt[6]{\frac{l^3 M^4}{\beta\beta a}}$: où il faut remarquer que $\frac{bb}{q} = \frac{a}{\beta}$, ou $q = g = \frac{\beta bb}{a}$.

XLIV. Pofons qu'on veuïlle employer la force d'un ou plufieurs hommes pour mettre la machine en action : comme la force d'un homme dépend de la viteffe dont il agit, fuppofons qu'il parcoure par feconde l'efpace $= i$, & qu'avec cette viteffe il exerce une force égale au poids d'un volume d'eau $=$ A, que cet homme travaille à faire tourner une rouë, de l'axe de laquelle il foit éloigné à une diftance $= d$; de forte que le moment de fa force fera $= Ad$. De plus pofons, que pendant qu'il fait avec cette rouë un tour, la machine faffe μ tours.

XLV. Cet homme fera donc un tour en $\frac{2\pi d}{i}$ fecondes, & partant le tems d'une révolution de la machine fera $= \frac{2\pi d}{\mu i}$ fecondes, qui doit répondre au tems d'une ofcillation du pendule q; foit k la longueur du pendule à fecondes, & on aura $\frac{2\pi d}{\mu i} = \sqrt{\frac{q}{k}}$. Or puifque l marque la hauteur de la chûte dans une feconde, on aura $k = \frac{2l}{\pi\pi}$, & partant $\frac{2d}{\mu i} = \sqrt{\frac{q}{2l}}$; d'où l'on tire $q = \frac{8ddl}{\mu\mu ii}$.

XLVI. Le moment de force, que l'homme exerce immédiatement fur la machine, fera donc $= \frac{1}{\mu} A d$; puisque la machine eft fuppofée faire μ tours, pendant que l'homme en fait un. Et partant nous aurons $M = \frac{1}{\mu} A d$; donc $q = \sqrt[3]{\frac{\beta\beta dd A N}{8\mu\mu a^5}} = \frac{8ddl}{\mu\mu ii}$; d'où nous tirons; $d^4 = \frac{\beta\beta\mu^4 i^6 AA}{8^4 a^5 l^3}$. Et enfin la quantité d'eau élevée par feconde fera $= \sqrt[6]{\frac{d^4 l^3 A^4}{\beta\beta\mu^4 a}} = \frac{iA}{4a}$; d'où l'on voit que cette quantité ne dépend plus ni de β ni de μ, mais uniquement de A, i & a.

XLVII. Or, pour déterminer la machine même, la force A avec l'efpace i, qu'elle parcourt dans une feconde, & la hauteur a à laquelle l'eau doit être élevée, étant données, on aura dabord $dd = \frac{\beta\mu\mu A i^3}{64 aal\sqrt{al}}$ & $d = \frac{\mu i}{8a}\sqrt{\frac{\beta A i}{l\sqrt{al}}}$; d'où l'on trouve $q = g = \frac{\beta A i}{8aa\sqrt{al}}$ & $bb = \frac{Ai}{8a\sqrt{al}}$: où il eft $l = 15,625$ pieds de Rhin.

XLVIII. Si l'on met la quantité d'eau, que la machine éleve dans une feconde $= D$, on aura $D = \frac{Ai}{4a}$ & partant $Da = \frac{1}{4} Ai$. Ici Da exprime l'effet de la machine dans une feconde, & Ai marque l'action, que l'homme exerce en même tems. Donc l'effet de la machine s'égale à la quatrième partie de l'action: ou il n'y a que la quatrième partie de l'action, qui eft proprement employée à élever de l'eau. Car, puisque l'homme pourroit élever la quantité d'eau

A

A par la hauteur i dans une seconde, cet effet seroit $= Ai$: donc le même homme, en appliquant ses forces à la machine, ne produit que le quart de cet effet.

