



1753

Solutio problematis geometrici

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Solutio problematis geometrici" (1753). *Euler Archive - All Works*. 192.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/192>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



SOLVTIO
 PROBLEMATIS GEOMETRICI.

AVCTORE

L. EULERO,

Problema.

Tab. IV
 Fig. I. **D**atis Diametris coniugatis Ee , Ff ellipsis tam magnitudine quam positione, inuenire axes coniugatos tam magnitudine quam longitudine.

Constructio.

Iungatur EF , et ex centro ellipsis C ducatur recta CG ita vt $\text{ang: } FCG = \text{ang: } ECF$; tum ducatur FG ita vt $\text{ang: } CFG = \text{ang: } CEF$; sicque triangulum CFG simile fiat triangulo CEF . Deinde iuncta eG angulus CeG bisecetur recta eH huicque ex centro C parallela educatur CI , huicque constituitur perpendicularis CK , quibus recta per E alteri diametro Ff parallela acta IEK occurrat in punctis I et K . Ex E porro tam in CI quam CK demittantur perpendiculara EL et EM , atque in CI capiatur CA media proportionalis inter CL et CI , itemque in CK capiatur CB media proportionalis inter CM et CK , erunt CA et CB semiaxes principales, tam positione quam magnitudine, determinati.

Alia

Alia Constructio.

Sint CE et CF semidiametri coniugatae, statuatur Fig. 2.
 $ED = EC$, vt CED fit triangulum isosceles, et ca-
 piantur $EG = EH = CF$, iungatur CH ipsique paral-
 lela ducatur GI rectam ED secans in I . Per I aga-
 tur $CIK = CE$, iunctaque EK bifecetur in M , erit
 recta CM positio alterius axis, eique perpendicularis CR
 positio alterius axis coniugati. Ex F demittatur quoque
 in CM perpendiculum FN , quo producto in L vt fit
 $NL = FN$ erunt EK et FL ordinatae ad axem
 CM , et cum insuper dentur tangentes in E et F et
 in L , est enim tangens EP parallela CF et tangens
 LQ parallela CK , hinc vtriusque semiaxis quantitas fa-
 cile determinatur. Erit nempe alter semiaxis CA me-
 dia proportionalis inter CM et CP , et alter CB me-
 dia proportionalis inter CR et CQ ducta LR ad CQ
 perpendiculari.

Alia Constructio.

Cum diametri coniugatae in centro se ad angulos obliquos Fig. 3.
 intuscent, quorum alter acutus, alter obtusus, eligantur
 binae semidiametri coniugatae CE , CF angulum acutum
 ECF constituentur, statuaturque vt ante $ED = EC$, ac
 fiat $EG = EH = CF$, tum ductae, CH per G pa-
 rallela agatur GI : iunctaque CI angulus ECI bifecetur
 recta CU , quae aequalis capiatur mediae proportionali
 inter CE et CI , eritque U alter focus: vnde simul alter
 e regione situs habebitur: Datis autem focus et puncto in
 ellipsi axes principales facile assignantur.

Demonstratio

harum Constructionum.

Fig. 4

Sit ECF quadrans ellipticus, in quo datae sunt semidiametri coniugatae $CE = e$, $CF = f$, vna cum angulo intercepto $ECF = \theta$. Sit CA alter semiaxium principalium cuius tam positio quam quantitas quaeritur; Ponatur ergo primum pro eius positione inuenienda angulus $ECA = \Phi$, huic angulo aequalis statuatur angulus ACM , vt sit angulus $ECM = 2\Phi$, et quia puncta E et M ab axe CA aequidistant, a centro quoque C aequidistabunt, eritque propterea $CM = CE = e$. Ducatur MP ipsi CF parallela, eritque angulus $EPM = ECF = \theta$.

Nunc in triangulo CPM praeter latus $CM = e$ habentur omnes anguli nempe: $EPM = \theta$; $PCM = 2\Phi$; et $CMP = \theta - 2\Phi$; vnde ex Trigonometria erit:
 $\sin. EPM : CM = \sin. PCM : PM = \sin. CMP : CP$
 seu $\sin. \theta : e = \sin. 2\Phi : PM = \sin. (\theta - 2\Phi) : CP$.
 Hinc itaque obtinetur:

$$PM = \frac{e \sin. 2\Phi}{\sin. \theta} \text{ et } CP = \frac{e \sin. (\theta - 2\Phi)}{\sin. \theta}$$

Tam ex natura ellipsis est

$$PM^2 = \frac{BF^2}{CE^2} (CE^2 - CP^2) \text{ siue}$$

$$CE^2, PM^2 + CF^2, CP^2 = CE^2, CF^2$$

vbi si valores pro PM et CP substituuntur, orietur

$$\frac{e^4 \sin. 2\Phi^2}{\sin. \theta^2} + \frac{e e f f \sin. (\theta - 2\Phi)^2}{\sin. \theta^2} = e e f f$$

quae diuisa per ee et multiplicata per $\sin. \theta^2$, abit in

$$e e \sin. 2\Phi^2 + f f \sin. (\theta - 2\Phi)^2 = f f \sin. \theta^2.$$

At est $\sin. (\theta - 2\Phi) = \sin. \theta \cos. 2\Phi - \cos. \theta \sin. 2\Phi$, ideoque
fin.

