



1753

# De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda" (1753). *Euler Archive - All Works*. 193.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/193>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE PERTVRBATIONE  
**MOTVS PLANETARVM**  
AB EORVM FIGVRA NON SPHAERICA ORIVNDA.

AVCTORE  
*L. EVLERO.*

§. 1.

**Q**uamuis cum *Newtono* assumamus dari in systemate planetario eiusmodi centrum virium, ad quod cuncta materiae, ex qua planetae constant, elementa attrahantur in ratione reciproca duplicata distantiarum; hinc tamen non sequitur, singulos planetas circa istud centrum perfectas descripturos esse ellipses, quarum atteruter focus in hoc centro esset situs. Haec enim conclusio, vti ex ipsius *Newtoni* demonstrationibus facile colligitur, locum non habet, nisi corpora planetarum vel sint tam parua, vt instar punctorum spectari queant, vel ita comparata, vt omnium virium, quibus singulae planetae particulae vrgentur, media directio per ipsius centrum gravitatis simul et centrum virium transeat, atque insuper vis aequivalens ipsa, quae ex singulis illis viribus conflatur, sit distantiarum quadratis reciprocce proportionalis.

§. 2. Egregie vero etiam *Newtonus* demonstravit, si corpus planetae sit perfecte sphaericum atque ex materia homogenea constet, tum omnium virium, quibus singulae eius particulae ad centrum virium nitantur, mediam directionem non solum per ipsum planetae centrum ad centrum virium porrigi, sed etiam vim ex omnium con-

iunctiōe natam reciproce proportionalem esse quadrato distantiae centri planetae a centro virium. Hoc igitur casu planeta perinde circa centrum virium mouebitur, ac si cuncta eius materia in ipsius centro esset vnita, ideoque eius motus perficietur in sectione conica, cuius alteruter focus in centro virium existat.

§. 3. Quae proprietas, cum tam commode in figuram sphaericam materia vniformiter repletam competat, atque ob hanc causam non adeo multis aliis figuris sit communis, nullum est dubium, quin planeta, qui alia figura diuersa fuerit praeditus, non eandem legem in motu suo sit secuturus. Nisi enim eius corpus hoc modo exposito sit formatum, omnino euenire potest, vt media omnium virium directio vel non per centrum grauitatis planetae transeat, vel non per centrum virium, vel etiam per neutrum. Tum vero etiam saepissime accidit, vt vis omnibus simul sumtis aequiualens non sit quadratis distantiae a centro virium reciproce proportionalis, quarum anomaliarum si vel vna affuerit, motus planetae ab ellipsi seu sectione conica discrepare debebit.

§. 4. Cuiusmodi autem motus perturbatio a defectu idoneae Planetae formae oriri debeat, difficillimum profecto erit generatim determinare, cum fines analyseos nondum sint eousque promoti, vt aequationes, quas leges Mechanicae suppeditant, euoluere atque ad vsum accommodare liceret. Neque huiusmodi inuestigatio cum vlla successus spe suscipi potest, nisi cum constet, illam perturbationem motus tam esse exiguam, vt in calculo instar quantitatis propemodum euanescentis tractari queat. Cum vero et haec tractatio, ob infinitam figurarum, quae plane-

planetis tribui queant, varietatem nimis late pateat, hic singularem tantum casum euoluere constitui, ex quo tamen via ad innumeros alios tractandos cognosci possit.

§. 5. Considerabo ergo corpus ex duobus globis A et B virga rigida et inertiae experte iunctis compositum, quod in plano tabula repraesentato moueatur circa centrum virium O, ad quod vterque globus seorsim sollicitetur in ratione duplicata reciproca distantiarum. Ad motum ergo huius corporis AB hinc oriundum recte inuestigandum ad eius centrum grauitatis, quod sit in C respici oportet. Repraesentent ergo litterae A et B massas globorum A et B, sintque distantiae  $AC = a$ ,  $BC = b$ , ab horum globorum centrīs aestimandae, erit ex natura centri grauitatis  $Aa = Bb$ . Porro vis centri virium O tanta sit vt in distantia  $f$ , aequetur grauitati, atque globus A versus O vrgebitur vi motrice  $= \frac{Aff}{OA^2}$ , et globus B eodem trahetur secundum directionem BO vi  $= \frac{Bff}{OB^2}$ .

