



1753

Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

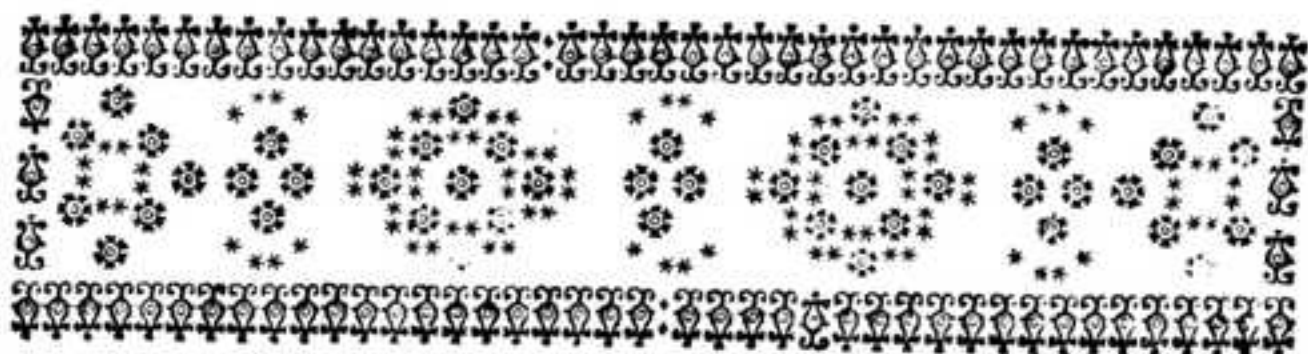
2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis" (1753). *Euler Archive - All Works*. 197.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/197>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



H A R M O N I E
ENTRE LES PRINCIPES GENERAUX DE REPOS
ET DE MOUVEMENT
DE M. DE MAUPERTUIS
PAR M. EULER.

I.

M. *de Maupertuis*, nôtre très digne Président, ayant découvert deux principes généraux, l'un pour l'état du repos ou de l'équilibre, & l'autre pour celui du mouvement, il semble d'abord que ces deux principes n'ont rien de commun, puisqu'ils sont fondés sur des élémens tout à fait différens entr'eux. Cependant je ferai voir, que l'un & l'autre de ces deux principes est soutenu sur le même fondement, & qu'ils se trouvent dans la plus étroite liaison, de sorte que dès qu'on tombe d'accord sur l'un, on ne fauroit plus revoquer en doute l'autre: ou bien, l'un étant suffisamment constaté, tiendra lieu d'une démonstration rigoureuse de l'autre. Cette belle harmonie me paroît d'autant plus importante, qu'elle est capable de mettre dans tout son jour, tant l'un que l'autre de ces deux principes: & on conviendra aisément, que plus ces deux principes

font unis entr'eux, & plus ils seront conformes à la simplicité de la Nature.

II. Je commencerai par le principe général du repos, ou de l'équilibre, & dès que je l'aurai énoncé dans toute sa force conformément aux explications, que l'illustre Auteur en a données dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année 1740. on reconnoitra par le moyen d'une seule réflexion, que l'autre principe général du mouvement en est une suite nécessaire. Donc, puisque le premier principe n'est assujetti à aucune opposition, & qu'après l'Auteur j'en ai aussi démontré la vérité par une infinité de cas entièrement différens entr'eux; cette harmonie seule suffira à réfuter toutes les objections, qu'on pourroit faire contre l'autre principe du mouvement. Et partant j'espère, que l'exposition de cette harmonie sera le plus propre moyen, non seulement pour maintenir ces deux principes, mais aussi pour en faire voir la nouveauté: personne n'en ayant eu assurément aucune connoissance avant M. de Maupertuis.

Or M. de Maupertuis énonce cette loi du repos en ces termes: " Soit un Système de corps qui pesent, ou qui sont tirés vers des centres par des forces qui agissent chacune sur chacun, comme une puissance n de leurs distances aux centres: pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la somme des produits de chaque masse par l'intensité de la force & par la puissance $n + 1$ de sa distance au centre de la force, (qu'on peut appeller la somme des forces du repos,) fasse un *maximum* ou *minimum*." Ainsi posant M pour la masse d'un corps quelconque, qui appartient au système, z pour la distance de ce corps au centre, auquel il est attiré par la force fz^n ; on prendra le produit Mfz^{n+1} pour le corps M; & la somme de tous les produits semblables, qui conviennent à chaque corps du système, sera un *maximum* ou un *minimum*, lorsque le système est en équilibre.

IV. M. de Maupertuis développe deux cas pour faire voir la vérité de cette loi : chacun contient un système de trois corps liés entr'eux. Dans le premier il considère ces corps attachés à des rayons immatériels, mobiles autour d'un point fixe : dans l'autre il les regarde comme attachés à des cordes unies dans un point mobile : Et quoique ces deux cas soient entièrement differens entr'eux, il montre que dans l'un & l'autre la susdite loi subsiste. Car posant la masse de chacun des trois corps = M, la distance au centre, auquel il est attiré = z, & la force même = $f z^n$, il fait voir par les principes ordinaires de la Dynamique, que dans le cas de l'équilibre la somme de ces formules $M f z^n dz$, qui répondent à chacun des corps, est égale à zero. D'où il s'ensuit évidemment, que la somme de leurs intégrales, ou de $\frac{1}{n+1} M f z^{n+1}$, fera un *maximum* ou un *minimum* ; & lorsque l'exposant n est partout le même, on pourra omettre le coefficient commun $\frac{1}{n+1}$.

V. Ces deux cas étant entièrement differens entr'eux, on reconnoit aisément, que la même règle doit avoir lieu dans tous les cas d'équilibre de trois corps ; puisque, quel que soit l'état des corps, il doit participer de l'un & de l'autre. Il est aussi évident, que si au lieu de trois corps le système étoit composé de plusieurs, & même d'autant que ce puisse être, la même règle subsisteroit toujours également. De plus il n'est pas nécessaire, que les forces soient proportionnelles à de semblables puissances des distances ; pourvù qu'on ne néglige pas les coefficients $\frac{1}{n+1}$, lorsqu'ils sont differens entr'eux à l'égard des divers corps, sur lesquels les forces agissent.

VI. Rien n'empêche aussi, que les forces ne soient supposées proportionnelles à des fonctions quelconques des distances. Car si chacun des corps, dont la masse soit $= M$, & la distance à un centre des forces $= z$, y est attiré par une force quelconque accélératrice $= V$, au lieu de fz^n ; on verra par le même raisonnement, que dans l'état d'équilibre la somme de toutes les formules $M V dz$ sera égale à zero. Et partant la somme de leurs intégrales $\int M V dz$ sera un *maximum* & un *minimum*. Où il faut remarquer, comme je ferai voir plus bas, qu'il y a actuellement deux especes d'équilibre, l'une où la somme de ces formules est un *minimum*, l'autre où elle est un *maximum*.

VII. Si le même corps M , qui fait partie du système, étoit en même tems sollicité par plusieurs forces accélératrices $V, V', V'', \&c.$ vers des centres differens, dont il soit éloigné par des distances $z, z', z'' \&c.$ chaque force fourniroit une formule à part pour le même corps M : & l'expression entière pour ce corps, qui fait partie de la formule du *maximum* ou du *minimum*, seroit:

$$\int M V dz + \int M V' dz + \int M V'' dz'' + \&c.$$

Où puisque la masse du corps M est constante, cette expression

$$\text{sera } = M (\int V dz + \int V' dz' + \int V'' dz'' + \&c.)$$

& la somme de toutes les pareilles expressions, qui conviennent à chaque corps du système, sera infailliblement un *maximum* ou un *minimum* dans le cas d'équilibre. Ou bien, puisque $M V, M V', M V'' \&c.$ expriment les forces motrices; si l'on prend $V, V', V'' \&c.$ pour marquer déjà les forces motrices, notre formule sera:

$$\int V dz + \int V' dz' + \int V'' dz'' \&c.$$

VIII. Il n'est pas aussi nécessaire, qu'on considère les distances entières de chaque corps aux centres de forces, auxquels il est attiré:

il sera permis pour la commodité du calcul, de prendre à volonté dans les directions, selon lesquelles les corps sont sollicités, des points fixes, & d'employer les distances à ces points, qui soient v, v', v'' &c. au lieu des distances z, z', z'' &c. aux centres mêmes. Car, puisque les différences entre ces distances $z - v; z' - v'; z'' - v''$ &c. sont constantes, on aura $dz = dv; dz' = dv' & dz'' = dv''$. De sorte que l'expression pour la formule du *maximum* ou *minimum* sera :

$$M(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$$

où l'on omettra la masse M . lorsque V, V', V'' &c. expriment déjà les forces motrices.