XLIX. Si l'on ne veut pas supposer que EF^2 surpasse un certain nombre de fois l'ouverture bb, de sorte que le nombre α demeure indéterminé, on aura les déterminations suivantes

$$q = \frac{8ddl}{\mu\mu ii};\ g = \frac{4(\alpha+1)ddl}{\mu\mu ii};\ bb = \frac{Ai}{4(\alpha+1)a\sqrt{\alpha al}}$$

& la quantité d'eau élevée $D = \frac{Ai}{2(\alpha+1)a}$,

d'où l'on voit que l'effet de la machine Da peut devenir plus grand que $\frac{1}{4}Ai$; & il pourroit même devenir $= \frac{1}{2}Ai$, s'il étoit permis de mettre $\alpha = o$. Ainsi, il sera avantageux de rendre la valeur de α si petite qu'il est possible; mais il faut prendre garde que $16(\alpha+1)^2 aaddl\sqrt{\alpha al}$ soit plusieurs fois plus grand que $\mu\mu\ Ai^3$, ou bien $\frac{dd}{\mu\mu} > \frac{Ai^3}{16(\alpha+1)^2 aal\sqrt{\alpha al}}$

L. Puisque donc il est permis de déterminer la quantité $\frac{d}{\mu}$ comme les circonstances l'exigent, on pourra donner à α une valeur aussi petite qu'on voudra; & de cette manière l'effet de la machine approchera tant de $\frac{Ai}{2a}$, que la différence deviendra imperceptible. Ainsi prenant $\alpha = \frac{1}{100}$ la quantité d'eau élevée dans une seconde sera $D = \frac{50Ai}{101a}$ de sorte qu'on ne perd que la $\frac{1}{201}$me partie sur l'effet total. Or alors il faut que $\frac{dd}{\mu\mu}$ soit considérablement plus grand que $\frac{6250Ai^3}{10201aal\sqrt{al}}$: & on aura $bb = \frac{250Ai}{a\sqrt{al}}$; $q = \frac{dd}{\mu\mu}\cdot\frac{8l}{ii}$ & $g = \frac{101}{200}q$.

LI. Si l'on veut employer la force d'un homme pour mettre la machine en mouvement, & cela avec le plus grand avantage, il faut que l'homme agiſſe avec une viteſſe de deux pieds par ſeconde, & alors ſa force ſera environ de 30 livres. Donc, prenant nos meſures en pieds, on aura $A = \frac{1}{2}$, puiſqu'un demi-pied cubique d'eau peſe environ 30 livres & $i = 2$, d'où nous tirons à cauſe de $l = 15,625$ pieds les valeurs ſuivantes :

$$D = \frac{50}{101a};\ bb = \frac{\sqrt{4000}}{a\sqrt{a}};\ q = 31\tfrac{1}{4}\cdot\frac{dd}{\mu\mu},\ g = \frac{101}{200}\cdot q$$

& puiſque $EF = ga = \frac{505}{32}\cdot\frac{add}{\mu\mu}$; il faut que $\frac{dd}{\mu\mu}$ ſoit pluſieurs fois plus grand que $\frac{32\sqrt{4000}}{505\,aa\sqrt{a}}$ ou que $\frac{4}{aa\sqrt{a}}$.

LII. Rien n'eſt plus aiſé, que de ſatisfaire à cette condition, puiſque la valeur de $\frac{4}{aa\sqrt{a}}$ devient pour l'ordinaire extrèmement petite, de ſorte qu'on peut mettre $\mu = 1$, ſans que la diſtance d devienne trop grande. Or ſi $\mu = 1$, on fera travailler l'homme immédiatement à la machine, en la tournant en haut avec une manivelle, dont le rayon eſt à peu près d'un demi-pied; & alors à cauſe de $\mu = 1$ & $d = \frac{1}{2}$, le parametre de la parabole ſera $g = 3,9453125$ pieds, qui produit une machine aſſez commode. Et ſi l'on avoit pris d tant ſoit peu plus petit, on auroit trouvé $g = 3$ pieds.

