1753

Solutio problematis geometrici

Leonhard Euler

E 192

SOLVTIO

PROBLEMATIS GEOMETRICI.

AVCTORE

L. EULERO,

Problema.

Tab. IV Fig. 1. Datis Diametris coniugatis Ee, Ff ellipſis tam magnitudine quam poſitione, inuenire axes coniugatos tam magnitudine quam longitudine.

Conſtructio.

Iungatur EF, et ex centro ellipſis C ducatur recta CG ita vt ang: $FCG =$ ang: ECF; tum ducatur FG ita vt ang: $CFG =$ ang: CEF; ſicque triangulum CFG ſimile fiat triangulo CEF. Deinde iuncta eG angulus CeG biſecetur recta eH huicque ex centro C parallela educatur CI, huicque conſtituatur perpendicularis CK, quibus recta per E alteri diametro Ff parallela acta IEK occurrat in punctis I et K. Ex E porro tam in CI quam CK demittantur perpendicula EL et EM, atque in CI capiatur CA media proportionalis inter CL et CI, itemque in CK capiatur CB media proportionalis inter CM et CK, erunt CA et CB ſemiaxes principales, tam poſitione quam magnitudine, determinati.

Alia

Alia Constructio.

Sint C E et C F semidiametri coniugatae, statuatur E D = E C, vt C E D sit triangulum isosceles, et capiantur E G = E H = C F, iungatur C H ipsique parallela ducatur G I rectam E D secans in I. Per I agatur C I K = C E, iunctaque E K bisecetur in M, erit recta C M positio alterius axis, eique perpendicularis C R positio alterius axis coniugati. Ex F demittatur quoque in C M perpendiculum F N, quo producto in L vt sit N L = F N erunt E K et F L ordinatae ad axem C M, et cum insuper dentur tangentes in E et F et in L, est enim tangens E P parallela C F et tangens L Q parallela C K, hinc vtriusque semiaxis quantitas facile determinatur. Erit nempe alter semiaxis C A media proportionalis inter C M et C P, et alter C B media proportionalis inter C R et C Q ducta L R ad C Q perpendiculari. Fig. 2.

Alia Constructio.

Cum diametri coniugatae in centro se ad angulos obliquos intersecent, quorum alter acutus, alter obtusus, eligantur binae semidiametri coniugatae C E, C F angulum acutum E C F constituentur, statuaturque vt ante E D = E C, ac fiat E G = E H = C F, tum ductae, C H per G parallela agatur G I: iunctaque C I angulus E C I bisecetur recta C U, quae aequalis capiatur mediae proportionali inter C E et C I, eritque U alter focus: vnde simul alter e regione situs habebitur: Datis autem focis et puncto in ellipsi axes principales facile assignantur. Fig. 3.

Demonſtratio
harum Conſtructionum.

Fig. 4. Sit E C F quadrans ellipticus, in quo datae ſunt ſemidiametri coniugatae $CE = e$, $CF = f$, vna cum angulo intercepto $ECF = \theta$. Sit C A alter ſemiaxium principalium cuius tam poſitio quam quantitas quaeritur; Ponatur ergo primum pro eius poſitione inuenienda angulus $ECA = \Phi$, huic angulo aequalis ſtatuatur angulus A C M, vt ſit angulus $ECM = 2\Phi$, et quia puncta E et M ab axe C A aequidiſtant, a centro quoque C aequidiſtabunt, eritque propterea $CM = CE = e$. Ducatur M P ipſi C F parallela, eritque angulus E P M $= ECF = \theta$.

Nunc in triangulo CPM praeter latus $CM = e$ habentur omnes anguli nempe: $EPM = \theta$; $PCM = 2\Phi$; et $CMP = \theta - 2\Phi$; vnde ex Trigonometria erit:

$\text{ſin. } EPM : CM = \text{ſin. } PCM : PM = \text{ſin. } CMP : CP$

ſeu $\text{ſin. } \theta : e = \text{ſin. } 2\Phi : PM = \text{ſin.} (\theta - 2\Phi) : CP$

Hinc itaque obtinetur:

$$PM = \frac{e \,\text{ſin. } 2\Phi}{\text{ſin. } \theta} \text{ et } CP = \frac{e \,\text{ſin. } (\theta - 2\Phi)}{\text{ſin. } \theta}$$