IX. Ayant donc un système de corps quelconque, qui soit en équilibre, on considérera séparément chaque corps avec toutes les forces dont il est sollicité, qui fourniront pour ce corps, dont la masse soit $= M$, une telle formule $M(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' \&c.)$ lorsque V, V', V'' &c. marquent des forces accélératrices; mais si elles marquent les forces motrices mêmes, on n'a qu'à omettre la masse M , comme y étant déjà renfermée. On rassemblera ensuite toutes ces formules, qu'on aura trouvées pour chaque corps, ou chaque particule du système des corps, dans une somme, & cette somme étant rendue un *maximum* ou *minimum* déterminera l'état d'équilibre. C'est donc à cette règle, que se réduit le principe universel d'équilibre de *M. de Maupertuis*, qui s'étend à tous les corps, soit qu'ils soient solides ou fluides, roides ou flexibles, & même élastiques, comme on peut voir des Mémoires, qui se trouvent dans les *Mém. de l'Ac. Roy. des Sciences & Belles-Lettres de Prusse* pour l'an. 1748, où j'ai examiné ce qui est un *maximum* ou *minimum* dans l'état d'équilibre de tous ces différens genres de corps.

X. Puisque donc tout ce principe revient à la formule $\int V dv + \int V' dv + \int V'' dv'' + \&c.$ qu'il me soit permis, tant pour abrégé

Y 3

que

Fig. I.

que pour parler plus précisément, de nommer cette expression d'un nom particulier, & il me semble que celui d'*effort* sera le plus convenable. Car, puisque la somme de toutes ces expressions, qui répondent à chaque élément du corps, est un *maximum* ou *minimum* dans l'équilibre, il ne sera pas mal à propos de dire que c'est la somme de tous les *efforts*, qui est la plus grande ou plus petite dans le cas de l'équilibre. Donc, si le corps M est sollicité par les forces V, V', V'' &c. dirigées vers les points fixes V, V', V'' &c. & qu'on pose les distances $MV = v$, $MV' = v'$, $MV'' = v''$ &c. l'*effort* de ces forces sur le corps M sera $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$; ou si les lettres V, V', V'' &c. expriment les forces accélératrices, l'*effort* sera $= M (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' \text{ &c.})$

XI. Donc, en vertu du principe général du repos de M. de Maupertuis, nul corps, tant solide que fluide, ne sauroit être en équilibre, à moins que la somme de tous les efforts pris ensemble, qui agissent sur chaque élément du corps, ne soit la moindre, ou la plus grande qu'il est possible. Or je ferai voir plus bas, que le plus grand ne trouve lieu qu'en des cas tout à fait particuliers, où l'équilibre ne se rétablit pas, quand il est troublé; dans tous les autres cas, où l'équilibre est permanent, c'est le plus petit qui a lieu. Je remarque ici en passant qu'il y a bien des cas, où la somme des efforts devient $= 0$, mais tant s'en faut que ces cas soient contraires au principe, qu'ils le confirment plutôt davantage. Car la Nature ayant, pour ainsi dire, en vuë de rendre la somme des efforts la plus petite, le but principal tend sans doute à la faire évanouir entièrement: & lorsque cela n'est pas possible, ce n'est qu'alors qu'elle doit se contenter de la rendre aussi petite qu'il est possible. Ce principe porte donc, qu'en tout cas d'équilibre la somme de tous les efforts, auxquels tous les élémens du corps sont assujettis, devient la plus petite qu'il est possible: & c'est en peu de mots le principe de l'équilibre, ou du repos, de M. de Maupertuis.

XII.

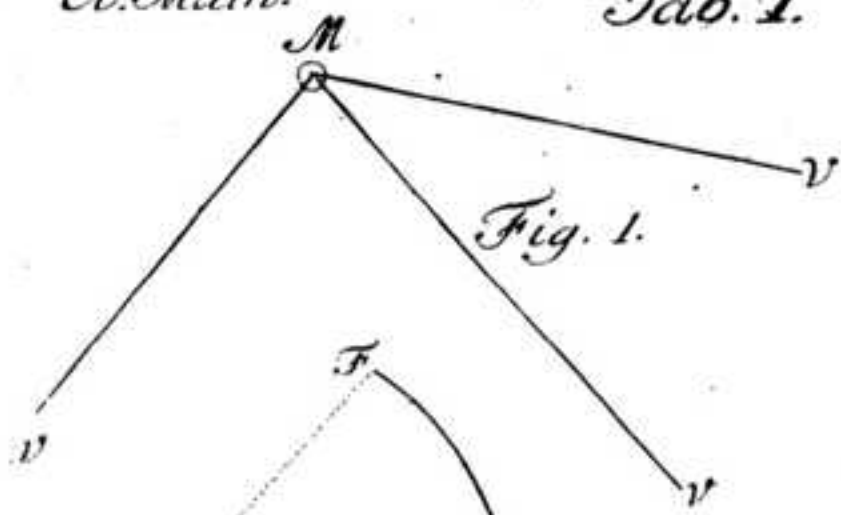


Fig. 1.

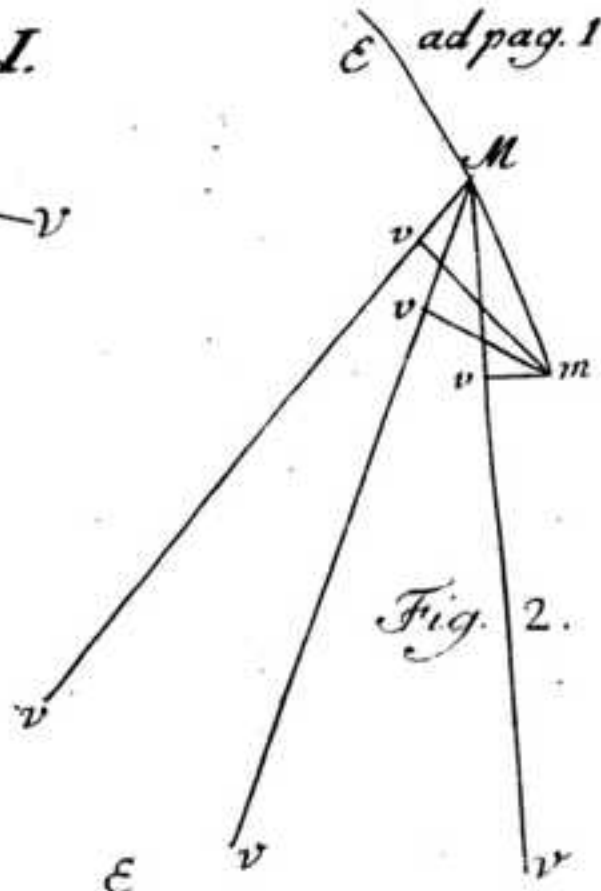


Fig. 2.

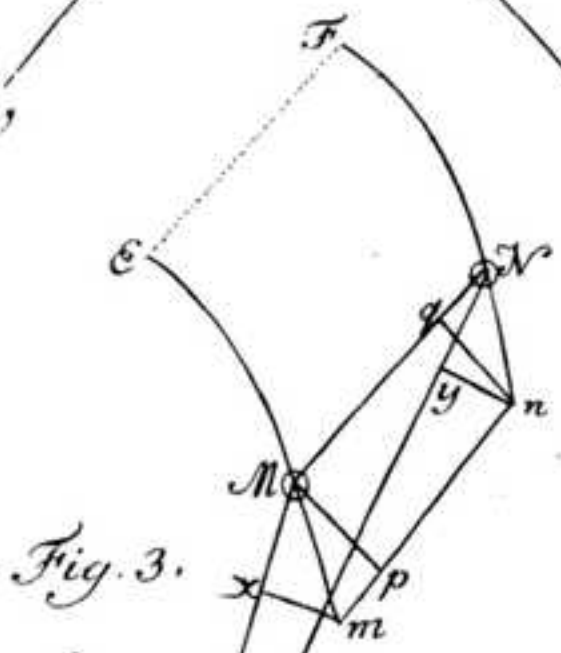


Fig. 3.

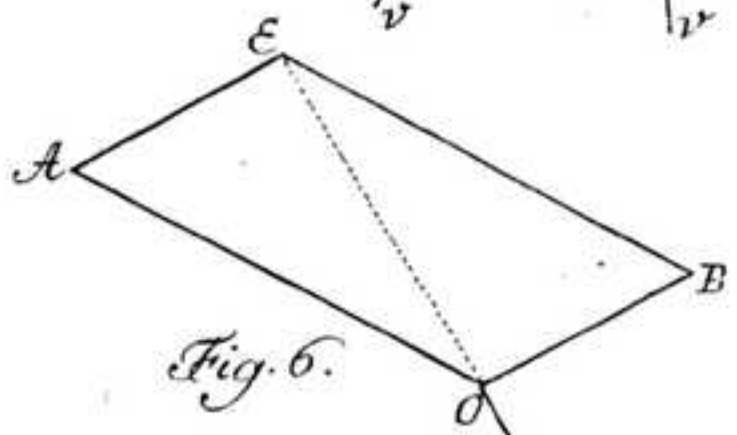


Fig. 6.

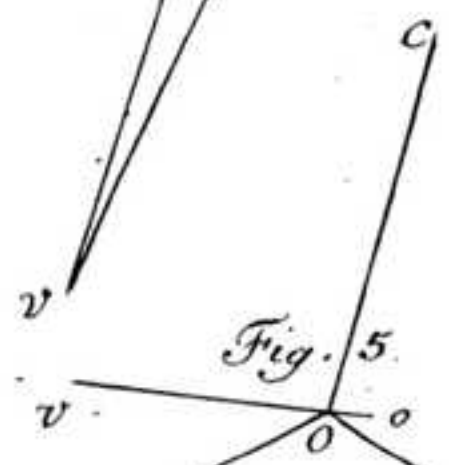


Fig. 5.

