1753

De machinis in genere

Leonhard Euler

DE MACHINIS IN GENERE.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Cum disciplinae Mathematicae semper ob certitudinem et perspicuitatem, qua reliquis artibus longe antecellunt, magni sint aestimatae et collaudatae, tum imprimis propter summam vtilitatem, quam ad commune vitae commodum afferre videntur, omni honore, studiisque hominum dignissimae sunt habitae. Quem ad modum enim vix vllum vitae genus Arithmetica carere potest, neque pauca Geometriae cognitionem requirunt, atque Astronomia ad vitam commode instituendam plurima adminicula suppeditat; ita Mechanicae vsus latissime patet, cum pleraeque artes ope Machinarum, quarum inuentio et perfectio Mechanicae debetur, absoluuntur. Quos insignes vsus cum sola Mathesis elementaris, quae iam a longo tempore est inuenta et pertractata, praestare putetur, non leues inde obiectiones contra vtilitatem Matheseos subtilioris, quae hoc imprimis seculo excoli est coepta, opponi solent; quod ab vsu populari abhorreat, nimisque sit ardua, quam vt vllum ex ea commodum in commune bonum redundare possit.

§. 2. Quamquam autem incrementa Astronomiae aliarumque Matheseos partium, quae recentiori Analysi sublimiori dictae accepta sunt referenda, eam ab istis obiectionibus

nibus iam ſatis ſuperque vindicare videntur; tamen ipſa Mechanica vulgaris, quae in Machinis inſtruendis et explicandis verſatur, ſummam Analyſeos non ſolum vtilitatem, ſed etiam neceſſitatem, clariſſime euincit. Quaecunque enim in Mechanica de natura et vſu Machinarum tradi ſolent, tam ſunt imperfecta, et plerumque omni fundamento deſtituta, vt maxime mirandum ſit, communem opinionem de eius eximio vſu tamdiu ſuſtentari potuiſſe: hic autem defectus nulli alii cauſae, niſi ignorationi Analyſeos ſublimioris, adſcribi poteſt, quippe cuius adminiculo demum cognitio Machinarum perfici, atque ad exoptatum vſum in vita communi accommodari queat.

§. 3. Maxime autem vulgarem Mechanicae doctrinam de Machinis eſſe imperfectam, iam pridem non obſcure, qui in Machinis elaborandis ſunt occupati, animaduerterunt. Quantumuis enim nouae cuiuspiam Machinae ſtructura principiis Mechanicae conformis videatur, tamen de eius effectu vix quicquam ante polliceri licet, quam experientiae approbatio acceſſerit: et, quamquam ſaepe ii, qui multum operae ſtudiique in Machinis conſtruendis conſumſerunt, tantam ſagacitatem longo vſu ſint adepti, vt de effectu earum certo pronunciare auſint, antequam experientiam conſuluerint, tamen tantum abeſt, vt hoc ſcientiae ipſorum Theoreticae tribui poſſit, vt potius ſoli experientiae adſcribi debeat. Hinc qui ſolis regulis, quae vulgo in Mechanicae elementis tradi ſolent, imbutus ad Machinarum fabricam ſe accingit, de earum ſucceſſu vel nihil praedicere valebit, vel ſpe concepta ſaepiſſime fruſtrabitur. Ex quibus clariſſime perſpicitur, cognitionem Machinarum vulgarem, qualis in Mechanicae elementis ex-

exponitur, maxime esse mancam, nihilque minus quam Theoriae nomen mereri.

§. 4. Cum autem ii, qui nihilominus cognitionem Machinarum Theoreticam profitentur, eamque aduersus obiectiones practicorum defendere sustinent, hunc defectum ac perpetuum fere ab experientia dissensum tollere nequeant, omnem culpam in frictionem transferre solent; hacque sola effici, vt Machina alioquin secundum praecepta Mechanicae diligentissime instructa saepe numero sperato effectu excidat. Quamquam autem frictio actionem Machinarum non mediocriter perturbat, tamen immerito omnis culpa in eam rransfertur. Cognitio enim Machinarum, quae vulgo ab his hominibus ostentatur, tam est imperfecta, vt etiamsi nulla omnino frictio adesset, tamen nihil quicquam de effectu Machinarum accurate definiri posset. Hunc igitur summum Mechanicae vulgaris defectum hic diligentius expendere, et quem ad modum per solam Analysin sublimiorem tolli possit, vberius explicare constitui; cum vt insignem huius nouae Matheseos partis vtilitatem, quae vulgo in dubium vocari solet, luculenter ob oculos ponam, tum vero imprimis, vt doctrinam ipsam de Machinis pro viribus perfectiorem reddam.

§. 5. Primum igitur vniuersa de Machinis doctrina vulgo principiis aequilibrii superstrui solet: quibus magnitudo ac directio virium determinatur, quae obiecto cuicunque applicatae in aequilibrio consistunt. Hinc proposita quaecunque Machina, in Mechanica vulgari nihil aliud inuestigatur, praeter rationem vis sollicitantis ad onus superandum; quae ad statum aequilibrii requiritur: ita si vis alteri vectis termino, pondus vero alteri sit applicatum

tum, demonſtratum eſt ad aequilibrium obtinendum, vim ad pondus rationem reciprocam diſtantiarum ab hypomochlio tenere oportere In Machinis autem vtcunque compoſitis ex iisdem principiis proportio inter vires ſollicitantes et onera ſuperanda, qua aequilibrium efficitur, non difficulter definitur; hacque determinatione tota Machinarum tractatio abſolui ſolet. Altum vero vbique deprehenditur ſilentium de motu, qui ſublato ſtatu aequilibrii ſit in ſecuturus, niſi quod generatim notetur, ſi vis ſollicitans maior fuerit, quam effectio aequilibrii exigat, onus promotum iri, ſi quidem vis frictioni ſimul ſuperandae par ſit.

§. 6. Tum vero etiam ex indole et proportione partium Machinae definiri poteſt, ſi potentia ſeu vis, ſiue trahens ſiue pellens, data celeritate progrediatur, quanta celeritate ipſum onus promoueatur. Quam enim rationem inter potentiam et onus ſtatus aequilibrii poſtulat, eadem ratio, ſed inuerſa, inter celeritatem potentiae et oneris intercedit, vndecunque motus ſit profectus. Hinc notus ille Mechanicae canon originem habet, quo promotio oneris eo tardior eſſe affirmatur, quo minor potentia ad aequilibrium requiratur, ſi quidem potentia data celeritate progrediatur. Quae regula, niſi longius, quam par eſt, extendatur in diſpoſitione Machinarum ſaepe eximium habet vſum, ſed nihil prorſus confert ad ipſum motum, qui ſublato ſtatu aequilibrii re uera ſubſequitur, definiendum. Cum igitur omnes Machinae ad motum deſtinentur, nullaque conſtrui ſoleat, quae in ſtatu aequilibrii effectum deſideratum praeſtet; manifeſtum eſt, actionem et effectum Machinarum nullo modo ex memoratis Mechanicae principiis

cipiis explicari ac definiri posse: satis enim constat, ad motum determinandum principia aequilibrii minime sufficere, sed praeterea cognitionem legum motus requiri, quae sine analysi sublimiori neque tradi neque ad vsum applicari possunt.

§. 7. Cum autem pono, si status aequilibrii cuiuspiam Machinae spectatur, relatio inter vim potentiae protrahentem, et vim oneris contrariam, qua Machinam in plagam oppositam mouere conatur, determinetur, manifestum est, plurimas Machinas ne hanc quidem determinationem admittere. Si enim onus ope Machinae horizontaliter sit promouendum, nullam vnquam viri ad Machinam repellendam exercet, quemadmodum euenit, si pondus perpendiculariter eleuari debeat; isto igitur casu vel minima vis, dummodo frictioni superandae sufficiat, onus promouere valebit, maior autem motum celeriorem producet, quam minor, neque idcirco statui aequilibrii vllus locus relinquitur. Hoc idem euenit in horologiis, molendinis, aliisque huius generis Machinis, in quibus nulla cuiusquam ponderis eleuatio intenditur, sed omnis effectus in solo Machinae motu producendo consumitur. De hoc ergo Machinarum genere nihil est, quod in vulgari Mechanica tradi queat, praeter meram ac nudam partium descriptionem et coagmentationem; cum tamen in praxi multo amplior et accuratior cognitio requiratur.