§. 6. Sumta quadam recta OE pro axe ad quem motus referatur, sit EC linea curua, quam centrum grauitatis C iam descripserit, ac vocetur distantia  $OC = z$ , et angulus  $EOC = \Phi$ , erit demisso ex C in axem perpendiculari CP, abscissa  $OP = x = z \cos. \Phi$  et applicata  $PC = y = z \sin. \Phi$ , posito fimitoto  $= r$ . Hoc autem temporis puncto virga AB eum situm teneat, quem figura refert sitque angulus  $OCA = \theta$ , quem motus continuatione augeri ponam, ita vt corpus A circa C respectu lineae OC arcum DA iam descripserit. At quia haec ipsa linea OC est mobilis, motum istum angularem ad lineam quandam fixam OE referri conuenit, producatur ergo recta BCA donec huic OE occurrat in R, eritque

§. 11. Vt istae aequationes ad vsum propius accommodentur, multiplicetur prima per  $\text{cof. } \Phi$ , altera per  $\text{fin. } \Phi$ , erit ob  $\text{cof. } \Phi^2 + \text{fin. } \Phi^2 = 1$  eas addendo.

$$ddz - z^d \Phi^2 = -\frac{1}{2} dt^2 (P \text{cof. } \Phi + \text{fin. } \Phi)$$

Deinde prior multiplicetur per  $-\text{fin. } \Phi$ , et altera per  $\text{cof. } \Phi$ , erit eas pariter addendo

$$2dz^d \Phi + z^{dd} \Phi = -\frac{1}{2} dt^2 (Q \text{cof. } \Phi - P \text{fin. } \Phi)$$

Supereft igitur vt pro P et Q valores ante exhibiti substituantur.

§. 12. Erit autem hos valores ex §. IX. restituendo

$$Q \text{fin. } \Phi + P \text{cof. } \Phi = \frac{Aff(z - a \text{fin. } \Phi \text{fin. } \eta - a \text{cof. } \Phi \text{cof. } \eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b \text{fin. } \Phi \text{fin. } \eta + b \text{cof. } \Phi \text{cof. } \eta)}{(A+B)BO^3}$$

similique modo

$$Q \text{cof. } \Phi - P \text{fin. } \Phi = \frac{Aff(a \text{fin. } \Phi \text{cof. } \eta - a \text{cof. } \Phi \text{fin. } \eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(b \text{cof. } \Phi \text{fin. } \eta - b \text{fin. } \Phi \text{cof. } \eta)}{(A+B)BO^3}$$

At est  $\text{fin. } \Phi \text{fin. } \eta + \text{cof. } \Phi \text{cof. } \eta = \text{cof. } (\eta - \Phi) = \text{cof. } \theta$ , ob  $\eta = \Phi + \theta$ , tum vero  $\text{fin. } \Phi \text{cof. } \eta - \text{cof. } \Phi \text{fin. } \eta = \text{fin. } (\Phi - \eta) = -\text{fin. } \theta$ , sicque angulo  $\eta$  ex computo exeunte, habebitur.

$$Q \text{fin. } \Phi + P \text{cof. } \Phi = \frac{Aff(z - a \text{cof. } \theta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b \text{cof. } \theta)}{(A+B)BO^3} \text{ et}$$

$$Q \text{cof. } \Phi - P \text{fin. } \Phi = \frac{-Aaff \text{fin. } \theta}{(A+B)AO^3} + \frac{Bbff \text{fin. } \theta}{(A+B)BO^3}$$

§. 13. Quodsi iam isti valores in superioribus aequationibus (§. XI.) substituantur, orientur sequentes duae aequationes, quibus motus centri grauitatis C continetur.

I.  $ddz$

$$I. \frac{d^2z}{dt^2} - z^d \Phi^2 = \frac{z f f d t^2}{z(A+B)} \left( \frac{A(z - a \cos \theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b \cos \theta)}{BO^3} \right)$$

$$II. \frac{d^2z}{dt^2} \Phi + z^d \Phi = \frac{f f d t^2}{z(A+B)} \left( \frac{A a \sin \theta}{AO^3} - \frac{B b \sin \theta}{BO^3} \right)$$

quae adhuc in se continent quatuor indeterminatas  $z$ ,  $\Phi$ ,  $\theta$  et  $t$ ; vnde vna praeterea opus est aequatione, vt binae eliminari et aequatio inter duas tantum indeterminatas elici queat.

§. 14. Verum hanc tertiam aequationem nobis suppeditabit consideratio motus rotatorii virgèa  $AB$ , quae cum axe  $QE$  iam constituit angulum  $ERC = \eta = \Phi + \theta$ , progressu temporis augendum. Ad huius accelerationem definiendam nosse oportet totius corporis gyrantis momentum inertiae, quod oritur, si singulae eius particulae per quadrata distantiarum secarum ab axe gyrationis multiplicentur, haecque producta in vnâ summam colligantur. Sit igitur hoc momentum inertiae  $= (A+B)kk$ . Deinde si momentum virium hunc motum gyrationis accelerantium, seu ad angulum  $\eta$  augendum tendentium ponatur  $= Rr$ , erit tempusculo  $dt$  acceleratio motus rotatorii  $\frac{z d^2 \eta}{dt^2} = \frac{Rr}{(A+B)kk}$  seu  $ddy = \frac{Rr dt^2}{z(A+B)kk}$ .