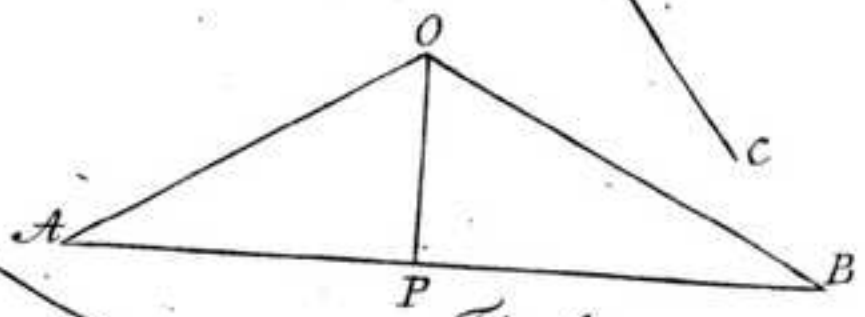


Fig. 4.

XII. Ayant établi ce principe pour le repos, ou l'équilibre, qu'y a-t-il de plus naturel que de soutenir, que ce même principe ait aussi lieu dans le mouvement de corps, sollicités par de semblables forces? Car si l'intention de la Nature est d'épargner le plus qu'il est possible sur la somme des efforts, il faut qu'elle s'étende aussi au mouvement, pourvu qu'on prenne les efforts, non seulement comme ils subsistent dans un instant, mais dans tous les instans ensemble, que dure le mouvement. Ainsi l'effort, ou la somme des efforts, étant pour un instant quelconque de mouvement $\equiv \Phi$, & posant l'élément du tems $\equiv dt$, il faut que cette formule intégrale $\int \Phi dt$ soit un *minimum*. Desorte que si pour le cas de l'équilibre la quantité Φ doit être un *minimum*, les memes loix de la Nature semblent exiger, que pour le mouvement cette formule $\int \Phi dt$ soit la plus petite.

XIII. Or c'est précisément dans cette formule, qu'est contenu l'autre principe de M. de Maupertuis, qui regarde le mouvement; quelque different qu'il puisse paroître au premier coup d'oeil. Pour faire voir ce bel accord, je n'ai qu'à remarquer, que lorsqu'un corps se meut, étant sollicité par les forces exposées V, V', V'' &c. l'effort Φ , auquel le corps est assujetti, exprime en même tems la force vive du corps, ou bien le produit de la masse du corps M par le quarré de sa vitesse. Donc, posant sa vitesse $\equiv u$, la formule qui doit être un *minimum* sera $\equiv \int M u u dt$: or $u dt$ exprime l'élément de l'espace, que le corps parcourt dans le tems dt , & partant posant cet espace $\equiv ds$, nous aurons $\int M u ds$ pour égaler à un *minimum*. C'est à dire, il faut à chaque instant multiplier la masse du corps M par la vitesse u , & outre cela par l'espace parcouru ds , & la somme de tous ces produits doit être un *minimum*.

XIV. Me voilà ainsi conduit aux mêmes mots, dont M. de Maupertuis se sert pour définir son idée de l'action, quand il dit, que l'action est le produit de la masse par la vitesse & par l'espace parcouru. Ainsi dans le cas du §. précédent la formule $M u ds$ exprime la quantité

tité

tité d'action pour un instant quelconque, précisément selon la maniere de parler de M. de *Maupertuis*; & suivant ses mêmes sentimens le mouvement du corps doit être tel, que la somme de toutes les actions élémentaires, ou $\int M u \, ds$ devienne un *minimum*. Or j'ai aussi fait voir dans le IV. Volume de nos *Mémoires*, que ce principe fournit précisément les mêmes courbes, qu'on découvre par les principes ordinaires de la Mécanique. On voit donc clairement, que ce principe de mouvement de M. de *Maupertuis* est une conséquence nécessaire de son principe général de repos ou d'équilibre.

XV. Comme dans le mouvement l'expression donnée cy-dessus $\Phi \, dt$ exprime précisément, ce que M. de *Maupertuis* nomme l'action du corps pendant le tems infiniment petit dt , on pourra dire avec autant de droit, que Φ marque l'action instantanée sans avoir égard au tems; auquel cas Φ convient avec ce qu'on nomme force vive. Donc aussi pour l'état de repos ou d'équilibre, quoiqu'il n'y ait point de mouvement, puisque la même expression Φ marquant l'effort total y entre, rien n'empêche qu'on ne lui donne encore le même nom d'action, de sorte que dans ce cas l'action & l'effort seroient la même chose; & cette dénomination est aussi parfaitement bien fondée. Ainsi, suivant le sentiment de M. de *Maupertuis*, on est autorisé de dire que, tant dans le mouvement que dans le repos, la quantité d'action est toujours la moindre qu'il est possible.

XVI. Mais il faut aussi prouver ce que je viens d'avancer dans le §. VIII. & la démonstration nous éclaircira mieux sur l'accord de ce que je nomme effort, & de l'idée de l'action de M. de *Maupertuis*. Pour cet effet soit le corps M attiré aux centres de forces V, V', V'' &c. par des forces V, V', V'' &c. posant les distances VM = v , V' M = v' & V'' M = v'' &c. dont les forces mêmes soient des fonctions quelconques: que ce corps ait jusqu'ici décrit la courbe EM, & qu'à présent sa vitesse en M soit = u , avec laquelle il va parcourir l'élément de la courbe M m = ds , pendant l'élément du tems = dt , & on au-

Fig. II.

ra $ds = u dt$. Or l'effort des forces sur le corps M sera suivant ce que j'ai exposé $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' \&c.$ supposant ces forces motrices : donc exprimant l'effort par Φ nous aurons :

$$\Phi = \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$$

XVII. Maintenant pour connoître la vitesse même du corps, qu'il aura conformément aux forces dont il est sollicité, on n'aura qu'à tirer de ces forces par la décomposition connuë les forces *tangentiell*es. Pour cet effet qu'on mene du point m sur les directions des forces les perpendiculaires $mv, mv', mv'' \&c.$ & on fait par les règles de la décomposition, que la force tangentielle qui résulte de la

force $Mv = V$ est $= \frac{Mv}{Mm} \cdot V = - \frac{dv}{ds} \cdot V$ à cause de $Mv = -dv$;

de même les forces tangentiell

& V'' feront $= \frac{Mv'}{Mm} \cdot V' = - \frac{dv'}{ds} \cdot V'$; & $= \frac{Mv''}{Mm} \cdot V'' =$

$- \frac{dv''}{ds} \cdot V''$. Donc la force tangentielle entiere fera $=$

$= \frac{V dv - V' dv' - V'' dv''}{ds}$. Or posant cette force tangentielle

$= T$ on fait par les principes de Mécanique qu'on aura $M du = \frac{1}{2} T dt$, ou bien : $2 M u du = T ds$ à cause de $ds = u dt$. Et partant ayant

$$2 M u du = - V dv - V' dv' - V'' dv'' \&c.$$

on aura en prenant les intégrales

$$M u u = \text{Const.} - \int V dv - \int V' dv' - \int V'' dv'' - \&c.$$

XVIII. Donc, puisque par l'hypothese $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' \&c.$ exprime l'effort des forces sur le corps M, que j'ai posé $= \Phi$, il est évident que nous aurons : $M u u = \text{Const.} - \Phi$.

On comprend aisément que la constante ne trouble rien dans l'harmonie, que je viens d'établir entre l'effort Φ & la force vive du corps Muu : car si $\int \Phi dt$ est un *maximum* ou *minimum*, la formule $\int Muu dt$ ou $\int M u ds$ le fera aussi, puisque le terme $\int \text{Const. } dt = \text{Const. } t$ n'entre pas dans la considération du *maximum* ou *minimum*. Et outre cela l'effort Φ étant exprimé par des formules intégrales, renferme déjà en soi une constante quelconque, de sorte que j'aurois pu entièrement négliger cette constante, & poser simplement $Muu = -\Phi$; d'où l'identité seroit d'autant plus évidente. Cependant si l'on prend lesdites intégrales sur un pied fixe, de sorte que l'effort Φ en obtienne une valeur déterminée, l'addition de la constante sera nécessaire ; puisque la vitesse du corps en M dépendant de la vitesse imprimée au corps au commencement pourroit être quelconque : c'est donc de cette vitesse initiale, que la constante à ajouter doit être déterminée en chaque cas proposé. Mais de quelque quantité qu'elle puisse être, elle n'affecte point la détermination du *maximum* ou *minimum*.

XIX. Cependant, puisque la force vive Muu est égalée à l'effort Φ pris négativement, il faut remarquer, que si $\int Muu dt$, ou $\int M u ds$, est un *minimum*, la formule $\int \Phi dt$ sera un *maximum* & réciproquement. Mais, quoique la différence entre un *maximum* & *minimum* paroisse bien grande, elle n'est pourtant d'aucune conséquence dans la Nature même, puisque les *maximum* & *minimum* ne diffèrent entr'eux que par rapport aux signes, de sorte que là, où une quantité quelconque Z est un *maximum*, la même quantité prise négativement $-Z$ est en même tems un *minimum*. C'est aussi la raison pourquoi la méthode pour trouver tant les *maximum* que les *minimum* est absolument la même. Ainsi qui voudroit attaquer de ce côté l'identité découverte entre la force vive Muu & l'effort Φ , ne feroit que de pures chicanes.

