1753

# Application de la machine hydraulique de M. Segner à toutes sortes d'ouvrages et de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinairement

Leonhard Euler

# APPLICATION
## DE LA
# MACHINE HYDRAULIQUE
## DE M. *SEGNER*
## À TOUTES SORTES D'OUVRAGES
### ET DE SES AVANTAGES SUR LES AUTRES MACHINES HYDRAULIQUES DONT ON SE SERT ORDINAIREMENT,

PAR M. EULER.

---

I.

Ayant déjà donné la Théorie de cette Machine, (*) j'expoſerai ici plus en détail, de quelle manière on doit s'en ſervir le plus commodément dans toutes les occaſions, où l'on fait uſage des machines ordinaires, qui ſont miſes en mouvement par l'impulſion de l'eau contre les aubes d'une rouë. Je mettrai en même tems cette nouvelle machine en comparaiſon avec les machines ordinaires, pour faire voir les grands avantages, qu'elle eſt capable de fournir préférablement aux autres. Car, en employant la même quantité d'eau, & la même chûte, cette machine produira un effet à peu près quatre fois plus grand que les machines ordinaires, quand même elles ſont le plus avantageuſement appliquées.

II. Pour cet effet je commencerai par mettre dans tout ſon jour la Théorie des machines ordinaires, où il faut avoir égard aux articles ſuivans :

(*) Voyez le Tome précedent. p. 311, & ſuiv.

I. à la quantité d'eau, dont on eſt le maitre de ſe ſervir pour mettre la machine en mouvement. Soit donc D la quantité d'eau, que le reſervoir fournit par ſeconde.

II. à la hauteur, par laquelle on peut faire tomber cette eau, avant qu'elle frappe les aubes de la rouë : je nommerai cette hauteur $= a$.

III. Ces deux articles enſemble donnent ce qu'on peut nommer la force mouvante de la machine ; car, plus la quantité d'eau D fournie par ſeconde ſera grande, la force mouvante croitra en même raiſon ; & plus la hauteur de la chûte $a$ ſera grande, la force en ſera augmentée en même raiſon. Ainſi on pourra exprimer la force mouvante par le produit $Da$ : & on verra par la ſuite, que cette idée eſt réélle, & conforme à la Théorie.

IV. Donc, lorsque cette eau frappe contre les aubes, elle aura une viteſſe, qui répond à la hauteur $a$, ou bien cette viteſſe ſera $= \sqrt{a}$. Poſant donc $g =$ à la hauteur, par laquelle un corps tombe dans une ſeconde, puisque la viteſſe $\sqrt{g}$ parcourt l'eſpace $2g$ par ſeconde, la viteſſe $\sqrt{a}$ parcourra un eſpace $= 2\sqrt{ag}$ par ſeconde.

V. Puisque la quantité d'eau qui arrive par ſeconde eſt $= D$, elle formera avec cette viteſſe un filet d'eau, dont l'épaiſſeur ſera $= \frac{D}{2\sqrt{ag}}$ : car cette épaiſſeur multipliée par l'eſpace parcouru dans une ſeconde $2\sqrt{ag}$, doit produire la quantité d'eau fournie par ſeconde. Ce filet frappera donc les aubes ſur un eſpace $= \frac{D}{2\sqrt{ag}}$ : ou ce n'eſt qu'un tel eſpace ſur la ſurface des aubes, qui ſera frappée par l'eau.

VI. Or on ſait, que pour que la machine produiſe le plus grand effet, il faut que l'aube ſe meuve avec une viteſſe égale au tiers de la viteſſe

viteſſe de l'eau. Donc la viteſſe de ce point de l'aube ſera $= \frac{1}{3} \sqrt{a}$, ou elle décrira un eſpace $\frac{2}{3} \sqrt{ag}$ par ſeconde. Soit $b$ le rayon de la rouë, & $1 : \pi$ le rapport du diametre à la circonference, de ſorte que $2\pi b$ ſoit la circonference de la rouë; & $\frac{2}{3} \sqrt{ag} : 2\pi b = \frac{\sqrt{ag}}{3\pi b}$ donnera le nombre des révolutions, que la rouë acheve par ſeconde.

VII. La viteſſe donc, dont l'eau frappe l'aube, ne ſera que $\frac{2}{3} \sqrt{a}$ ou duë à la hauteur $= \frac{4}{9} a$. Et partant ſi nous ſuppoſons, que toute la quantité d'eau frappe les aubes, & que cela ſe faſſe perpendiculairement ſur l'eſpace $= \frac{D}{2\sqrt{ag}}$, ce qui eſt le cas le plus avantageux, la force de l'eau contre l'aube ſera égale au poids d'un volume d'eau $= \frac{4}{9} a \cdot \frac{D}{2\sqrt{ag}} = \frac{2}{9} D \sqrt{\frac{a}{g}}$.

VIII. Il eſt bien vrai, que quelques Auteurs eſtiment cette force deux fois plus grande; & cela arrive actuellement, non ſeulement ſelon l'expérience, mais auſſi ſelon la théorie, lorsque la ſurface qui reçoit le choc eſt très large par rapport à la partie frappée; & que l'eau eſt obligée de rebrouſſer chemin, & de changer ſa direction jusqu'à un angle droit. Mais quand les aubes ne ſont pas ſi larges, & que l'eau aprés le choc ne ſubit point un ſi grand changement dans ſa direction, comme il arrive ordinairement, alors la force revient à celle qui a été trouvée.

IX. Ainſi, quand même nous voudrions accorder tous les avantages, la force de l'eau ſur les aubes deviendroit $= \frac{4}{9} D \sqrt{\frac{a}{g}}$; mais il il faut remarquer, que ce cas ne ſauroit avoir lieu que ſous ces trois conditions: 1mo, que toute la quantité d'eau D vienne frapper ſur les aubes, & que rien n'en échape: 2do, que le choc ſe faſſe toujours ſe-

 lon

lon une direction perpendiculaire à l'aube : & $3^{tio}$, que le filet d'eau ne frappe que sur une petite partie de l'aube, ou plutôt que l'aube soit trés large par rapport au filet d'eau.

X. Cette quantité $\frac{4}{3}$ D $\sqrt{\frac{a}{g}}$ sera donc asseurément trop grande pour exprimer la force de l'eau sur l'aube, & il est très probable que la moitié $\frac{2}{3}$ D $\sqrt{\frac{a}{g}}$ ne sera presque jamais trop petite. Par ces raisons je prendrai un milieu en posant cette force $= \frac{1}{3}$ D $\sqrt{\frac{a}{g}}$ : & le moment pour tourner la rouë sera $= \frac{1}{3}$ D$b \sqrt{\frac{a}{g}}$.

XI. Supposons que cette rouë fasse $\mu$ révolution pendant chaque seconde, & nous aurons $\mu = \frac{\sqrt{ag}}{3\pi b}$, ou $\mu b = \frac{1}{3\pi}\sqrt{ag}$. Et posant la longueur d'un pendule simple à secondes $= l$, de sorte que $l =$ 3, 166 pieds de Rhin, on sait que $\frac{2g}{l} = \pi\pi$: donc nous aurons $\mu b = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}al}$.

XII. Quelle que soit la résistance a vaincre par la force de la machine, il est permis de concevoir un tambour, dont le rayon $= c$, lequel soit mis en mouvement par la rouë principale, moyennant des pignons & rouës quelconques : & que la résistance soit appliquée à ce tambour. Donc, posant cette résistance $=$ Q, qui marque un volume d'eau, dont le poids lui est égal, le moment de cette résistance sera $=$ Q$c$.

XIII. Supposons de plus, que ce tambour acheve $\nu$ tours dans une seconde, & puisque la rouë principale est supposée faire $\mu$ tours en même tems; le principe général de l'équilibre de toutes les machines fournit cette égalité $\frac{1}{3}\mu$.

$$\tfrac{1}{3}\mu.\ Db\sqrt{\frac{a}{g}} = \nu.\ Qc$$

& puisque $\mu b = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}al}$, nous aurons $\nu Qc = \tfrac{1}{9} Da\sqrt{\frac{l}{2g}}$ ou bien, à cauſe de $\pi = \sqrt{\frac{2g}{l}}$; $\nu Qc = \frac{1}{9\pi} Da$.

XIV. En voici donc deux équations

I. $Da = 9\pi.\ \nu Qc$ & II. $\mu b = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}al}$

qui renferment tout ce qu'il faut ſavoir de la théorie, pour mettre bien en pratique toutes les machines de cette eſpece : & ces deux équations ſont ſuffiſantes pour réſoudre toutes les queſtions, qu'on ſçauroit former ſur la conſtruction de ces machines.

XV. On voit bien que ſous le moment $Qc$ on peut comprendre auſſi le frottement, auquel l'aiſſieu du tambour eſt aſſujetti : mais, pour le frottement de l'aiſſieu de la rouë principale, il ne ſauroit être renfermé dans le terme $\nu Qc$, vû qu'il ſe rapporte à un autre mouvement de rotation. Ainſi, poſant $Ff$ pour le moment du frottement de la rouë principale, la premiere égalité aura cette forme

$Da = 9\pi(\nu Qc + \mu Ff)$, l'autre demeurant la même.

XVI. Sur cette forme je remarque d'abord, que puisque Q marque la réſiſtance à vaincre, & $2\pi\nu c$ le chemin par lequel la réſiſtance eſt avancée pendant une ſeconde, le produit $2\pi\nu c Q$ nous offre la juſte idée de l'effet de la machine rapporté à une ſeconde ; & comme la force mouvante $Da$ ſe rapporte auſſi à une ſeconde, le rapport que nous venons de découvrir entre la force mouvante & l'effet total de la machine, eſt bien remarquable. Car la force mouvante eſt à l'effet total de la machine comme $4\tfrac{1}{2}$ à 1.