§. 15. Cum autem globus  $A$  ad  $O$  sollicitetur vi  $= \frac{A f f}{AO^2}$ , erit eius momentum respectu axis rotationis  $C = \frac{A f f}{AO^2} \cdot AC \sin OAR$ ; at est  $\sin OAR : OC = \sin OCA : AO$ , ideoque  $\sin OAR = \frac{OC \sin OCA}{AO} = \frac{z \sin \theta}{AO}$  ergo hoc momentum erit  $= \frac{A a f f z \sin \theta}{AO^3}$ , et ad anguli  $\eta$  diminutionem tendit. Globus autem  $B$  ad  $O$  trahitur vi  $= \frac{B f f}{BO^2}$ , eiusque ergo momentum ad  $C$  erit  $= \frac{B f f}{BO^2} \cdot BC \sin OBC = \frac{B b f f z \sin \theta}{BO^3}$ , et ad angulum  $\eta$  augendum

impenditur, unde totale momentum, quod posui  $Rr$ , erit  $= ffz \sin. \theta \left( \frac{Bb}{BO^2} - \frac{Aa}{AO^2} \right)$  hincque acceleratio motus rotatorii ita definietur, ut sit:  $dd\eta = \frac{ffz \sin. \theta}{2(A+B)kk} \left( \frac{Bb}{BO^2} - \frac{Aa}{AO^2} \right) = dd\Phi + dd\theta$ .

§. 16. En igitur tres aequationes, quibus opus est ad motum tam centri grauitatis C, quam motum gyrationem ipsius virgae AB determinandum:

$$I. ddz - z^d \Phi^2 = \frac{-ffz^2}{2(A+B)} \left( \frac{A(z - a \cos. \theta)}{AO^2} + \frac{B(z + b \cos. \theta)}{BO^2} \right)$$

$$II. 2dz^d \Phi + z^{dd} \Phi = \frac{ffz^2}{2(A+B)} \left( \frac{Aa \sin. \theta}{AO^2} - \frac{Bb \sin. \theta}{BO^2} \right)$$

$$III. dd\Phi + dd\theta = \frac{-ffz^d r^2}{2(A+B)k^2} \left( \frac{Aa \sin. \theta}{AO^2} - \frac{Bb \sin. \theta}{BO^2} \right)$$

Tota ergo huius duplicis motus determinatio huc est reducta, ut ex istis tribus aequationibus duae indeterminatae eliminentur, et aequatio inter duas tantum variables eliciatur, cuius resolutio ad usum vocari queat.

§. 17. Diuidatur aequatio II per III, ac prodibit sequens formula perquam concinna.

$$\frac{2dz^d \Phi + z^{dd} \Phi}{dd\Phi + dd\theta} = \frac{kk}{z}$$

seu  $2z^d z^d \Phi + z z^{dd} \Phi + k k dd\eta = 0$  ob  $\eta = \Phi + \theta$ .

Integration ergo instituta erit:

$z z^d \Phi + k k d\eta = C dt$  denotante B quantitatem constantem. Exprimit autem  $\frac{1}{2} z z^d \Phi$  elementum areae EOC, quae si dicatur  $= S$ , erit  $2 dS + k k d\eta = C dt$ , et quia celeritas gyrationis exponitur per  $\frac{d\eta}{dt}$ , erit  $\frac{d\eta}{dt} = \frac{C}{kk} - \frac{2dS}{kk dt}$ , et de nouo integrando:  $\eta = D + \frac{Ct}{kk} - \frac{2S}{kk}$ .

§. 18. Hinc primo patet, si area EOC a centro grauitatis C circa centrum virium O descripta exacte efflet

effēt tempori proportionalis, tum etiam motum gyro-  
rium eiusue celeritatem  $\frac{d\eta}{dt}$  futuram esse vniformem. Sin  
autem areae EOC descriptio non sit tempori proportio-  
nalis, quod re vera euenire mox ostendetur, tum etiam  
motus gyrotorius virgae AB circa centrum C tantundem  
ab vniformitate discrepabit. Atque hinc sine dubio circa  
motum lunae libratorum, quia descriptio arearum circa  
terram non est tempori proportionalis, praeclara conclu-  
dere licebit, etiamsi casus, quem hic contemplor, non  
admodum congruat cum figura lunae. Sed hanc applica-  
tionem tam diu differre conueniet, donec reliqua motus  
phaenomena fuerint euoluta.