XX. Mais ayant démontré l'identité entre l'effort & la force vive seulement pour le cas, où un seul corps se trouve en mouvement, on aura lieu de douter si la même identité subsistera, lorsque le mouvement renferme plusieurs corps liés entr'eux d'une manière quelconque, qui constituent un corps flexible, ou même fluide. Mais aussi dans ces cas, quelque compliqués qu'ils puissent être, je soutiens que la somme des forces vives de tous les élémens du corps se réduit toujours à la somme de tous les efforts, auxquels tous les élémens sont assujettis en même tems. Pour prouver cela il suffira de considérer seulement deux corps M & N, attachés ensemble par le moyen d'une verge M N, qui les tient toujours à une distance donnée ; de sorte que le mouvement de l'un dépend de celui de l'autre. Ensuite, pour ne pas trop embarrasser la démonstration, je ne considérerai qu'un seul centre de force V, auquel ces deux corps soient attirés ; & on verra aisément que la même démonstration s'étend, tant à autant de corps liés ensemble qu'à autant de centres de forces qu'on voudra.

Fig. III.

XXI. Soient donc les distances $MV = x$ & $NV = y$, dont les deux corps sont éloignés du centre V dans l'instant présent. Soit X une fonction quelconque de x , qui exprime la force accélératrice, dont le corps M est attiré vers V, & une fonction semblable de y qui soit $= Y$ exprimera la force accélératrice, dont l'autre corps N est attiré vers V. Donc, posant M & N pour les masses des deux corps, les forces motrices, dont ils sont attirés au point V, seront MX & NY ; & partant les efforts sur les corps seront, suivant la définition que j'ai donnée, $\int MX dx$ & $\int NY dy$, ou bien $M \int X dx$ & $N \int Y dy$ à cause des masses constantes. Donc, posant la somme des efforts $= \Phi$, nous aurons $\Phi = M \int X dx + N \int Y dy$.

XXII. Soit maintenant la vitesse du corps en M $= u$, & celle du corps en N $= v$, avec lesquelles ils parcourront pendant l'élément du tems dt les espaces M m & N n, & nous aurons $Mm = u dt$ & $Nn = v dt$. Qu'on tire des points m & n aux lignes VM & VN

les perpendiculaires $m x$ & $n y$, pour avoir $M x = - d x$ & $N y = - d y$: & la force centripete fournira

pour le corps M la force tangentielle $= \frac{M x}{M m}$. $M X = - \frac{M X d x}{u d t}$, &

pour le corps N la force tangentielle $= \frac{N y}{N n}$. $N Y = - \frac{N Y d y}{v d t}$. Or

les deux corps étant liés ensemble par la verge $\dot{M}N$, cette verge se trouvera dans un certain degré de tension, qui soit $= T$, & dont elle attirera les deux corps ensemble, pour les maintenir dans la distance donnée, afin qu'il soit $m n = M N$. Donc, tirant de M à $m n$ & de N à $M N$ les perpendiculaires $M p$ & $n q$, on aura $m p = N q$, & la force T agira sur le corps M avec la force tangentielle $= - \frac{m p}{M m}$. T

$= - \frac{T. m p}{u d t}$ puisqu'elle tend à retarder le mouvement, & sur le corps

N avec la force tangentielle $= \frac{N q}{N n}$. $T = \frac{T. N q}{v d t} = \frac{T. m p}{v d t}$.

XXIII. En tout donc le corps M sera sollicité par la force tangentielle $= - \frac{M X d x - T. m p}{u d t}$, qui étant multipliée par l'élément du tems $d t$ doit être égale à $2 M d u$, d'où nous tirons

$$2 M u d u = - M X d x - T. m p.$$

De même maniere l'autre corps étant sollicité par la force tangentielle $= \frac{N Y d y + T. m p}{v d t}$, si nous la multiplions par $d t$, le produit doit être égalé à $2 N d v$, ce qui fournit cette égalité:

$$2 N v d v = - N Y d y + T. m p$$

Ajou-

Ajoutons maintenant ces deux égalités ensemble pour avoir :

$$2 M u du + 2 N v dv = - M X dx - Y dy$$

dont l'intégrale sera :

$$M u u + N v v = \text{Const.} - M \int X dx - N \int Y dy$$

ou bien à cause de $\Phi = M \int X dx + N \int Y dy$

$$M u u + N v v = \text{Const.} - \Phi.$$

XXIV. Ici il est évident que $M u u$ & $N v v$ expriment les forces vives de chacun des deux corps, de sorte que la somme des forces vives est égale à $\text{Const.} - \Phi$, ou simplement à $-\Phi$, y comprenant la constante; & partant la somme des forces vives & la somme des efforts à chaque instant sont exprimées par la même formule. Donc, si dans la poursuite du mouvement la formule $\int \Phi dt$ est un *maximum* ou *minimum*, comme le principe d'équilibre de *M. de Maupertuis* exige, c'est absolument la même chose, que si $\int M u u dt + \int N v v dt$ ou $\int M u. M m + \int N v. N n$ devoit être un *minimum* ou *maximum*. Or $M u. M m$ marque selon *M. de Maupertuis* la quantité d'action du corps M & $N v. N n$ celle du corps N pendant le tems dt . Par conséquent les deux principes de *M. de Maupertuis* sont aussi parfaitement d'accord, même dans la plus grande étendue.

XXV. Voilà donc une démonstration accomplie de l'identité des deux principes de *Mr. de Maupertuis*, d'où l'on voit que l'un est une conséquence nécessaire de l'autre, & qu'ayant prouvé la vérité de l'un, l'autre en est également mis hors de doute. On conviendra aussi aisément, que comme j'ai dérivé le principe de mouvement de celui de repos, celui cy doit aussi être une suite de celui-là; quoique la démonstration devienne plus embarrassée. Car, si l'on veut passer du mouvement au repos, on doit supposer le mouvement infiniment petit, ce qui cause de grandes brouilleries dans la considération des vi-

tesse infiniment petites, & des espaces qui en sont parcourus dans un tems infiniment petit, lesquels seront exprimés par des différentiels du second ordre. Mais ayant démontré l'identité de ces principes, on n'a qu'à se servir de l'idée de l'effort dans les cas d'équilibre, & on fera assuré qu'elle revient au même, que si l'on étoit entré actuellement dans le détail du mouvement infiniment petit.

XXVI. Tout revient donc à prouver la vérité du principe de repos, après quoi celle du principe de mouvement ne sauroit plus être revoquée en doute. Or, outre que M. de Maupertuis lui-même en a donné une démonstration fort solide, il en a aussi confirmé la vérité par l'application à plusieurs cas, où il a fait voir que l'équilibre est toujours parfaitement bien d'accord avec son principe. Et moi, ayant cherché les formules, qui sont un *maximum* ou *minimum* dans les figures, que prennent toutes sortes de corps, tant flexibles qu'élastiques, & même fluides, étant sollicités par des forces quelconques, ces formules renferment toujours exactement ce que je viens d'exprimer par le terme d'effort. Tout cela ensemble tiendra donc lieu d'une parfaite démonstration de ce principe, de sorte qu'il ne sauroit plus rester le moindre doute sur sa vérité. Or ces mêmes preuves renfermeront aussi la démonstration de l'autre principe du mouvement, qui est intimement lié avec celui de l'équilibre.

XXVII. Mais il y a plus: ce principe de l'équilibre est non seulement parfaitement bien constaté, mais il nous conduit tout seul à toutes les recherches qu'on a faites jusqu'ici dans la Statique, ou Dynamique, de sorte que par le moyen de ce seul principe toute la Science de l'équilibre pourroit être expliquée dans toute son étendue, sans qu'on ait besoin d'y employer quelque autre principe que ce soit. Cela est d'autant plus remarquable, qu'on fait que jusqu'ici on s'est servi de quelques principes bien différens pour déterminer tous les différens cas de l'équilibre; car la manière, dont on explique ordinairement la décomposition des forces, suppose d'autres principes que ceux dont
on

on explique la nature du levier. Il sera donc toujours très important de découvrir un principe, qui seul est capable de fournir tous les différens cas d'équilibre, qu'on traite dans la Dynamique.

XXVIII. Donc si cette grande prérogative convient au principe de *M. de Maupertuis*, il n'ya aucun doute, que ce principe ne renferme quasi l'essence de toutes nos connoissances dans la Science de l'équilibre, & qu'il ne doive être regardé comme la véritable base de cette Science, & comme la plus sacrée loi de la Nature. De plus il faut aussi tomber d'accord, que ce même principe est la plus heureuse & la plus importante découverte, qu'on ait jamais fait dans cette Science, puisque jusqu'ici on n'a pu produire un tel principe, qui fût commun à tous les cas d'équilibre en général. Or ce qui mérite sans doute la plus grande attention, c'est que ce principe nous découvre en même tems, pour ainsi dire, la véritable intention de la Nature, qui est d'agir avec les moindres dépenses qu'il est possible.