§. 8. Si enim ad certum quemdam effectum producendum Machina proponitur, parum quidem refert nosse, quanta vi ad aequilibrium conseruandum opus sit, si quidem Machina ad id genus pertineat, in quo status aequilibrii datur; sed vel maxime interest nosse, quanta celerita-

celeritate desideratus effectus a qualibet vi Machinae istius ope edatur; vt si forte effectus nimium fuerit lentus, vel scopo non conformis, Machina repudiari possit, antequam per experientiam inepta fuerit deprehensa. Huiusmodi accurata motus a data vi oriundi determinatio etiam maxime necessaria est, si plures Machinae ad eundem finem obtinendum proponuntur, quo ea, quae promtissimum, vel intentioni maxime conuenientem effectum producat, reliquis anteferri queat. Quin etiam Theoriam eousque perfici conueniet, vt proposito quocunque opere absoluendo, inter omnes omnino Machinas, quae ad id exsequendum excogitari queant, ea potissimum assignari possit, quae hoc opus vel breuissimo tempore, vel minimo virium dispendio, vel alio modo, qui maxime idoneus videatur, peragere valeat.

§. 9. Momentum harum quaestionum vnico eoque facili exemplo docuisse sufficiat. Ponamus onus mille librarum verticaliter eleuari debere a vi, quae valeat 100 libras, ad hocque opus nos vti velle axe in peritrochio. Primum quidem perspicuum est, si radiorum alter decies longior assumatur altero, vim cum onere in aequilibrio fore constitutum, nullumque motum sequi. Quo igitur onus eleuetur, necesse est, vt radius maior plus quam decies longior altero statuatur; facile quoque est praeuidere, si is vndecies tantum longior capiatur, lentiorem motum esse insecuturum, quam si duodecies longior caperetur: neque quisquam dubitabit, si maior radius vel tredecies, vel decies quater, vel vltra longior caperetur, motum adhuc celeriorem esse proditurum. Deinde vero pariter non est dubium, quin si maior radius millies, vel decies millies, longior efficeretur altero, motum iterum tardiorem productum iri. Crescet

 ergo

ergo celeritas eleuationis ad certum vsque longitudinis terminum, quem si transgrediatur, iterum decrescat. Merito ergo quaestio instituitur, quoties radium alterum longiorem altero constitui oporteat, vt onus citissime eleuetur.

§. 10. Quantopere autem haec aliaeque huius generis quaestiones, quae ad veram Machinarum Theoriam omnino ita pertinent, vt nisi eae resolui queant, Theoria maxime imperfecta censeri debeat, communis Mechanicae limites transgrediantur, quilibet, qui vel allatum leue exemplum attentius perpenderit, facile agnoscet. Nihil enim prorsus in omnibus libris, qui gloriosum Theoriae Machinarum titulum prae se ferunt, inueniet, quo isti quaestioni vllo modo satisfacere posset. Magis ergo ardua est haec quaestio, et cum vulgaria Mechanicae praecepta huc nihil conferant, ad Mathesin sublimiorem dictam est confugiendum, in qua cum non solum verae motus leges explicentur, sed etiam ad quosuis casus, quibus motus producitur, ope calculi infinitorum accommodentur; ea sola veros nobis aperiet fontes, ex quibus solutionem huiusmodi quaestionum haurire liceat. Quod quo facilius fieri possit, praecipua ante momenta, quae in omnibus Machinis occurrunt, diligenter examinari, et quantum singula ad motum cum promouendum tum impediendum afferant, sedulo determinari conueniet. Hac enim tractatione praemissa non difficulter omnis generis Machinae ad calculum reuocari, earumque effectus accurate definiri poterunt.

§. 11. In omni autem Machina tres res sunt considerandae: primo scilicet vis, quae Machinae motum inducit;

ducit; ſecundo ipſa Machina, ſeu eius ſtructura, partiumque, quibus conſtat coagmentatio; ac tertio onus mouendum; quamquam enim in pluribus Machinis nullum onus occurrit, ſed totus Machinae effectus in ipſius motu conſiſtit, tamen haec diuiſio tripartita non impedit, quo minus etiam huius generis Machinae in tractatione comprehendantur: quippe quae exoriuntur, ſi onus mouendum omittatur, vel euaneſcens aſſumatur. Hae porro tres res duplici modo debent perpendi; vel per ſe, vel ratione motus, quem ſingulae ſuſcipiunt. In Machina enim ipſa eius ſtructura probe eſt diſtinguenda a motu, qui ei ſingulisque eius partibus inducitur; propterea quod Machina non ſolum vi in onus transferendae inſeruit, ſed etiam ob motum, quem ipſa accipit, aliquam vis ſollicitantis partem conſumit; hocque ipſo effectum, qui alias produceretur, non parum imminuit.

§. 12. Quod igitur primum ad vires, quibus Machinae impelli ſolent, attinet, earum plurima genera adhibentur, quae omnia enumerare difficile foret; cuiusmodi ſunt pondera, elaſtra, vires humanae et animales, impulſiones aquarum, et venti, ignis, fumus, etc. Circa has autem vires ante omnia attendendum eſt, vtrum indeſinenter agant, an per interualla? an perpetuo aequali vi vrgeant, an modo intendantur, modo remittantur? et quandoque per aliquod interuallum penitus ceſſent. Ad quem caſum referendae ſunt percuſſiones, quarum actio ex regulis colliſionis definiri debet. Quando autem ſine interruptione operantur, earum vera quantitas eſt ſpectanda, quam ſemper per pondus quodpiam exponere licet. Scilicet quacunque vi Machina impellatur, pondus aſſignari ri poterit, quod tantumdem vrgeat et cum menſura ponderum ſit notiſſima loco cuiuslibet vis mente ſubſtituere licebit pondus aequiualens; quod pro natura vis ſollicitantis, vel conſtantis erit quantitatis, vel variabilis. Quin etiam ſi Machina percuſſionibus ad motum incitetur, quovis momento preſſio aequalis ſubſtitui poteſt, ſed plerumque calculus contrahitur, ſi regulae colliſionis in ſubſidium vocentur.

§. 13. Quaecunque autem vis ad Machinam impellendam adhibeatur, ea ſemper cum quadam materia eſt coniuncta, quae ſimul moueri debet; quam inertiam vis ſollicitantis appellabimus. Haec ſi ſolus ſtatus aequilibrii determinatur, omnino non in computum ingreditur, quoniam aequilibrium a ſola quantitate virium impellentium pendet, nihilque intereſt, vtrum inertia adſit an ſecus? ſimulac vero motus generatur, omnis materia, quae motum recipit, attente eſt conſideranda, quippe ad quam mouendam portio quaedam virium impenditur. Quantitas igitur eius materiae, in qua ipſa vis impellens reſidet, ſedulo eſt attendenda, et quantum motum, dum Machina mouetur, ipſa nanciſcatur, definiri debet. Quo plus enim materiae, vel quo maior inertia cum vi ſollicitante fuerit connexa, eo tardior orietur motus. Sic praeter virium varietates ante commemoratas duae res in qualibet vi, qua Machina ad motum concitatur, potiſſimum erant conſiderandae: primo ſcilicet ipſa cuiusque vis quantitas; ac deinde eius inertia: quarum illa per pondus, haec vero per quantitatem materiae, quae pariter ad pondus, reuocari poteſt, menſurari ſolet.

§. 14.

