1753

De motu tautochrono pendulorum compositorum

Leonhard Euler

DE MOTV TAVTOCHRONO PENDVLORVM COMPOSITORVM.

AVCTORE
L. EULERO.

§. 1.

Etsi Theoria motus pendulorum, quae a Viro summo *Hugenio* primum felicissime est exposita, Mechanicam amplissimis atque vtilissimis inuentis locupletauit, tamen iam satis constat, modum, quo motum pendulorum in horologiis ope cycloidis ad vniformitatem reuocare est conatus, in praxi ad scopum non prorsus esse accommodatum. Quod quidem nullo Theoriae vitio vsu venit, quae firmissimis nititur fundamentis, neque ipsi Geometriae ratione certitudinis quicquam cedit: sed cum pendula, quae ad motum horologiorum moderandum, adhiberi solent, multum discrepent ab iis, quorum motus ope cycloidis in Theoria ad aequabilitatem reduci docetur; mirum non est, Theoriam praxi non perfecte respondere, atque in pendulis horologiorum inaequalitatem quamdam relinqui, etiamsi in Theoria perfectus Tautochronismus habeatur.

§. 2. Demonstrauit autem *Huienius*, si corpus pendulum ita suspendatur, vt eius motus peragatur in cycloide vulgari basin horizontalem habente, tum omnes eius oscillationes, siue fuerint ampliores siue contractiores, aequalibus temporibus absolui. Verum tamen conditiones, sub

ſub quibus iſte tautochronismus locum habet, probe ſunt notandae, ne huic propoſitioni in ſe veriſſimae plus tribuatur, quam demonſtrationis vis euincit. Primum igitur neceſſe eſt, vt motus fiat in medio non reſiſtente, ſeu in ſpatio ab omni materia vacuo: deinde non minus requiritur, vt pendulum ſit ſimplex, ſeu vt tota penduli maſſa in vno quaſi puncto collecta exiſtat: cuiusmodi pendulum ſatis exacte exhibetur, ſi globulus minimus ſimulque grauiſſimus ope fili tenuiſſimi et leuiſſimi, cuius pondus prae grauitate globuli euaneſcat, ſuſpendatur.

§. 3. Niſi igitur tam medii reſiſtentia, in quo motus peragitur, fuerit nulla, quam maſſa ipſius penduli quaſi infinite parua, vti in Theoria aſſumitur, oſcillationes etiamſi in cycloide abſoluantur, tamen non erunt iſochronae. Quare cum in vſu horologiorum neque aeris reſiſtentia tolli queat, neque eiusmodi pendula adhiberi poſſint, quae pro ſimplicibus haberi liceat, ob hanc duplicem cauſam ſatis perſpicuum eſt, hoc caſu eam cycloidis proprietatem, quae tantum pro pendulis ſimplicibus in ſpatio vacuo eſt demonſtrata, locum non amplius inuenire: neque ideo huiusmodi pendulorum oſcillationes fore iſochronas. Hunc etiam defectum ipſa experientia non obſcure indicaſſe videtur, cum artifices vſum cycloidis ad motus horologiorum moderandos nunc fere penitus repudiauerint.

§. 4. Quod quidem ad difficultatem a medii reſiſtentia oriundam attinet, quoniam ea ob aeris raritatem valde eſt parua, ea ſine notabili errore negligi poſſet. Interim tamen Geometrae in ea ſuperanda multo magis elaborauerunt, quam in altera, quae tamen vti mox

ſum

ſum oſtenſurus, motui multo maiorem inaequalitatem inducit. *Neutonus* enim demonſtrauit, ſi medii, in quo pendulum ſimplex agitatur, reſiſtentia ipſis celeritatibus ſit proportionalis, cycloidem non ſecus atque in ſpatio vacuo eſſe ſatisfacturam. Cum autem reſiſtentia aeris non celeritatum rationem ſimplicem, ſed duplicatam ſequatur, hic cycloidis vſus ceſſat, eiusque loco ad tautochronismum obtinendum alium curuam ſubſtitui oportet, quam ego primus elicui atque in *Comment. Acad. Petrop. Tom.* expoſui. Requirit ea autem, perinde ac cyclois *Hugeniana* pendulum ſimplex, neque pro pendulis compoſitis vllum vſum praeſtat.

§. 5. Si igitur motui pendulorum, quibus horologia inſtrui ſolent, iſochronismum inducere velimus, potiſſimum ad pendula compoſita erit reſpiciendum, quorum maſſa non in vno quodam puncto collecta, ſed per totum penduli volumen, vti re vera eſt, diſperſa concipiatur. Vnde ſequens naſcitur quaeſtio, *vt propoſito pendulo quocunque compoſito, ea linea curua determinetur, in qua, ſi hoc pendulum moueatur, omnes eius oſcillationes futurae ſint aequidiurnae, ſeu aequalibus temporibus abſoluantur.* Atque in hac inueſtigatione mentem facile ab aeris reſiſtentia abſtrahere poterimus, tum quod calculus fieret maxime intricatus et inſuperabilis, tum vero imprimis quod reſiſtentia tam ſit exigua, vt ſine ſenſibili errore negligi queat. A ſolutione autem huius Problematis tota horologiorum perfectio, quae quidem ex hoc genere expectari poteſt, pendet.