Iam ex natura ellipſis eſt

$$PM^2 = \frac{BF^2}{CE^2}(CE^2 - CP^2) \text{ ſiue}$$

$$CE^2, PM^2 + CF^2, CP^2 = CE^2, CF^2$$

vbi ſi valores pro PM et CP ſubſtituantur, orietur

$$\frac{e^4 \,\text{ſin. } 2\Phi^2}{\text{ſin. } \theta^2} + \frac{eeff \,\text{ſin. } (\theta - 2\Phi)^2}{\text{ſin. } \theta^2} = eeff$$

quae diuiſa per ee et multiplicata per ſin θ^2, abit in

$$ee \text{ ſin. } 2\Phi^2 + ff \text{ ſin. } (\theta - 2\Phi)^2 = ff \text{ ſin. } \theta^2.$$

At eſt ſin. $(\theta - 2\Phi) = \text{ſin. } \theta \text{ coſ. } 2\Phi - \text{coſ. } \theta \text{ ſin. } 2\Phi$, ideoque ſin.

$\sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.\theta^2\cos.2\Phi^2 - 2\sin.\theta\cos.\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi + \cos.\theta^2\sin.2\Phi^2$

Vnde cum ſit $ee\sin.2\Phi^2 = ff(\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2)$ erit

ob $1-\cos.2\Phi^2 = \sin.2\Phi^2$:

$\sin\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.\theta^2\sin.2\Phi^2 + 2\sin.\theta\cos.\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - \cos.\theta^2\sin.2\Phi^2$

At eſt $2\sin.\theta\cos.\theta = \sin.2\theta$ et $\cos.\theta^2 - \sin.\theta^2 = \cos.2\theta$, ergo

$\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.2\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - \cos.2\theta\sin.2\Phi^2$

ſicque erit

$$ee\sin.2\Phi^2 = ff\sin.2\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - ff\cos.2\theta\sin.2\Phi^2$$

quae diuiſa per $\sin.2\Phi$ dabit

$$ee\sin.2\Phi = ff\sin.2\theta\cos.2\Phi - ff\cos.2\theta\sin.2\Phi$$

ex qua tandem elicitur:

$$\frac{\sin.2\Phi}{\cos.2\Phi} = \text{tang.}\, 2\Phi = \frac{ff\sin.2\theta}{ee+ff\cos.2\theta}$$

Inuento ergo angulo $ECM = 2\Phi$ cuius tangens eſt $= \frac{ff\sin.2\theta}{ee+ff\cos.2\theta}$; ſi hic angulus biſecetur recta CA, haec iam erit poſitio alterius axis principalis, cuius quantitas ita definitur.

Demiſſo ex E in CA perpendiculo ER, ductaque ad E tangente ET, quae ipſi CF erit parallela, donec ipſi CA productae occurrat in T, ex natura tangentis conſtat fore CA mediam proportionalem inter CR et CT. Iam ob $CE = e$ et $ECA = \Phi$ erit $ER = e\sin.\Phi$ et $CR = e\cos.\Phi$. Tum ob ang: $CTE = \theta - \Phi$ erit $ET = \frac{e\sin.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}$ et $CT = \frac{e\sin.\theta}{\sin.(\theta-\Phi)}$.

Hinc itaque erit:

ſemiaxis $CA = e\sqrt{\frac{\sin.\theta\cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}}$.

Alter ſemiaxis ad CA erit normalis, qui ſi intelligatur linea CB repraeſentari, cum ſit

$RE^2 = \frac{CB^2}{CA^2}(CA^2 - CR^2)$, ex natura ellipsis
erit $CB = \frac{CA.RE}{\sqrt{(CA^2 - CR^2)}}$.
Iam est $CA.RE = ee\ \text{sin.}\ \Phi \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ \Phi}{\text{sin.}\ (\theta - \Phi)}}$

$$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = \sqrt{\left(\frac{ee\ \text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ \Phi}{\text{sin.}\ (\theta - \Phi)} - ee\ \text{cos.}\ \Phi^2\right)} \text{ seu}$$

$$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{cos.}\ \Phi}{\text{sin.}\ (\theta - \Phi)}}\ (\text{sin.}\ \theta - \text{sin.}\ (\theta - \Phi)\ \text{cos.}\ \Phi)$$