LIII. Si la hauteur eſt fort grande, à laquelle l'eau doit être élevée, on peut mettre encore plus petit le parametre de la parabole, & ne lui donner que deux pieds, ou bien ſeulement un, afin que la machine ne devienne trop large par en haut; car on voit que plus la hauteur a eſt grande, plus devient petite l'expreſſion $\frac{4}{aa\sqrt{a}}$,

de

de forte que dans ces cas la valeur de $\frac{dd}{\mu\mu}$, & partant auſſi le parametre g pourra être pris beaucoup plus petit.

LIV. Puisque l'effet de la machine approche d'autant plus du plus grand $\frac{1}{2}$ Ai, plus on fait petite la valeur de α; & qu'en diminuant α, l'orifice bb eſt augmenté; il ſera convenable de faire dabord cet orifice auſſi grand, que les circonſtances le permettent. Ainſi bb ſera une quantité donnée, de laquelle on connoitra la valeur de α, par cette équation

$$(\alpha + 1) V\alpha = \frac{Ai}{4abbVat}$$

D'où l'on voit, que plus l'action de la force mouvante $4i$ ſera grande, plus auſſi deviendra grande la fraction α: & partant en ſe ſervant de la même machine, l'effet Da croit dans une mondre raiſon que l'action de la force Ai.

LV. Or, pour rendre l'ouverture Dd d'autant plus grande, on peut augmenter le nombre des tuyaux, jusqu'à ce qu'ils viennent à ſe toucher; & puisqu'il n'eſt pas néceſſaire, qu'ils ſoyent ſéparés entr'eux, tous ces tuyaux forment un creux autour du noyer AMF en forme d'une cloche renverſée; ou bien la machine ſera ſemblable à un moule, dont on ſe ſert pour y fondre les cloches. Ce creux ſera donc formé par la révolution de la figure CAMm FfDd, autour de l'axe OO, où le cercle decrit par Cc donne l'ouverture d'enbas, & celle d'enhaut ſera la ſurface cylindrique formée par la révolution de la ligne Dd autour de l'axe.

LVI. Cependant pour mieux affermir enſemble les deux ſurfaces conoïdiques, AMFD & $camfd$, qui renferment entr'elles le creux de la machine, cela ſe fera le plus commodément par des diaphragmes, qui s'étendent depuis la fente d'enhaut jusqu'embas. Ces diaphragmes partageront donc le creux en pluſieurs

parties

parties, dont chacune repréſentera un tuyau, tel que j'ai conſidéré dans le calcul.

LVII. L'ouverture en haut étant donc une fente tout autour du conoïde, dont la largeur eſt Dd, elle ſera $= 2\pi.\ EF.\ Dd$. Or l'ouverture en bas étant un cercle décrit du rayon Cc, ſon aire ſera $= \pi.\ Cc^2$: qui doit être à peu près égale ou plus grande que $2\pi.\ EF.\ Dd$: afin que l'eau puiſſe paſſer aſſez librement. Dans le cas d'égalité nous aurons donc $Dd = \frac{Cc^2}{2EF}$, & par la même raiſon pour les largeurs moyennes $Mm = \frac{Cc^2}{2.\ PM}$. Or Cc doit être pris pluſieurs fois plus petite que EF.

LVIII. Ayant donc conſtruit une telle machine conoïdique, dont la hauteur AE ſoit $= a$, le parametre de la parabole AMF $= g$, & l'ouverture entière en haut $2\pi.\ EF.\ Dd = bb$, qu'on fera auſſi grande, que les circonſtances le permettent: cette machine ſera propre à puiſer l'eau par l'orifice Cc, & à la dégorger en haut par la fente annulaire Dd.

LIX. Pour cet effet on doit tourner la machine autour de ſon axe OO, avec une telle viteſſe, que chaque révolution réponde à une oſcillation d'un pendule $q = \frac{2g}{\alpha + 1}$. Donc, puiſque $\alpha > 0$, on aura $q < 2g$ & partant les révolutions de la machine doivent être plus rapides que les oſcillations d'un pendule, dont la longueur eſt double du parametre de la parabole AMF.