XVII. Donc, ſi l'effet que la machine doit produire, eſt donné, ſavoir le produit de la réſiſtance par ſon chemin dans une ſeconde, nous en connoitrons d'abord la force mouvante, qui y eſt requiſe, où le produit de la quantité d'eau fournie par ſeconde par la hauteur de la chûte : car la force mouvante ſera $= 4\frac{1}{2}$ fois l'effet total. Et réciproquement, ſi la force mouvante eſt donnée, l'effet qu'on en peut attendre, ſera deux neuvièmes de la force mouvante : ce qu'il faut entendre, lorsque la machine eſt arrangée le plus avantageuſement.

XVIII. A' cauſe du frottement de la rouë principale, il eſt evident, que pour le ſurmonter il faut d'autant moins de force mouvante, plus le nombre $\mu$ ſera petit, ou plus ſera lent le mouvement de rotation de la rouë principale. Donc, puisqu'en vertu de la ſeconde équation, il faut qu'il ſoit : $\mu b = \frac{1}{3} V \frac{1}{2} a l$; pour rendre la valeur $\mu$ petite, il faut augmenter le rayon de la rouë autant que cela ſe pourra.

XIX. On voit de là que, s'il étoit poſſible de conſtruire une telle machine, où l'effet total fût plus grand par rapport à la force mouvante, cette machine ſeroit plus parfaite : & on comprendra auſſi que la plus parfaite Machine ſeroit celle, oú l'effet total ſeroit exactement égal à la force mouvante : car qu'il devint même plus grand, cela eſt ouvertement impoſſible, & contraire aux principes de Mécanique.

XX. Mais avant que d'examiner ſur ce pied la nouvelle machine de M. *Segner*, je me ſouviens encore d'une autre manière de mettre une machine en mouvement par un jet d'eau. On place la rouë principale horizontalement, & ſes aubes ſont inclinées à l'horizon ; le trait d'eau y tombe perpendiculairement, & frappant obliquement les aubes, y exerce un effet pareil à celui du vent ſur les moulins à vent.

XXI. Pour conſidérer donc une telle machine, ſoit encore D la quantité d'eau fournie par ſeconde, qui ait une chûte de la hauteur $a$, avant qu'elle tombe ſur les aubes, & ce filet d'eau qui rencontre les

aubes

aubes, aura une largeur, comme nous avons vû $= \frac{D}{2\sqrt{ag}}$ qui sera la section horizontale du filet.

XXII. Que l'angle $\Phi$ exprime l'inclinaison de l'aube à l'horizon, & le filet d'eau en tombant sur l'aube y occupera un espace $= \frac{D}{2\cos\Phi.\sqrt{ag}}$, qu'il frapperoit avec la vitesse $= \sqrt{a}$ si l'aube étoit en repos, & la vitesse perpendiculaire sur l'aube seroit par la décomposition $= \cos\Phi.\sqrt{a}$. Mais, puisque les aubes ont un mouvement horizontal, dont la vitesse soit $= \sqrt{u}$, elles échapent à l'impulsion avec une vitesse $= \sin\Phi.\sqrt{u}$, de sorte que la veritable vitesse dont l'eau frappe les aubes sera $= \cos\Phi.\sqrt{a} - \sin\Phi.\sqrt{u}$.

XXIII. La force qui en résulte sur les aubes sera donc $= \frac{D}{2\cos\Phi.\sqrt{ag}}$, $(\cos\Phi.\sqrt{a} - \sin\Phi.\sqrt{u})^2$, dont la direction est perpendiculaire au plan des aubes, d'où résulte une force horizontale pour pousser les aubes $= \frac{D\sin\Phi}{2\cos\Phi.\sqrt{ag}}(\cos\Phi.\sqrt{a} - \sin\Phi.\sqrt{u})^2$. Posant la tangente de l'angle $\Phi = t$ cette force sera $= \frac{Dt(\sqrt{a} - t\sqrt{u})^2}{2(1+tt)\sqrt{ag}}$, qui devient un *maximum*, lorsqu'on détermine l'inclinaison en sorte que $(1-tt)\sqrt{a} = t(3+tt)\sqrt{u}$.

XXIV. Soit $b$ le rayon de la rouë principale, ou la distance depuis l'aissieu de la rouë jusqu'à l'endroit des aubes, où se fait le choc, & que cette rouë fasse $\mu$ révolutions dans une seconde. Donc, puisque la vitesse est supposée $= \sqrt{u}$, elle fera un espace $= 2\sqrt{gu}$ par seconde; donc $\mu = \frac{2\sqrt{gu}}{2\pi b}$ ou $\mu b = \frac{1}{\pi}\sqrt{gu} = \sqrt{\tfrac{1}{2}ul}$: & le

 moment

moment de la force fur les aubes pour faire tourner la rouë $= \frac{Dbt(\sqrt{a}-t\sqrt{u})^2}{2(1+tt)\sqrt{ag}}$.

XXV. Que Q repréfente encore la réfiftance appliquée à un tambour, dont le rayon $= c$, & qui faffe $\nu$ tours dans une feconde ; de forte que le moment de la réfiftance foit $= Qc$ ; & le principe de l'équilibre nous fournit cette équation

$$\nu Qc = \frac{\mu Dbt(\sqrt{a}-t\sqrt{u})^2}{2(1+tt)\sqrt{ag}} = \frac{Dt(\sqrt{a}-t\sqrt{u})^2}{2\pi(1+tt)}\sqrt{\frac{u}{a}}$$

Or, pour produire le plus grand effet, pofons $\sqrt{u} = \frac{(1-tt)\sqrt{a}}{t(3+tt)}$

de forte que $\mu b = \frac{1-tt}{t(3+tt)}\sqrt{\tfrac{1}{2}al}$, & l'équation trouvée prendra cette forme :

$$2\pi\nu Qc = \frac{4Da(1-t^4)}{(3+tt)^3}.$$

XXVI. Nous voyons donc, que l'effet $2\pi\nu Qc$ feroit le plus grand par rapport à la force mouvante $Da$, fi l'on faifoit $t = o$, & dans ce cas on auroit $Da = \frac{27}{4}.\ 2\pi\nu Qc$ : & nous aurions comme auparavant $Da = 9\pi\nu Qc$, fi nous euffions augmenté la force de l'impulfion à caufe de la largeur des aubes. Mais, puifque $\mu b$ deviendroit infini, en pofant $t = o$, ce cas ne peut pas avoir lieu dans la pratique.

XXVII. Il faudra donc donner à $t$ une fi petite valeur, que celle de $\mu b$ ne devienne pas trop grande ; or alors l'effet de cette machine deviendra plus petit, que fi l'on employoit la méme force mouvante felon la manière precedente : & partant il fera toujours plus avantageux de fe fervir des rouës verticales, comme il a été enfeigné auparavant.

XXVIII.

XXVIII. Voyons maintenant, quel ſera l'effet de la nouvelle machine hydraulique, tandis que la force mouvante D$a$ demeure la méme: ou bien, ſoit encore D la quantité d'eau, qui ſe fournit par ſeconde, & $a$ la hauteur de la chûte, ou plûtôt celle qu'on peut donner au vaiſſeau deſtiné à recevoir l'eau par enhaut, & à la laiſſer ecouler par enbas ſuivant la nature de cette machine, dont j'ai déjà donné la deſcription dans le Mémoire ſur la Théorie de ce ſujet.

XXIX. Soit $n$ le nombre des ouvertures, par leſquelles l'eau coule en bas, & $bb$ l'amplitude de chacune: comme ce vaiſſeau tourne autour d'un axe vertical qui paſſe par ſon milieu, ſoit la diſtance des ouvertures à cet axe $= b$, & la viteſſe des ouvertures autour de cet axe $= \sqrt{u}$, qui ſera dans une ſeconde l'eſpace $= 2\sqrt{gu}$: donc, ſi nous ſuppoſons que le vaiſſeau faſſe $\mu$ tours dans une ſeconde, nous aurons cette égalité $\mu = \frac{2\sqrt{gu}}{2\pi b}$ ou $\mu b = \frac{1}{\pi}\sqrt{gu} = \sqrt{\tfrac{1}{2}ul}$, prenant $l$ pour la longueur du pendule ſimple à ſecondes.

XXX. La hauteur de l'eau dans le vaiſſeau étant conſtamment $= a$, j'ai montré que l'eau ſort par les ouvertures avec une viteſſe $= \sqrt{(a+u)}$, qui ſera donc un chemin $= 2\sqrt{g(a+u)}$ dans une ſeconde. Et partant la quantité d'eau, qui s'en va par toutes les ouvertures dans une ſeconde, ſera $= 2nbb\sqrt{g(a+u)}$; laquelle devant être égale à la quantité D, qui entre dans le vaiſſeau chaque ſeconde, nous aurons cette égalité $D = 2nbb\sqrt{g(a+u)}$.

XXXI. Que cette machine faſſe tourner un tambour, en ſorte qu'il acheve $\nu$ révolutions dans une ſeconde: que la réſiſtance à vaincre ſoit $= Q$, & le rayon du tambour $= c$, de ſorte que le moment de cette réſiſtance par rapport à l'aiſſieu du tambour ſoit $= \nu$, & par ce que j'ai demontré, on aura cette équation:

$$\frac{\nu}{\mu}Qc = 2nbhb\,(a+u-\sqrt{(au+uu)})$$

cette

cette expreſſion étant le moment de la réaction de l'eau pour faire tourner la machine : or ici eſt $\frac{\nu}{\mu}$, & $a$ ce que j'ai là nommé $\frac{1}{\mu}$ & $c$.