§. 6. Motum quidem penduli cuiusuis compoſiti *Hugenius* ad motum penduli ſimplicis reducere docuit, dum

dum demonſtrauit omne pendulum compoſitum perinde oſcillari, ac ſi tota eius maſſa in certo quodam puncto, quod centrum oſcillationis vocat, eſſet collecta. Hinc pendulum compoſitum pari modo oſcillationes ſuas abſoluet, quo pendulum ſimplex, cuius longitudo aequetur diſtantiae centri oſcillationis ab axe: ſic igitur determinatio motus cuiusque penduli compoſiti ad inuentionem centri oſcillationis perducitur, pro quo negotio *Hugenius* elegantem tradidit regulam, variis paſſim modis demonſtratam. Primum autem animaduertendum eſt, hanc regulam tantum ad corpora rigida et inflexibilia patere, cuiusmodi quidem corpora vulgo ad pendula adhiberi ſolent. Deinde autem porro haec centri oſcillationis inuentio tantum ad motum pendulorum circularem extenditur, quo pendulum circa axem fixum libere gyratur, eiusque ſingula puncta circulos deſcribunt,

§. 7. Cum autem motus penduli circularis ad tautochronismum producendum ſit ineptus, dum ampliores oſcillationes tardius abſoluuntur, quam minores; hic nobis motus penduli in alia quacunque linea curua erit euoluendus. Poteſt vero pendulum ad curuam quamcunque deſcribendam accommodari, ſi loco axis fixi, circa quem vulgo pendulum oſcillatur, linea curua, quae illius curuae deſcribendae ſit euoluta, ſubſtituatur; ſimili modo, quo *Hugenius* docuit, pendulum intra duas cycloides ſuſpendere, vt ab eo cyclois deſcriberetur. In hunc finem ſuperiorem penduli portionem flexibilem eſſe oportet, qua iſti curuae applicatur, vt reliqua portio perpetuo ſecundum tangentem huius curuae extendatur, ſicque nouam

 curuam

curuam ex eius euolutione natam describat. Quo motu in genere expedito, eam curuam inuestigari oportebit, ad quam pendulum instructum omnes oscillationes aequalibus temporibus absoluat.

Fig. 6. §. 8. Si igitur pendulum quodcunque in puncto A sit suspensum, sit curua A M B eius directrix, quam superiori parte flexibili A M ita contactu complectatur, vt pars inferior M G, dum mouetur, ab vltimo contactus puncto M continuo in directum porrigatur. Primum ergo manifestum est, hanc tangentem M G per corporis centrum grauitatis G esse transituram, eo quod media vis centrifugae directio, qua pendulum praeter grauitatem tenditur, per punctum hoc G transit. Deinde cum corpus hoc mouetur, punctum G describet curuam G C, cuius euoluta erit ipsa directrix A M B, ita vt ipsius radius caruedinis in puncto G sit recta G M. Sit recta A D, quae curuam in supremo puncto A tangit, verticalis, ad cuius alteram partem similis existat curua directrix A M B, in figura non expressa, hocque pendulum ista oscillabitur, vt eius punctum G in curua G C ad alteram partem producta motu reciproco alternatim descendat et ascendat, sicque oscillationes perficiat.

§. 9. Consideremus primum huius corporis situm naturalem, quo eius centrum grauitatis in rectae verticalis A C puncto C versatur, et in quo situ pendulum, nisi iam motum habeat perpetuo sit quieturum. In hoc situ sit punctum D centrum oscillationis totius penduli, cuius distantia a puncto A prodit, si singulae corporis particulae per quadrata distantiarum ab axe A multiplicentur, horum-

que

que productorum omnium summa per factum ex massa corporis in distantiam centri grauitatis ab axe A C diuidatur. Vel si per corporis centrum grauitatis C transfixus concipiatur axis horizontalis ipsi axi A, qui ad planum verticale C A G normalis intelligatur, parallelus, singulaeque corporis particulae in quadrata distantiarum suarum ab hoc axe ducantur, atque horum productorum summa vocetur $= M\,k\,k$, denotante M massam seu pondus totius penduli, quam expressionem momentum inertiae corporis respectu istius axis per C ducti appello, erit rectangulum C D, A C $= k\,k$ seu C D $= \frac{k\,k}{AC}$. sicque ex quantitate cognita $k\,k$ centrum oscillationis D determinatur.

§. 10. Cum iam pendulum in alium quemcunque situm AMG peruenerit, vbi curuam directricem AMB in puncto M tangat: hic non amplius circa axem A, sed circa punctum M primo quidem instanti motu angulari feretur. Hinc interuallum inter centrum grauitatis G et centrum oscillationis H non amplius aequale erit interuallo C D in situ naturali, sed ob diminutam penduli longitudinem M G, seu axem motus nunc in M promotum, interuallum G H maius erit quam C D; cum enim esset C D $= \frac{k\,k}{AC}$, ob eandem rationem nunc erit G H $= \frac{k\,k}{MG}$, seu G H : C D $=$ A C : M G. Quare cum pendulum compositum continuo perinde moueatur, ac si vniuersa eiusmodi in centro oscillationis esset collecta, perspicuum est, ob variabilitatem huius centri H nullum pendulum simplex exhiberi posse, cuius motus cum motu penduli compositi conueniat, nisi curua directrix A M B prorsus tollatur.

§. 11. Huc accedit, vt dum penduli portio A M curuae directrici A M B applicatur, ea tantisper motus non fiat particeps. Quam ob rem cum quouis momento ea tantum massa, quae cum pendulo mouetur, spectari debeat, ipsa quoque massa eiusque adeo centrum grauitatis erit variabile, hincque porro eiusdem momentum inertiae respectu axis per centrum grauitatis ducti, quod ante vocauimus $= M\,k\,k$ continuo immutabitur, ex quo longe alia centri oscillationis ratio mutabilitatis existet. Vt igitur hanc posteriorem difficultatem remoueamus, superiorem penduli partem flexibilem, qua eius massa, modo aucta, modo minuta, censeri debet, leuissimam inferiorem vero partem E F, quae penduli molem proprie constituit, grauissimam assumamus, vt augmenta illa et decrementa ex portione leuissima orta sine errore pro nihilo reputari queant, simili modo quo resistentiae aeris effectum negligimus.