LX. Si l'on employe la force A, qui doit agir avec la viteſſe i, pour mettre la machine en mouvement, la valeur de la lettre α ſera déterminée par cette équation :

$bb = \frac{Ai}{4(\alpha + 1)\alpha.\sqrt{aal}}$, ou bien $(\alpha + 1)\sqrt{\alpha} = \frac{Ai}{4abb\sqrt{al}}$: ou l

marque

marque la quantité de 15, 625 pieds. Donc, puisque α devient extrèmement petit, on aura à peu près $\sqrt{\alpha} = \frac{Ai}{4\,abb\sqrt{al}}$ ou $\alpha = \frac{AAii}{16\,a^3b^4l}$: d'où l'on tirera encore plus près,

$$\sqrt{\alpha} = \frac{4abbAi.\ \sqrt{al}}{AAii + 16a^3b^4l} \ \&\ \alpha = \frac{16a^3b^4l.\ A^2ii}{(AAii + 16a^3b^4l)^2}.$$

LXI. Ayant trouvé la valeur de α, on en connoitra d'abord la quantité d'eau D, que cette force sera capable d'élever dans une seconde; car ayant $\alpha + 1 = \frac{Ai}{4\,abb\sqrt{\alpha al}}$, cette quantité d'eau sera $D = 2bb\sqrt{\alpha al} = \frac{8aab^4l.\ Ai}{AAii + 16a^3b^4l}$, ou bien $D = \frac{Ai}{2a + \frac{AAii}{8aab^4l}}$.

Et les révolutions de la machine répondront aux oscillations d'un pendule $q = \frac{2g}{1 + \frac{AAii}{16a^3b^4l}}$, ou bien on aura $q = \frac{4agD}{Ai}$.

LXII. Or, pourque cette force A, que nous supposons agir avec une vitesse, qui parcourt l'espace i dans une seconde, soit en état de mouvoir la machine avec ce degré de vitesse, il faut qu'elle y soit appliquée de telle manière, qu'il soit $\frac{dd}{\mu\mu} = \frac{iiq}{8l} = \frac{2iig}{8l + \frac{AAii}{2a^3b^4}}$; ou, puisque cette application ne se peut faire avec la dernière précision, il suffit de mettre $\frac{d}{\mu} = \frac{1}{2}i\sqrt{\frac{g}{l}}$.

LXIII. On fera donc travailler la force donnée A à une rouë, en sorte que le point de l'application soit éloigné de l'axe de la rouë

à

à une distance $= d$; & cette rouë est tellement liée avec la machine, que, pendant que la rouë fait une révolution, la machine en fasse μ tours: & si les circonstances permettent de poser $\mu = 1$, on pourra faire travailler la force A immédiatement à l'axe de la machine OO, de sorte qu'elle en soit éloignée à la distance $= d$.

LXIV. La force ainsi appliquée seroit bien capable d'entretenir la machine dans le mouvement, qui vient d'être marqué, s'il n'y avoit point de frottement du côté de l'axe, autour duquel la machine est mobile. Mais pour tenir aussi compte du frottement, on n'a qu'à rabattre une certaine partie de la force mouvante A, qui sert à vaincre le frottement, & n'introduire dans le calcul, que le reste, qui est employé actuellement à mouvoir la machine.

Description de la Machine.

Fig. 5. LXV. La Machine aura donc la forme d'un entonnoir creux en dedans, dont la surface intérieure AMMDD est un conoïde parabolique, formé par la révolution de la parabole AMD autour de l'axe AE. La surface extérieure *ammdd*, est un conoïde à peu près semblable & plus large, pour former avec la surface intérieure la cavité, par laquelle l'eau puisse monter. Et pour affermir ces deux surfaces ensemble, la cavité sera partagée de bas en haut par quelques diaphragmes.

LXVI. Ces deux surfaces laisseront en haut entr'elles une fente, qui régne tout autour de la base supérieure du conoïde, par laquelle l'eau puisse se décharger, & en bas il y a une ouverture *cc*, par laquelle l'eau entre dans l'entonnoir autour de l'axe ACO. Pour cet effet la machine sera plongée dans l'eau, dont la surface soit LL, de sorte que le bout cylindrique d'embas *aa cc* se trouve sous l'eau, & en conséquence de cela on réglera la hauteur de ce cylindre *aacc*.