Cum autem sit $\theta = \theta - \Phi, + \Phi$ erit
$\text{sin.}\ \theta = \text{sin.}\ (\theta - \Phi)\ \text{cos.}\ \Phi + \text{cos.}\ (\theta - \Phi)\ \text{sin.}\ \Phi$; ex quo habebitur

$$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{cos.}\ (\theta - \Phi)\ \text{sin.}\ \Phi\ \text{cos.}\ \Phi}{\text{sin.}\ (\theta - \Phi)}}$$

Ergo prodibit alter semiaxis.

$$CB = e\ \text{sin.}\ \Phi \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta}{\text{cos.}\ (\theta - \Phi)\ \text{sin.}\ \Phi}} = e\sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{sin.}\ \Phi}{\text{cos.}\ (\theta - \Phi)}}.$$

Idem hic calculus locum habebit, si figura ad alteram semidiametrum datam $CF = f$ accommodetur, tum autem quantitates e et f atque anguli Φ et $\theta - \Phi$ inter se permutari debent; vnde denuo orietur.

$$CA = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ (\theta - \Phi)}{\text{sin.}\ \Phi}} \text{ et } CB = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{sin.}\ (\theta - \Phi)}{\text{cos.}\ \Phi}}$$

si ergo axes coniugatos quaesitos ponamus
alterum $CA = a$, alterum $CB = b$ erit

$$a = e\sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ \Phi}{\text{sin.}\ (\theta - \Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ (\theta - \Phi)}{\text{sin.}\ \Phi}}$$

$$b = e\sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{sin.}\ \Phi}{\text{cos.}\ (\theta - \Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\ \theta\ \text{sin.}\ (\theta - \Phi)}{\text{cos.}\ \Phi}}.$$

Hinc erit primo $ab = ef\ \text{sin.}\ \theta$, qua aequatione continetur aequalitas parallelogrammorum circa diametros coniugatas descriptorum:

Deinde hinc etiam denuo angulum Φ determinare poterimus; erit enim

$$\frac{ee\ \text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ \Phi}{\text{sin.}\ (\theta - \Phi)} = \frac{ff\ \text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ (\theta - \Phi)}{\text{sin.}\ \Phi}$$

seu $ee\ \text{sin.}\ 2\Phi = ff\ \text{sin.}\ 2(\theta - \Phi) = ff\ \text{sin.}\ 2\theta\ \text{cos.}\ 2\Phi - ff\ \text{cos.}\ 2\theta\ \text{sin.}\ 2\Phi$
vnde

vnde fit vt ante:

$\frac{\text{fin. } 2\Phi}{\text{cof. } 2\Phi} = \text{tang. } 2\Phi = \frac{ff \text{ fin. } 2\theta}{ee + ff \text{ cof. } 2\theta}$.

Ex quatuor fuperioribus formulis quoque obtinemus:

$\frac{\text{fin. } (\theta - \Phi)}{\text{cof. } \Phi} = \frac{ee \text{ fin. } \theta}{aa} = \frac{bb}{ff \text{ fin. } \theta} = A$

$\frac{\text{cof. } (\theta - \Phi)}{\text{fin. } \Phi} = \frac{aa}{ff \text{ fin. } \theta} = \frac{ee \text{ fin. } \theta}{bb} = B$

vnde fit

$\text{fin. } \theta - \frac{\text{cof. } \theta \text{ fin. } \Phi}{\text{cof. } \Phi} = A$ et $\frac{\text{cof. } \theta \text{ cof. } \Phi}{\text{fin. } \Phi} + \text{fin. } \theta = B$

ergo $\frac{\text{cof. } \theta \text{ fin. } \Phi}{\text{cof. } \Phi} = \text{fin. } \theta - A$ et $\frac{\text{cof. } \theta \text{ cof. } \Phi}{\text{fin. } \theta} = B - \text{fin. } \theta$

quae aequationes inuicem multiplicatae praebent:

$\text{cof. } \theta^2 = (A+B) \text{ fin. } \theta - AB - \text{fin. } \theta^2$ feu $1 + AB = (A+B) \text{ fin. } \theta$.

Cum iam A et B geminos habeant valores, erit

$AB = \frac{ee}{ff}$ et $(A+B) \text{ fin. } \theta = \frac{bb}{ff} + \frac{aa}{ff}$

vnde fit $1 + \frac{ee}{ff} = \frac{aa+bb}{ff}$, ideoque hinc ifta nota ellipfeos proprietas refultat: $aa + bb = ee + ff$.