§. 12. Reiecta igitur massa portionis flexibilis A M tanquam minima, quippe quae re vera, nisi oscillationes admodum amplae efficiantur, valde parua existit, sit reliqua penduli massa $= M$, eius centrum grauitatis G, eiusque momentum inertiae respectu axis horizontalis per G ducti $= M\,k\,k$, quae quantitas ex motu oscillatoris libero definiri potest, dum pendulum remota curua directrice A M B ad oscillationes minimas incitatur, si enim hoc casu centrum oscillationis reperiatur in D, vt sit A D longitudo penduli simplicis isochroni, erit $k\,k = A\,C \,.\, C\,D$. existente C corporis centro grauitatis.

Vt

Vt igitur praesens penduli situs, quo eius centrum grauitatis in G versatur, symbolis exprimatur, ponatur curuae directricis portio A M $= s$ et tota penduli longitudo A M G $= a$, quae est constans et ipsi A C aequalis, erit distantia M G $= a - s$, quae simul est radius osculi curuae C G in puncto G. Deinde per M ducatur recta verticalis M S, ac vocetur angulus declinationis penduli S M G $= \Phi$.

§. 13. Ponamus pendulum ex situ A C motum ita inchoasse, vt ibi celeritas centri grauitatis C debita fuerit altitudini b, seu ipsa celeritas $= \sqrt{b}$; hinc autem elapso tempore $= t$ peruenisse in situm A M G, vbi centri grauitatis G celeritas sit $= \sqrt{v}$. Iam tempusculo infinite paruo $= dt$ vlterius progrediatur in g, ita vt nunc curua directrix A M B tangatur in puncto m, existente eius elemento M $m = ds$; erit angulus infinite paruus G M $g = d\Phi$, et spatiolum percursum G$g = (a-s)d\Phi$, quod per tempusculum dt diuisum dabit celeritatem centri grauitatis, ita vt sit $\sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$ et $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$. Cum autem inclinatio penduli ad rectam verticalem M S tempusculo hoc dt crescat angulo $= d\Phi$, motus corporis in G erit duplex; alter progressiuus secundum directionem Gg celeritate $= \sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$, alter gyratorius circa axem per G transeuntem, cuius celeritas angularis $= \frac{d\Phi}{dt}$. Hoc enim duplici motu coniuncto verus penduli motus existet; quippe qui semper considerari potest tanquam compositus ex motu progressiuo centri grauitatis, et ex gyratorio circa axem per centrum grauitatis transeuntem.

 §. 14.

§. 14. Antequam in effectum grauitatis, quo iste duplex motus retardetur, inquiramus, inuestigemus perturbationem motus a vi quacunque sollicitante oriundam. Sollicitetur ergo pendulum in puncto quopiam Z a vi $ZX = P$, cuius directio ZX et ad rectam MZ normalis, quia vires obliquae eatenus tantum motum penduli afficiunt, quatenus per resolutionem praebent vim ad directionem MZ normalem. Sit interuallum $GZ = b$ ac primo quidem modus progressiuus perinde afficietur, ac si haec vis $ZX = P$ in ipso centro grauitatis esset applicata; quae ergo motum retardabit. Hinc cum massa corporis sit $= M$, per leges sollicitationis est:

$$\frac{2d.(a-s)d\Phi}{dt^2} = \frac{-P}{M} \text{ posito } dt \text{ constante.}$$

Deinde cum huius vis P momentum sit respectu motus gyratorii $= Pb$, et momentum inertiae corporis $= Mkk$ erit retardatio motus gyratorii:

$$\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}.$$

§. 15. Hoc modo vterque corporis motus afficeretur, si corpus esset liberum, et ad omnes motus recipiendos aeque comparatum. Cum autem ob suspensionis rationem motus gyratorius perpetuo datam teneat rationem ad motum progressiuum, hinc punctum Z definietur, in quo vim P applicari oporteat, vt vtrique motui conueniens immutatio simul inducatur. Positionem vero huius puncti Z binae ante inuentae formulae sponte indicant: cum enim ex iis haec nascatur analogia:

$$dd\Phi : d(a-s)d\Phi = b : kk$$

erit $b = \frac{kkdd\Phi}{d.(a-s)d\Phi} = \frac{kkdd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$.

Vnde

Vnde patet punctum hoc Z non incidere in centrum oscillationis H, quod puncto suspensionis M conueniat. Est enim $GH = \frac{kk}{a-s}$; cui quidem aequale foret interuallum $b = GZ$, si foret $ds = 0$, hoc est si punctum suspensionis M non esset variabile. Ob eius igitur variabilitatem interuallum GZ maius erit quam GH.

§. 16. Inuento hoc puncto Z, in quo vis applicata motum ad suspensionis penduli rationem accommodatum gignit, vim istam P ita definiamus, vt sollicitationi grauitatis aequi polleat; vt motum penduli a grauitate oriundum obtineamus. Vis grauitatis autem aequalis est ponderi penduli $= M$, eiusque directio per ipsum centrum grauitatis G deorsum tendit. Repraesentet ergo recta verticalis GV hanc vim, quae sit $= M$; atque nihil aliud supererit, nisi vt vis illius P momentum respectu puncti suspensionis M aequale reddatur momento vis grauitatis. Ob angulum itaque $VGF = \Phi$ erit $M.MG.\,\text{sin.}\,\Phi = P.MZ$ seu $P = \frac{M(a-s)\,\text{sin.}\,\Phi}{a-s+b}$; cum autem sit $b = \frac{kkdd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$ erit

$$a-s+b = \frac{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$$

ideoque $P = \frac{M((a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi)\,\text{sin.}\,\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdd\Phi}$,

et $Pb = \frac{Mkk(a-s)dd\Phi\,\text{sin.}\,\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdd\Phi}$.