LXVII. La Machine est ensuite librement mobile autour de l'axe OO, qui passe par le milieu de l'entonnoir, & qui tourne sur des

pivots

Tab. VII.

ad pag. 328.

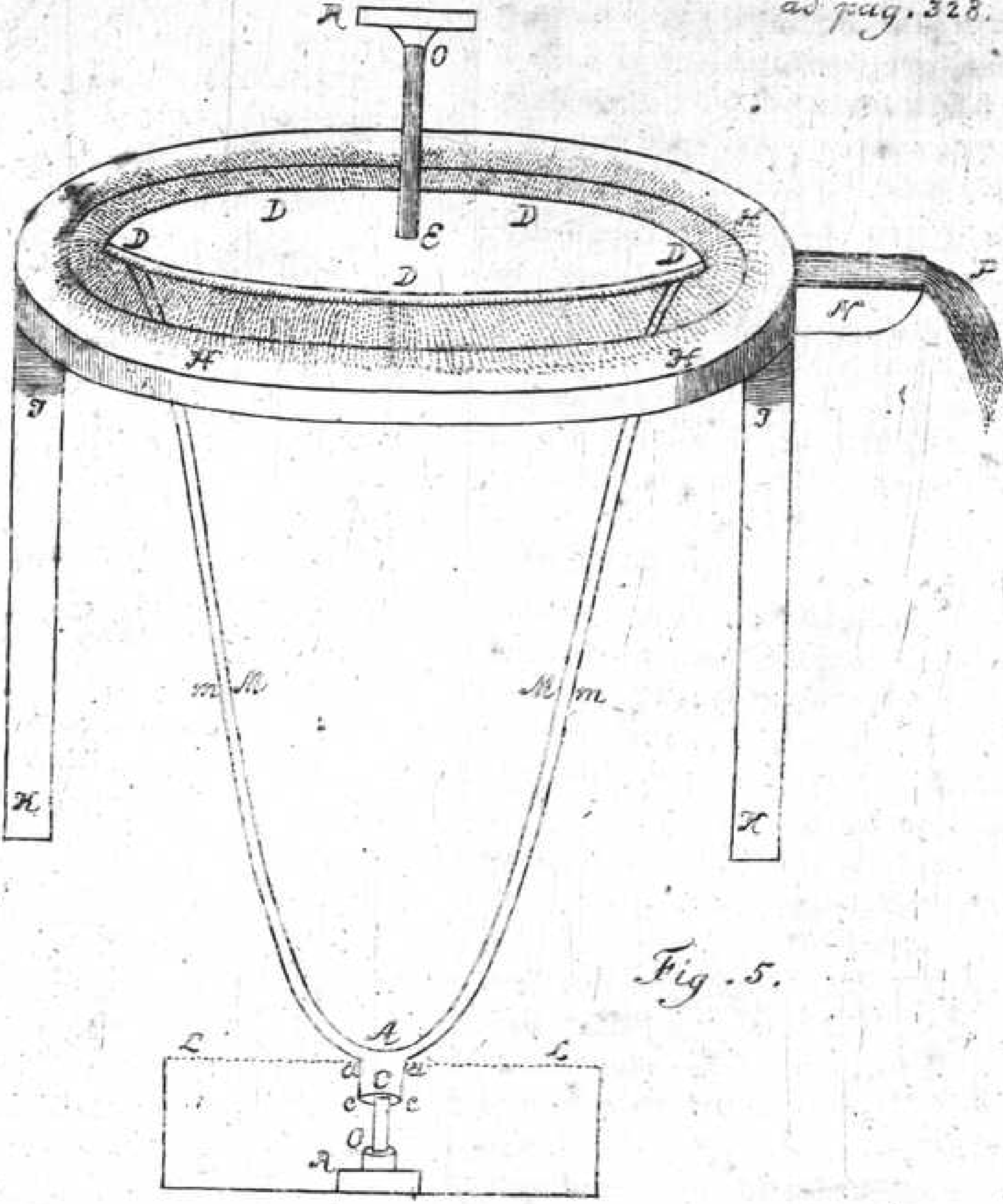

Fig. 5.