§. 19. Cum igitur iam adepti simus hanc aequatio-  
nem  $zz^d\Phi + kk d\eta = Cdt$ : ob  $d\eta = d\Phi + d\theta$ , hinc  
eliminare poterimus elementum quantitatis variabilis  $\theta$ ,  
ope formulae

$$d\theta = \frac{Cdt - zz^d\Phi}{kk} - d\Phi$$

ideoque duae tantum nobis supererunt aequationes euol-  
vendae, nempe:

$$\text{I. } ddz - z^d\Phi^2 = \frac{ffdt^2}{2(\Lambda + B)} \left( \frac{\Lambda(z - a \cos. \theta)}{\Lambda O^3} + \frac{B(z + b \cos. \theta)}{B O^3} \right)$$

$$\text{II. } z^d z^d + z^d d\Phi = \frac{ffdt^2 \sin. \theta}{2(\Lambda + B)} \left( \frac{\Lambda a}{\Lambda O^3} - \frac{Bb}{B O^3} \right)$$

in quibus etsi angulus  $\theta$  adhuc inest, tamen sufficit nosse  
eius differentialis valorem:

$$d\theta = \frac{Cdt - zz^d\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 20. Loco elementi temporis  $dt$  introducamus in  
calculus motum corporis sphaerici circa centrum virium O  
in circulo cuius radius sit  $= hu$ , informiter reuoluen-  
tis; quod tempusculo  $dt$  angulum circa O describat  $= d\omega$ ,

H h 2

qui



$$\text{erit } d\theta = \frac{ggdv(1+n \cos v)}{kk} - \frac{bbdv(1+n \cos v)\sqrt{1+nn}}{kk} - \frac{dv\sqrt{1+nn}}{1+n \cos v}$$

vbi primo notandum esse  $kk$  quantitatem prae  $bb$  minimam, simulque proxime esse  $gg = bb\sqrt{1+nn}$  nisi motus gyratorius vehementer fuerit velox. Sit igitur  $gg - bb\sqrt{1+nn} = \alpha kk$ , vt sit proxime  $d\theta = \alpha dv(1+n \cos v) - \frac{dv\sqrt{1+nn}}{1+n \cos v}$ , qui valor cum  $\theta$  tantum in terminis minimis occurrat, ad approximandum fatis est exactus.

§. 25. Incipiamus ab aequatione posteriori, quae hanc indicet formam:

$$\frac{zzd\omega + z\omega d\omega}{d\omega} = \frac{zabb^2 d\omega \sin \theta \cos \theta}{z^2} = \frac{zabb^2 d\omega \sin 2\theta}{2z^2}$$

et integrando  $\frac{zzd\omega}{d\omega} = \frac{z}{2} ab \int \frac{b^2}{z^2} d\omega \sin 2\theta + Cbb$  ac cum  $ab$  sit minimum in hoc termino sufficit pro  $z$  ponere  $b(1+n \cos v)$ , et ob  $d\omega = \mu dv(1+n \cos v)$  erit

$$\frac{zzd\omega}{dv(1+n \cos v)} = \frac{z}{2} \mu^2 ab \int \frac{dv \sin 2\theta}{(1+n \cos v)^2} + Cbb$$

Neque vero hinc vtilis conclusiones deducere valebimus, nisi excentricitatem  $n$  valde parvam statuamus, quod quidem pro applicatione ad motus planetarum tuto facere poterimus.

§. 26. Hoc autem casu cum sit  $\frac{dv\sqrt{1+nn}}{1+n \cos v} = dv(1-n \cos v)$  proxime, erit  $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha + 1)n \cos v)$  hincque  $dv = \frac{-d\theta}{1-\alpha - (1+\alpha)n \cos v} = -d\theta(-\alpha + (1+\alpha)n \cos v)$  et proxime  $\frac{dv}{(1+n \cos v)^2} = -d\theta(1-\alpha - (1-3\alpha)n \cos v)$  ficque erit  $\int \frac{dv \sin 2\theta}{(1+n \cos v)^2} = -(1-\alpha) \int d\theta \sin 2\theta + (1-3\alpha)n \int d\theta \sin 2\theta \cos v$  sed sufficiat solum primum terminum retinuisse vt integratione instituta fit  $\int \frac{dv \sin 2\theta}{(1+n \cos v)^2} = \frac{1}{2}(1-\alpha) \cos 2\theta$  ideoque habebitur fatis accurate

zzdΦ

$\frac{z z d\Phi}{dv(1+n \cos v)} = C b b + \frac{3}{4} (1 - \alpha) \mu^2 a b \cos 2\theta$   
 unde erit :

$$d\Phi = \frac{C b b dv(1+n \cos v)}{z z} + \frac{\frac{3}{4} (1 - \alpha) \mu^2 a b dv(1+n \cos v) \cos 2\theta}{z z}$$