§. 17. Quoniam igitur pro motu penduli supra altera aequatio inuenta est: $\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}$, si loco Pb valorem modo repertum substituamus, proueniet haec aequatio:

$2\,dd\,\Phi$

$$\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-(a-s)dd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi-(a-s)dsd\Phi+kkdd\Phi}$$

quae transformabitur in hanc:

$$2(a-s)^2 dd\Phi - 2(a-s)dsd\Phi + 2kkdd\Phi = -(a-s)dt^2\ \text{fin.}\ \Phi$$

qua motus penduli a grauitate perturbatus, ideoque ipſe motus oſcillatorius determinabitur. Quia vero in hac aequatione differentiale dt ponitur conſtans, ea per $d\Phi$ multiplicetur, atque integretur, ſic prodibit:

$$(a-s)^2 d\Phi^2 + kkd\Phi^2 = (dt^2 - dt^2 \int (a-s)d\Phi\ \text{fin.}\ \Phi$$

vbi quia curua directrix A M B tanquam data aſſumitur integrale $\int (a-s)d\Phi$ ſin. Φ ob relationem inter s et Φ datam exhiberi poterit: ita autem id accepi, ponamus, vt euaneſcat poſito $s = 0$, quo caſu etiam ſit $\Phi = 0$; eritque

$$dt = \frac{d\Phi\sqrt{(kk+(a-s)^2)}}{\sqrt{(C-\int (a-s)d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi)}}.$$

§. 18. Cum ſit altitudo celeritati debita $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$ erit nunc $v = \frac{(a-s)^2 (c-\int (a-s)d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi)}{kk+(a-s)^2}$; quae expreſſio ad ſtatum initialem in ſitu penduli verticali A C D transferatur, vbi ſit $s = 0$; et $\int (a-s)d\Phi$ ſin. $\Phi = 0$. Quare cum hoc ſtatu ſit $v = b$, erit $b = \frac{aac}{kk+aa}$, vnde loco conſtantis c celeritas initialis $\sqrt{b}$ in calculum introduci poterit. Sit D centrum oſcillationis penduli in ſitu verticali, erit ob $AC = a$, $CD = \frac{kk}{a}$ ideoque $AD = \frac{aa+kk}{a}$, quo valore ſubſtituto habebitur $b = \frac{AC.c}{AD}$. Quod ſi porro curuae deſcriptae C G ponatur abſciſſa $CQ = x$, ob $Gg = (a-s)d\Phi$, et rectam G M ad curuam C G normalem erit ſin. GMS $=$ ſin. $\Phi = \frac{dx}{Gg} = \frac{dx}{(a-s)d\Phi}$; ideoque $dx = (a-s)d\Phi$ ſin. Φ et et $\int(a-s)d\Phi$ fin. $\Phi = x = CQ$. Hinc ergo erit $v = \frac{(a-s)^2(c-x)}{kk+(a-s)^2}$; et ob $MG = a-s$; $GH = \frac{kk}{a-s}$ altitudo celeritati debita v ita exprimetur, vt fit $v = \frac{MG(c-x)}{MH}$.

§. 19. Confideremus curuam defcriptam CG tamquam datam, quoniam ex ea curua directrix AMB definitur et contra; fitque pofita eius abfciffa verticali $CQ = x$, arcus iam defcriptus $CG = z$, et radius ofculi $GM = r$, erit $a-s = r$; et $\frac{dz}{r} = d\Phi$; hinc ergo fit primo altitudo celeritati centri grauitatis in G debita $v = \frac{rr(c-x)}{kk+rr}$, vnde patet, pendulum eo vsque effe afcenfurum, donec fiat $x = c$. Deinde vero elementum temporis dt ita exprimetur, vt fit:

$$dt = \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$$

cuius integrale debite fumtum indicabit tempus, quo pendulum per arcum indefinitum $CG = z$ ad altitudinem indefinitam $CQ = x$ afcendit. Quodfi ergo in hac expreffione ponatur $x = c$, habebitur tempus totius afcenfus, cui cum tempus fequentis defcenfus, ob defectum refiftentiae aequale fit, pendulumque ex altera parte per fimilem curuam incedat, erit tempus vnius ofcillationis $= 2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$, fiquidem poft integrationem ponatur $x = c$.

§. 20. Quando ergo in hac expreffione, poftquam factum eft $x = c$, quantitas c relinquitur, duratio cuiusque ofcillationis ab amplitudine arcus ea defcripti pendebit, neque propterea omnes ofcillationes fiue fint maiores, fiue minores aequalibus temporibus abfoluentur. Quo igitur omnes ofcillationes fiant ifochronae, expreffionem

 inuen-

inuentam $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ita comparatam esse oportet, vt posito post integrationem $x=c$, quantitas c ex ea penitus discedat, idemque constanter eius integralis valor resultet, quaecunque magnitudo litterae c tribuatur. Ex hac igitur affectione, si conueniens relatio inter z et x definiatur, vt ante memorata proprietas locum inueniat; cognoscetur natura illius curuae C G, secundum quam, si pendulum moueatur, id omnes oscillationes aequalibus temporibus sit peracturum.

§. 21. Quo igitur facilius huius curuae C G, qua cuiusque penduli compositi tautochronismus continetur, naturam inuestigemus, primo pendulum simplex contemplemur, cuius tota massa in puncto G sit collecta. Quoniam ergo corpus extra hoc punctum G nullas habet partes erit, $kk=0$, ac propterea tempus vnius oscillationis erit $=2\int\frac{dz}{\sqrt{(c-x)}}$: cuius valor a c non pendebit, si fuerit $dz=\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{x}}$; et $z=2\sqrt{fx}$; quae est aequatio pro cycloide. Eius autem radius osculi in imo puncto C, quia sub normali aequatur, erit $=\frac{zdz}{dx}=2f$, qui cum ipsi A C $=a$ aequalis esse debeat, fiet $f=\frac{1}{2}a$; seu f aequabitur semissi penduli simplicis isochroni, quod quidem suas oscillationes minimas perficiat. Hanc autem elegantissimam cycloidis proprietatem *Hugenius* elicuit, aliique Geometrae deinceps variis demonstrationibus confirmaverunt.