ad pag. 356.

pivots R, R, affermis en haut & en bas. Cet axe ſera auſſi attaché à l'entonnoir par des bras, pour que la machine ſoit d'autant plus ferme. Cependant il faut prendre garde que cet axe ne ſoit pas trop épais à l'endroit, où il traverſe le petit cylindre $aacc$, afin qu'il y reſte une aſſez grande ouverture pour l'entrée de l'eau, & qu'elle ne s'étende pas trop du milieu de l'axe.

LXVIII. Pour recevoir l'eau, qui ſe dégorge par la fente annulaire d'enhaut à $DDdd$, on mettra autour du bord ſupérieur, où la fente eſt repliée en dehors, afin que l'eau en découle plus librement, une auge circulaire HHHH, ſoutenuë par les piliers IK, IK, dans laquelle l'eau ſe dégorge, & d'où elle découle enſuite en P par le canal N.

LXIX. J'ai déjà expliqué, comment on doit appliquer à la machine la force, qui doit mouvoir la machine, afin qu'on en tire le plus grand avantage : & ſelon que cette force doit être appliquée immédiatement à l'axe de la machine, ou par le moyen d'une rouë, la manoeuvre & les autres parties, qui compoſeront la machine, en ſeront aiſément réglées.

EXEMPLE.

LXX. Soit, par exemple, la hauteur de l'entonnoir $AE = 15\frac{5}{8}$ pieds où $a = l$; & le parametre de la parabole $g = 3$ pieds, & le demi-diametre de la baſe de l'entonnoir en haut ſera de 6, 846 pieds, & à cauſe du repli du bord ſupérieur ce demi-diametre montera bien à 7 pieds. Enſuite poſant le diametre du cylindre en bas cc d'un pied environ : l'ouverture de la fente d'en-haut pourra être $\frac{1}{50}$ pieds ; & toute l'ouverture de la fente ſera $bb = 0,88$ pieds quarrés, ou bien $bb = \frac{8}{9}$.

LXXI. Qu'on veuïlle employer la force d'une homme, qui agiſſe avec une viteſſe de deux pieds par ſeconde, & en rabattant une partie pour vaincre le frottement, on pourra mettre $A = \frac{1}{7}$, & on aura $\frac{g}{v} = \frac{1}{6aa(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}$, ou $(\alpha+1)\sqrt{\alpha} = 0,000768$, d'où l'on tire $\sqrt{\alpha} = 0,000768$, & $\alpha = 0,00000059$, de forte qu'on pourra regarder la valeur de α comme $= 0$. Donc la quantité d'eau, que la machine élevera par feconde, fera $= \frac{Ai}{2a} = 0,021333$ pieds cubiques. Donc dans une heure un homme fera capable d'élever à la hauteur de $15\frac{5}{8}$ pieds, à peu près 77 pieds cubiques d'eau.

LXXII. Chaque révolution de la machine s'achevera dans le tems d'une ofcillation d'un pendule de 6 pieds, ou bien en $1\frac{1}{3}$ feconde, ou la machine doit faire environ 45 tours dans une minute. Pour cet effet l'homme doit être tellement appliqué à la machine, qu'il foit $\frac{dd}{\mu\mu} = 0,192$ & $\frac{d}{\mu} = 0,4381$. Ainfi on pourra mettre l'homme immédiatement à l'axe de la machine en pofant $\mu = 1$, & le faire travailler à une manivelle, dont l'ouverture eft presque d'un demi-pied, & cette manivelle pourra être appliquée le plus commodément à l'axe en haut, en laiffant paffer l'axe par fon foutien R d'en-haut, ou autrement felon les circonftances.

RECHER-