XXXII. Pour comparer l'effet de la machine qui eſt $= 2\pi\nu Q c$ avec la force mouvante D$a$, mettons pour $2\pi bb$ ſa valeur $\frac{D}{\sqrt{g(a+u)}}$, & nous aurons :

$$\frac{\nu}{\mu} Qc = \frac{Db}{\sqrt{g}} (\sqrt{(a+u)} - \sqrt{u})$$

& puisque $\mu b = \frac{1}{\pi}\sqrt{gu}$, nous aurons

$$2\pi\nu Q c = 2D(\sqrt{(au+uu)} - u)$$

XXX. L'effet de la machine $2\pi\nu Q c$ ſera donc le plus grand, ſi l'on fait $u = \infty$, car alors à cauſe de $\sqrt{(au+uu)} - u = \frac{1}{2}a$, on aura $2\pi\nu Qc = Da$, ou bien l'effet ſera égal à la force mouvante. Mais ſi l'on faiſoit $u = \infty$, le mouvement de rotation de la machine deviendroit infiniment rapide. Cela étant impoſſible à exécuter, il faudra rendre la viteſſe $\sqrt{u}$ auſſi grande, que les circonſtances le permettront.

XXXIV. Mais alors l'effet de la machine deviendra plus petit que la force mouvante, ou bien on perdra une partie de la force mouvante. Suppoſons donc qu'on veuïlle perdre la partie exprimée par la fraction $\delta$ ſur l'effet entier, qui ſeroit égal à la force mouvante, de ſorte qu'il y ait

$$2\pi\nu Q c = (1-\delta) Da.$$

Cela poſé, nous aurons $(1-\delta)a = 2\sqrt{(au+uu)} - 2u$, d'où nous tirons la valeur de $u = \frac{(1-\delta)^2 a}{4\delta}$, & $a+u = \frac{(1+\delta)^2 a}{4\delta}$.

XXXV.

XXXV. Donc, puisque $\mu b = \frac{1}{\pi} \sqrt{g u} = \sqrt{\tfrac{1}{2} u l}$, nous aurons cette équation $\mu b = \tfrac{1}{2}(1-\delta) \sqrt{\frac{a l}{2 \delta}}$: & l'équation $n b b = \frac{D}{2 \sqrt{g}(a+u)}$ prendra cette forme $n b b = \frac{D \sqrt{\delta}}{(1+\delta)\sqrt{g a}} = \frac{D \sqrt{2 \delta}}{\pi(1+\delta)\sqrt{a l}}$ ou bien $n b b = \frac{(1-\delta) D}{2\pi(1+\delta)\mu b} = \frac{\nu Q c}{(1+\delta)\mu a b}$, & ce font les déterminations tirées de la théorie, & appliquées à nôtre préfent deffein.

XXXVI. Pour cette machine nous avons donc ces trois équations

I. $2\pi \nu Q c = (1-\delta) D a$

II. $\mu b = \tfrac{1}{2}(1-\delta) \sqrt{\frac{a l}{2\delta}}$

III. $n b b = \frac{D}{\pi(1+\delta)} \sqrt{\frac{2\delta}{a l}} = \frac{(1-\delta) D}{2\pi(1+\delta)\mu b} = \frac{\nu Q c}{(1+\delta)\mu a b}$

qui fervent à déterminer tout ce qui regarde la conftruction de la machine, pour la rendre propre au deffein, auquel on la veut deftiner.

XXXVII. Les élémens donc, defquels la conftruction d'une telle machine dépend, font : 1mo, la quantité d'eau D qui fe décharge par feconde dans le vaiffeau; 2do, la hauteur qu'on peut donner au vaiffeau qui eft $= a$, & dépend de la chûte de l'eau ; 3°, le demi-diametre du vaiffeau en bas $= b$, ou la diftance des ouvertures à l'axe de la machine; 4°, l'amplitude de chaque orifice $b b$, avec leur nombre $n$; 5°, le nombre des révolutions $\mu$, que le vaiffeau acheve pendant une feconde; 6°, la réfiftance Q qu'il faut vaincre par la force de la machine, avec le rayon du tambour $c$, qui y eft appliqué;



7°, le

7° le nombre des tours $\nu$ que ce tambour fait chaque feconde ; & 8° enfin, la fraction $\delta$, qui exprime le déchet, dont l'effet actuel de la machine eſt moindre que l'effet le plus grand, dont la machine eſt ſuſceptible.

XXXVIII. La quantité d'eau fournie par ſeconde D multipliée par la hauteur du vaiſſeau $a$, ou le produit D$a$ donne ce que je nomme la force mouvante : & $2\pi\nu Qc$ exprime l'effet de la machine, étant le produit de la réſiſtance Q par le chemin qu'elle fait par ſeconde : où Q marque un volume d'eau, dont le poids eſt égal à la réſiſtance. Et c'eſt par ce produit, qu'il eſt convenable d'eſtimer l'effet de toutes les machines.

XXXIX. Si la machine étoit dans ſa plus grande perfection, ou qu'il fût $\delta = o$, l'effet ſeroit préciſément égal à la force mouvante ; au lieu que les machines ordinaires, que j'ai décrites cy-deſſus, produiſent à peine un effet qui eſt $4\frac{1}{2}$ fois plus petit que la force mouvante. Ainſi, on peut ſoutenir, qu'une telle machine eſt capable de produire un effet quatre fois plus grand, que les machines ordinaires : ce qui eſt le plus grand avantage, qu'on peut prétendre.

XL. Car il eſt premièrement certain, qu'aucune machine, quelque parfaite qu'elle puiſſe être, ne ſauroit jamais produire un effet plus grand que la force mouvante. Et enſuite, quoiqu'on ne puiſſe pas mettre $\delta = o$, il eſt pourtant toujours poſſible de lui donner une ſi petite valeur, que la perte eſt preſque inſenſible, ou que l'effet $2\pi\nu Qc$ approche tant de la force mouvante D$a$, que la différence ſe réduiſe à peu prés à rien.

XLI. Or on voit, que plus on prend petite la fraction $\delta$, plus le produit $\mu b$ en deviendra grand ; de ſorte qu'il faut alors, ou augmenter l'amplitude du vaiſſeau en bas, c'eſt à dire, ſon demi-diametre $b$, ou augmenter le nombre de ſes révolutions. Ce ſera donc tant de ce rayon $b$ que du nombre $\mu$, que les circonſtances permettent d'établir,

tablir, qu'il faut déterminer la fraction $\delta$. Au reste le produit $\mu b$ entre uniquement dans la détermination de la machine; & il n'importe, quelle valeur qu'on donne à chacun séparément, pourvù que le produit $\mu b$ demeure le même.

XLII. Or il est aussi nécessaire d'avoir égard tant au frottement qu'à la résistance de l'air, d'où l'effet de la machine souffrira quelque diminution. Pour le frottement du tambour, il peut être compris dans le moment même de la résistance $Qc$, vû qu'il y a des machines, comme les moulins, qui n'ont pas d'autre résistance à vaincre que ce frottement, & alors $Qc$ exprimera uniquement le moment de ce frottement.

XLIII. Mais le frottement du vaisseau même, puisqu'il tourne autour d'un axe particulier, se doit considérer séparément. Supposons donc que pour vaincre ce frottement, il faille employer un moment de force $= Ff$; lequel devant être surmonté par la force mouvante, il faudra écrire $\nu Qc + \mu Ff$ au lieu de $\nu Qc$, & alors nôtre premiere équation prendra cette forme :

$$2\pi\nu Qc + 2\pi\mu Ff = (1-\delta)\, Da$$

ou $$2\pi\nu Qc = (1-\delta)\, Da - 2\pi\mu\, Ff$$

XLIV. Pour la résistance de l'air, on la pourra presque réduire à rien, lorsqu'on couvrira le vaisseau tout autour d'une surface unie, & arrondie exactement autour de son axe de mouvement, afin que l'air ne rencontre rien à frapper. Cependant, lorsque le mouvement du vaisseau est fort rapide, l'air ne manquera pas d'y causer quelque résistance, quelque unie que soit la surface extérieure du vaisseau ; puisque les orifices, par où l'eau sort, demandent quelques éminences.

XLV. Supposons donc que ces éminences souffrent de l'air la même résistance, que si une surface $= rr$ se mouvoit avec une vitesse égale dans l'eau. Donc, puisque ces éminences se meuvent avec

 une

une vitesse $= \sqrt{u}$, la résistance de l'air sera $= rru = \frac{(1-\delta)^2 arr}{4\delta}$ dont le moment, qui s'oppose au mouvement de la machine, est $= \frac{(1-\delta)^2 abrr}{4\delta}$

XLVI. Cette résistance se faisant autour de l'axe du vaisseau, il faudra ajouter au terme $\nu Qc$ encore celui-cy $\frac{(1-\delta)^2 \mu abrr}{4\delta}$, ou puisque $\mu b = \frac{1}{2}(1-\delta)\sqrt{\frac{al}{2\delta}}$, celui-cy $= \frac{(1-\delta)^3 arr}{8\delta}\sqrt{\frac{al}{2\delta}}$. De sorte qu'avec le frottement du vaisseau nous ayons cette première équation.

$$2\pi\left(\nu Qc + \mu Ff + \frac{(1-\delta)^3 arr}{8\delta}\sqrt{\frac{al}{2\delta}}\right) = (1-\delta)Da$$

ou bien: $2\pi\nu Qc = (1-\delta)Da - 2\pi\mu Ff - \frac{\pi(1-\delta)^3 arr}{4\delta}\sqrt{\frac{al}{2\delta}}$

XLVII. Maintenant on voit, que si l'on prenoit la fraction $\delta$ trop petite, quelque petite que fût d'ailleurs $rr$ d'où dépend la résistance de l'air, l'effet propre de la machine $2\pi\nu Qc$ pourroit non seulement évanouïr, mais aussi devenir négatif. Il faudra donc donner à $\delta$ une telle valeur, que l'effet de la machine soit diminué de la résistance de l'air le moins qu'il est possible.