§. 27. Sumtis ergo quadratis et minimis neglectis terminis erit

$$z^2 d\Phi^2 = C C b^2 dv^2 (1+n \cos v)^2 + \frac{3}{2} (1 - \alpha) \mu \mu C a b b b dv^2 (1+n \cos v)^2 \cos 2\theta$$

Iam vero prima aequatio exuta differentialis constantis  $d\omega$  ratione transfit in sequentem,

$$z^3 d \frac{dz}{d\omega} - \frac{z^4 d\Phi^2}{d\omega} + b^3 z d\omega = \frac{z a^2 b^3 \cos(1-n \cos \theta^2)}{z z}$$

At cum sit  $z = b(1+n \cos v + p)$  erit  $\frac{dz}{b} = -ndv \sin v + dp$  et ob  $d\omega = \mu dv(1+n \cos v)$  erit

$$\begin{aligned} & (1+n \cos v + p)^3 d \left( \frac{dp - ndv \sin v}{\mu dv(1+n \cos v)} \right) - \frac{C C b^2 (1+n \cos v)}{\mu} \\ & - \frac{3}{2} (1 - \alpha) \mu \frac{C a b}{b b} dv(1+n \cos v) \cos 2\theta + \mu dv(1+n \cos v)(1+n \cos v + p) \\ & = \frac{z a b d v (1+n \cos v) (-3 \cos \theta^2)}{z b v (1+n \cos v + p)} \end{aligned}$$

§. 28. Ponatur iam differentiale  $d v$  constans, eritque

$$d, \frac{dp - n dv \sin v}{\mu dv(1+n \cos v)} = \frac{ddp}{\mu dv(1+n \cos v)} + \frac{ndp \sin v}{\mu(1+n \cos v)^2} - \frac{ndv \cos v - nndv}{\mu(1+n \cos v)^2}$$

et quia est approximando :

$(1+n \cos v + p)^3 = (1+n \cos v)^3 + 3(1+n \cos v)^2 p$ ,  
 erit substitutione facta, iisque terminis in quibus  $p$  plus vna dimensione obtinet neglectis ;

$$\begin{aligned} & \frac{ddp}{\mu dv} (1+n \cos v)^2 + \frac{ndp \sin v}{\mu} (1+n \cos v) - \frac{ndv(\cos v + n)}{\mu} (1+n \cos v) \\ & - \frac{z n p d v (\cos v + n)}{\mu} - \frac{3(-2) \mu C a b d v (1+n \cos v) \cos 2\theta}{z b b} - \frac{C C}{\mu} dv(1+n \cos v) \\ & + \mu \end{aligned}$$

$$+\mu p dv(1+n \cos. v) - \frac{3\mu abdv(1-3 \cos. \theta^2)}{2bb} + \mu dv(1+n \cos. v)^2 \\ + \frac{3\mu abpdv(1-3 \cos. \theta^2)}{2bb(1+n \cos. v)} = 0.$$

§. 29. Reducatur  $\cos. \theta^2$  ad cosinum simplicem ponendo  $\cos. \theta^2 = \frac{1+\cos. 2\theta}{2}$ , erit  $1-3 \cos. \theta^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos. 2\theta$ , atque aequentur termini, in quibus  $p$  non inest seorsim  $= 0$ , eritque diuisione per  $dv$  peracta:

$$+\mu + 2\mu n \cos. v + \mu nn \cos. v^2 = 0 \\ - \frac{CC}{\mu} - \frac{CCn}{\mu} \cos. v - \frac{nn}{\mu} \cos. v^2 \\ - \frac{nn}{\mu} - \frac{n}{\mu} \cos. v \\ - \frac{n^2}{\mu} \cos. v$$

cui aequationi ut satis fiat, necesse est, ut sit:

$$\mu = 1 \text{ et } CC = 1 - nn, \text{ ita ut fiat:}$$

$$d\omega = dv(1+n \cos. v) \text{ atque}$$

$$d\Phi = \frac{dv(1+n \cos. v)\sqrt{(1-nn)}}{(1+n \cos. v+p)^2} + \frac{\frac{3}{2}(1-\alpha)abdv(1+n \cos. v) \cos. 2\theta}{hb(1+n \cos. v+p)^2}$$