§. 22. Vt ergo formula pro quocunque pendulo composito inuenta $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ad tautochronismum accomcommodetur, necesse est, vt ea induat hanc formam $2\int \frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{(c-x)x}}$, sic enim posito post integrationem $x = c$, littera c ex calculo egredietur, atque singulae oscillationes aequi diurnae erunt oscillationibus minimis penduli simplicis, cuius longitudo sit $= f$. Quodsi vero formula inuenta $2\int \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ cum hac $2\int \frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{x(c-x)}}$ conferatur, sequens prodibit aequatio:

$$\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2x}} \text{ seu } \sqrt{2fx} = \int \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r}.$$

Haec ergo aequatio exprimit naturam curuae C G tautochronae pro quocunque pendulo composito, quam non parum a cycloide discrepare, per se satis est manifestum.

§. 23. Quaeramus huius curuae radium osculi in puncto C, quoniam is esse debet $= AC = a$. Fiet ergo hoc loco $r = a$ ac propterea $\sqrt{2fx} = \frac{z\sqrt{(aa+kk)}}{a}$; vnde erit $zz = \frac{2aafx}{aa+kk}$. Cum igitur in puncto C radius osculi aequalis sit subnormali $\frac{zdz}{dx} = \frac{aaf}{aa+kk}$, necesse est, vt sit $\frac{aaf}{aa+kk} = a$, ideoque $f = a + \frac{kk}{a}$. Aequabitur ergo longitudo penduli simplicis isochroni f longitudini $AD = a + \frac{kk}{a}$: quod quidem per se est perspicuum, cum penduli huius compositi minimae oscillationes, quibus maiores, quaeque sunt isochronae, fiant in arcubus circularibus radio A C descriptis, ac proinde non secus se habeant, ac si tota corporis massa in centro oscillationis D esset collecta: ita vt ipsa longitudo A D exhibeat longitudinem penduli simplicis isochroni.

§. 24. Aequatio autem pro curua tautochrona inventa: $\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{s}}{\sqrt{2x}} = \frac{dx\sqrt{(kk+2a)}}{\sqrt{2ax}}$ constructu est difficillima, neque variabiles vllo modo a se inuicem separare licet. Quamuis enim radius osculi r per binas reliquas variabiles x et z definiri queat, (erit enim, si applicata QG $= y$ ponatur, $r = \frac{-dz^3}{dxddy} = \frac{-dydz^2}{dxddz}$, posito dx constante, vel $r = \frac{dzdy}{ddx}$ posito dz constante, et $dy = \sqrt{(dz^2 - dx^2)}$); tamen hinc aequatio tantopere perturbaretur, vt nihil prorsus ex ea concludi posset. Sin autem ex ea vel x vel z exterminetur, in multo maiores tricas delaberemur. Cum igitur pro pendulo simplici constructio curuae tautochronae sit facillima, pro pendulo composito tantis laborat difficultatibus, vt eas nullo etiam nunc pacto superare potuerim.

§. 25. Si quidem loco quantitatum x et z introducatur angulus variabilis Φ, non solum aequatio ad duas variabiles reducetur, sed etiam a differentialibus secundi gradus liberabitur; neque tamen ad separationem variabilium pertingere licet. Cum enim sit $d\Phi = \frac{dz}{r}$, erit $dz = r\,d\Phi$, et $dx = (a - s)\,d\Phi$ sin. $\Phi = rd\Phi$ sin. Φ, hincque $x = \int r\,d\Phi$ sin. Φ. Substituantur hi valores pro dz et dx in aequatione inuenta, prodibitque.

$$\sqrt{(kk+rr)} = \frac{r\,\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(kk+aa)}}{\sqrt{2ax}}$$

vnde fit $2ax = \frac{(aa+kk)rr\,\text{sin.}\,\Phi^2}{kk+rr}$: quae differentiata dabit:

$adx =$

$$adx = \frac{(aa+kk)rrd\Phi \sin.\Phi \cos.\Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)k^2 rdr \sin.\Phi^2}{(kk+ar)^2}$$

Hic si pro dx valor $rd\Phi$ sin. Φ substituatur, orietur

$$ad\Phi = \frac{(aa+kk)rd\Phi \cos.\Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)kkdr \sin.\Phi}{(kk+rr)^2}.$$

§. 26. Quamquam haec aequatio ad constructionis rationem aeque parum ac preecedens redigi potest, tamen aequatio $2ax = \frac{(aa+kk)rr \sin.\Phi^2}{kk+rr}$ insignem continet proprietatem, qua curua ista tautochrona CG determinari potest. Si enim in hac tautochrona CG ducantur radii osculi CA et GM, ille quidem in puncto imo C, hic vero in puncto quocunque G, atque pro punctis suspensionis A et M centra oscillationis notentur D et H, tum vero insuper ducantur horizontalis GQ et verticalis MS; quoniam erit $AC = a$; $AD = a + \frac{kk}{r}$; $CQ = x$; $MG = r$; $MH = r + \frac{kk}{r}$, et $GS = r$ sin. Φ erit:

$$2\,CQ = \frac{AD.\,GS^2}{MG.\,MH}.$$

Ducatur porro ex S recta ST in GM normalis, erit $2\,CQ = \frac{AD.\,GT}{MH}$ seu $AD : MH = 2\,CQ : GT$, vel $AD : 2\,CQ = MH : GT$. Qua concinna proprietate natura curuae tautochronae CG exponitur.

§. 27. Vt tamen non nullum fructum ex hac aequatione percipiamus, accommodemus eam ad eiusmodi pendula, in quibus quantitas kk sit tam parua, vt prae reliquis quantitatibus, cum quibus comparatur, fere euanescat. Huiusmodi autem casus existet, si corpus penduli praecipuum EF sit valde ponderosum simulque mini-

 mum,

mum, ac praeterea oscillationes ampliores excludantur. Tum enim quo longius sumatur tale pendulum, eo minorem obtinebit valorem quantitas $k\,k$, respectu quantitatum $a\,a$ et $r\,r$. Quod cum euenit, si aequationis inuentae integrale per seriem exprimatur, cuius termini secundum potestates ipsius $k\,k$ progrediantur, sufficiet huius seriei duos vel tres terminos initiales accepisse, cum sequentes ob altiores ipsius $k\,k$ potestates sine errore praetermitti queant.