XLVIII. Pour cet effet il faut rendre $(1-\delta)Da - \frac{\pi(1-\delta)^3 arr}{4\delta}\sqrt{\frac{al}{2\delta}}$ un *maximum*, ou seulement $(1-\delta)Da - \frac{\pi arr\sqrt{al}}{4\delta\sqrt{2\delta}}$, puisque $\delta$ est fort petit par hypothese: d'où l'on trouve:

$$\delta = \sqrt[5]{\frac{9\pi\pi alr^4}{128\,DD}} \text{ ou } \delta = \sqrt[5]{\frac{7ar^4l}{10\,DD}} \text{ à peu près}$$

Or

Or si l'on trouvoit pour $\delta$ une valeur assez considérable, que $(1-\delta)^3$ différoit trop de l'unité, alors il faudra chercher la valeur de $\delta$ de cette équation :

$$\frac{10\,DD}{7\,a\,r^4\,l}\delta^5 = 1 - 2\delta - \delta\delta + 4\delta^3 - \delta^4 - 2\delta^5 + \delta^6$$

dont la résolution ne sera pas difficile en chaque cas.

XLIX. De là on voit que plus la résistance absoluë de l'air, que j'indique par $rr$, est grande, plus aussi la valeur de la fraction $\delta$ se trouvera grande. Or, ayant estimé la surface de toutes les éminences que frappent l'air, on en prendra environ la millième partie pour la valeur de $rr$. Ainsi, si cette surface montoit à un pied quarré, ce qui seroit déjà beaucoup, la valeur de $rr$ seroit $\frac{1}{1000}$ pied quarré : d'où l'on voit déjà, que la fraction $\delta$ se trouve ordinairement très petite.

L. On voit aussi que plus la hauteur du vaisseau $a$ sera grande, la valeur de $\delta$ en sera augmentée ; mais une plus grande quantité d'eau D tendra à diminuer la fraction $\delta$. Mais il faut remarquer que plus la quantité D est grande, plus aussi la machine doit être grande, & partant aussi $rr$; d'où l'on peut conclure que $\frac{DD}{r^4}$ est toujours une quantité constante à peu près.

LI. Donc, si nous posons, que lorsque D est un pied cubique il y a $rr = \frac{1}{1000}$ : nous aurons $\frac{DD}{r^4} = 1000000$, & puisque $l = 3\frac{1}{7}$, posons $a = 12$ pieds, pour donner au vaisseau une des plus grandes hauteurs, & nôtre équation deviendra.

$$37500\,\delta^5 = 1 - 2\delta - \delta\delta + 4\delta^3 - \text{\&c.}$$

d'où nous concluons $\delta = \frac{4}{35}$; ainsi dans ce cas, qui semble pourtant donner une des plus grandes valeurs de $\delta$, nous trouvons $\delta < \frac{1}{8}$: de sorte qu'on ne perd qu'une huitième partie sur l'effet total.

LII. Posant donc $\delta = \frac{1}{8}$; nôtre seconde équation donne

$$\mu\, b = \tfrac{7}{16} \sqrt{4\,a\,l} = \tfrac{7}{8} \sqrt{a\,l}$$

A' present on prendra $\mu$ si petit, que $b$ ne devienne trop grand, pour diminuer l'effet du frottement du vaisseau; aussi si l'on pose $\mu = \frac{7}{8}$, le rayon $b$ sera la moyenne proportionelle entre la hauteur du vaisseau $a$ & $l = 3\frac{1}{6}$ pieds: & si l'on prenoit $\mu = \frac{7}{16}$, le rayon $b$ seroit le double de cette moyenne proportionelle. On prendra donc toujours le rayon $b$ si grand, qu'il sera possible selon les circonstances.

LIII. Puisque nous avons trouvé par estime $\frac{D}{r\,r} = 1000$, nous aurons $r\,r = \frac{D}{1000}$, & ayant eu dans ce cas $\sqrt{a\,l} = 6$ à peu près, nous obtiendrons $r\,r \sqrt{a\,l} = \frac{6}{1000}\,D$. Donc, posant $\delta = \frac{1}{8}$, le terme qui résulte de la résistance de l'air dans l'expression de l'effet de la machine deviendra $= \frac{1}{20}\,D\,a$ à peu près: & si nous donnons une valeur égale à l'effet du frottement $2\,\pi\,\mu\,F\,f$, nôtre premiere équation se réduira à celle-cy.

$$2\,\pi\,\nu\,Q\,c = \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{6}\,D\,a \text{ ou du moins } 2\,\pi\,\nu\,Q\,c = \tfrac{3}{4}\,D\,a$$

LIV. Ainsi, après cette double diminution, l'effet est encore égal à trois quarts de la force mouvante, & partant encore plus de trois fois plus grand que l'effet des machines ordinaires, quand même celles-cy ne seroient assujetties à aucune diminution de la part du frottement & de la résistance de l'air: mais comme celles-cy en sont également affoiblies, on pourra soutenir que l'effet actuel de cette nouvelle machine est toujours plus de 4 fois plus grand, que celuy des machines ordinaires, en employant une égale force mouvante.

LV. Cependant il ne faut pas oublier en construisant une telle machine, de faire usage de tous les moyens pour diminuer tant le frottement de la machine, que la résistance de l'air. Pour ce dernier on couvrira la machine tout autour d'une surface parfaitement ronde

&

& unie, & on ſera auſſi les tuyaux embas, par où l'eau ſort, auſſi petits qu'il eſt poſſible ; au côté oppoſé des trous par où ils eſſuyent la réſiſtance de l'air, il ſera à propos de les façonner en ſorte qu'ils rencontrent la moindre réſiſtance.

LVI. Pour comprendre mieux cette conſtruction des ouvertu- Fig. 1.
res, par où l'eau ſort de la machine, la figure premiere repréſente la ſection horizontale du vaiſſeau, qui paſſe par les ouvertures, & qui eſt par conſéquent presque au fond de la machine : il y a donc autour de cette ſection un certain nombre de trous, qui reçoivent autant de bouts de tuyaux repliés A, B, C, D, E, F, par lesquels l'eau ſort en *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ſelon des directions horizontales & perpendiculaires aux plans verticaux, qui paſſent par l'axe de la machine O & l'ouverture de chacun de ces tuyaux. Ainſi, l'eau ſautant tout autour en même ſens de ces ouvertures, fera tourner par la force de réaction la machine dans le ſens A B C D E F autour de ſon axe.

LVII. Je remarque de plus, que pour faciliter le mouvement de la machine, il n'eſt pas néceſſaire que toute la cavité du corps du vaiſſeau ſoit remplie d'eau ; mais qu'il ſuffit, qu'il y ait embas un creux, avec lequel les ouvertures communiquent, qui contienne l'eau : la machine aura donc en dedans une paroi, qui forme avec le contour extérieur ce creux. Cependant ce creux doit être aſſés ſpacieux & pluſieurs fois plus large, que la ſomme de toutes les ouvertures priſes à la fois, afin que l'eau ſe puiſſe mouvoir librement ; ce qui eſt néceſſaire pour que ſon mouvement ſoit conforme à la théorie.

LVIII. La machine aura donc la figure d'une cloche à peu près Fig. 2.
creuſe dans ſon contour, & ouverte en haut BB, pour y recevoir l'eau de l'auge T V. Il n'eſt pas néceſſaire que cette ouverture ſoit trop large, afin que l'eau par ſa force centrifuge ne s'éléve pas trop vers les bords : pour cet effet on pourra couvrir la machine en haut vers les bords, & y pratiquer quelques diaphragmes, contre lesquels

quels l'eau V choque en entrant : car ce choc pourra aussi contribuër quelque chose à faire tourner la machine.

LIX. On voit bien que la machine ne doit pas être trop pleine d'eau pour empêcher le débordement, quoique cela ne fasse aucun tort au mouvement de la machine ; mais l'eau débordée se perdroit inutilement, & partant il vaudra mieux d'avoir une moindre hauteur de l'eau dans le vaisseau, comme jusqu'à *bb*, que d'en perdre quelque chose. Ainsi, l'eau descendra de la cavité supérieure B D B en bas par le creux des côtés D F, où elle sort pas les orifices H. Ou, pour diminuer encore davantage le poids de la machine, on pourroit conduire l'eau du bassin en haut BDB à chaque orifice H par un canal particulier, & laisser le reste du contour vuide.

LX. O O représente l'axe de la machine, autour duquel elle tourne : & il faut que cet axe soit assez fort, pour soutenir la machine, & qu'il tourne librement sur ses pivots tant en haut qu'en bas en G. Les barres E F & E K servent à affermir mieux la machine à l'axe O O, pour la maintenir toujours dans sa juste position. Du reste l'axe O O aura en haut un pignon, moyennant duquel & d'une rouë, il mette en mouvement le tambour qui travaille immédiatement à vaincre la résistance, à quoi la machine est destinée.

LXI. Ayant à présent expliqué en général ce qui regarde la construction de cette machine, je passerai à son application à toute sorte d'ouvrages, auxquels on se sert des machines ordinaires. Car, quelque avantageuse que soit cette machine, lorsqu'elle est justement arrangée, on en gagneroit fort peu, si l'on n'observoit pas assez exactement les régles prescrites de la théorie. Cette recherche sera donc le sujet des problèmes suivans.