§. 30. Altera vero aequatio, ex qua valorem ipsius  $p$  definiri oportet erit:

$$\frac{d\dot{p}}{dv}(1+n \cos. v)^2 + ndp \sin. v(1+n \cos. v) + pdv(1-2n \cos. v-3nn) \\ - \frac{3(1-\alpha)abdv(1+n \cos. v) \cos. 2\theta}{2bb} \sqrt{(1-nn)} - \frac{3abpdv(1+3 \cos. 2\theta)}{4bb(1+n \cos. v)} \\ + \frac{3abdv(1+3 \cos. \theta)}{4bb} = 0$$

negligantior primo termini angulum  $\theta$  negligentes ut et excentricitas  $n$  erit

$$\frac{d\dot{p}}{dv} + pdv - \frac{3abpdv}{4bb} + \frac{3abdv}{4bb} = 0$$

eritque  $p = \frac{-3ab}{4bb-3ab}$ , quae est pars veri valoris ipsius  $p$  neque ab excentricitate  $n$  neque ab angulo  $\theta$  pendens.

§. 31. Maneat adhuc excentricitas  $n$  euanesceus, eritque

$$\frac{d^2p}{dv^2} + p dv - \frac{3abp dv}{4bb} - \frac{3abp dv \cos. 2\theta}{4bb} - \frac{3(1-\alpha)abdv \cos. 2\theta}{2bb} \\ + \frac{3abdv}{4bb} + \frac{3abdv \cos. 2\theta}{4bb} = 0$$

fit nunc  $p = \frac{3ab}{4bb - 3ab} + q$ , erit

$$0 = \frac{ddq}{dv} + q dv - \frac{3(1-\alpha)abdv \cos. 2\theta}{2bb} + \frac{3abdv \cos. 2\theta}{4bb}$$

omissis terminis, qui ob  $\frac{a}{b}$  prae reliquis sunt minimi, atque facile patet, valorem ipsius  $q$  esse huiusmodi:

$$q = \frac{3ab}{4bb} \cos. 2\theta; \text{ nam ob } d\theta = -(1-\alpha)dv,$$

erit  $dq = \frac{3(1-\alpha)3abdv \sin. 2\theta}{2bb}$  atque

$ddq = \frac{-3(1-\alpha)^2 3abdv^2 \cos. 2\theta}{bb}$ , quibus valoribus substitutis fiet diuisione per  $3dv \cos. 2\theta$  facta

$$0 = \frac{-(1-\alpha)^2 3ab}{bb} + \frac{3ab}{4bb} - \frac{(1-\alpha)ab}{2bb} + \frac{3ab}{4bb}$$

seu  $0 = 3(1 - 4(1-\alpha)^2) + 3 - 2(1-\alpha)$  vnde fit

$$3 = \frac{1+2\alpha}{4(1-\alpha)^2-1} = \frac{1+2\alpha}{3-8\alpha+4\alpha\alpha}. \text{ Erit ergo}$$

$$p = \frac{3ab}{4bb} + \frac{3(1+2\alpha)ab \cos. 2\theta}{4bb(3-8\alpha+4\alpha\alpha)}$$

qui est verus valor ipsius  $p$ , quatenus is non ab excentricitate  $n$  pendet: quia autem hic ipse valor valde est paruus, eius partes ab excentricitate  $n$  pendentes, vtpote multo minores facile negligere licet.

§. 32. Quoniam haec potissimum ad motum lunae accommodare animus est, propterea quod lunae corpus ob eius motum libratorium ita formatum videtur, vt notabiliter a figura Sphaerica discrepet, positiones nostras ita definiamus, vt ad lunam pertinere videantur. In luna autem directio virgae AB constanter propemodum in

rectam  $CO$  incidit; unde fit angulus  $\theta$  fere  $= 0$ , ideoque statui debet  $\alpha = 1$ , ob  $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha + 1)n \cos v)$ , eritque  $p = \frac{-sab}{4bb} - \frac{sab}{4bb} - \frac{sab}{bb}$  ob  $\cos. 2\theta = 1$ . Hinc fiet.

$$z = b \left( 1 - \frac{3ab}{bb} + n \cos. v \right)$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{dv(1+n \cos. v)\sqrt{(1-n)}}{\left(1 - \frac{3ab}{bb} + n \cos. v\right)^2}$$

§. 33. Ponatur breuitatis gratia  $r = \frac{ab}{bb} = \frac{a}{b}$

$$\text{erit } \frac{1}{(m+n \cos. v)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{2n \cos. v}{m^3} + \frac{3nn \cos. v^2}{m^4}$$

reiectis terminis, in quibus altiores potestates ipsius  $n$  occurrunt. Multiplicetur per  $1 + n \cos. v$

$$\text{ac fiet } \frac{1}{m^2} + \frac{n \cos. v}{m^3} - \frac{2nn \cos. v^2}{m^4} \\ - \frac{2n \cos. v}{m^3} + \frac{3nn \cos. v^2}{m^4}$$

quae insuper per  $\sqrt{(1-nn)} = 1 - \frac{1}{2}nn$  multiplicata

$$\text{dat } \frac{1-nn}{2mm} - \frac{n(2-n) \cos. v}{m^3} + \frac{nn(3-2n) \cos. v^2}{m^4}$$