§. 28. Aequationem ergo quoque differentialem inuentam secundum potestates ipsius $k\,k$ disponamus, quae induet hanc formam:

$$\begin{aligned}
&+ar^4d\Phi+2akkrrd\Phi+ak^4d\Phi\\
&-aar^3d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi-a^2k^2rd\Phi\,\text{cos.}\,\Phi-k^4rd\Phi\,\text{cos.}\,\Phi=0\\
&\qquad\qquad-kkr^3d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi-k^4dr\,\text{sin.}\,\Phi\\
&\qquad\qquad-aakkdr\,\text{sin.}\,\Phi
\end{aligned}$$

ex qua, si $k\,k$ euanesceret, foret $r=a\,\text{cos.}\,\Phi$; ponamus ergo ad valorem ipsius r veriorem inueniendum:

$$r=a\,\text{cos.}\,\Phi+k^2\,\mathrm{P}+k^4\mathrm{Q}+\text{etc. erit}$$

$$dr=-ad\Phi\,\text{sin.}\,\Phi+k^2d\mathrm{P}+k^4d\mathrm{Q}+\text{etc. atque}$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= a^2\,\text{cos.}\,\Phi^2+2ak^2\mathrm{P}\,\text{cos.}\,\Phi+2ak^4\mathrm{Q}\,\text{cos.}\,\Phi+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad+k^4\mathrm{PP}\\
r^3 &= a^3\,\text{cos.}\,\Phi^3+3a^2k^2\mathrm{P}\,\text{cos.}\,\Phi^2+3a^2k^4\mathrm{Q}\,\text{cos.}\,\Phi^2+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad+3ak^4\mathrm{P}^2\,\text{cos.}\,\Phi\\
r^4 &= a^4\,\text{cos.}\,\Phi^4+4a^3k^2\mathrm{P}\,\text{cos.}\,\Phi^3+4a^3k^4\mathrm{Q}\,\text{cos.}\,\Phi^3+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad+6a^2k^4\mathrm{P}^2\,\text{cos.}\,\Phi^2
\end{aligned}$$

§. 29.

§. 29. Quodsi iam hi valores in aequatione differentiali substituantur, orietur sequens aequatio:

$$\begin{aligned}&+a^5 d\Phi \cos.\Phi^4 + a^4 k^2 P d\Phi \cos.\Phi^3 + a^4 k^4 Q d\Phi \cos.\Phi^3\\ &-a^5 d\Phi \cos.\Phi^4 + a^3 k^2 d\Phi \cos.\Phi^2 + 3 a^3 k^4 P^2 d\Phi \cos.\Phi^2\\ &\qquad -a^3 k^2 d\Phi \cos.\Phi^4 + 3 a^2 k^4 P d\Phi \cos.\Phi\\ &\qquad +a^3 k^2 d\Phi \sin.\Phi^2 - 3 a^2 k^4 P d\Phi \cos.\Phi^3 = 0\\ &\qquad\qquad - a^2 k^4 dP \sin.\Phi\\ &\qquad\qquad + a k^4 d\Phi\\ &\qquad\qquad - a k^4 d\Phi \cos.\Phi^2\\ &\qquad\qquad + a k^4 d\Phi \sin.\Phi^2\end{aligned}$$

Hinc termino secundo ad nihilum redacto fiet:

$$a P \cos.\Phi^3 + \cos.\Phi^2 - \cos.\Phi^4 + \sin.\Phi^2 = 0$$

ideoque $P = \frac{-1+\cos.\Phi^4}{a \cos.\Phi^3} = \frac{-1}{a \cos.\Phi^3} + \frac{\cos.\Phi}{a}$: ex quo porro fit $dP = \frac{-3 d\Phi \sin.\Phi}{a \cos.\Phi^4} - \frac{d\Phi \sin.\Phi}{a}$

et $P^2 = \frac{1}{aa \cos.\Phi^6} - \frac{2}{aa \cos.\Phi^2} + \frac{\cos.\Phi^2}{aa}$.

§. 30. Tertius porro terminus ad nihilum redactus dat:

$$a^3 Q \cos.\Phi^3 + 3 a^2 P^2 \cos.\Phi^2 + 3 a P \cos.\Phi - 3 a P \cos.\Phi^3 - a dP \sin.\Phi : d\Phi + 2 \sin \Phi^2 = 0$$

quae aequatio, si loco P^2, P, et dP valores modo inventi substituantur abibit in:

$$a^3 Q \cos.\Phi^3 + \frac{3}{\cos.\Phi^4} - 3 - \frac{3}{\cos.\Phi^2} + 3 \cos.\Phi^2 + 3 \sin.\Phi^2 + \frac{3 \sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^4} = 0$$

seu ob $\sin.\Phi^2 = 1 - \cos.\Phi^2$ habebitur

$$a^3 Q \cos.\Phi^3 + \frac{6}{\cos.\Phi^4} - \frac{6}{\cos.\Phi^2} = 0$$

ideoque $Q = \frac{-6+6 \cos.\Phi^2}{a^3 \cos.\Phi^7} = \frac{-6 \sin.\Phi^2}{a^3 \cos.\Phi^7}$.

Quam

Quam ob rem erit proxime:

$$r = a\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{kk(1 - \text{cof.}\,\Phi^4)}{a\,\text{cof.}\,\Phi^3} - \frac{6k^4\,\text{fin.}\,\Phi^2}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^7}$$

vnde patet in fitu penduli verticali, quo eft $\Phi = 0$; fore $r = a = AC$, vti rei natura poftulat.