Porro fi alterum focum ponamus in U, erit vti conftat

$CU = \sqrt{(aa-bb)} = \sqrt[4]{(aa-bb)^2}$

at $(aa-bb)^2 = (aa+bb)^2 - 4aabb$.

Cum igitur fit $aa + bb = ee + ff$ et $ab = ef \text{ fin. } \theta$ erit

$C\,U = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff(1 - 2 \text{ fin. } \theta^2)}$

verum eft $1 - 2 \text{ fin. } \theta^2 = \text{cof. } 2\theta$, hincque obtinetur:

$C\,U = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 - 2eeff. \text{ cof. } 2\theta)}$

His inuentis ratio conftructionum datarum fiet perfpicua:

Pro I. *Conftructione*. Ob $ECF = FCG = \theta$ erit ECG Fig. 1. 2θ; et cum fit $EC(e) : CF(f) = CF(f) : CG$ erit $CG = \frac{ff}{e}$; Porro ducta eG erit tang. $CeG = \frac{CG \text{ fin. } eCG}{Ce - CG \text{ cof. } eCG}$

 At

At $Ce = e$; $\sin.\, eCG = \sin.\, 2\theta$ et $\cos.\, eCG = -\cos.\, 2\theta$, vnde fit tang. $CeG = \frac{ff \sin.\, 2\theta}{ee + ff \cos.\, 2\theta}$ quae eſt expreſſio ante pro tang. 2Φ inuenta. Erit ergo $CeG = 2\Phi$, anguloque CeG biſecto per eH erit angulus CeH eique aequalis $ECI = \Phi$. Vnde recta CI erit poſitio alterius axis, eique normalis CK dabit poſitionem alterius. Deinde recta IEK per E ipſi CF parallela ducta eſt tangens ellipſis in E, quare ſi ex E in vtrumque axem perpendicula EL, EM demittantur, ſemiaxis CA erit media proportionalis inter CL et CI, itemque ſemiaxis CB media proportionalis inter CM et CK, plane vti conſtructio habet.

Fig. 2. *Pro II. Conſtructione.* Ob triangulum CED iſosceles et angulum $ECD = EDC = \theta$ erit ang: $CED = 180° - 2\theta$. Deinde ob $EC = e$, $EG = EH = CF = f$, quia GI ipſi CH eſt parallela, erit $EI = \frac{ff}{e}$. Porro eſt tangens $ECI = \frac{EI \sin.\, CED}{CE - EI \cos.\, CED}$ ergo ob $\sin.\, CED = \sin.\, 2\theta$ et $\cos.\, CED = -\cos.\, 2\theta$ habebitur tangens $ECI = \frac{ff \sin.\, 2\theta}{ee + ff \cos.\, 2\theta}$, eritque ergo $ECI = 2\Phi$; vnde ſumta $CK = CE = e$, biſectaque EK in M, recta CM angulum $ECK = 2\Phi$ biſecabit, ita vt ſit $ECM = \Phi$, ideoque $CMAP$ poſitio alterius axis, cuius ſemiſſis quantitas CA vt ante definitur, et determinatio alterius ſemiaxis CB ex ipſa conſtructione eſt manifeſta.

Fig. 3. *Pro III. Conſtructione.* Ex ratione praecedentis conſtructionis intelligitur rectam CU angulum ECI biſecantem dare poſitionem axis transuerſi. Cum igitur ſit $CE = e$, $EI = \frac{ff}{e}$ et $CEI = 180° - 2\theta$ et erit $CI = \sqrt{(CE^2 + EI^2 - 2\, CE.\, EI \cos.\, CEI)} = \sqrt{(ee + \frac{f^4}{ee} + 2ff \cos.\, 2\theta)} = \frac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \cos.\, 2\theta)}$.

Hinc

Hinc cum ſit CU media proportionalis inter CE et CI erit $CU = \sqrt{e \cdot \frac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \operatorname{cof.} 2\theta)}}$

ſeu $CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff \operatorname{cof.} 2\theta)}$.
Ex qua expreſſione manifeſtum eſt fore U alterum ellipſeos focum, vnde ſimul alter focus innoteſcit.
Hic tantum certum eſſe oportet, rectam CU eſſe poſitionem axis transuerſi non vero coniugati; ſed in hoc error facile euitatur, ſi perpendamus, axem transuerſum ſemper intra angulum acutum, quem diametri coniugatae conſtituunt, cadere.