## PROBLEME I.

*LXII. La quantité d'eau, qu'un reservoir fournit par seconde, avec la hauteur de sa chute, étant donnée ; & outre cela le moment de la*

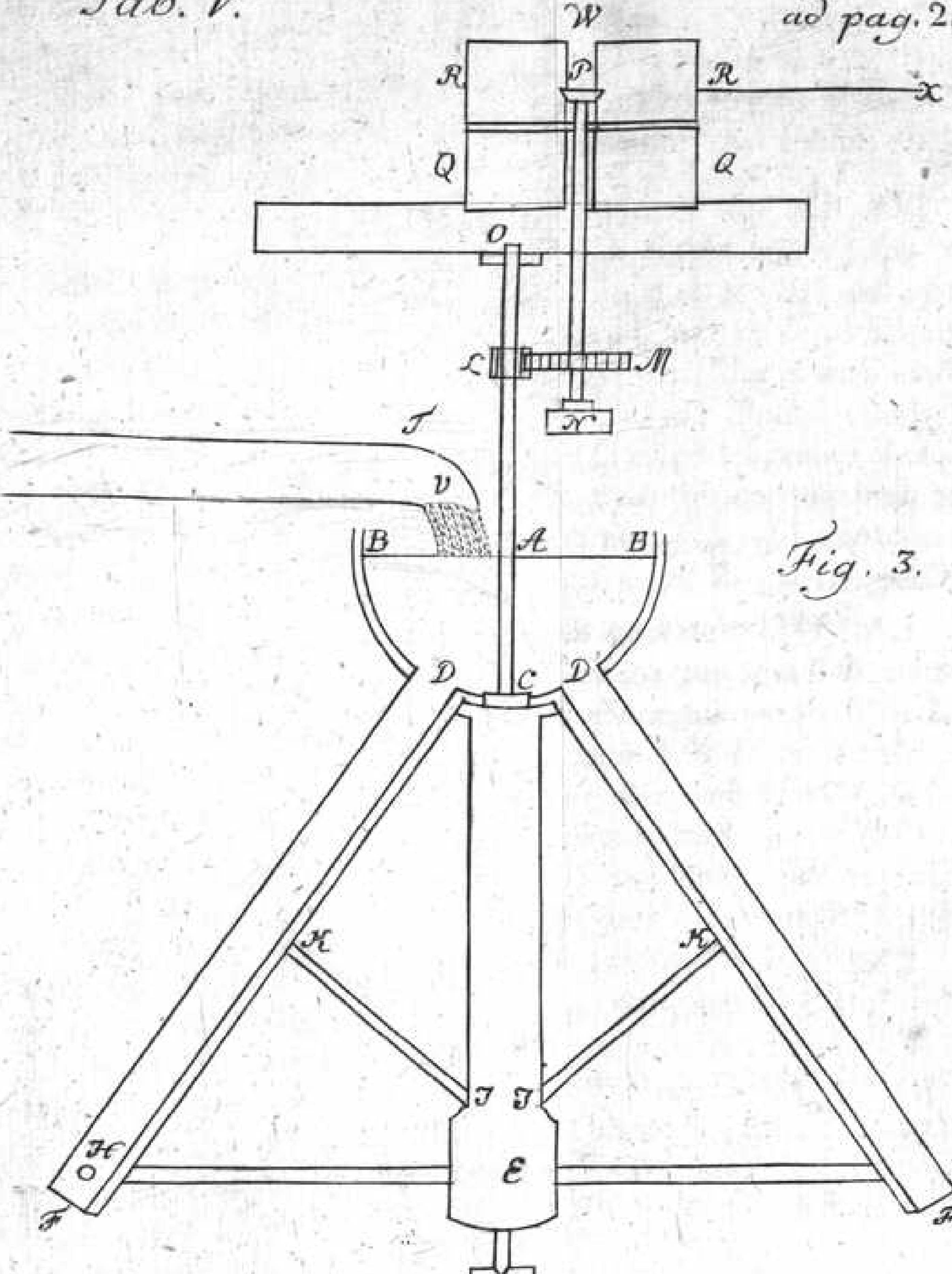



Fig. 3.

*la résistance, qu'il faut vaincre ; déterminer l'effet ou la vitesse, avec laquelle cette résistance pourra être surmontée à l'aide d'une telle machine.*

## SOLUTION.

Soit D la quantité d'eau, que le reservoir est capable de fournir dans le bassin de la machine BDB chaque seconde : & que la chûte soit telle, qu'on puisse commodément donner à la machine une hauteur E à $= a$, de sorte que $a$ marque la hauteur de l'eau dans la machine au dessus des orifices H ; & le produit de ces deux quantités $Da$ exprimera ce que je nomme ici la force mouvante. Ensuite, quelque ouvrage qui doive être exécuté par le secours d'une telle machine, on le peut toujours regarder comme une résistance, qui s'oppose au mouvement de la machine. Il y aura donc une certaine rouë, ou un tambour immédiatement appliqué à cette résistance ; & avant que la machine y soit jointe, on pourra déterminer un moment de forces, qui est capable de surmonter cette résistance, ou de mettre en mouvement le tambour. Supposons donc qu'une force égale au poids d'une masse d'eau $= Q$, étant appliquée à une distance $= c$ de l'essieu de ce tambour, soit capable de vaincre la résistance ; & le produit $Qc$ exprimera le moment de la résistance. Ainsi, on suppose que les quantités $D$, $a$, & $Qc$ sont données, & on cherche avec quelle vitesse cette résistance pourra être vaincuë ; ou avec quelle vitesse la force mouvante sera capable de faire tourner le tambour : car on comprend aisément, que plus cette vitesse sera grande, plus aussi sera grand l'effet de la machine. Posons donc, pour ce qu'il faut chercher, que le tambour étant poussé par la machine, puisse faire $v$ révolutions autour de son axe dans une seconde : & nous avons vû, que cette formule $2\pi v Qc$ exprime l'effet actuel de la machine ; donc, puisque $Qc$ est donné, il s'agit de déterminer le nombre $v$.

Or nôtre premiere équation, après avoir eu égard au frottement & à la résistance de l'air, donne $2\pi v Qc = \frac{3}{4} Da$, de sorte que l'effet total

total de la machine peut être eſtimé égal à trois quarts de la force mouvante $Da$ : de là nous trouvons le nombre des révolutions du tambour dans une ſeconde $v = \frac{3\,Da}{8\,\pi\,Qc}$. Ou, puisque $\pi = 3,14159$, on aura aſſez exactement ; $v = \frac{8}{67} \cdot \frac{Da}{Qc}$, ou bien à peu près $v = \frac{1}{8} \cdot \frac{Da}{Qc}$.

### COROLL. 1.

LXIII. Donc ſi le moment de la réſiſtance $Qc$ eſt égal à la force mouvante, le tambour mettra 8 ſecondes à achever un tour autour de ſon axe : or ſi la force mouvante $Da$ eſt huit fois plus grande que le moment $Qc$, le tambour achevera chaque ſeconde un tour.

### COROLL. 2.

LXIV. Sachant donc le rapport de la force mouvante au moment de la réſiſtance, on en connoitra d'abord le nombre des tours $v$, que le tambour pourra achever dans une ſeconde : pourvû que la machine ſoit arrangée ſelon les régles expliquées auparavant.

### COROLL. 3.

LXV. On comprend auſſi aiſément, que ſi le frottement de la machine, ou la réſiſtance de l'air étoit plus grande, que nous l'avons ſuppoſée ici, au lieu de la fraction $\frac{3}{4}$, on devroit emploier une plus petite, de ſorte qu'on auroit alors ou $2\,\pi\,v\,Qc = \frac{2}{3}\,Da$, ou même $2\,\pi\,v\,Qc = \frac{1}{2}\,Da$ : & partant, ou $v = \frac{1}{9} \cdot \frac{Da}{Qc}$, ou $v = \frac{1}{12} \cdot \frac{Da}{Qc}$.

### COROLL. 4.

LVI. Cependant, quand même les obſtacles ſeroient ſi grands, qu'il falût prendre l'égalité $2\,\pi\,v\,Qc = \frac{1}{2}\,Da$ ou $v = \frac{1}{12} \cdot \frac{Da}{Qc}$,

cette

cette machine produiroit pourtant encore un effet plus de deux fois plus grand, que les machines ordinaires, même en leur ſuppoſant le plus haut degré de perfection.

## REMARQUE.

LXVII. Le moment de la réſiſtance $Qc$ eſt ſouvent immédiatement connu; car, lorsqu'il s'agit d'élever un poids par le moyen d'une corde qui s'envelope autour du tambour, ce poids multiplié par le rayon du tambour donne d'abord la valeur du moment $Qc$, & $2\pi v c$ la hauteur, à laquelle ce poids ſera élevé dans une ſeconde. Il en eſt de même lorsque la machine eſt appliquée à faire jouër des pompes; car en connoiſſant la force qu'il faut pour élever & baiſſer les piſtons, avec la longueur du levier dont la machine y agit, on aura d'abord la valeur du moment $Qc$. Or ſouvent il faut recourir à l'expérience pour connoitre ce moment; comme lorsqu'il s'agit de vaincre la réſiſtance d'un frottement, par exemple, quand un grand fordeau doit être trainé ſelon une direction horizontale: car, quoiqu'on ait des régles pour déterminer la quantité d'un tel frottement, il vaut mieux de chercher par des expériences la force requiſe à le vaincre, ayant égard à la diſtance de l'application de cette force à l'eſſieu du mouvement. A' cette eſpece de machines il faut rapporter les moulins, où toute la force eſt employée à faire tourner la meule de deſſus R R ſur Fig. 5.
la meule giſſante Q Q. Dans ce cas la réſiſtance dépend tant de la quantité des grains, qui ſe trouve entre les meules, que du poids de la meule de deſſus: pour connoitre donc cette réſiſtance, il faut avant que d'appliquer la machine elle même à ce deſſein, eſſayer quels efforts il faut employer pour vaincre cette réſiſtance. Pour cet effet ayant appliqué à la meule un levier RX, on cherchera par des eſſais la force, dont il faut pouſſer ce levier dans un certain point X, pour être en état de mouvoir la meule: on réduira cette force enſuite à un volume d'eau, comptant environ 64 livres ſur un pied cubique, & ce volume multiplié par la longueur du levier PX donnera le mo-

 ment

ment $Qc$. Il feroit bon de déterminer par de telles expériences la valeur de ce moment $Qc$ pour toutes fortes de meules; car alors il feroit aifé de défigner la viteffe, que chaque force mouvante eft capable d'imprimer à chaque meule, d'où dépend l'effet des moulins: & enfuite la conftruction de toute la machine n'auroit plus la moindre difficulté, au lieu qu'au défaut de cette connoiffance les machines deviennent fouvent très defectueufes.