§. 14. In ipſa deinde Machina eius ſtructura, et modus, quo ſingulae partes inter ſe ſunt connexae, perpendi debet: ex quibus, ſi vnius partis vel ſolum puncti motus fuerit cognitus, ſimul omnium reliquarum partium motus innoteſcet. Hinc cum vis ſollicitans Machinae ſit applicata, ſi celeritas ipſius vis fuerit inuenta, ſimul motus ſingularum Machinae partium cognoſcetur. Verum praeterea in motus productione ipſius quantitatis materiae, ex qua Machina componitur, ratio eſt habenda; quam inertiam ipſius Machinae vocabimus. Haec primum ex quantitate materiae ſeu pondere cuiusque partis eſt aeſtimanda; tum vero cum reluctatio inertiae eo magis ſe exerat, quo celerior fuerit motus; ſi diuerſae Machinae partes diuerſis celeritatis gradibus moueantur, haec circumſtantia ſimul in computum eſt ducenda. Scilicet ſi omnes Machinae partes motibus paribus progrediantur, vt nulla adſit motu svarietas, ſufficiet, ipſam materiae quantitatem eiusu epondus noſſe: ſin autem, vt plerumque fit, motus gyratorius circa axem quempiam generetur, tum momentum inertiae reſpectu huius axis computatum, in motus determinationem ingredietur: quae circumſtantia ſaepe actionem Machinarum determinatu difficillimam reddere ſolet.

§. 15. Reſtat ergo onus conſiderandum, quod ope Machinae promoueri debet, niſi forte totus effectus in ſolo Machinae motu conſiſtat. Circa onus autem primo diſpiciendum eſt, vtrum praeditum ſit vi Machinam ſollicitante, vti euenit, ſi pondus eleuari debet, an vero tantum ratione inertiae actioni Machinae reluctetur, velut ſi pondus ſecundum directionem horizontalem ſit protrahendum:

hendum: illam vocabimus oneris vim renitentem, cuius ratio in determinatione ſtatus aequilibrii haberi debet; hanc vero inertiam oneris dicemus, quae in motu demum ſpectanda venit. Ad vim oneris renitentem denique frictio tota, qua tam motus Machinae, quam ipſius oneris impeditur, commode reuocari poteſt. Per experientiam enim conſtat, frictionem eandem exerere effectum, ac ſi maior vis oneris renitens eſſet ſuperanda; quae etſi in quiete Machinae nullam vim inferat, in motu tamen vicem vis motum retardantis ſuſtineat, et quidem conſtantis maneat quantitatis, ſiue motus tardior ſit, ſiue celerior. Quare ſi vnico experimento magnitudo frictionis fuerit explorata, eam tantum vi oneris renitenti addere conueniet, quo pacto calculus Machinarum ob frictionem non amplius perturbabitur.

§. 16. Dum autem motus cuiusque Machinae per calculum determinatur, imprimis neceſſe eſt, vt vires, quibus ſingulae Machinae partes in ſe inuicem agunt, accurate definiantur; quo conſtet, quantam vim cum rotae, tum funes, tum axes, ſuper quibus partes Machinae rotantur, etiam durante motu ſuſtineant. Niſi enim de hoc fuerimus certi, difficile foret partes Machinae vel non nimis imbecilles efficere, vel non nimis robuſtas: quorum prius Machinam prorſus inutilem redderet, ſi quidem vi, quam in actione ſubit, ſuſtinendae par non eſſet. Poſterius vero non parum Machinae officit, ſi enim praeter neceſſitatem nimis robuſta et fortis conſtrueretur, ob maiorem inertiam totus motus retardaretur; huicque incommodo ſola Matheſis ſublimior medelam afferre valet. His igitur, quae ad actionem Machinarum in genere ſpectant, expoſitis, ſingula Machinarum genera ſecundum hoc inſtitutum pertractabo, ac primo quidem a ſimplicioribus exordiar.

II.

II.
DE PROMOTIONE SIMPLICI.

§. 1.

Promotionem simplicem voco, quando onus, vel immediate a potentia promouetur, siue trahendo siue trudendo, vel ope huiusmodi Machinarum simplicium, quibus actio potentiae neque augetur neque imminuitur: quod fit vel funibus nudis vel trochleis, quae circa axes fixos sint mobiles, innixis. His scilicet casibus onus eadem celeritate promouetur, qua ipsa potentia, seu vis mouens, procedit: ita vt per quantum spatium potentia iam processerit, per tantumdem spatium onus sit protractum. Ab hoc autem casu potissimum exordior, cum quia est simplicissimus, eiusque cognitio ad omnis generis Machinas examinandas summopere necessaria, tum vero, quia hic locus maxime idoneus conceditur de frictione tractandi: quae doctrina nondum satis explicata neque ad actionem Machinarum accommodata videtur; praecipue quando frictio ad axem, circa quem pars Machinae est mobilis transfertur.

§. 2. Ponamus ergo primo onus *a b c d* super plano horizontali A B promoueri debere, ad hocque adhiberi potentiam, cuius directio pariter sit horizontalis, et quae onus vel trudendo in puncto E propellat, vel trahendo secundum F *p* protrahat. Transeat autem directio vis siue trudentis P E, siue trahentis F *p* per oneris centrum grauitatis, ne, etiamsi onus liberum esset, in eo vllus alius motus praeter progressiuum horizontalem generetur. Quando enim directio vis vrgentis non Tab. V. Fig. 2.

 per

per centrum grauitatis oneris transit, tum ei praeter motum progressiuum rotationem quamdam imprimere conabitur, qui etsi a firmitate plani A B, cui incumbit, impediatur, tamen appressionem oneris ad hoc planum immutat, cuius cognitio saepe numero non parui est momenti. Sin autem ad hanc appressionem non respiciamus, perinde est, vtrum directio vis sollicitantis per oneris centrum grauitatis transeat, nec ne? dummodo corpori re ipsa nullum motum rotatorium inducat.

§. 3. Ponamus praeterea planum A B esse politissimum, vt onus in motu suo nullam frictionem sentiat, quia effectum frictionis deinde seorsim sum contemplaturus. Hic igitur solum onus et potentia vrgens in computum ingredietur. Sit massa oneris $= Q$, quae eius pondere mensuratur, et qua tantum motui reluctatur, quia ob motum horizontalem nullam vim potentiae contrariam seu renisum exerit. Potentiae vero sollicitantis quantitas sit $= p$, inertia autem, seu quantitas materiae, quae cum potentia est coniuncta, cum eaque simul mouetur, sit $= P$; vbi tam P quam p ponderibus metiri licet. Confecerit tam potentia quam onus motu iam viam seu spatium $= z$: et vtrumque habeat celeritatem, quantam graue ex altitudine v libere cadendo adipisci solet. Cum igitur a vi p quouis momento massa seu inertia $P + Q$ accelerari debeat, ex principiis Mechanicis habebimus hanc aequationem $d v \frac{p dz}{P+Q}$, quae integrata dat $v = \frac{pz}{P+Q}$.

§. 4. Cum igitur celeritas ipsa sit radici quadratae ex altitudine v proportionalis; si enim v in partibus millesimis pedis Rhenani exprimatur, eius radix quadrata $\sqrt{v}$ per 4 diuisa indicabit, quot pedes Rhenanos corpus hac celeritate vniformiter motum singulis minutis secundis

effet

eſſet percurſurum: onus motu vniformiter accelerato promouebitur, niſi quatenus a reſiſtentia aeris impeditur. Si tempus praeterea, quo iam ſpatium z abſoluit, ponatur $= t$. ob $dt = \frac{dz}{\sqrt{v}}$ erit $dt = \frac{dz\sqrt{(P+Q)}}{\sqrt{pz}}$ et $t = \frac{2\sqrt{z(P+Q)}}{\sqrt{p}}$ $= 2\sqrt{\frac{P+Q}{p}.z}$. Quae formula ſi per 250 diuidatur, dum ſpatium z in partibus milleſimis pedis Rhenani exprimitur, indicabit numerum minutorum ſecundorum tempori t conuenientium. Vnde viciſſim ſi tempus t in minutis ſecundis exprimatur, vt ſit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{P+Q}{p}z}$ erit $z = 15625\, tt.\frac{p}{P+Q}$ part. mill. ped. Rhenani; ſeu $z = \frac{15625}{1000}.\frac{p}{P+Q}$ ped. Rhen: ſicque per quantum ſpatium onus dato tempore promoueatur, definiri poterit.