XXIX. Je crois donc que l'importance du sujet exige, que je fasse voir, comment même tous les premiers élémens de la Dynamique découlent très naturellement de ce grand principe de la Nature, en vertu duquel aucunes forces ne sauroient subsister en équilibre, à moins que la somme de leurs efforts ne soit la plus petite. Cela contribuëra sans doute beaucoup plus à mettre ce principe dans tout son jour, & à en faire voir la généralité, que n'a fait son application à des cas plus difficiles, que j'ai traités dans mes Mémoires sur cette matiere dans le IV. Volume de nos Mémoires. Par ce moyen on verra avec plus d'évidence, que toute la Dynamique, & partant aussi la Mécanique, sont fondées sur ce seul principe, & en peuvent être expliquées, sans qu'on ait besoin de recourir à d'autres principes.

XXX. Je commencerai donc par le cas, où plusieurs forces sont appliquées à une point, & je montrerai que le point ne sauroit être en équilibre, à moins que la somme des efforts ne soit la plus petite.

tite. C'est de là qu'on dérive communément le grand principe de la décomposition des forces, qui est de la dernière conséquence par toute la Statique, & les autres Sciences qui en dépendent. Je ferai donc voir que ce principe fondamental n'est qu'une conséquence très naturelle du principe universel de l'équilibre de M. de Maupertuis. Pour cet effet je supposerai les forces, qui agissent sur le point en question, constantes, puisqu'on ne s'étend point dans les élémens à des forces variables.

Fig. IV.

XXXI. Soit d'abord le point O sollicité par deux forces OA, OB, vers les points fixes A & B, par le moyen si l'on veut de deux poids, qui lui sont attachés par des fils AO & BO, & qui en dépendent sur des poulies pratiquées en A & B. Soit A la force ou le poids qui tire suivant OA, & B celui qui tire suivant OB; qu'on nomme la distance OA = x & OB = y, & l'effort de la force A sera = ∫ A dx = Ax; & celui de la force B = ∫ B dy = By. Donc en vertu de notre principe le point O ne sauroit être en repos, à moins que la somme des efforts Ax + By ne soit la plus petite qu'il est possible.

XXXII. Ayant tiré la droite AB, qu'on y mène du point O la perpendiculaire OP, & soit AB = a, AP = s, OP = z; d'où l'on aura BP = a - s, & partant x = √(zz + ss) & y = √(zz + (a - s)²). Il faut donc que cette formule soit un *minimum*:

$$A \sqrt{zz + ss} + B \sqrt{zz + (a - s)^2}$$

laquelle contenant deux variables z & s, il est clair qu'à l'égard de z elle ne sauroit devenir plus petite que lorsque z = 0, car si l'on différentie la formule proposée en ne supposant que z variable, & qu'on mette le différentiel = 0, on aura

$$\frac{Az dz}{\sqrt{zz + ss}} + \frac{Bz dz}{\sqrt{zz + (a - s)^2}} = 0 \text{ ou bien } z = 0.$$

XXXIII.

XXXIII. Pour le cas d'équilibre il faut donc d'abord, qu'il soit $z = 0$: soit donc $OP = z = 0$, & notre formule deviendra $= As + B(a-s)$; & pour qu'elle soit un minimum, il faut que $A ds - B ds = 0$, ou $A = B$. Donc deux forces appliquées au point O ne sauroient être en équilibre, à moins que leurs directions ne soient opposées entr'elles, & que les forces mêmes ne soient égales. Voilà donc déjà le premier cas de la Statique immédiatement déduit de nôtre principe, par lequel on fait, que pour que deux forces soient en équilibre, il faut qu'elles soient égales & contraires entr'elles.

XXXIV. Considérons maintenant le cas de trois forces OA, OB, & OC, dont le point O soit sollicité, & que ces forces soient exprimées par les lettres A, B, C. Posant donc les distances $OA = x$; $OB = y$; & $OC = z$, les efforts de ces trois forces seront:

Fig. V.

$$\int A dx = Ax; \int B dy = By; \text{ \& } \int C dz = Cz.$$

Donc il faut que $Ax + By + Cz$ soit un *minimum*. D'où l'on voit d'abord comme cy-dessus, que cela ne sauroit arriver, à moins que les points A, B, C & O ne se trouvaient dans le même plan; car si le point O étoit élevé au dessus du plan ABC, l'expression $Ax + By + Cz$ seroit plus grande, que si le point O se trouvoit dans le même plan.

XXXV. Puisqu'il faut donc, qu'il soit $A dx + B dy + C dz = 0$, supposons que le point O soit transporté infiniment peu en o , pour conclurre de ce changement les valeurs différentielles dx , dy & dz . Pour cet effet soit l'angle $AOB = p$; $BOC = q$; & $COA = r$, de sorte que $p + q + r = 4$ angles droits. La direction du changement infiniment petit Oo étant arbitraire, qu'il soit pris sur la droite VOo , & nommant l'angle $AOV = \omega$, on aura l'angle $BOV = \omega + p$, & $COV = \omega + p + q$. Donc, posant l'intervalle infiniment petit $Oo = do$, on aura les différentiels:

$$dx = do \cos \omega; dy = do \cos(\omega + p); dz = do \cos(\omega + p + q)$$

XXXVI. Donc pour le cas d'équilibre nôtre principe exige qu'il soit :

$$A \operatorname{cof} \omega + B \operatorname{cof} (\omega + p) + C \operatorname{cof} (\omega + p + q) = 0$$

quelque valeur qu'on donne à l'angle ω . Or le développement de ces cosinus donnant :

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{cof} \omega + B \operatorname{cof} \omega \operatorname{cof} p + C \operatorname{cof} \omega \operatorname{cof} (p + q) \\ - B \sin \omega \sin p - C \sin \omega \sin (p + q) \end{aligned} \right\} = 0$$

il faut qu'il soit séparément

$$\& \quad A + B \operatorname{cof} p + C \operatorname{cof} (p + q) = 0$$

$$\& \quad B \sin p + C \sin (p + q) = 0$$

XXXVII. Or, puisque $p + q = 360^\circ - r$, on aura $\sin (p + q) = -\sin r$; & partant la dernière égalité donne

$$B \sin p - C \sin r = 0 \quad \text{ou} \quad B : C = \sin r : \sin p.$$

Ainsi pour le cas de l'équilibre, il faut que la force OB soit à la force CO , comme le sinus de l'angle AOC au sinus de l'angle AOB . Ou bien les trois forces doivent être entr'elles, comme les sinus des angles opposés; car ce qui vient d'être démontré pour les forces B & C , aura aussi lieu pour deux autres quelconques comme A & B , & $c.$ A & C .

XXXVIII. Si cela paroïssoit encore douteux, on n'auroit qu'à tirer de l'équation $B \sin p = C \sin r$, ou la valeur de $B = \frac{C \sin r}{\sin p}$

ou $C = \frac{B \sin p}{\sin r}$, & la substituer dans la première égalité : laquelle

posant $B = \frac{C \sin r}{\sin p}$, se changera en cette forme :

$A +$

$$A + \frac{C \sin r \cos p}{\sin p} + C \cos (p + q) = 0$$

Or à cause de $p + q = 360^\circ - r$, on a $\cos (p + q) = \cos r$; donc l'équation deviendra étant multipliée par $\sin p$:

$$A \sin p + C (\sin r \cos p + \cos r \sin p) = 0 \quad \text{ou}$$

$A \sin p + C \sin (p + r) = 0$; & puisque $\sin (p + r) = -\sin q$ on aura

$A \sin p - C \sin q = 0$, donc $A : C = \sin q : \sin p$.

XXXIX. Que les lignes OA, OB & OC soient prises proportionnelles aux forces mêmes, & ayant prolongé la ligne CO de l'autre côté jusqu'en E, de sorte que OE = OC, on verra aisément que cette ligne OE sera la diagonale du parallélogramme AB formé des deux côtés OA & OB. Car puisque AO : BO = sin BOE : sin AOE, il sera aussi

Fig. VI.

$$AO : BO = \sin BOC : \sin AOC$$

Ensuite dans le triangle AOE on aura :

$$OA : OE = \sin AEO : \sin OAE = \sin BOC : \sin AOB$$

d'où l'on voit que OE sera égal à OC.

XL. Donc, pour que trois forces OA, OB, OC, appliquées au point O soient en équilibre, il faut qu'ayant formé de deux quelconques OA & OB le parallélogramme AOE, la troisième OC tombe sur la production de la diagonale EO, & qu'elle lui soit égale. Or cette force OC étant en équilibre avec les forces OA & OB, feroit aussi en équilibre avec la force OE, qui lui est égale & contraire; donc, puisque tant les deux forces OA & OB que la seule force OE sont contrebalancées par la même force OC, il s'ensuit, que la force OE est équivalente aux deux forces OA & OB. Voilà donc aussi le grand principe de la décomposition & de l'équivalence des forces, sur lequel est fondée presque toute la Dynamique, qui est

une conséquence nécessaire du principe général de repos & d'équilibre.

Fig. VII.