Verum vt hae conſtructiones faciles videntur, tamen fateri cogor, conſtructionem, quam *Pappus Alexandrinus* ſine demonſtratione quidem exhibuit, his palmam longe praeripere. Quoniam vero demonſtrationem non addidit, eamque *Commentator eius Commendinus* non ſatis feliciter ſupplere conatus eſt, hic non ſolum conſtructionem *Pappi*, ſed etiam eius rationem coronidis loco ſubiungam.

Sint igitur CE et CF ſemidiametri ellipſis datae, Fig. 5. ac per F agatur ipſi CE parallela indefinita, quae ellipſin in F tanget. Cadant axes principales in rectas CG et CH, atque perſpicuum eſt, ſi puncta G et H eſſent cognita, poſitionem axium principalium inde determinari. Totum negotium ergo huc redit, vt puncta G et H definiantur. Concipiamus per haec puncta quaeſita G et H, atque ellipſis centrum C tranſire, et quoniam angulus GCH rectus eſt iam nouimus huius circuli centrum alicubi in recta GH exiſtere. Praeterea vero ex natura tangentium ellipſis nouimus, quoniam CE et ſemidiameter

ter coniugata ad C F, tangensque in F ab axibus principalibus in G et H secatur, esse rectangulum F G, F H aequale quadrato ipsius C E. Duas ergo habemus conditiones, quibus circulus quaesitus per C et ambo desiderata tangentis puncta G et H transiturus determinatur: altera vt quod eius centrum in ipsa hac recta G H situm esse debet, altera vero quod rectangulum F G, F H quadrato ipsius C E aequale esse debet. Transeat iste circulus etiam nunc incognitus per rectae C F productae punctum K. et quia erit $CF . FK = FG . FH$, erit quoque $CF . FK = CE^2$, ideoque F K tertia proportionalis ad C F et C E quarum cum vtraque sit data, innotescet punctum K et circulus quaesitus transire debet per puncta C et K, ita vt eius centrum in rectam G H cadat. Bisecta ergo C K in L, eique in L iuncta normali L I rectam G H in I secante erit I centrum circuli quaesiti, ex quo circulus radio I C vel I K descriptus rectam G H in punctis quaesitis secabit; quae est *Pappi* constructio.

Sequens autem constructio simplicior videtur quam hactenus allatae, quoniam non solum axium principalium positionem sed etiam quantitatem sponte exhibet, atque omnes operationes, quibus opus est, iam in se complectitur, ita vt ne mediae quidem proportionalis sumtione indigeamus.

Noua Constructio.

Problematis propositi.

Fig. 6. Sint C E, C F semidiametri coniugatae propositae ad angulum acutum E C F inclinatae, ad quas compleatur paralle-

parallelogrammum CEDF. Tum producatur EC in e, vt fit $Ce = CE$, et ad CF normaliter iungatur $CG = CF$. Iunctis EG et eG producatur EG in H, vt fit $GH = Ge$, et ducta eH bisecetur in I; atque in recta CL capiatur $KL = KI$. Deinde ex centro C circini apertura CI describatur arcus MN rectas FD et ED secans in M et N, atque ad has rectas ex punctis istis perpendiculares constituantur MO et NO se mutuo in O secantes, per quod punctum O ex centro C vsque ad arcum MN ducatur recta COA, erit haec semiaxis transuersus, in eoque punctum O alter ellipseos focus. Denique ad CA normaliter statuatur $CB = CL$, eritque CB semiaxis coniugatus.

Demonstratio.