§. 5. Cum autem hic caſus nusquam locum inueniat, ponamus inſuper frictionem accedere, qua fit, vt ſimul atque onus mouetur, vi propellenti perinde reſiſtat, ac ſi quadam vi contra vrgeretur: hocque vi reſiſtente ipſa frictio menſurari ſolet. Prouenit ea vero partim ab aſperitate ſuperficierum ſe in motu fricantium, partim ab appreſſione earum mutua. Quanquam autem videtur quoque a magnitudine ſpatii ab, quo fit contactus, pendere tamen plurimis experimentis ab *Amontono* inſtitutis euictum eſt, magnitudinem contactus nihil ad frictionem conferre, ſed totam ſoli appreſſioni eſſe proportionalem, ſi aſperitas maneat eadem. Atque in plerisque tabulis ligneis modice laeuigatis inuenit frictionem fere tertiae parti eius vis, qua onus ad tabulam apprimatur, eſſe aequalem. Hinc ſi A B eſſet huiusmodi tabula lignea, quoniam appreſſio toti ponderi oneris Q aequatur, frictio foret $= \frac{1}{3}$ Q. Maior autem minorue erit, ſi ſuperficies A B magis minusue aſpera fuerit. Quo igitur determinatio latius pateat, frictionem ponamus $= F$, vbi tenendum eſt, fore $F = \frac{1}{n} Q$, denotante n numerum ſiue maiorem ſiue minorem quam 3.

§. 6. Cum igitur frictio F, dum onus mouetur, vi propellenti p ſit contraria, ea a vi p ſubtrahi debebit, onusque perinde mouebitur, ac ſi ſublata frictione propelleretur a vi $= p - F$. Quare confecto ſpatio z celeritas oneris debita erit altitudini v, ita vt iam ſit $v = \frac{(p-F)z}{P+Q}$: atque tempore t minutorum ſecundorum onus promouebitur per ſpatium tot pedum Rhen: quot vnitates iſta expreſſio $\frac{156\frac{1}{3}}{1000} \cdot \frac{p-F}{P+Q}$ indicabit. Hic igitur ante omnia aduertendum eſt, onus de loco non moueri, niſi ſit $p > F$, hoc eſt, niſi vis pellens p fuerit maior quam frictio F: et quamdiu vis vrgens p ſit minor, onus in quiete perſiſtere. Hic enim non, vti alias in calculo fieri ſolet, valorem ipſius v, caſu quo $p < F$ negatiuum concludere licet; vt motus in contrariam plagam dirigatur: quoniam frictio, etſi vi pellenti eſt contraria, tamen hunc effectum non niſi in motu exerit, atque in quiete penitus ceſſat. Quod notandum eſt, ne per huiusmodi formulas perperam intellectas in errores ſeducamur.

§. 7. Hic igitur ſimpliciſſimus ſe nobis offert modus quantitatem frictionis explorandi per experimenta. Corpore enim quocunque $a\,b\,c\,d$ plano horizontali A B impoſito, ei in directione horizontali F p ope fili ſeu funiculi applicentur ſucceſſiue maiores vires; donec corpus moueri incipiat; quae experimenta commodiſſime inſtituentur, ſi funiculus in p trochleae liberrime mobili imponatur

tur, eique continuo maiora pondera appendantur. Tum enim frictio ei ponderi erit aequalis censenda, a quo corpus primum promoueri inceperit. Hoc autem modo *Amontonus* deprehendit, si asperitas fuerit eadem, frictionem ad pondus corporis perpetuo datam et constantem rationem tenere; neque quantitatem contactus ab quicquam ad frictionem conferre. Ab aliis quidem haec regula deinceps in dubium est vocata, qui pariter experientiae innixi eam falsitatis arguere voluerunt. Verum hi ad frictionem, quae in motu gyratorio cernitur, potissimum respexerunt: quae autem hoc casu longe aliter motui resistit, vti infra docebo, ita vt hinc nulla obiectio firma contra regulam *Amontonianam* peti possit. Interim tamen optandum esset, vt haec experimenta cuncta omni adhibita solertia repetantur; atque nunc quidem ope perfectionis Theoriae ab omnibus dubiis liberentur.

§. 8. Ex formula inuenta $v = \frac{(p-F)z}{P+Q}$ apparet, frictione F non obstante, onus motu vniformiter accelerato promotum iri, si quidem resistentia aeris negligatur. Verum in hac formula assumsimus vim vrgentem p perpetuo eandem quantitatem retinere, siue motus fuerit tardior siue celerior; quem ad modum euenit, si promotio ope ponderis descendentis efficiatur, quippe quod perinde trahere pergit, siue demum descendere incipiat, siue iam celeritatem quamcunque aequisiuerit. Sin autem aliae vires adhibeantur, eae plerumque eo minores euadunt, quo celerius iam ipsae mouentur: quod imprimis in viribus hominum et animalium vsu venit, quae quo celerius iam onus promoueant, eo minores vires ad nouam accelerationem procurandam exerere valent. His ergo casibus littera p erit variabilis, atque a celeritate iam acquisita, seu altitudine ei debita v

 pende-

pendebit, cuius variabilitatis ratio proinde in integratione formulae $d\,v = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$ erit habenda, antequam ipſe motus definiri queat.

§. 9. Ponamus onus Q ab homine ſecundum directionem horizontalem A B progrediente trahi, et cum homo omnibus viribus adhibitis certum celeritatis gradum in currendo ſuperare nequeat, manifeſtum eſt, ſi hunc gradum iam attigent, tum nullam amplius vim ad protractionem oneris impendere poſſe, ſed omnes, quibus pollet, vires ad ſui ipſius motum continuandum conſumi, ex quo euidens eſt, hominem eo minorem vim in onus exerere poſſe, quo celerius iam ipſe progrediatur. Quanquam autem hanc diminutionem accurate definire non liceat, tamen coniectando formulam a vero parum diſcrepantem conſequemur, ſi duobus tantum caſibus ſatisfaciamus. Sit igitur g vis maxima, quam homo quieſcens ad promotionem oneris impendere valeat: b autem ſit altitudo debita celeritati, qua cum ſi homo progrediatur, nullam amplius vim exerere queat. Debebit ergo p, qua littera vis hominis exprimitur, dum iam celeritate altitudini v debita progreditur, eiusmodi eſſe functio ipſius v, vt poſito $v = 0$ fiat $p = g$; ſin autem ponatur $v = b$, vt ſit $p = 0$; his autem conditionibus ſatisfacit formula $p = g - \frac{g\,v}{b}$.

§. 10. Subſtituamus ergo hanc formulam $p = g - \frac{g\,v}{b}$ in aequatione differentiali $d\,v = \frac{(p+F)dz}{P+Q}$, habebimusque $d\,z = \frac{b(P+Q)dv}{gb - gv - bF}$; et integrando $z = \frac{b}{g}(P+Q)\,l\,\frac{b(g-F)}{b(g-F)-gv}$. Perſpicuum autem eſt motum oneris accelerari, quamdiu fuerit $g\,b - g\,v - b\,F > 0$: ſimul ac vero fiat $v = \frac{b(g-F)}{g}$,

accele-

accelerationem cessare, motumque fore vniformem: quem quidem elapso demum tempore infinito assequetur. Verum tamen mox ab initio iam tam prope hunc gradum velocitatis acquiret, vt motus statim appareat vniformis: quod etiam experientia ita confirmat, vt acceleratione initiali penitus neglecta totus motus ex hoc gradu velocitatis aestimari soleat. Onus ergo promouebitur vniformiter celeritate, quae oriatur lapsu ex altitudine $v = \frac{b(g-F)}{g}$: seu ex posita altitudine b in partibus millesimis pedis Rhenani, singulis minutis secundis tot pedes absoluentur, quot vnitates erunt in formula $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{g-F}{g}}, b$.

§. 11. Seu cum b sit altitudo debita celeritati, quam homo libero cursu assequi valeat, $\frac{1}{4} \sqrt{b}$ exprimet spatium in pedibus, quod homo hoc cursu singulis minutis secundis emetiri valeat. Quodsi ergo ponamus hominem summo hoc velocitatis gradu, singulis minutis secundis n pedes absoluere, idem homo onus Q protrahens singulis minutis secundis conficiet spatium $n \sqrt{(1 - \frac{F}{g})}$ pedes. Si duo homines coniunctim trahant, littera n quidem eadem manebit, sed eorum vis, dum quiescunt, erit dupla, sicque celeritas oneris erit $= n \sqrt{(1 - \frac{F}{2g})}$ ped. in minuto secundo. Atque si numerus hominum, qui viribus aequalibus polleant, fuerit $= m$, celeritas oneri impressa erit $= n \sqrt{(1 - \frac{F}{mg})}$ ped. in minuto secundo. Haec eadem sunt tenenda, si onus ab equis aliisue animalibus protrahatur, dummodo pro quouis animalium genere debiti valores pro litteris g et n assumatur.