## PROBLEME 2.

*LXVIII. L'effet, que la machine doit produire, étant propofé, ou la viteffe avec laquelle la réfiftance doit être mife en mouvement, trouver la force mouvante, qui fera capable de produire cet effet.*

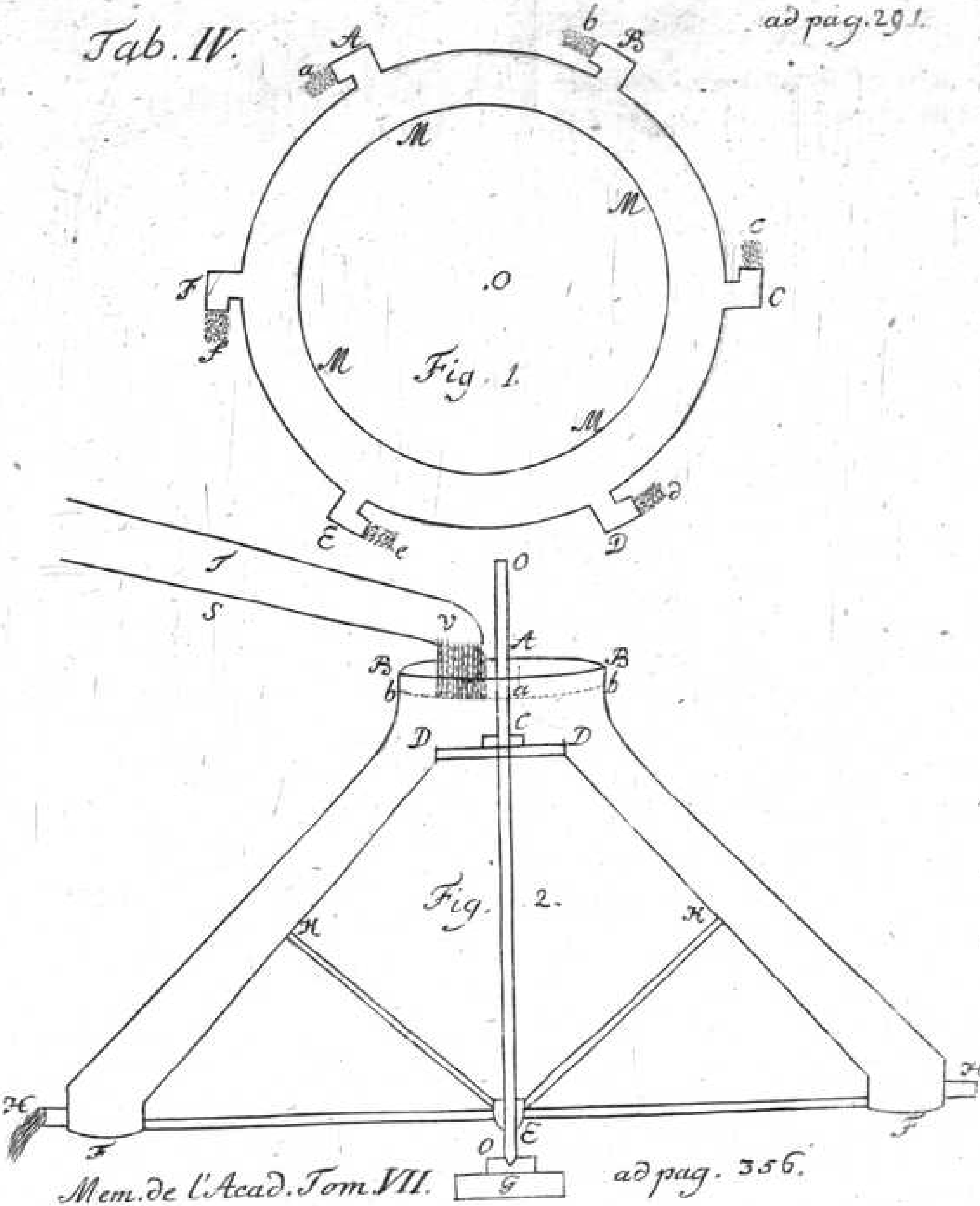
## SOLUTION.

On connoit donc premièrement le moment de la réfiftance $Qc$, qui doit être vaincuë par la force de la machine, & enfuite la viteffe de ce mouvement eft auffi donnée: ou bien le nombre des révolutions eft préfcrit, que le tambour, qui travaille immédiatement fur la réfiftance, doit achever par feconde. Soit donc $v$ ce nombre; & pour la force mouvante, que nous cherchons, foit D la quantité d'eau fournie par feconde, & $a$ la hauteur de fa chûte, ou plutôt la hauteur du vaiffeau, qui eft toujours un peu plus petite que la chûte même. Cela pofé, nôtre premiere équation nous donne d'abord la force mouvante $Da = \frac{8}{3}\pi v Qc$, ou à peu près $Da = 8 v Qc$. Ainfi, fachant la hauteur de la chûte $a$, on en connoitra d'abord la quantité d'eau D, que l'entretien de la machine exige par feconde: ou réciproquement cette quantité d'eau D étant donnée, on trouvera la chûte néceffaire $a$ pour produire cet effet.

## COROLL. I.

LXIX. Puisque l'effet de la machine eft proportionel à la force mouvante, ou au produit $Da$, on voit que plus la chûte $a$ eft grande,

Tab. IV. ad pag. 291.




Mem. de l'Acad. Tom VII. ad pag. 356.

de, la quantité d'eau D sera autant de fois plus petite, pour qu'on en puisse tirer le même effet.

## COROLL. 2.

LXX. Pour connoitre donc la force mouvante, on multipliera le moment de la résistance $Qc$ par le nombre des tours $v$, qu'on veut que le tambour acheve dans une seconde, & ce produit pris environ 8 fois donnera la force mouvante, ou le produit $Da$.

## COROLL. 3.

LXXI. J'ai ici déjà eu égard au frottement & autres obstacles du mouvement de la machine: mais quand on juge ces obstacles plus grands, que je ne les ai supposés, au lieu du nombre 8 il faudra employer un nombre plus grand: & alors la force mouvante se trouvera aussi plus grande en même raison.

## EXEMPLE.

LXXII. Supposons que la machine doive être appliquée à un moulin, & que pour vaincre la résistance de la meule de dessus, il faille appliquer une force de 32 ℔ à un levier PX de deux pieds. On aura donc $Q = \frac{1}{2}$ pied cubique & $c = 2$, de sorte que le moment de la résistance sera $Qc = 1$. Supposons de plus que cette meule doive achever chaque tour dans une seconde, & ayant $v = 1$ & $vQc = 1$, la force mouvante requise $Da$ sera exprimée par 8. Donc, pour produire cet effet, ou un pied cubique d'eau fourni par seconde avec une chûte de 8 pieds sera suffisant, ou deux pieds cubiques d'eau par seconde avec une chûte de 4 pieds, ou 4 pieds cubiques avec une chûte de 2 pieds, ou bien 8 pieds cubiques avec une chûte d'un pied.

## REMARQUE.

LXXIII. J'ai déjà remarqué, que la hauteur de l'eau dans le vaisseau $aE = a$ est toujours un peu plus petite que la chûte véritable de

 l'eau,

l'eau, puisque la surface de l'eau dans le vaisseau *b a b* doit être un peu au-dessous du bord BAB, & celui-cy doit être plus bas que le niveau de l'eau dans le reservoir : ensuite les orifices en bas H ne sauroient être non plus exactement au niveau de l'eau en bas, mais il faut qu'ils soient tant soit peu élevés au-dessus ; d'où l'on comprend que la hauteur *a* E $=$ *a* sera toujours environ d'un demi pied moindre que la chûte entiere de l'eau. Donc, si un pied cubique d'eau fourni par seconde avec une chûte de $8\frac{1}{2}$ pieds, est capable de produire l'effet proposé, afin que huit pieds cubiques produisent le même effet, il faut que leur chûte soit de $1\frac{1}{2}$ pieds : de sorte que plus la chûte est petite, plus on en perd de sa force, & si la chûte n'étoit qu'un demi-pied, la machine deviendroit tout à fait impraticable, puisque sa hauteur devroit entièrement evanouïr. Par cette raison il est toujours plus avantageux d'employer une chûte plus grande, & de se contenter d'une moindre quantité d'eau, que de se servir d'une petite chûte avec une grande quantité d'eau. Cependant il n'y a aucun doute qu'on puisse se servir encore avec bien du succés d'une chûte de deux pieds, pourvû que l'eau soit en abondance ; mais alors il faut que le vaisseau soit très large en haut, pour recevoir une si grande quantité d'eau.