XLI. Ce même principe nous conduit aussi d'abord au critère, dont on se sert ordinairement pour connoître l'état de l'équilibre, lorsque plusieurs forces agissent sur le point O , lequel, quoiqu'il se déduise aisément du principe de la décomposition des forces, découle immédiatement de notre principe, sans que nous ayons besoin de supposer ce que nous venons de trouver. Soient donc appliquées au point O autant de forces OA , OB , OC , OD &c. qu'on voudra, qui soient indiquées par les lettres A , B , C , D , &c. & posant les angles $AOB = p$; $BOC = q$; $COD = r$; $DOA = s$, si nous tirons par O une ligne quelconque VZ , & que nous nommions l'angle $AOV = \omega$, nous trouverons pour le cas de l'équilibre, tout comme il a été trouvé pour trois forces, cette égalité.

$A \cos \omega + B \cos(\omega + p) + C \cos(\omega + p + q) + D \cos(\omega + p + q + r) = 0$
& quelque grand que puisse être le nombre des forces, on parviendra toujours à une équation semblable.

XLII. Que les lignes OA , OB , OC , OD , soient prises proportionnelles aux forces mêmes A , B , C , D , de sorte que les forces puissent être exprimées par des lignes droites : & qu'on tire des points A , B , C , D , sur la droite VZ , les perpendiculaires Aa , Bb , Cc , Dd ; & il est clair qu'on aura

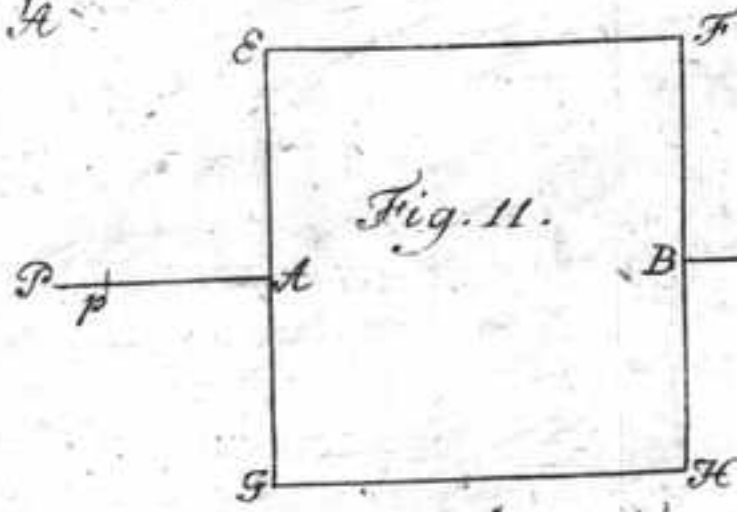
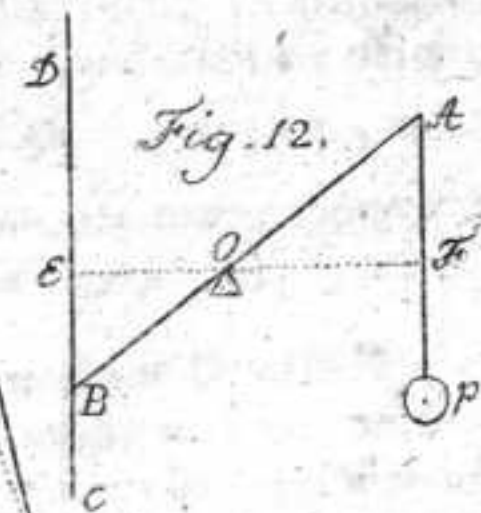
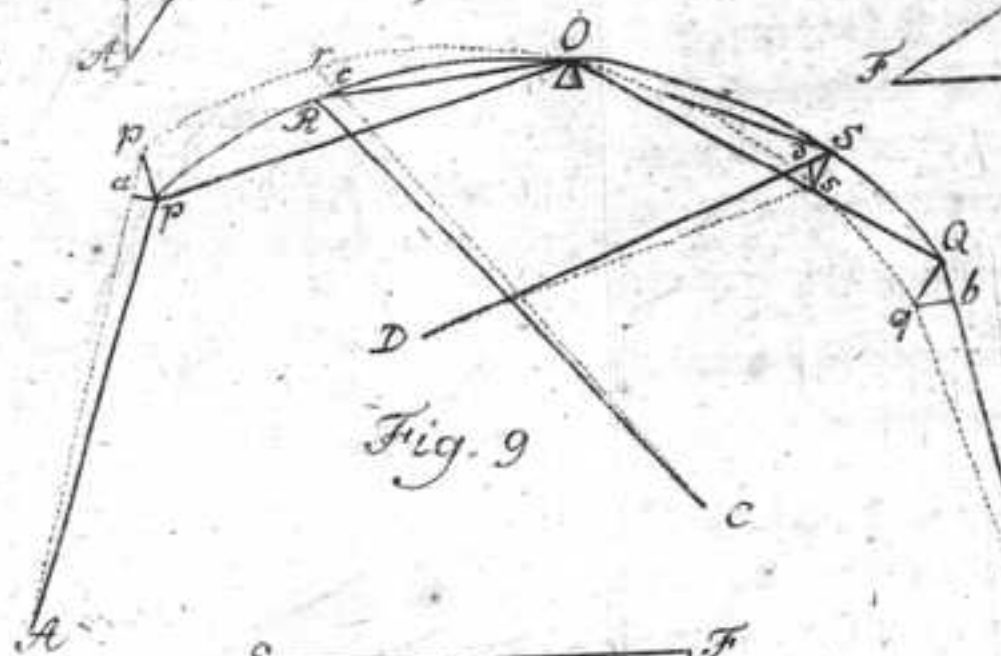
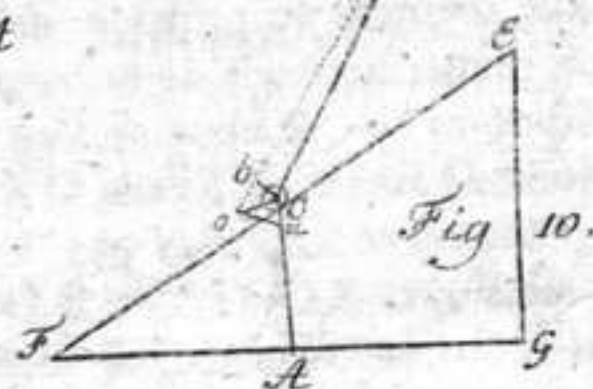
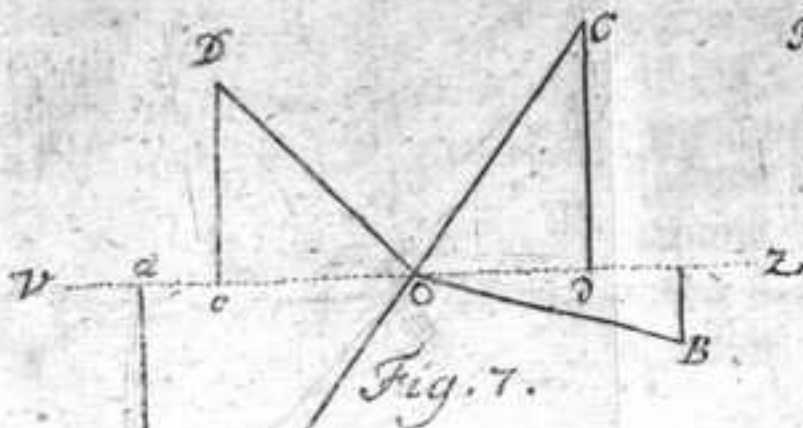
$$Oa = OA \cos \omega; \quad Ob = -OB \cos(\omega + p); \quad Oc = -OC \cos(\omega + p + q);$$

$$Od = OD \cos(\omega + p + q + r)$$

Donc l'état de l'équilibre exige, qu'il soit :

$$Oa - Ob - Oc + Od = 0$$

ou bien que la somme de intervalles $Oa + Od$, qui tombent d'un côté



côté du point O sur la droite VZ , soit égale à la somme des intervalles $Ob + Oc$, qui tombe de l'autre côté.

XLIII. Puisque l'angle ω peut être pris à volonté, qu'on pose $90^\circ + \omega$ au lieu de ω , & puisque les cosinus se changeront en des sinus, on aura pour l'état de l'équilibre :

$$A \sin \omega + B \sin(\omega + p) + C \sin(\omega + p + q) + D \sin(\omega + p + q + r) = 0$$

Or nommant comme auparavant l'angle $AOV = \omega$, les perpendiculaires seront :

$$Aa = OA \sin \omega; Bb = OB \sin(\omega + p); Cc = -OC \sin(\omega + p + q) \\ \& Dd = -OD \sin(\omega + p + q + r)$$

& partant nous aurons :

$$Aa + Bb - Cc - Dd = 0$$

De sorte que la somme des perpendiculaires $Aa + Bb$, qui se trouvent au dessous de la ligne VZ , doit toujours être égale à la somme des perpendiculaires $Cc + Dd$, qui tombent au dessus.

XLIV. Voilà donc les deux principaux caractères, dont on juge ordinairement de l'état d'équilibre d'autant de forces que ce soit, qui agissent sur un point donné ; & qu'on déduit communément de la décomposition des forces. Mais ils sont, de même que la décomposition, une suite immédiate de notre principe général. Je pourrois de la même manière faire voir, que ce principe fournit aussi les conditions connues, sous lesquelles quatre, ou plusieurs forces, dont les directions ne seroient pas dans le même plan, se trouvent en équilibre ; mais comme cela demanderoit des figures trop compliquées, je m'en pourrai passer d'autant plus aisément, qu'on peut déduire ces conditions de la décomposition ordinaire, qui étant déjà une conséquence du principe général, il n'y a nul doute, que tous les cas plus compliqués ne le soient aussi.