§. 31. Pro curua ergo tautochrona CG, quae conveniat corporibus, in quibus quantitas kk valde eft parua, nacti fumus aequationem inter eius radium ofculi $GM = r$, eiusque amplitudinem feu angulum $GMS = \Phi$, ex qua aequatione quantitates conftructioni huius curuae inferuientes fequenti modo definientur. Sit arcus curuae $CG = z$; abfciffa $CQ = x$ et applicata $QG = y$ eritque $dz = r\,d\Phi$; $dx = r\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi$ et $dy = r\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi$. Hinc ergo obtinebitur:

$$z = a\int d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^3} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{\text{cof.}\,\Phi^7}$$

$$x = a\int d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^3} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^3}{\text{cof.}\,\Phi^6}$$

$$y = a\int d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^2} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{\text{cof.}\,\Phi^6}.$$

§. 32. Integralia vero haec ita fe habent, vt fit:

$$\int d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi = \text{fin.}\,\Phi;\ \int d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}\text{fin.}\,\Phi^2;\ \int d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{2}\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^3} = \frac{\text{fin.}\,\Phi}{2\,\text{cof.}\,\Phi^2} + \tfrac{1}{2}l\,\text{tang.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi);\ \int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^3} = \frac{1}{2\,\text{cof.}\,\Phi^2};\ \int\frac{d\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^2} = \frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{\text{cof.}\,\Phi^7} = \frac{\text{fin.}\,\Phi}{6\,\text{cof.}\,\Phi^6} - \frac{\text{fin.}\,\Phi}{24\,\text{cof.}\,\Phi^4} - \frac{\text{fin.}\,\Phi}{16\,\text{cof.}\,\Phi^2} - \tfrac{1}{16}l\,\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$$\int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^3}{\text{cof.}\,\Phi^7} = \frac{1}{6\,\text{cof.}\,\Phi^6} - \frac{1}{4\,\text{cof.}\,\Phi^4};\ \int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{\text{cof.}\,\Phi^6} = \frac{\text{fin.}\,\Phi}{5\,\text{cof.}\,\Phi^5} - \frac{\text{fin.}\,\Phi}{15\,\text{cof.}\,\Phi^3} - \frac{2\,\text{fin.}\,\Phi}{15\,\text{cof.}\,\Phi}.$$

His ergo valoribus fubftitutis habebitur:

$$z = a\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{kk}{a}\,\text{fin.}\,\Phi - \frac{kk\,\text{fin.}\,\Phi}{2a\,\text{cof.}\,\Phi^2} - \frac{kk}{2a}\,l\,\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$
$$-\frac{k^4\,\text{fin.}\,\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^6} + \frac{k^4\,\text{fin.}\,\Phi}{4a^3\,\text{cof.}\,\Phi^4} + \frac{3k^4\,\text{fin.}\,\Phi}{8a^3\,\text{cof.}\,\Phi^2} + \frac{3k^4}{8a^3}\,l\,\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$x =$

$$x = \tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\,\Phi^2 + \tfrac{kk}{2a}\,\text{fin.}\,\Phi^2 + \tfrac{kk}{2a} - \frac{kk}{2a\,\text{cof.}\,\Phi^2} - \frac{k^4}{2a^3} - \frac{k^4}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^6} + \frac{3k^4}{2a^3\,\text{cof.}\,\Phi^4}$$

$$y = \tfrac{1}{2}a\Phi + \tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi + \tfrac{kk}{2a}\,\Phi + \tfrac{kk}{2a}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{kk\,\text{fin.}\,\Phi}{a\,\text{cof.}\,\Phi}$$
$$- \frac{6k^4\,\text{fin.}\,\Phi}{5a^3\,\text{cof.}\,\Phi^5} + \frac{2k^4\,\text{fin.}\,\Phi}{5a^3\,\text{cof.}\,\Phi^3} + \frac{4k^4\,\text{fin.}\,\Phi}{5a^3\,\text{cof.}\,\Phi}$$

vnde pro quouis angulo Φ coordinatae curuae tautochronae x et y aſſignari, ideoque ipſa curua quaeſita C G conſtrui poterit.

§. 33. Ad vſum autem pendulorum expediet huius curuae euolutam, ſeu ipſam curuam directricem A M B conſtruere; quo igitur hanc curuam A M B, quae pendulo motum tautochronum conciliat, definiamus, poſito eius arcu quocunque A M $= s$, ſit abſciſſa A P $= p$, et applicata P M $= q$; erit $s = a - r$; $dp = ds\,\text{cof.}\,\Phi$ et $dq = ds\,\text{fin.}\,\Phi$, ideoque $p = \int ds\,\text{cof.}\,\Phi$ et $q = \int ds\,\text{fin.}\,\Phi$. Ex ſuperioribus ergo habebitur:

$$s = a - a\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{kk\,\text{cof.}\,\Phi}{a} + \frac{kk}{a\,\text{cof.}\,\Phi^3} - \frac{6k^4}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^5} + \frac{6k^4}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^7}$$

vnde fit:

$$ds = ad\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{kkd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{a} + \frac{3kkd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{a\,\text{cof.}\,\Phi^4} - \frac{30k^4d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^6} + \frac{42k^4d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^8},$$

hincque porro:

$$dp = ad\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{kkd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{a} + \frac{3kkd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{a\,\text{cof.}\,\Phi^3} - \frac{30k^4d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^5} + \frac{42k^4d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^7}$$

$$dq = ad\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2 + \frac{kkd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{a} - \frac{3kkd\Phi}{a\,\text{cof.}\,\Phi^2} + \frac{3kkd\Phi}{a\,\text{cof.}\,\Phi^4} + \frac{30k^4d\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^4} - \frac{72k^4d\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^6} + \frac{42k^4d\Phi}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^8}$$