## PROBLEME 3.

*LXXIV. La force mouvante* D a *& l'effet de la machine étant déjà donnés, avec la largeur du vaisseau en bas, ou la distance des orifices H à l'axe de la machine, trouver le nombre des révolutions, que la machine doit faire pendant chaque seconde.*

## SOLUTION.

Pour cet effet il ne suffit pas de savoir la force mouvante D*a*; il faut aussi savoir la chûte, ou la hauteur de l'eau dans la machine *a* E $=$ *a* ; & si nous posons le demi-diametre de la base de la machine, ou la distance des orifices à l'axe EH $=$ *b*, & le nombre des tours

tours, que la machine fait par seconde $= \mu$, nous aurons $\mu b = \frac{7}{8} Val$, ayant supposé la fraction $\delta = \frac{1}{8}$, de laquelle dépend la quantité de l'effet. De là puisque les quantités $a$, $b$, & $l$ sont données, le nombre des révolutions de la machine achevées dans une seconde sera $\mu = \frac{7 Val}{8 b}$. Le rapport de ce nombre $\mu$ au nombre $\nu$ servira à combiner la machine avec le tambour, qui est immédiatement appliqué à la résistance. Car, puisque le tambour R R doit faire $\nu$ révolutions, pendant que le vaisseau BBFF en fait $\mu$, si le tambour est mis en mouvement par la roue M, poussée par le pignon L, qui se trouve à l'axe du vaisseau OE; il faut que le pignon L fasse $\mu$ tours pendant que la roue M en fait $\nu$, ou que le pignon L fasse $\frac{\mu}{\nu}$ tours, peudant que la roue M en fait un. Par conséquent il faut que le nombre des dents du pignon L soit au nombre des dents de la roue M comme $\nu$ à $\mu$. C'est donc cette juste proportion entre le pignon L & la roue M, d'où dépend l'effet de la machine; car, si cette proportion n'étoit pas observée exactement, la machine ne produiroit pas l'effet le plus grand, qui a été déterminé dans les problèmes précedens. Fig. 3.

## COROLL. I.

LXXV. Il a déjà été remarqué, qu'il est bon de faire la machine en bas aussi large qu'il est possible, pour que le nombre $\mu$ devienne aussi petit qu'il est possible. Car par ce moyen ou surmonte d'autant plus aisément le frottement de l'essieu de la machine.

## COROLL. 2.

LXXVI. Cependant il faut aussi remarquer, que le rapport des nombres $\mu$ & $\nu$ doit être tel, qu'il puisse être réduit à des nombres assez simples: ou bien on mettra le rapport entre le pignon L & la roue M aussi approchant qu'il est possible, en nombres entiers.

CO-

### COROLL. 3.

LXXVII. Et en cas que ce rapport ne se laisse pas exécuter par un seul pignon & une seule rouë, on mettra entre deux un troisième axe avec une rouë & pignon, qui étant mis en mouvement par l'axe principal EO, fasse tourner l'axe du tambour PN.

### EXEMPLE.

LXXVIII. Soit proposé le cas du §. LXXII. où le moment de la résistance étoit $Qc = 1$, & $v = 1$; & ayant trouvé pour ce cas la force mouvante $Da = 8$, soit la chûte ou hauteur $Ea = a = 8$ pieds, & la quantité d'eau fournie par seconde $D = 1$ pied cubique. Soit de plus le demi-diametre du fond de la machine $EH = b = 5$ pieds, & à cause de $l = 3\frac{1}{3}$ pieds, nous aurons $\mu = \frac{7\sqrt{25\frac{1}{3}}}{40}$, & à peu près $\mu = \frac{7}{8}$: de sorte que $v : \mu = 8 : 7$. On donnera donc au pignon L 8 fuseaux, & à la rouë M 7 dents.

Si l'on faisoit le demi-diametre du fond de la machine $b = 8$ pieds, on auroit à peu près $\mu = \frac{35}{64}$, & $v : \mu = 64 : 35$, à laquelle raison approche le plus en petits nombres $9 : 5$; donc le pignon ou la rouë L auroit 9 dents, & la rouë M cinq. Or dans ce cas il vaudra mieux de donner à la rouë M la forme d'un pignon ou d'une lanterne, & à L celle d'une rouë dentée: donc le nombre des dents doit être d'autant plus grand, plus on donne à la machine de largeur en bas.

### PROBLEME 4.

*LXXIX. La machine étant construite pour produire un effet proposé selon les problèmes précedens, trouver la largeur des orifices en bas d'où l'eau écoule.*

### SOLUTION.

Que D marque comme jusqu'ici la quantité d'eau fournie par seconde, $a$ la hauteur de l'eau dans la machine, & $b$ le demi-diametre du du fond de la machine en bas. Soit $n$ le nombre des orifices, & $bb$ la largeur de chacun ; cela posé, donnant à la fraction $\delta$ la valeur $\frac{1}{8}$, nôtre troisième équation (36) donnera

$$nbb = \frac{8D}{9\pi} \sqrt{\frac{1}{4al}} = \frac{4D}{9\pi\sqrt{al}},$$

ou à peu près $nbb = \frac{29D}{205\sqrt{al}}$; ou bien $nbb = \frac{D}{7\sqrt{al}} = \frac{D}{8\mu b}$

d'où ayant déjà fixé le nombre des orifices, on connoitra la largeur de chacun, ou réciproquement. Or il faut remarquer, que lorsque la valeur $nbb$ se trouve assez grande, il vaut mieux augmenter le nombre des orifices, que de les faire trop larges ; car si le diametre des trous H étoit déjà une partie considérable de la hauteur entiere de l'eau $a$, la vitesse dont l'eau échape par ces trous, ne répondroit plus à la théorie.

## COROLL. 1.

LXXX. On voit donc que, plus la quantité d'eau fournie par seconde sera grande, & la hauteur $a$ petite, la valeur de $nbb$ deviendra plus grande. Dans ces cas donc, où l'on se sert d'une grande quantité d'eau & d'une petite chûte, il faut employer un grand nombre d'orifices, pour que leurs diametres ne deviennent pas trop grands.

## COROLL. 2.

LXXXI. Il n'est pas aussi nécessaire de donner à ces orifices une figure circulaire ; mais, lorsque la hauteur de la machine sera petite, il vaudra mieux de leur donner une figure allongée, de sorte que la hauteur soit plus petite que la largeur.

## COROLL. 3.

LXXXII. Mais quand la dépense d'eau D est fort petite & la chûte $a$ grande, la quantité $nbb$ devient fort petite ; de sorte qu'une

 seule

feule ouverture feroit fuffifante. Cependant il faut toujours employer au moins deux vis à vis, afin que les forces fe maintiennent en équilibre, & que le mouvement de la machine en devienne plus libre.

## EXEMPLE.

LXXXIII. Dans le cas confidéré cy-deffus où $D = 1$; $a = 8$, nous aurons $nbb = \frac{1}{7\sqrt{25\frac{1}{2}}} = \frac{1}{35}$ pieds quarrés, ou bien $nbb = \frac{1}{9}$ pouce quarré, quelle que foit la largeur de la machine en bas ou la quantité $b$. Dans ce cas donc deux ouvertures feroient fuffifantes, & chacune deviendroit de $2\frac{1}{18}$ pouces quarrés: & fi l'on vouloit faire ces trous circulaires, leur diametre feroit de 1, 617 pouces.

Mais fi en employant la même force mouvante, on prenoit $D = 8$ pieds cubiques & $a = 1$ pied, on auroit.

$$nbb = \frac{8}{7\sqrt{3\frac{1}{8}}} = 0,413 \text{ pieds quarrés}$$

donc $nbb = 59\frac{1}{2}$ pouces quarrés. Il feroit donc bon de pratiquer du moins 12 ouvertures, & de donner à chacune une figure allongée, qui n'ait qu'un pouce de hauteur fur environ 5 de largeur.

## REMARQUE.

LXXXIV. Mais, quelques foins qu'on apporte à calculer exactement la grandeur des orifices, on ne fauroit pourtant s'y fier trop: car la moindre circonftance pourroit être caufe, que les orifices fusfent ou trop grands ou trop petits. Ainfi, le plus fur moyen fera de conftruire ces ouvertures, en forte qu'on les puiffe aifément, ou élargir, ou rétrécir à volonté; felon que les circonftances l'exigeront, & alors il fuffira de connoitre l'amplitude totale des orifices à peu près. Après avoir pris cette précaution par rapport aux orifices, il fera fort aifé aisé de maintenir la machine toujours dans une action convenable. Car si l'on remarque que l'eau baisse dans le bassin BDB, ou qu'elle n'y atteint pas la juste hauteur, on diminuera l'amplitude d'un, ou quelques uns, ou de tous les orifices, jusqn'à ce que l'eau se conserve à la hauteur prescrite. Mais s'il arrive, que l'eau y monte trop haut & qu'elle déborde, alors on n'aura qu'à élargir un peu les orifices. Or il est d'autant plus nécessaire, qu'on puisse changer les orifices à volonté, puisqu'il peut arriver fort souvent, ou que la quantité d'eau D fournie par seconde devienne plus grande ou plus petite, ou que le moment de la résistance $Qc$ souffre quelque changement ; & dans l'un & l'autre cas on sera obligé de changer quelque chose aux orifices, pour maintenir la machine dans son action. Ainsi, dans la suite je supposerai que les orifices ayent toujours la juste grandeur qu'il leur faut, pour que l'eau tienne dans le vaisseau la hauteur convenable, & pour cette raison je ne tiendrai plus compte de la grandeur des orifices.