Ponantur semidiametri coniugatae $CE = e$ et $CF = f$ angulus vero $ECF = \theta$; erit ex constructione $Ce = e$, $CG = f$, et angulus $GCe = 90° - \theta$, ideoque cos. GCe = sin. θ. Porro vocetur semiaxis transuersus $CA = a$, et semiaxis coniugatus $CB = b$; erit per supra inuenta $aa + bb = ee + ff$ et $abef$ sin. θ. Hinc fiet:

$aa + 2ab + bb = ee + ff + 2ef \sin.\theta$ et $aa - 2ab + bb = ee + ff - 2ef \sin.\theta$

ergo $a + b = \sqrt{(ee + ff + 2ef \sin.\theta)}$ et $a - b = \sqrt{(ee + ff - 2ef \sin\theta)}$

At ex triangulo ECG ab $CE = e$, $CG = f$ et cos. GCe = sin. θ reperitur $EG = \sqrt{(ee + ff + 2ef \sin.\theta)}$, ex triangulo vero eCG, vbi est $Ce = e$, $CG = f$ et cos. GCe = sin. θ, fit $Ge = \sqrt{(ee + ff - 2ef \sin.\theta)}$. Hanc ob rem habebitur:

$a + b = EG$ et $a - b = eG$

ideoque $2a = EG + eG$ et $2b = EG - eG$.

 Cum

Cum iam ſit $GH = eG$, erit $2a = EH$, ac biſecta eH in I, ob C rectae Ee punctum medium, erit CI parallela ipſi EH eiusque ſemiſſis, vnde $a = CI$; et quia $IK = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}Ge$, et $KL = IK$, erit $CL = CI - 2IK = CI - GH = a - Ge$, ideoque $CL = b$. Aequatur ergo CI ſemiaxi transuerſo et CL ſemiaxi coniugato. His inuentis praeterea ex natura ellipſis conſtat, quia ED et FD ſunt ellipſis tangentes, ſi ex altero foco O in has tangentes perpendicula demittantur ON et OM, punctorum M et N a centro C diſtantias ſemiaxi transuerſo aequari. Viciſſim ergo ſi puncta M et N ita accipiantur, vt eorum diſtantia a centro C aequalis ſit ſemiaxi transuerſo CI, quemadmodum ea quoque in conſtructione ſunt ſumta, atque ex his punctis ad tangentes perpendicula ducantur MO et NO, haec perpendicula ſe inuicem in foco O eſſe interſectura. Reperitur ergo hoc modo alter focus O, qui cum in axe transuerſo ſit ſitus, erit recta CA per O ducta ad arcum MN non ſolum axi transverſo aequalis, ſed etiam veram eius poſitionem tenet. Cum igitur ſit CA ſemiaxis transuerſus, ſi ad eum normaliter ſtatuatur $CB = CL$, erit quoque CB ſemiaxis coniugatus.

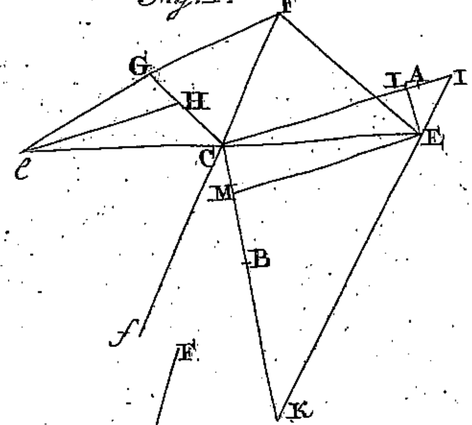

Fig. 1.

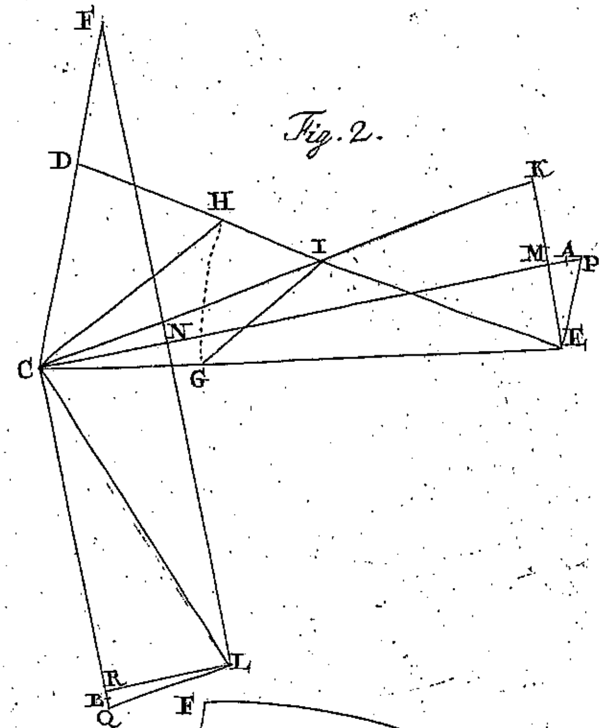

Fig. 2.