§. 12. Dum igitur ad hunc summum atque vltimum celeritatis gradum attendimus, quo onus a datis viribus humanis seu animalibus promoueri queat; inertia oneris

oneris Q non amplius in calculum ingreditur, sed tantum frictionis F ratio est habenda; quae igitur quo fuerit minor, eo maiori celeritate onus promouebitur: atque si penitus tolli posset, tum onus non impediret, quominus homines ea ipsa celeritate progrediantur, ac si ab onere essent soluti. Frictione autem reluctante, iste celeritatis gradus oneri induci nequit, nisi hominum numerus in infinitum augeatur. Quo autem onus data quadam celeritate protrahatur, numerum hominum *m* frictioni F proportionalem esse oportet; vnde patet, si frictio reddatur duplo minor, dimidio tantum hominum numero opus esse, et si frictio centuplo minor effici posset, centesimam virium partem eidem motui producendo sufficere. Quae circumstantia in vectione onerum, plaustrorum et tormentorum maxime attendi meretur.

§. 13. Quo vsus huius formulae clarius percipiatur, eam exemplis illustremus. Si igitur onus ab hominibus promoveatur, pro littera *g* accipiendum est pondus, quod homo pauimento firmo insistens sustinere valet; quando scilicet pondus verticaliter suspensum ope funiculi super trochleam in directionem horizontalem reducti secundum hanc directionem trahendo continet. Vis enim hominis mensurari debet pondere, quod tanta vi deorsum tendat, quantam homo secundum directionem horizontalem exerit. Difficile autem est pro *g* determinatum valorem assignare, cum homo modo fortius modo remissius trahat, eiusque vis plurimum a pauimento, cui insistit, pendeat; tum vero etiam actionem non fortiorem assumi conuenit, quam vt homo eam per aliquod tempus exerere valeat. His perpensis pro vi *g* maius pondus non videtur assumi posse quam 70 librarum circiter. Deinde si homo ab omni

omni onere solutus currit, singulis minutis secundis fere 6 pedes conficiet. Quam ob rem in exemplis calculo subiiciendis assumere licebit $g = 70$ libr. et $n = 6$ ped. Frictionem autem oneris Q, nisi imminuatur per singularem Machinae structuram, tertiae parti totius ponderis aequalem assumamus.

§. 14. Si igitur onus Q ab vno homine horizontaliter promoueri debeat, erit $m = 1$, et $F = \frac{1}{3}Q$, vnde celeritas, qua hoc onus promouebitur, erit $= 6\sqrt{(1 - \frac{F}{70})}$ $= 6\sqrt{(1 - \frac{G}{210})}$ pedum in minuto secundo Si ergo onus G fuerit vel 210 ℔, vel maius prorsus non de loco mouebitur: sin autem sit minus, ab vno homine protrahi poterit. Celeritates autem per spatia in minuto secundo confecta expressae erunt. Vt haec tabella indicat.

Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus	Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus
0	6, 00	110	4, 14
10	5, 86	120	3, 93
20	5, 76	130	3, 70
30	5, 55	140	3, 46
40	5, 40	150	3, 21
50	5, 24	160	2, 93
60	5, 07	170	2, 62
70	4, 90	180	2, 27
80	4, 72	190	1, 85
90	4, 54	200	1, 31
100	4, 34	210	0, 00

§. 15. Quanquam haec tabula ad vim vnius hominis est accommodata, tamen ex ea quoque inueniri potest ceeritas oneris, si plures homines simul trahant. Cum enim eadem prodeat celeritas, ſi pondus oneris ad numerum hominum eandem habeat rationem; manifeſtum eſt, onus 1000 ℔ a 10 hominibus eadem velocitate promotum iri, qua onus 100 ℔ ab vno homine: haec autem celeritas in tabula eſt $4\frac{1}{3}$ pedum in minuto ſecundo. Sic ſi onus 2375 ℔ a 14 hominibus protrahatur, numerum 2375 diuido per 14, et quotum $169\frac{9}{14}$, ſeu 170 proxime quaero in tabella; cui reſpondebit celeritas oneris, quae erit 2, 62 pedum ſingulis minutis ſecundis. Sin autem frictio maior minorue fuerit tertia parte oneris, tum in calculo hoc onus in eadem ratione vel augeatur vel diminuatur; ſicque denuo vera eius celeritas reperietur. Ita ſi onus 1200 ℔, cuius frictio tantum quintae parti 240 ℔ aequetur, ab 8 hominibus protrahatur, loco 1200 aſſumo eius tres quantas 720, quem numerum per 8 diuido, et quotus 90 dabit celeritatem 4, 54 pedum.

§. 16. Hinc porro etiam ſolui poteſt Problema, quo quaeritur, quot hominibus opus ſit ad onus data celeritate promouendum. Sit enim onus $= Q$ librarum, cuius frictio ſiue tertiae ſiue alii parti aequetur, ponatur $= F$ librarum. Celeritas vero, quae poſtulatur, ſit k pedum in minuto ſecundo; ponatur numerus hominum ad hoc praeſtandum requiſitorum $= m$, atque eſſe oportebit $6\sqrt{(1 - \frac{F}{70m})} = k$. Fiet ergo $36 - \frac{36F}{70m} = kk$, ideoque $m = \frac{18F}{35(36 - kk)}$, ſeu quia in his menſurae accuratae non dantur, proxime ſaltem $m = \frac{\frac{1}{2}F}{36 - kk}$. Quod ſi ergo requiratur celeritas, qua 3 pedes ſingulis minutis ſecundis abſoluantur, fiet

$k = 3$,

$k = 3$, et numerus hominum erit $m = \frac{\frac{1}{2}F}{27} = \frac{F}{54}$ seu ex priori formula $m = \frac{2F}{105}$. Ita si onus 1000 ℔, cuius frictio sit 250 ℔ celeritate trium pedum in 1″ sit protrahendum, numerus hominum erit $= \frac{500}{105}$, ideoque quia fractiones reiici oportet, opus erit quinque hominibus.

§. 17. Si loco hominum equis vtendum sit ad onera protrahenda, valores litterarum n et g experientiae conuenienter definiri debebunt; quorum vterque maior erit quam pro hominibus, cum equi non solum longe maioribus viribus valeant, sed etiam celeriorem cursum habeant. Si igitur vis equi quadruplo maior statuatur, quam hominis, erit $g = 280$ ℔, et pro spatio n, quod vno minuto secundo libero cursum conficitur, fere 10 vel 12 pedes assumere licebit. Vnde si oneris frictio sit $= F$ librarum, id ab m equis tanta celeritate protrahetur, vt singulis minutis absoluatur spatium $10\sqrt{(1 - \frac{F}{280m})}$ pedum. Pro bobus autem loco equorum adhibitis, vis fortasse g erit minor, at celeritas n certe multo deficiet, cum boui vix maior celeritas quam homini tribui queat. In hoc autem negotio experientia imprimis erit consulenda, atque pro quouis virium genere litterae n et g per experimenta definiri debebunt: quod facile fiet, si formulae generales cum experimentis conferantur.

§. 18. In hoc ergo praecipuum spectatur discrimen inter vires animales et eas, quae a grauitate petuntur, quod hae continuo aequaliter vrgeant, siue ipsae sint in motu constitutae, etiam nunc quiescant; cum illae eo magis diminuantur, quo celerius iam ipsae mouentur, atque determinantum celeritatis gradum transgredi nequeant. Hic autem ipse modus, quo animalia vires suas exercent, potissimum est spectandus, siue agant trahendo, siue trudendo, siue nitendo, siue calcando, siue alio denique modo; vnde tam valor vis absolutae g, qua, dum in quiete persistunt, pollent, plurimum variatur quam maximus celeritatis gradus, quem, cum omnino onus auferatur, omnibus viribus adhibitis adipisci valent. Multa deinde alia dantur virium genera, veluti venti, aquae fluentis, ignis etc. quae autem sine accurata plurium Machinarum cognitione definiri nequeunt; quam ob rem donec eousque progredi liceat, haec duo tantum virium genera ab animalibus et grauitate profecta in calculum inducam.