Fig. VIII.

XLV. Je passe aux propriétés du levier, pour montrer qu'elles sont également une conséquence nécessaire de notre principe. Soit donc PQ un levier droit, mobile autour du point O , aux deux bouts duquel P & Q soient appliquées les forces PA & QB , dont les directions soient d'abord perpendiculaires au levier. Posant donc ces forces $PA = A$ & $QB = B$, & les distances $PA = x$ & $QB = y$. les efforts seront Ax & By , dont la somme $Ax + By$ devant être un *minimum*, il faut qu'il soit $A dx + B dy = 0$. Que le levier change infiniment peu de position en pOq , & on aura $dx = Pp$ & $dy = -Qq$; d'où l'on aura $A.Pp - B.Qq = 0$, ou $A : B = Qq : Pp$. Or $Qq : Pp = OQ : OP$; & partant les forces $A : B = OQ : OP$ ou $A.OP = B.OQ$, ce qui est la propriété principale du levier.

Fig. IX.

XLVI. Mais, sans supposer cette propriété principale du levier, nous pourrions d'abord tirer immédiatement de notre principe la théorie générale du levier, de quelque figure qu'il soit, & de quelques forces qu'il soit sollicité. Soit donc proposé un levier courbe quelconque $PROS Q$, mobile sur son appuy O , auquel soient appliquées les forces $PA = A$; $QB = B$; $RC = C$; $SD = D$; selon des directions quelconques. Qu'on tire du point O aux points d'application de ces forces les droites OP , OQ , OR , OS , & soient les angles :

$$APO = \alpha; BQO = \beta; CRO = \gamma; DSO = \delta$$

De plus prenant dans les directions des forces à volonté des points fixes A , B , C , D , soient les distances :

$$AP = p; BQ = q; CR = r; DS = s$$

& la somme des efforts de ces forces sera $= Ap + Bq + Cr + Ds$. Donc pour l'état d'équilibre on aura: $A dp + B dq + C dr + D ds = 0$.

XLVII.

XLVIII. Pour trouver le rapport de ces différentiels, qu'on conçoive le levier tourner infiniment peu autour du point O, de sorte qu'il parvienne dans la situation $p r O s q$, ayant changé d'un angle infiniment petit $= d\omega$. Par ce mouvement les points P, Q, R, S, décriront autour du point O des arcs de cercles $Pp = OP. d\omega$; $Qq = OQ. d\omega$; $Rr = OR. d\omega$; $Ss = OS. d\omega$. Qu'on décrive aussi des centres A, B, C, D les arcs de cercles Pa ; qb ; Rc ; sd . Maintenant l'angle $AP O$ étant $= \alpha$, & les angles APa & OPp droits l'angle pPa fera $= 180^\circ - \alpha$, donc $\sin pPa = \sin \alpha$. & partant $ap = dp = Pp \sin \alpha = OP. d\omega \sin \alpha$: & de la même manière on aura $cr = dr = Rr \sin \gamma = OR. d\omega \sin \gamma$. De l'autre côté ayant l'angle $BQ O = \beta$ & $OQq = 90^\circ$, on aura $qQb = \beta - 90^\circ$, & $Qqb = 180^\circ - \beta$: donc $\sin Qqb = \sin \beta$, & partant $Qb = -dq = Qq \sin \beta = OQ. d\omega \sin \beta$: & pareillement on obtiendra $Sd = -ds = Ss \sin \delta = OS. d\omega \sin \delta$.

XLVIII. Ayant donc :

$$dp = OP. d\omega \sin \alpha; \quad dr = OR. d\omega \sin \gamma; \quad dq = -OQ \sin \beta; \quad ds = -OS. d\omega \sin \delta,$$

nous trouverons pour le cas d'équilibre, en divisant par $d\omega$ cette équation :

$$A. OP. \sin \alpha + C. OR. \sin \gamma = B. OQ \sin \beta + D. OS. \sin \delta$$

Or on fait que $A. OP. \sin \alpha$ exprime le moment de la force PA sur le point O, & partant le contenu de cette équation est, que la somme des moments d'un côté des points d'appuy O est égale à la somme des moments de l'autre côté : & c'est en quoi consiste toute la doctrine du levier.

XLIX. Le plan incliné fournit aussi dans la Statique un sujet, qui demande un développement particulier ; mais qui se déduit aussi immédiatement de notre principe. Soit EF un plan incliné sur la base horizontale FG ; sur lequel soit un corps O, soutenu par une force,

ce,

cé, qui se tire selon la direction OB ; & on demande les conditions sous lesquelles le corps O se trouvera en équilibre. Soit l'angle de l'inclinaison du plan $EFG = \gamma$; & l'angle BOE , que fait la direction de la force OB avec le plan incliné FE , $= \delta$; le poids du corps O , ou la force dont il est sollicité en bas selon la verticale $OA = A$, & la force OB , qui le soutient $= B$. Qu'on nomme donc la distance $OA = x$ & $OB = y$; & la somme des efforts de ces deux forces sera $= Ax + By$, qui doit être la plus petite, & partant $A dx + B dy = 0$.

L. Que le corps O change infiniment peu de position sur le plan incliné, & qu'il parvienne en o , étant avancé par l'espace, $Oo = ds$. Qu'on tire du point o sur OA la perpendiculaire oa , & de O sur Ba la perpendiculaire Ob , & après ce changement il est clair, qu'il y aura $Oa = -dx$ & $ob = dy$. Or à cause de l'angle $Ooa = \gamma$ on aura $Oa = ds \sin \gamma$, & l'angle $Oob = EOB = \delta$ donnera $ob = ds \cos \delta$, de sorte que $dx = -ds \sin \gamma$ & $dy = ds \cos \delta$. Donc pour l'état d'équilibre il faut, qu'il soit $A ds \sin \gamma + B ds \cos \delta = 0$, ou $A \sin \gamma = B \cos \delta$; ou la force OB sera au poids du corps O comme le sinus de l'élevation du plan incliné au cosinus de l'angle EOB , que fait la direction de la force OB avec le plan incliné: & cette même proportion se tire des principes ordinaires de la Statique.

LI. Cela pourroit suffire pour faire voir, que tous les cas d'équilibre, qu'on explique dans la Statique, découlent très naturellement de nôtre principe général, de sorte que par son seul moyen toute cette Science pourroit être parfaitement achevée. Or je remarque de plus, que ce principe fournit les conditions requises à l'équilibre, très souvent beaucoup plus promptement que les principes ordinaires. Car, lorsque le cas est fort compliqué, on doit en suivant les principes ordinaires considérer dans chaque combinaison les forces, dont les parties agissent l'une sur l'autre, ce qui doit se faire par la décompo-
sition

sition des forces. Mais en employant nôtre principe général, on parvient au but, sans avoir besoin de tous ces détails.

LII. Pour nous convaincre entièrement de cet important avantage, soit renfermée dans la Caisse E F G H une Machine quelconque, composée d'autant de pièces que l'on veut, sans que nous en sachions même la construction. Que cette Machine soit employée à vaincre une certaine résistance, par le moyen d'une force A P, qui s'applique à la Machine; or la force de la résistance soit représentée par B Q: soit la première = P & celle - cy = Q. Soient de plus les distances A P = x; B Q = y, & en vertu de nôtre principe ces deux forces ne sauroient être en équilibre, à moins que la somme des efforts $Px + Qy$ ne soit la plus petite, ou $Pdx + Qdy = 0$. Or pour avoir le rapport des différentiels dx & dy , supposons que la force A P avance par l'espace P p, & qu'en même tems la résistance B Q cede par l'espace Q q; cela posé on aura $dx = Pp$ & $dy = - Qq$: donc dans le cas d'équilibre il y aura $P. Pp = Q. Qq$.

Fig. XI.

LIII. Voici donc le principe général de toutes les Machines, qui découle immédiatement du principe universel de repos; or, quoique ce principe soit déjà connu il y a longtems, il faut remarquer, qu'on l'a conclu d'un grand nombre de cas particuliers, & que personne n'en a encore donné une démonstration rigoureuse: de sorte qu'on peut plutôt soutenir, que ce principe tire sa certitude de nôtre principe universel. Mais peut-être me voudroit-on objecter, que le principe général d'équilibre n'est pas réellement différent de ce principe général de toutes les Machines; & puisque celui-ci est depuis longtems connu, on revoquera sous ce prétexte en doute la nouveauté de celui-là. Comme c'est l'unique endroit, où l'on puisse attaquer ce grand principe de M. de Maupertuis, il fera bon de prévenir cette objection.