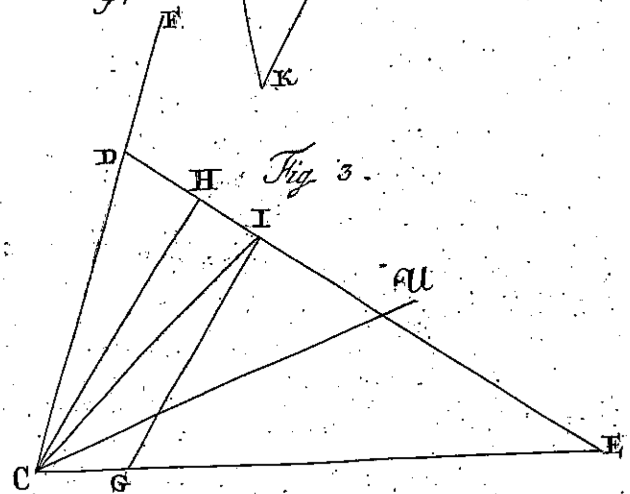

Fig. 3.

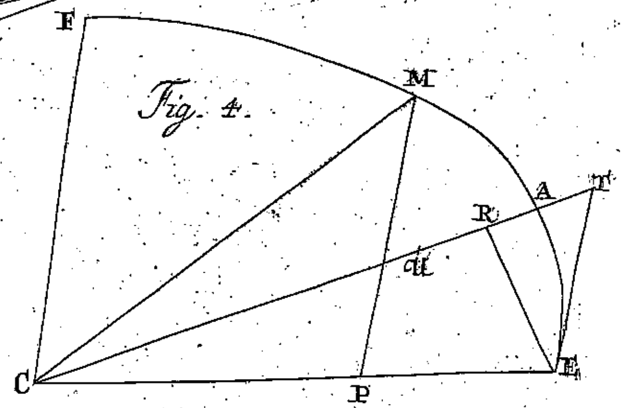

Fig. 4.

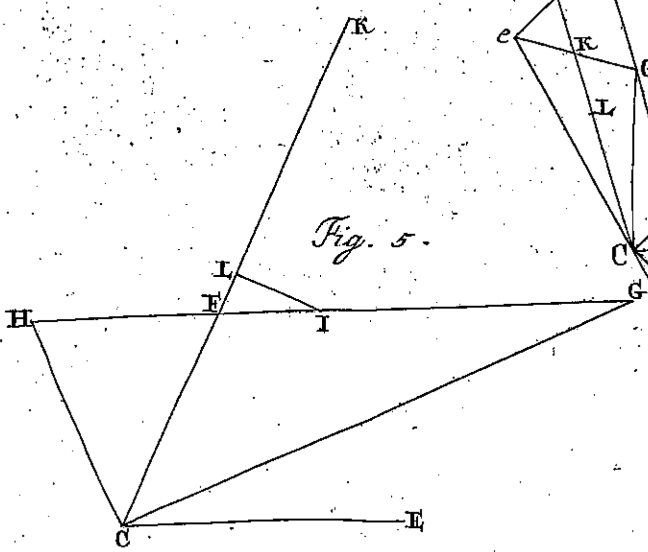

Fig. 5.

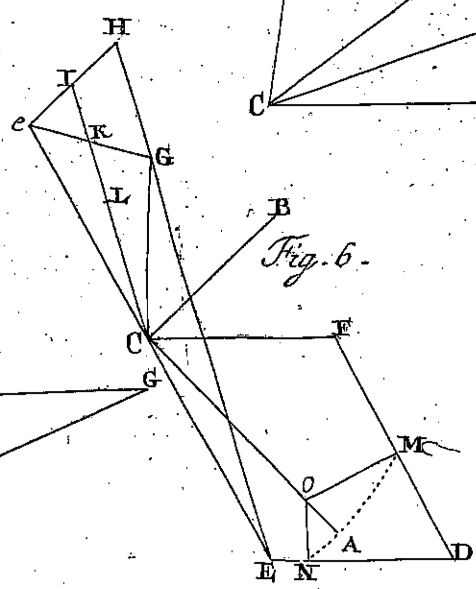

Fig. 6.