§. 19. Praeter motum autem ipsius oneris, quo cuiusuis Machinae ope promouetur, plurimum interest nosse vires, quas durante motu singulae Machinae partes sustinent, atque in se inuicem exerunt. In proposita igitur Machina, quoniam tractio ope funis fieri solet, ponamus primo funem Ff esse breuissimum, vt eius pondus nullius sit momenti, inuestigemusque vim, qua iste funis Ff quouis motus momento extenditur. Positis ergo massa oneris, vt supra $= Q$, frictione $= F$, vi protrahente $= p$, eius inertia $= P$; atque celeritate, quam confecto spatio $= z$ iam acquisiuit, debita altitudini $= v$ sit hoc momento tensio funis $Ff = t$: quae cum vi sollicitanti p sit contraria, si sola inertia huius vis spectetur, ea perinde mouebitur, ac si protraheretur vi $= p$, retro autem vrgeretur vi $= t$, vnde fiet $dv = \frac{(p-t)dz}{P}$.

Quis

Onus autem, in quod immediate ſola vis t agit, dabit hanc aequationem $dv = \frac{(t-F)dz}{Q}$: ſupra autem inuenimus $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$.

§. 20. Ex his ergo aequationibus elicitur tenſio funis $t = F + \frac{Q(p-F)}{P+Q} = \frac{pQ+FP}{P+Q}$: niſi ergo funis hanc tenſionem ſuſtinere poſſit, quin rumpatur, motus produci non poterit. Apparet autem, ſi vis p ſit vniformis ſeu a pondere petita, funem perpetuo eandem tenſionem ſuſtinere. Sin autem vis p ſit animalis, quae creſcente motu imminuatur: quo caſu motus mox ad vniformitatem reducetur, fietque $p = F$. Hoc ergo caſu tenſio funis $t = \frac{FQ+FP}{P+Q} = F$ ipſi frictioni aequalis erit: initio autem motus, quo vis p frictionem ſuperare debuit, tenſio funis quoque maior fuerit neceſſe eſt: vnde intelligi poteſt, quanta vi funem praeditum eſſe oporteat, vt ne rumpatur; maximumque rumpendi periculum in ipſum motus initium incidere.

§. 21. Tenſio igitur funis antequam motus ad vniformitatem reducitur, perinde ac velocitas oneris pendet quoque ab inertia vis vrgentis, quam vocauimus $= P$: quae ſi eſſet nulla tenſio foret perpetuo ipſi vi ſollicitanti p aequalis. Sin autem inertia haec P, qua ſi eſſet infinita; prodiret $t = F$, ſicque tenſio ipſi frictioni conſtanter eſſet aequalis. Cum igitur ſub initium vis ſollicitans p maior eſſe debeat frictione F, priori caſu $P = o$, tenſio continuo decreſcet, quoad motus fiat vniformis: ipſo autem motus initio erat $= p$. Quare ſi inertia vis ſollicitantis neque nulla fuerit neque infinita, tenſio quidem ab initio mino rerit quam p, maior tamen quam frictio F; quippe cui tum demum aequalis fiet, cum motus euaſerit vniformis. Ceterum in viribus animalium inertia proxime erit ponderi animalis aequalis, ſi quidem eorum tota corpora ad parem motum incitari debent. Parum autem intereſt noſſe, quanta haec inertia exacte ſit aeſtimanda, cum in motu vnifoımi, ad quem potiſſimum reſpirespicitur, eius cognitione non ſit opus.

§. 22. Si funis Fp, cuius ope onus Q a vi p protrahitur, fuerit tam longus, vt eius inertiae quoque habenda ſit ratio, tenſio in ſingulis eius punctis non erit aequalis. Maximam quidem inaequalitatem producet incuruatio funis a grauitate oriunda, ſed quia haec in Staticis definiri ſolet, hic tantum ad inaequalitatem ab actione ortam attendam. Inueſtigabo ergo tenſionem in quacunque funis particula mn, quam ponam $= t$, ſit maſſa portionis anterioris $np = M$, et maſſa poſterioris $mF = N$; quarum illa ad potentiae inertiam, haec vero ad onus Q referri debebit. Cum igitur maſſa $P + M$ protrahatur a vi $p - t$, erit $dv = \frac{(p-t)dz}{P+M}$: maſſa autem $Q + N$ a vi $t - F$, erit $dv = \frac{(t-F)dz}{Q+N}$, et coniunctim $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q+M+N}$ exiſtente $M + N$ pondere totius funis, quod ſit $= L$. Hinc ergo erit $t = F + \frac{(Q+N)(p-F)}{P+Q+L}$ $= \frac{(Q+N)p+(P+M)F}{P+Q+L}$. Atque ſi motus fiat vniformis, ſeu $p = F$, tenſio denuo fiet $t = F$, vnde hoc caſu vbique erit eadem, ſin autem $p > F$, tenſio funis a p ad F recedendo continuo decreſcet.

Fig. 3. §. 23. His de motu oneris horizontali expeditis ponamus onus Q verticaliter ſurſum eleuari debere, ope funis EM, qui trochleae T ſit circumplicatus, vt vis ſollici-

licitans ſecundum directionem horizontalem N P trahens concipi queat, ſi quidem fuerit vis animalis: ſin autem grauitate ponderis, vti velimus, in P denuo trochleam ſtatui conueniet, cui funis quoque circumductus deorſum trahatur. Hic autem nullam motus perturbationem ab his trochleis oriundam in calculum introducamus: ſed trochleas tanquam immobiles conſideremus, ſuper quibus funis liberrime ſine frictione hinc inde protrahi queat. Re vera autem motus oneris non mediocriter tam a productione motus in ipſis trochleis, quam a frictione perturbari debet: quem effectum ſingulari capite inueſtigare conſtitui. Hic itaque cum onus nulli corpori incumbat, nulla quoque aderit frictio. Sit igitur maſſa oneris $= Q$, vis motui renitens ſeu eius pondus $= q$, vt ſit $Q = q$; tum vero vis in P vrgens $= p$, eiusque inertia $= P$. Confecerit iam tam onus quam potentia ſpatium $= z$, et ſit vtriusque celeritas debita altitudini $= v$, erit $(P + Q)\, d v = (p - q)\, d z$, ſi quidem ponderis funis eiusque inertiae nulla ratio habeatur.

§. 24. Si igitur vis ſollicitans p fuerit conſtans, vti euenit, ſi onus Q ab alio pondere grauiore deſcendente eleuetur, erit vtique $v = \frac{(p-q)z}{P+Q}$. Neceſſe ergo eſt, vt ſit $p > q$, ſeu vis eleuans maior pondere oneris: ſi enim eſſet $p = q$, onus in aequilibrio ſuſtineretur, ſin autem eſſet $p < q$ onus delaberetur, vimque trahentem p ſecum abriperet. Verum ſi $p > q$ onus eleuabitur motu vniformiter accelerato, eiusque celeritas continuo augebitur, niſi quatenus reſiſtentia aeris obſiſtit. In quo vis ergo ſpatii, per quod onus eleuatur, puncto eius celeritas aſſignari poteſt; vnde ſi tempus dicatur $= t$, erit $d t = \frac{dz}{\sqrt{v}}$

$= \frac{dz}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}$, hincque ipſum tempus $t = 2\sqrt{\frac{P+Q}{p-q}z}$: ſeu ſi ſpatium z in ſcrupulis pedis Rhenani exprimatur, tempus t in numero minutorum ſecundorum reperietur $= \frac{1}{125}\sqrt{\frac{P+Q}{p-q}z}$. Vnde viciſſim ſi tempus t in minutis ſecundis exprimatur, erit ſpatium interea abſolutum $= 15625\, tt. \frac{p-q}{P+Q}$ ſcrup. ped. Rhenani.