Or je remarque d'abord, que le sujet du principe de Mécanique, d'où l'on explique l'état d'équilibre de toutes les Machines, est en-

tièrement différent du sujet du principe général de repos ; car celui-là roule sur l'égalité des produits qu'on trouve, lorsqu'on multiplie d'un côté la force mouvante, & de l'autre côté la résistance, par l'espace qu'elles parcourent, la Machine étant mise en mouvement ; au lieu que celui-ci exige un *minimum* dans la somme des efforts. En second lieu, le principe des Machines ne s'étend que sur deux forces, dont l'une met la Machine en mouvement, & l'autre est celle de la résistance, qui s'oppose au mouvement : tandis que le principe général de repos est applicable à autant de forces que ce soit. En troisième lieu, le principe des Machines suppose les forces constantes, pendant que l'autre principe s'étend à des forces variables selon une loi quelconque. Par conséquent, ce principe ayant tant un sujet tout à fait différent, qu'une étendue infiniment plus grande, ne sauroit en aucune manière être confondu avec l'autre ; & partant sa nouveauté ne sauroit être révoquée en doute.

LV. Mais outre cela on est absolument obligé d'avouër, que ce principe des Machines est fort borné, quelque général qu'il puisse paroître d'ailleurs, n'étant applicable qu'à des Machines, où il s'agit de l'équilibre entre deux forces, l'une mouvante, & l'autre résistante : & personne ne s'est encore avisé de déduire de ce principe les courbures des corps flexibles, comme celle de la Catenaire, & encore moins des corps élastiques, sans rien dire de la figure des corps fluides, qu'ils doivent prendre étant sollicités par des forces quelconques. Or j'ai déjà fait voir, que toutes ces figures se découvrent très heureusement par le moyen du principe général de repos de *M. de Maupertuis* ; de sorte qu'on a toutes les raisons possibles de regarder ce principe comme la plus importante découverte dans la Mécanique.

LVI. Dans tous les cas d'équilibre, que j'ai examinés jusqu'ici par le moyen de ce principe, la somme des efforts est sans contredit un *minimum* ; mais il y a aussi des cas d'équilibre, où la somme des efforts devient un *maximum*. Car il faut remarquer que les forces se
doivent

doivent nécessairement soutenir en équilibre dans l'un & l'autre cas ; aussi bien quand la somme de leurs efforts est un *maximum*, que quand elle est un *minimum*. Mais l'équilibre qui résulte du cas du *maximum*, est d'une nature tout à fait différente de celui, qui renferme un *minimum* ; il y a à peu près la même différence, que lorsqu'un cone repose, ou sur sa base, ou sur sa pointe, où l'un & l'autre cas est possible ; & le premier répond au *minimum*, & l'autre au *maximum*.

LVII. Comme la methode est la même, soit qu'on veuille chercher le *maximum* ou le *minimum*, notre principe général nous conduit également aux équilibres de l'une & de l'autre espece, quoiqu'ils soient essentiellement differens entr'eux. La difference est la même que celle qui se trouve entre les deux situations mentionnées d'un cone ; car un équilibre qui résulte d'un *minimum* est d'une telle nature, que lorsqu'il souffre un changement infiniment petit, il se rétablit de soi même : au lieu qu'un équilibre, où la somme des efforts est un *maximum*, ne se rétablit point après un tel changement, mais s'en éloigne plutôt de plus en plus : tout comme un cone, qui repose sur sa pointe, tombe entièrement, dès qu'on y touche tant soit peu.

LVIII. Pour donner un exemple où l'effort est un *maximum*, je me souviens d'un cas singulier, qui m'a été proposé autrefois. CD est une muraille fixe, contre laquelle il faut appuyer le levier AB, en sorte qu'étant soutenu sur un point O fixe, & sollicité en A par un poids P, il demeure en équilibre. On suppose tant la muraille que le point parfaitement poli, de sorte que le levier puisse glisser librement sans y rencontrer le moindre frottement ; on suppose aussi, quand on veut, le levier destitué de pesanteur, de sorte qu'il n'y ait point d'autre force, que le poids P, dont il soit sollicité : car il seroit aisé de ramener à ce cas celui, où le levier seroit aussi pesant. Ce cas, qui d'ailleurs n'est pas si aisé à résoudre par les principes ordinaires de la Mécanique, est remarquable par cette circonstance, qu'il peut être employé à trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

Fig. XII.

LIX. Soit donc la longueur du levier $AB = a$, la distance du pivot O à la muraille $OE = b$, le poids ou la force, dont le bout A est tiré en bas $= P$: ou, ce qui revient au même, supposons que le point A soit tiré par cette force au point fixe F pris dans la ligne EOF . Posant donc la distance $AF = z$, l'effort sera $= Pz$, qui devant être un *maximum*, donne Pdz ou $dz = 0$: car il est évident, que la distance AF ne sauroit être mise un *minimum*, attendu que plus le bout B glisse ou en haut ou en bas, la distance AF peut devenir plus petite.

LX. Posons donc, pour découvrir ce cas d'équilibre, la partie du levier entre la muraille & le pivot $OB = x$, & à cause de $OE = b$, on aura $BE = \sqrt{xx - bb}$. Donc, puisque $AO = a - x$, on aura $OB:BE = OA:AF$, & partant:

$$AF = z = \frac{(a-x)\sqrt{xx-bb}}{x} = \frac{a}{x}\sqrt{xx-bb} - \sqrt{xx-bb}, \text{ d'où l'on tiré:}$$

$$dz = \frac{abb dx}{xx\sqrt{xx-bb}} - \frac{x dx}{\sqrt{xx-bb}} = \frac{dx(abb - x^3)}{xx\sqrt{xx-bb}}$$

Il faut donc qu'il soit $x^3 = abb$ ou $x = \sqrt[3]{abb}$: ou bien la partie OB sera la première des deux moyennes proportionnelles entre les lignes OE & AB . Or cette même solution se tire aussi des principes ordinaires de Mécanique.

LXI. Mais n'ayant considéré jusqu'ici que des forces constantes, j'ajouterai encore un mot sur des forces variables, & en particulier sur la force des ressorts, en quoi sera contenuë la règle de *M. Bernoulli* que j'ai expliquée dans mes *Mémoires* du Vol. IV. des *Mém. de l'Academ.* pour trouver les efforts des forces élastiques. Soit donc AO un levier mobile autour du point O , qui soit attaché au plafond fixe OB par le moyen d'un ressort EF bandé en arc de cercle du centre O ; & supposons que la force de ce ressort soit proportionnelle à l'angle BOA , de sorte que le levier en soit toujours sollicité perpendiculairement au point F . Soit ensuite ce même levier tiré en bas au point

Fig. XIII.

point A par une force constante AP , & on demande les conditions, sous lesquelles ce levier sera en équilibre.

LXII. Soit la ligne OB horizontale, AP verticale; & posant la force $AP = A$ & la distance $AP = x$, prise du point A à un point fixe P dans la même direction; l'effort de cette force sera $= Ax$. Mais pour l'effort de la force du ressort, soit l'angle $BOA = \phi$, & la force du ressort dans cet état $= \frac{E\phi}{\alpha}$, supposant sa force pour un angle constant $\alpha = E$. Soit de plus l'intervalle $OE = OF = f$. Or pendant que le levier avance un peu de l'angle infiniment petit $AOa = d\phi$, le ressort sera étendu de plus par l'espace $Ff = fd\phi$.

Nous aurons donc une force $= \frac{E\phi}{\alpha}$ à laquelle répond l'élément d'espace $f d\phi$: donc son effort sera $= f \frac{E\phi}{\alpha} \cdot f d\phi = \frac{E f^2}{2\alpha} \cdot \phi d\phi$.

LXIII. Ayant donc la somme des efforts $= Ax + \frac{E f^2}{2\alpha} \cdot \phi d\phi$,

pour l'état d'équilibre, il faut qu'il soit $A dx + \frac{E f^2}{\alpha} \phi d\phi = 0$.

Or le levier étant parvenu dans son état voisin Oa , le point A sera transporté en a , par l'arc $Aa = a d\phi$, posant la longueur du levier $OA = a$, & tirant la ligne horizontale ap , nous aurons $dx = -Ap$: mais l'angle aAp étant $= BOA = \phi$, on obtiendra $Ap = a d\phi \cos \phi$, d'où nous tirons:

$$-A a d\phi \cos \phi + \frac{E f^2}{\alpha} \phi d\phi = 0, \text{ ou } A a \cos \phi = \frac{E f^2}{\alpha} \phi.$$

Or il est évident que c'est la vraie condition de l'équilibre, car $A a \cos \phi$ exprime le moment de la force $AP = A$ sur le point O , & $\frac{E f^2}{\alpha} \phi =$



$\frac{E \Phi}{a} \cdot f$ le moment de la force du ressort, lesquels moments doivent être égaux entr'eux.

LXIV. Delà on voit réciproquement que l'effort du ressort, que nous venons de trouver $= \frac{E f}{2a} \cdot \Phi \Phi$, est justement exprimé; & partant on en fera aussi assuré de la justesse de la règle de *M. Bernoulli*, que j'ai expliquée dans mes *Mém. allégués*, pour trouver l'effort de l'élasticité dans les courbes élastiques. Car $\frac{E f}{a}$ exprime ce, que j'y ai nommé l'élasticité absolue, & puisque l'angle $BOA = \Phi$ y est infiniment petit, il sera proportionnel réciproquement au rayon de la développée; lequel donc étant posé $= r$, l'effort de l'élasticité sera exprimé en sorte $\frac{C}{r}$, prenant C pour la juste quantité constante; & c'est précisément l'expression de *M. Bernoulli* dont je me suis servi dans l'endroit allégué.