At ob  $\cos. v^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2v$  habebitur

$$\frac{2mm - nnn + 3nn - 2mm}{2m^4} - \frac{n(2-n) \cos. v}{m^3} + \frac{nn(3-2n) \cos. 2v}{2m^4}$$

quae per  $dv$  multiplicata dat valorem ipsius  $d\Phi$

§. 34. Habebimus ergo hanc aequationem

$$d\Phi = \frac{dv}{mm} + \frac{nn(1-n)(3+n)dv}{2m^4} - \frac{n(2-n)dv \cos. v}{m^3} \\ + \frac{nn(3-2m)dv \cos. 2v}{2m^4}$$

cuius integrale est

$$\Phi = C + v \left( \frac{1}{mm} + \frac{nn(1-n)(3+n)}{2m^4} \right) - \frac{n(2-n) \sin. v}{m^3} \\ + \frac{nn(3-2m) \sin. 2v}{4m^4}$$

vbi est  $m = 1 - \frac{3ab}{bb}$ . Denotat autem  $v$  anomaliam excentricam, quae ita est comparata, vt, si anomalia media ponatur  $= u$ , fit  $u = v + n \sin. v$ .

§. 35. Ponatur in primo termino pro  $v$  eius valor  $u - n \sin. v$ , erit:

$$\Phi = C + u \left( \frac{r}{m^2} + \frac{mn(1-m)(s+m)}{2m^4} \right) - \left( \frac{2}{m^3} + \frac{un(1-m)(s+m)}{2m^4} \right) n \sin. v + \frac{nn(s-2v)}{4m^4} \sin. 2v$$

vbi duo ultimi termini continent aequationem centri, quae indicat, quantum locus medius a vero distet. Primi ergo termini

$$C + u \left( \frac{r}{mm} + \frac{m(1-m)(s+m)}{2m^4} \right)$$

designant locum medium.

§. 36. Erit ergo motus medium ad motum anomaliae mediae, vt.

$$u \left( \frac{r}{mm} + \frac{m(1-m)(s+m)}{2m^4} \right) \text{ ad } u$$

sed cum non solum  $nn$  ponatur valde paruum, sed etiam  $1 - m = \frac{3ab}{bb}$ ; fit vehementer paruum, alterum terminum negligere licet; ita vt fit motus medius ad motum anomaliae vt  $\frac{r}{mm}$  ad  $1$ , seu vt  $1$  ad  $m, m$ , quae ratio erit, vt  $1$  ad  $(1 - \frac{3ab}{bb})^2$  seu vt  $1$  ad  $1 - \frac{6ab}{bb}$ . Motus medius autem erit ad motum Aphelii, si  $O$  sit sol, seu ad motum Apogaei, si  $O$  sit terra, vt  $1$  ad  $\frac{6ab}{bb}$ . Sicque Aphelium seu Apogaeum in consequentia promouetur; et quidem intervallo vnius revolutionis secundum motum medium per ang:  $= \frac{6ab}{bb} \cdot 360^\circ$ .

§. 37. Egregie haec conclusio quadrat in motum lunae, cuius Apogaeum fere duplo celerius progreditur, quam per Theoriam inuenitur. Obseruationes enim praebent motum lunae medium ad motum anomaliae mediae, vt 1, 0085193 ad 1, ita vt motus medius fit ad motum Apogaei vt 1, 0085193 ad 0, 0085193, hoc est, vt 1 ad 0, 0084473. Per Theoriam autem ob actionem solis motus lunae medius ad motum Apogaei tantum esse deberet vt 1 ad 0, 0041045, vnde excessus motus Apogaei veri supra Theoreticum est ad motum medium vt 0, 0043428 ad 1.

§. 38. Ad modum ergo probabile videtur, hunc motus Apogaei lunae excessum inde oriri, quod lunae corpus fit oblongum, eiusque axis longior perpetuo ad centrum terrae fere directus. Atque hinc etiam ratio figurae istius oblongae definiri poterit, cum esse debeat  $\frac{6ab}{b^2} = 0, 0043428$ . Posito enim in semidiametris terrae  $b = 60$ , fiet  $ab = 2, 60568$ , et si fingamus  $a = b$  seu  $CB = CA$ , foret  $CA = CB = 1\frac{1}{2}$ ; hincque prodiret tota distantia seu longitudo virgae  $AB = 2\frac{1}{2}$  semid. terrae. Luna ergo, cum non sit virga duobus globis onusta, vt eius figura quasi aequiualeat, multo longior esse deberet, ac fortasse 3 diametros terrae superare, ita vt eius axis longior plus quam octies excederet breuiorem, quod vix verisimile videtur.