§. 25. Si vis ſollicitans p ſit humana ſeu animalis, quae in motus initio ſit $= g$, cum autem celeritate altitudini h debita iam progrediatur, penitus euaneſcat, vt ſit, quem ad modum ſupra aſſumſimus, $p = g - \frac{gv}{h}$: habebimus hanc aequationem differentialem $(P+Q)\, dv = (g - q - \frac{gv}{h})\, dz$, ſeu $\frac{g\, dv}{gh - hq - gv} = \frac{g\, dz}{h(P+Q)}$, cuius integrale eſt $\frac{gz}{h(P+Q)} = l \frac{h(g-q)}{gh - hq - gv}$; ſi quidem celeritas oneris in motus initio euaneſcens aſſumatur. Hoc ergo caſu celeritas oneris mox ad vniformitatem reducetur, atque acceleratio ceſſabit, quando fiet $v = \frac{h(g-q)}{g}$. Neceſſe ergo eſt, vt vis abſoluta g ſuperet reniſum oneris q, tum vero haec celeritas conſtans $\sqrt{v}$ more ſolito exhiberi poterit, ita vt ſpatium, quod ſingulis minutis ſecundis abſoluitur, in pedibus exprimatur. Ad huncque vſum tabulae ante traditae accommodari poterunt, cum enim ſupra ob frictionem tantum tertia pars oneris Q reniti ſit aſſumta, hic totum onus reluctari eſt ponendum; ideoque ſi magnitudo oneris in ſuperioribus tabulis exhibita triplo minor aſſumatur, eae tabulae ad vſum praeſentem transferentur. Sic patebit onus 240 tb ab octo hominibus ſingulis minutis ſecundis per altitudinem 4, 54 pedum eleuari, poſtquam quidem motus iam ad vniformitatem fuerit compoſitus.

§. 26. Si onus $a\,b\,c\,d$ ſuper plano inclinato A C ſurſum trahi debeat, ope vis, cuius directio E M ſit ipſi plano A C parallela; ſeu ſi oneri applicatus ſit in E funis, qui trochleae in T fixae circumductus a data vi ſecundum directionem N P protrahatur, ita vt portio funis E M ipſi plano A C maneat parallelus. Ponamus angulum C A B, quem planum inclinatum A C cum horizonte A B facit $= \Phi$, pondus oneris eiusue maſſam $= Q$, atque onus vrgebitur deorſum ſecundum directionem verticalem Q V per eius centrum grauitatis Q tranſeuntem vi $= Q$, quae reſoluatur ſecundum directiones Q R et Q S, quarum illa ſit ad planum inclinatum normalis, haec vero eidem parallela. Poſito ergo ſinu toto $= 1$, erit ob angulum $VQR = BAC = \Phi$, vis $QR = Q \operatorname{cof.} \Phi$, et vis $QS = Q \operatorname{ſin.} \Phi$: quae poſterior tota motui reluctatur. Prior vero vis $Q \operatorname{cof.} \Phi$ apprimit onus ad planum inclinatum, vnde naſcitur frictio F, dum onus mouetur; quae ſi trienti vis apprimentis ſit aequalis, erit $F = \frac{1}{3} Q \operatorname{cof.} \Phi$. Generatim autem ponamus frictionem $F = \frac{1}{\nu} Q \operatorname{cof.} \Phi$, ita vt dum onus promouetur, tota vis motui renitens ſit $= Q \operatorname{ſin.} \Phi + \frac{1}{\nu} Q \operatorname{cof.} \Phi$. Fig. 4.

§. 27. Si igitur planum A C eſſet horizontale, ſeu $\Phi = 0$, tota vis oneris motui renitens foret $= \frac{1}{\nu} Q$, ſeu ſola frictione conſtaret: ſin autem planum A C verticaliter erigatur, vt angulus Φ fiat rectus, frictio euaneſcet, et onus ſolo ſuo pondere motui renitetur. In reliquis autem plani A C inclinationibus tam ob pondus quam ob frictionem onus motui reluctabitur, et dabitur quidem eiusmodi plani inclinatio, ex qua oritur maxima reluctatio, ita vt onus ſuper eo difficilius eleuetur, quam ſi vertica-

 liter

liter eleuari deberet Quae inclinatio inuenietur, si differentiale formulae Q sin. $\Phi + \frac{1}{\nu}$ cof. Φ ponatur $= 0$, vnde fit tang. $\Phi = v$: vnde si $v = 3$, angulus BAC fiet circiter $= 71°, 34'$, et super huiusmodi plano AC onus omnium difficillime eleuabitur. Vis enim renitens ob tang. $\Phi = 3$, hincque sin. $\Phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et cof. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, erit $= \frac{4}{\sqrt{10}} Q$, cum in situ plani verticali sit tantum $= Q$. Dabitur ergo quoque eiusmodi plani inclinatio, in qua onus motui aeque renitetur, ac si verticaliter esset eleuandum, quod euenit, si Q sin. $\Phi + \frac{1}{\nu} Q$ cof. $\Phi = Q$, hoc est, si sin. $\Phi = 1 - \frac{1}{v}$ cof. Φ, vnde fit cof. $\Phi = \frac{2v}{1+vv}$ et sin. $\Phi = \frac{vv-1}{vv+1}$. Si $\nu = 3$, erit iste angulus $= 53°, 8'$.

§. 28. Quodsi iam vis ponatur $= p$ eiusque inertia $= P$; celeritas oneri iam debita sit altitudini v, atque dum promotio fit per spatiolum $Pp = dz$, erit per regulas motus $dv = (p - Q \text{ sin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ cof. } \Phi) dz : (P + Q)$, vnde patet, motum denuo fore vniformiter acceleratum, si quidem vis sollicitans fuerit eiusmodi, vt aequaliter vrgere pergat, siue tarduis moueatur siue celerius. Perspicuum est igitur, quo oneri motus imprimatur, necessario vim sollicitantem p superare debere vim renitentem Q sin. $\Phi + \frac{1}{\nu} Q$ cof. Φ. Sin autem in crescente motu ipsa vis trahens remittatur, vt fit in viribus hominum et animalium; vtendum erit pro p valore supra assignato $g - \frac{gv}{b}$; fietque $dv = (g - \frac{gv}{b} - Q \text{ sin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ cof. } \Phi) dz : (P + Q)$. Hoc ergo casu motus ad aequabilitatem conuerget, cuius celeritas definietur hac aequatione $v = b - \frac{bQ}{g}(\text{sin. } \Phi + \frac{1}{\nu} \text{cof. } \Phi)$. Ceterum hic tam inertiam funis, quam effectum ex trochlea oriundum negleximus, quippe qui peculiarem inuestigationem requirit.

§. 29.

§. 29. Conſideremus deſcenſum oneris ſuper plano in- Fig. 5.
clinato tam ſpontaneum, quam a vi ſecundum directionem Q P ipſi plano C A parallelam vrgente productum. Tranſeat autem huius vis directio Q P per ipſum oneris centrum grauitatis Q, et baſis oneris *a b*, qua plano incumbit, tam ſit larga, vt onus voluendo prolabi nequeat. Sit igitur angulus $A = \Phi$, quem planum C A cum horizonte B A conſtituit, et vocetur maſſa oneris, eiusue pondus $= Q$; cuiusuis directio Q V cum ſit verticalis, reſoluatur ſecundum directiones Q P, ipſi plano C A parallelam, et Q R ad planum perpendicularem, atque ob angulum $VQR = A = \Phi$, erit vis $QP = Q$ ſin. Φ et vis $QR = Q$ coſ. Φ. Illa ergo vis $QP = Q$ ſin. Φ motui non ſolum non reluctatur, ſed etiam ipſam vim protrahentem, ſi quae adeſt, adiuuabit, ad motum accelerandum. Altera vero vis $QR = Q$ coſ. Φ oneri ad planum apprimendo impenditur, ab eaque frictio originem habebit. Scilicet ſi frictio aequetur trienti vis apprimentis, erit hic frictio $= \frac{1}{3} Q$ coſ. Φ. Quo autem inueſtigatio latius pateat, ponamus, frictionem eſſe $= \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ: quae hoc caſu ſola motui renitetur.