## PROBLEME 5.

*LXXXV. Une telle machine hydraulique étant construite pour vaincre une résistance donnée, déterminer l'effet qu'elle produira, lorsqu'elle est entretenuë par une certaine quantité d'eau, qui s'y dégorge par seconde.*

## SOLUTION.

On suppose donc connu premièrement le moment de la résistance $Qc$, qui doit être surmontée. En second lieu, puisque la construction de la machine est donnée, ou aura la hauteur de l'eau dans le vaisseau $= a$, le demi-diametre du fond EH $= b$ & outre cela le rapport des rouës L & M ; soit donc le nombre des dents de la rouë M à celui de la rouë L comme $\lambda : 1$, ou bien on aura $\lambda : 1 = \mu : \nu$, ou $\mu = \lambda\nu$. Enfin la quantité d'eau, qui entre dans le vaisseau par seconde soit $=$ D ; & je suppose, que quel que

 soit

ſoit l'effet de la machine, les orifices H ſoient tels, que l'eau eſt conſtamment entretenuë dans le vaiſſeau à la hauteur $= a$. Ainſi, les quantités données ſont $Qc$ ; $a$; $b$; D & le nombre $\lambda$, & il s'agit de trouver le nombre $\mu$ ou $\nu$, puisque de $\nu$ dépend l'effet de la machine. Or d'abord je ſuppoſerai, que ni le frottement ni la réſiſtance de l'air n' affoibliſſent pas l'action de la machine, & partant nous aurons ces deux égalités,

$$\text{I. } 2\pi\nu Qc = (1-\delta)Da, \;\; \& \text{ II. } \mu b = \tfrac{1}{2}(1-\delta)\sqrt{\frac{al}{2\delta}}$$

car la dernière, qui regarde la grandeur des orifices, n'entrera pas en conſidération. Ayant donc $\mu = \lambda\nu$, la ſeconde égalité diviſée par la premiere donnera :

$$\frac{\lambda b}{2\pi Qc} = \frac{1}{2Da}\sqrt{\frac{al}{2\delta}} \text{ ou } \frac{\lambda D ab}{\pi Qc} = \sqrt{\frac{al}{2\delta}}$$

d'où nous tirons $\delta = \dfrac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda DDabb}$ : & enſuite

$$\nu = \frac{2\lambda\lambda DDabb - \pi\pi QQccl}{4\pi\pi\lambda\lambda DQcbb}$$

Par conſéquent l'effet entier de la machine ſera

$$2\pi\nu Qc = \frac{2\lambda\lambda DDabb - \pi\pi QQccl}{2\pi\pi Dbb} = Da - \frac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda Dbb}.$$

Mais pour tenir compte du frottement & de la réſiſtance de l'air, on n'a qu'à prendre le moment de la réſiſtance $Qc$ plus grand, qu'il n'eſt en effet ; car, lorsque l'employ de la machine ne differe pas beaucoup de celui auquel elle a été deſtinée par ſa conſtruction, cet expédient réüſſira aſſez bien : quoiqu'il puiſſe tromper énormement, lorsque la force mouvante actuelle $Da$ eſt fort différente de celle qu'on a eu en vuë dans la conſtruction de la machine.

## COROLL. I.

LXXXVI. Si l'on veut eſtimer le frottement & la réſiſtance de l'air ſur le pied, dont nous nous ſommes ſervi cy-deſſus, il faut multiplier

tiplier le moment de la réſiſtance actuelle $Qc$ par $\frac{7}{6}$; ou l'augmenter d'une fixième partie: & employer ce moment ainſi augmenté au lieu de $Qc$, dans les formules que nous venons de trouver.

### COROLL. 2.

LXXXVII. De là on connoitra d'abord, ſi la machine eſt bien arrangée au deſſein, auquel on la veut employer, ou non? Car ſi la valeur de la fraction $\frac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda DDabb}$ provient environ égale à $\frac{1}{8}$, c'eſt une marque que la machine eſt parfaitement bien diſpoſée à l'ouvrage qu'on veut exécuter, & qu'elle produira le plus grand effet dont elle eſt capable.

### COROLL. 3.

LXXXVIII. Mais ſi la valeur de la fraction $\frac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda DDabb}$ différe conſiderablement de $\frac{1}{8}$, on en conclura, que la machine n'eſt pas propre à l'ouvrage, auquel on la veut employer: & qu'elle produira un effet bien au deſſous de celui qu'on pourroit attendre, ſi elle étoit mieux arrangée.

### COROLL. 4.

LXXXIX. Or il ſera aiſé de remédier à ce defaut, en changeant convenablement le rapport des deux rouës L & M; on n'aura qu'à donner à $\lambda$ une telle valeur, que cette fraction devienne égale à peu près à $\frac{1}{8}$; d'où l'on tire $\lambda = \frac{2\pi Qc\sqrt{al}}{Dab}$; & partant il faudra changer ces rouës, en ſorte que le nombre des dents de la rouë M ſoit à celui de la rouë L, comme $2\pi Qc\sqrt{al}$ à $Dab$.

### COROLL. 5.

XC. Ainſi, quand on conſtruit une telle machine, en ſorte qu'on puiſſe changer à volonté le rapport des rouës L & M, elle pourra être renduë propre à toutes sortes d'ouvrages, où il se trouve la même chûte de l'eau.

## COROLL. 6.

XCI. On voit donc que, pour tirer d'une telle machine le plus grand effet qu'il est possible, tout revient au rapport des deux rouës L & M, qui doit être conforme à la régle, que je viens de donner; d'où l'on tirera aisément pour tout cas proposé la juste valeur de $\lambda$.

## EXEMPLE.

XCII. Soit construite une telle machine, dans laquelle l'eau puisse être entretenuë à la hauteur $a = 6$ pieds; & que le rayon du fond de cette machine soit $b = 6$ pieds. Soit de plus la quantité d'eau, qui y coule par seconde $D = 2$ pieds cubiques, & que le moment de la résistance soit $Qc = \frac{3}{2}$: pour lequel prenons à cause des obstacles du mouvement $Qc = 2$: & il est question d'arranger les deux rouës L & M, en sorte que cette machine produise le plus grand effet.

Nous aurons donc $\lambda = \frac{4\pi\sqrt{6l}}{72} = \frac{7}{9}$ à peu près: ainsi le nombre des dents de la rouë M doit être au nombre des dents de la rouë L comme 7 à 9: & alors l'effet de la machine sera le plus grand qu'il est possible, & il surpassera bien quatre fois l'effet qu'une machine hydraulique ordinaire sauroit produire, en employant la même quantité d'eau avec la même chûte.

## REMARQUE.

XCIII. Après ce que je viens d'exposer ici, il est évident que cette espece de machines hydrauliques mérite une très grande préférence sur toutes les autres machines, qui ont été en usage jusqu'ici, vû que l'effet, qu'elles sont capables de produire, est bien quatre fois plus grand: ce qui est un avantage, dont on n'a peut être guères d'exemd'exemples dans la Mecanique. Cet avantage devient encore plus considérable par la maniere aisée dont ces sortes de machines peuvent être appliquées à toutes sortes d'ouvrages. Car, quoiqu'une telle machine soit dabord construite à un certain dessein, & arrangée sur une certaine quantité d'eau, qui doit servir à son entretien, & sur un certain moment de résistance, qui doit être surmontée ; cependant la même machine peut être appliquée, lorsque l'un & l'autre sont entièrement changés ; on n'a alors qu'à donner aux rouës L & M le juste rapport, que les circonstances exigent: & ce rapport paroit aussi aisé d'être exécuté dans la pratique, qu'il se trouve par la théorie. Car par la machine même on connoit dabord les quantités $a$ & $b$, & l'usage auquel on la veut employer découvre les quantites D & $Qc$, d'où l'on tire $\lambda = \frac{2\pi Q c V a l}{D a b}$; & alors il faut arranger les rouës L & M en sorte, que le nombre des dents de la rouë L soit à celui de la rouë M comme $Dab$ à $2\pi Q c V a l$. Par ce moyen la machine sera mise en état de produire le plus grand effet qu'on sauroit espérer.

## EXPERIENCE.

XCIV. M. *Segner* ayant eu occasion d'examiner un moulin ordinaire, m'en a communiqué les mesures suivantes.

Le diametre de la rouë poussée par l'eau étoit d'11 pieds; à chaque révolution de cette rouë la meule en fait 12.

Le diametre de la meule étoit de 3 pieds, & sa hauteur d'un pied. Quand ce moulin fût en plein travail, il fût arrété, & M. *Segner* chargea la rouë principale d'un poids, qu'il imposa sur l'aube horizontale, pour connoitre la force requise à vaincre la résistance du moulin. Il trouva ce poids de 44 livres, ou bien de $\frac{2}{3}$ pieds cubiques d'eau : donc le moment de cette force étant $= \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11}{3}$, le moment de résistance de la machine, qui j'ai supposé $= Qc$, sera pour ce moulin $Qc = \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{12}$ ou très à peu près $= \frac{1}{3}$. M. *Segner* a aussi observé que la meule tournoit deux fois par seconde.

Donc

Donc, si un tel moulin doit être mis en mouvement par la nouvelle machine, ayant $Qc = \frac{1}{3}$ & $v = 2$, on trouvera d'abord la force mouvante, qui y est requise, $Da = 8vQc = \frac{16}{3}$. Et partant la hauteur de la machine $a$ étant donnée en pieds, la quantité d'eau requise par seconde sera $D = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{a}$ pieds cubiques: ainsi aux diverses valeurs de $a$ répondront les valeurs suivantes de D

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $D = 5\frac{1}{3}$ | $2\frac{2}{3}$ | $1\frac{7}{9}$ | $1\frac{1}{3}$ | $1\frac{1}{15}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{16}{21}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{16}{33}$ | $\frac{4}{9}$ |

Ensuite, posant le rayon de la machine en bas $= b$, & le nombre des révolutions de la machine par seconde $= \mu$, on aura pour l'arrangement de la machine $\mu b = \frac{7}{8} \sqrt{al}$, ayant mis $l = 3\frac{1}{6}$ pied. Donc, si $a = 6$, & $D = \frac{8}{9}$, ayant $\mu b = 3,82 = 3\frac{5}{6}$ pieds: on pourroit mettre $\mu = 1$, pour avoir $b = 3\frac{5}{6}$ pieds; & dans ce cas on auroit pour les ouvertures, $nbb = \frac{D}{7\sqrt{al}} = \frac{D}{8\mu b} = \frac{3D}{92} = \frac{2}{69}$ pieds quarrés ou $nbb = 4\frac{1}{6}$ pouces quarrés. Donc, si l'on pratiquoit 4 ouvertures, chacune devroit être de $1\frac{1}{24}$ pouces quarrés.

RECHER-