§. 34. Quodſi iam hae formulae debite integrentur, primo quidem reperietur abſciſſa

$$p = \tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\,\Phi^2 + \frac{kk\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2a} - \frac{3kk}{2a} + \frac{3kk}{2a\,\text{cof.}\,\Phi^2} - \frac{15k^4}{2a^3\,\text{cof.}\,\Phi^4} + \frac{7k^4}{a^3\,\text{cof.}\,\Phi^6} + \frac{k^4}{2a^3}$$

Deinde cum ſit $\int d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^2} = \frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}; \int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^4} = \frac{\sin.\Phi}{3\cos.\Phi^3} + \frac{2\sin.\Phi}{3\cos.\Phi};$$
$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^6} = \frac{\sin.\Phi}{5\cos.\Phi^5} + \frac{4\sin.\Phi}{15\cos.\Phi^3} + \frac{8\sin.\Phi}{15\cos.\Phi}$$
$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^8} = \frac{\sin.\Phi}{7\cos.\Phi^7} + \frac{6\sin.\Phi}{35\cos.\Phi^5} + \frac{8\sin.\Phi}{35\cos.\Phi^3} + \frac{16\sin.\Phi}{35\cos.\Phi}$$

obtinebitur:

$$q = \tfrac{1}{2}a\Phi - \tfrac{1}{2}a\sin.\Phi\cos.\Phi + \frac{kk\Phi}{2a} - \frac{kk\sin.\Phi\cos.\Phi}{2a} - \frac{kk\sin.\Phi}{a\cos.\Phi} + \frac{kk\sin.\Phi}{a\cos.\Phi^3}$$
$$+ \frac{k^4\sin.\Phi}{a^3\cos.\Phi}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5\cos.\Phi^2} - \frac{36}{5\cos.\Phi^4} + \frac{6}{\cos.\Phi^6}\right).$$

Cum igitur ambae coordinatae p et q, ex dato angulo Φ qui curuae quoque A M amplitudinem metitur, determinari queant, curua quaesita A M B non difficulter construetur.

PHYSICO-

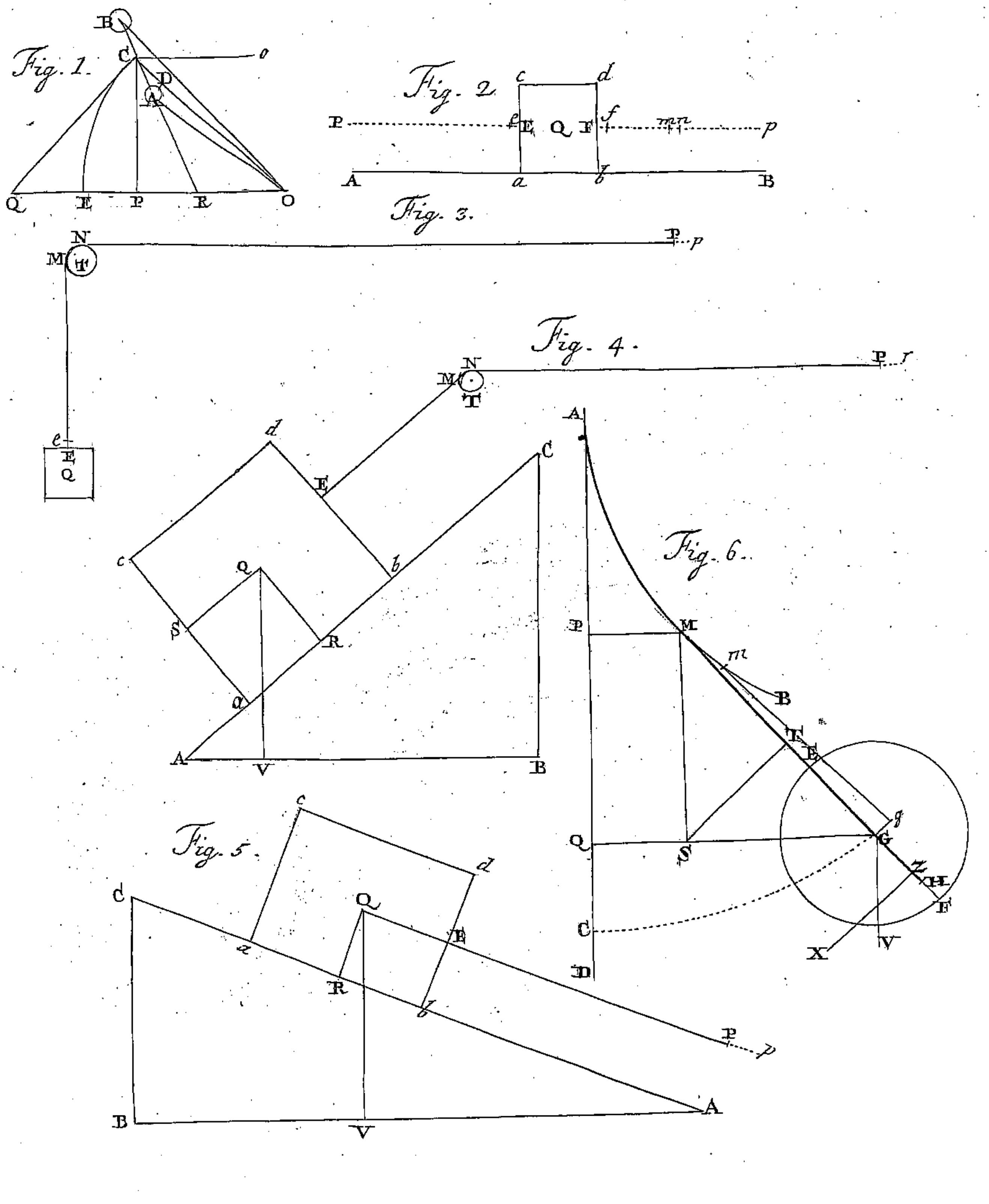
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.