§. 30. Sit iam p vis ſollicitans, qua onus praeter vim propriam $QP = Q$ ſin. Φ ſecundum directionem Q P protrahatur: haecque vis coniuncta ſit cum inertia $= P$. Tota ergo vis onus promouens erit $= p + Q$ ſin. Φ: et quia ſola frictio motui reluctatur, onus accelerabitur ab exceſſu iſtius vis ſupra frictionem $p + Q$ ſin. $\Phi - \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ. Quo igitur motus oriatur, neceſſe eſt, vt ſit $p + Q$ ſin. $\Phi > \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, quamdiu enim fuerit $p + Q$ ſin. $\Phi < \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, onus in quiete perſeuerabit. Quodſi ergo onus a

 nulla

nulla vi externa p ſollicitetur, ſed ſolo ſuo pondere ad motum nitatur, nullus motus ſubſequetur, quamdiu fuerit Q ſin. $\Phi < \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ ſeu tang. $\Phi < \frac{1}{\nu}$; ſtatim vero atque angulus Φ tantum augeatur, vt fiat tang. $\Phi > \frac{1}{\nu}$ onus deſcendet. Ex quo tutiſſimus ac facillimus modus obtinetur quantitatem frictionis explorandi. Onere enim quocunque huiusmodi plano impoſito, eius inclinatio ſeu angulus $A = \Phi$ pedetentim augeatur, donec onus ſuper eo deſcendere incipiat, ſicque innoteſcet anguli Φ magnitudo, cuius tangens ſit $= \frac{1}{\nu}$; hincque porro valor fractionis $\frac{1}{\nu}$, per quam frictio determinatur. Ita ſi iſte eleuationis angulus A deprehendatur $= 18°$, erit $\frac{1}{\nu} = 0,3249$ ſeu proxime $\frac{1}{\nu} = \frac{13}{40}$. Hoc ergo modo pro omnis generis corporibus quantitas frictionis explorari poterit. Atque ſi frictio aequetur tertiae parti vis apprimentis, onus ſuper plano inclinato quieſcere perget, quoad angulus inclinationis B A C non excedat $18°, 26'$.

§. 31. Vt autem ipſum motum oneris definiamus, qui oritur, quando $p + Q$ ſin. $\Phi > \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, ponamus onus iam confeciſſe ſpatium $= z$, eiusque celeritatem nunc eſſe debitam altitudini $= v$. Quoniam vis accelerans eſt $= p + Q$ ſin. $\Phi - \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, et maſſa mouenda $= P + Q$, erit $(P + Q)\, dv = (p + Q \text{ ſin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ coſ. } \Phi)\, dz$: atque ſi vis p in motu non diminuatur, ſed perpetuo conſtans maneat, erit quoque $(P+Q)v = (p + Q\text{ſin.}\Phi - \frac{1}{\nu}Q\text{coſ.}\Phi)z$, quae aequatio indicat, motum fore vniformiter acceleratum. Sin autem vis p in motu remittatur, ſeu ad genus virium animalium pertineat, vt ſit $p = g - \frac{gv}{h}$, erit $(P + Q)\, dv = (g - \frac{gv}{h} + Q \text{ ſin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ coſ. } \Phi)\, dz$. Hoc ergo caſu motus ad vniformitatem conuerget, cuius celeri-

celeritas debita ſit altitudini $v = b + \frac{bQ}{g}(\text{ſin.}\,\Phi - \frac{1}{\nu}\text{coſ.}\,\Phi)$, ſi quidem fuerit ſin. $\Phi < \frac{1}{\nu}$ coſ. Φ ſeu tang. $\Phi < \frac{1}{\nu}$. Si enim angulus Φ maior fuerit, vt frictio a ſola grauitate oneris ſuperetur, tum etiamſi nulla vis p adeſſet, motus oneris in infinitum accelerаretur. Atque hoc caſu vis p tamdiu tantum aget, quoad fiat $v = b$; ac deinceps onus a ſola grauitate accelerabitur, niſi forte vis p motui celeriori, a quo ipſa abripiatur, reluctetur; hocque caſu fiat negatiua. Quod ſi eueniat, visque p negatiuum valorem induat, quando $v > b$; tum acceleratio oneris a propria grauitate orta coercebitur, atque motus ad vniformitatem reducetur celeritate debita altitudini $v = b + \frac{bQ}{g}$ (ſin. $\Phi - \frac{1}{\nu}$ coſ. Φ). Hoc ergo caſu prorſus contrarium accidit, atque in praecedente: dum hic vis, quae corpus initio accelerabat, deinceps in vim retardantem abit, atque effectum grauitatis reprimere debet.

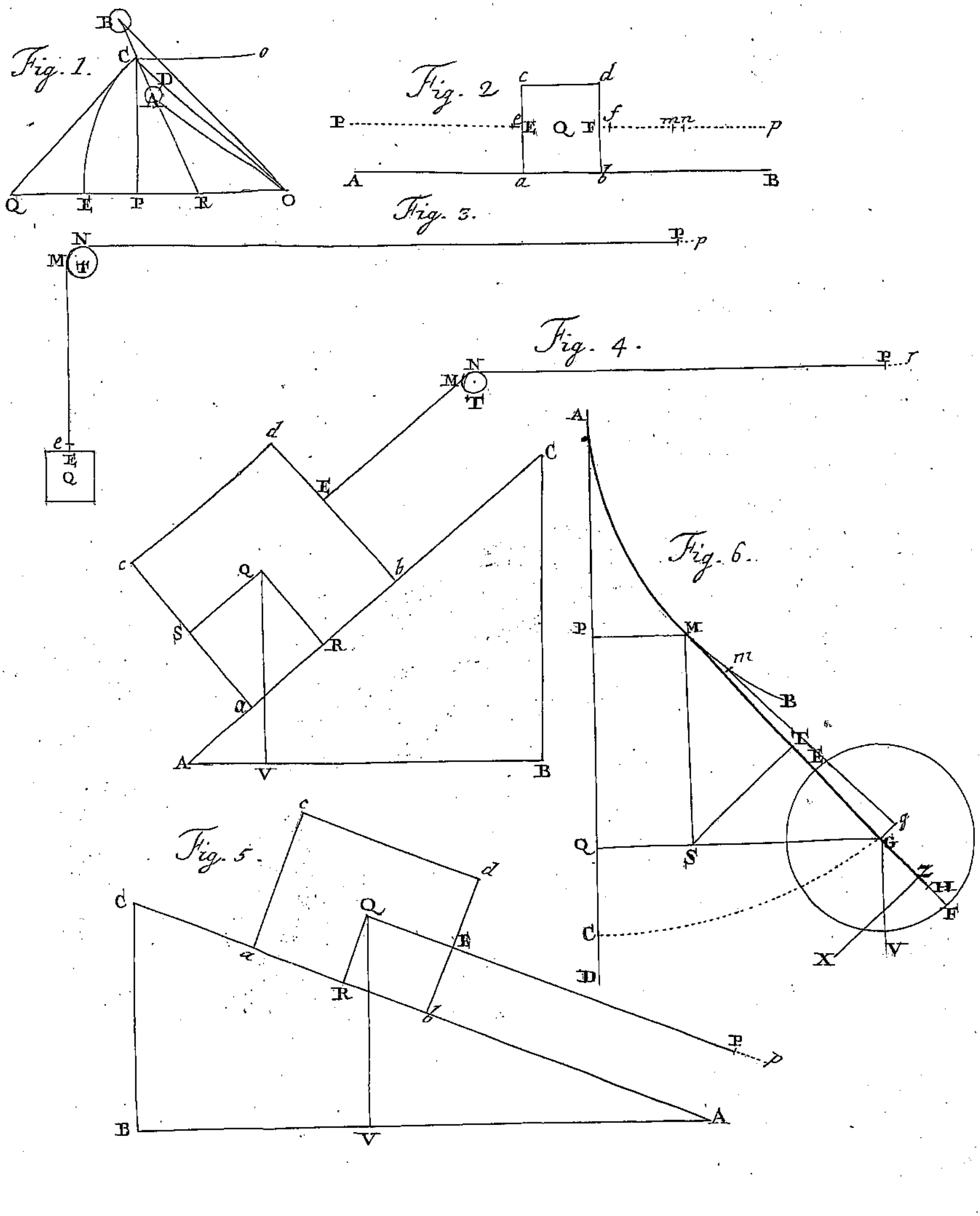
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.