§. 39. Quodsi ergo huiusmodi figura lunae oblonga non toleranda videatur, etsi fortassis minor a figura Sphaerica defectus aliquid ad Apogaei accelerationem conferre possit; alia certe vis adesse debet insuper in lunam  
agens

agens, quae tanto Apogaei motui producendo par fit: seu statuendum erit, vim terrae, lunam trahentem, non exacte esse quadratis distantiarum reciproce proportionalem: quod cum ex nonnullis lunae exiguis inaequalitatibus, quae Theoriae repugnant, concludendum videtur, tum etiam inde, quod parallaxis lunae vera integro fere minuto maior deprehenditur, quam secundum Theoriam esse deberet.

---

---



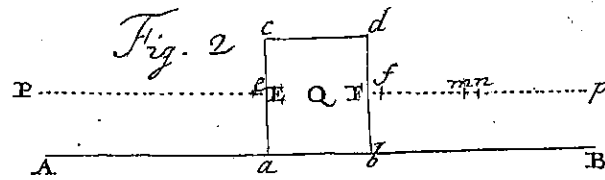
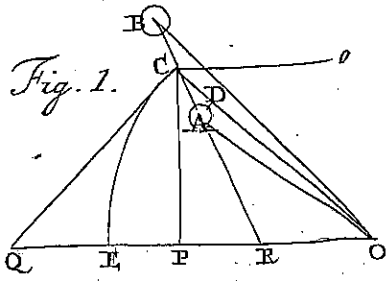


Fig. 3.

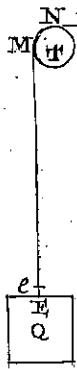
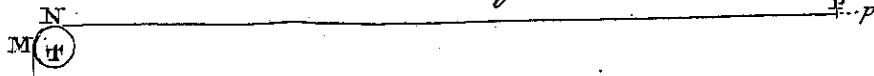


Fig. 4.

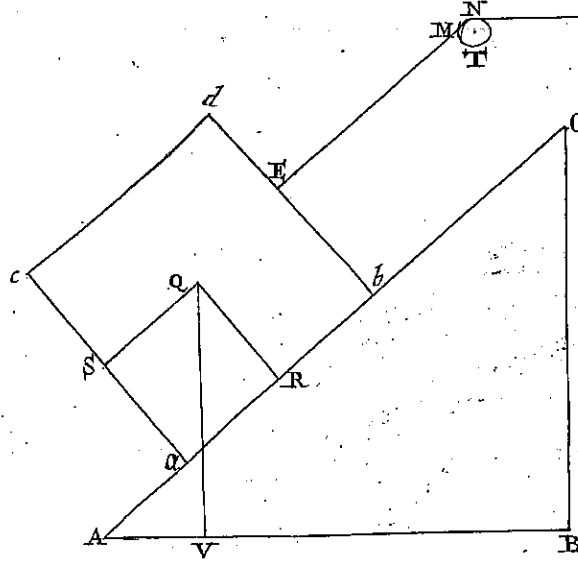


Fig. 6.

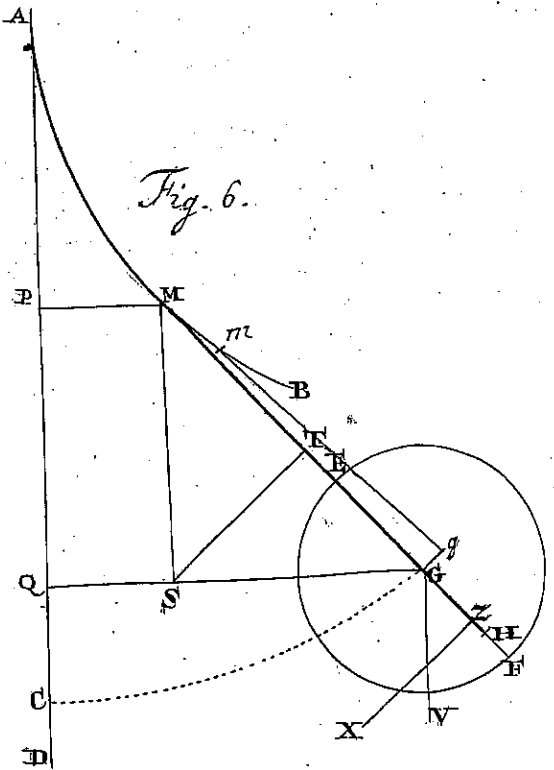


Fig. 5.