$$\sin. (\theta - 2\Phi)^2 = \sin. \theta^2 \cos. 2\Phi^2 - 2 \sin. \theta \cos. \theta \sin. 2\Phi \cos. 2\Phi + \cos. \theta^2 \sin. 2\Phi^2$$

Vnde cum sit $ee \sin. 2\Phi^2 = ff (\sin. \theta^2 - \sin. (\theta - 2\Phi)^2)$ erit

$$\text{ob } 1 - \cos. 2\Phi^2 = \sin. 2\Phi^2 :$$

$$\sin. \theta^2 - \sin. (\theta - 2\Phi)^2 = \sin. \theta^2 \sin. 2\Phi^2 + 2 \sin. \theta \cos. \theta \sin. 2\Phi \cos. 2\Phi - \cos. \theta^2 \sin. 2\Phi^2$$

At est $2 \sin. \theta \cos. \theta = \sin. 2\theta$ et $\cos. \theta^2 - \sin. \theta^2 = \cos. 2\theta$, ergo

$$\sin. \theta^2 - \sin. (\theta - 2\Phi)^2 = \sin. 2\theta \sin. 2\Phi \cos. 2\Phi - \cos. 2\theta \sin. 2\Phi^2$$

sicque erit

$$ee \sin. 2\Phi^2 = ff \sin. 2\theta \sin. 2\Phi \cos. 2\Phi - ff \cos. 2\theta \sin. 2\Phi^2$$

quae diuisa per $\sin. 2\Phi$ dabit

$$ee \sin. 2\Phi = ff \sin. 2\theta \cos. 2\Phi - ff \cos. 2\theta \sin. 2\Phi$$

ex qua tandem elicitur :

$$\frac{\sin. 2\Phi}{\cos. 2\Phi} = \text{tang. } 2\Phi = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$$

Inuento ergo angulo $ECM = 2\Phi$ cuius tangens est $= \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$; si hic angulus bisecetur recta CA, haec iam erit positio alterius axis principalis, cuius quantitas ita definitur.

Demisso ex E in CA perpendicularo ER, ductaque ad E tangente ET, quae ipsi CF erit parallela, donec ipsi CA productae occurrat in T, ex natura tangents constat fore CA mediam proportionalem inter CR et CT. Iam ob $CE = e$ et $ECA = \Phi$ erit $ER = e \sin. \Phi$ et $CR = e \cos. \Phi$. Tum ob ang: $CTE = \theta - \Phi$ erit $ET = \frac{e \sin. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)}$ et $CT = \frac{e \sin. \theta}{\sin. (\theta - \Phi)}$.

Hinc itaque erit :

$$\text{semiaxis } CA = e \sqrt{\frac{\sin. \theta \cos. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)}}$$

Alter semiaxis ad CA erit normalis, qui si intelligatur linea CB representari, cum sit

$$E f 2$$

$$RE^2 =$$

$RE^2 = \frac{CB^2}{CA^2} (CA^2 - CR^2)$, ex natura ellipsis

erit $CB = \frac{CA \cdot RE}{\sqrt{CA^2 - CR^2}}$.

Iam est $CA \cdot RE = ee \sin. \Phi \sqrt{\frac{\sin. \theta \cos. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)}}$

$\sqrt{CA^2 - CR^2} = \sqrt{\left(\frac{ee \sin. \theta \cos. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)} - ee \cos. \Phi^2\right)}$ feu

$\sqrt{CA^2 - CR^2} = e \sqrt{\frac{\cos. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)} (\sin. \theta - \sin. (\theta - \Phi) \cos. \Phi)}$

Cum autem fit $\theta = \theta - \Phi$, + Φ erit

$\sin. \theta = \sin. (\theta - \Phi) \cos. \Phi + \cos. (\theta - \Phi) \sin. \Phi$; ex quo habebitur

$\sqrt{CA^2 - CR^2} = e \sqrt{\frac{\cos. (\theta - \Phi) \sin. \Phi \cos. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)}}$

Ergo prodibit alter femiaxis.

$CB = e \sin. \Phi \sqrt{\frac{\sin. \theta}{\cos. (\theta - \Phi) \sin. \Phi}} = e \sqrt{\frac{\sin. \theta \sin. \Phi}{\cos. (\theta - \Phi)}}$.

Idem hic calculus locum habebit, si figura ad alteram semidiametrum datam $CF = f$ accommodetur, tum autem quantitates e et f atque anguli Φ et $\theta - \Phi$ inter se permutari debent; vnde denuo orietur.

$CA = f \sqrt{\frac{\sin. \theta \cos. (\theta - \Phi)}{\sin. \Phi}}$ et $CB = f \sqrt{\frac{\sin. \theta \sin. (\theta - \Phi)}{\cos. \Phi}}$.

si ergo axes coniugatos quaesitos ponamus

alterum $CA = a$, alterum $CB = b$ erit

$a = e \sqrt{\frac{\sin. \theta \cos. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)}} = f \sqrt{\frac{\sin. \theta \cos. (\theta - \Phi)}{\sin. \Phi}}$

$b = e \sqrt{\frac{\sin. \theta \sin. \Phi}{\cos. (\theta - \Phi)}} = f \sqrt{\frac{\sin. \theta \sin. (\theta - \Phi)}{\cos. \Phi}}$.

Hinc erit primo $ab = ef \sin. \theta$, qua aequatione continetur aequalitas parallelogrammorum circa diametros coniugatas descriptorum:

Deinde hinc etiam denuo angulum Φ determinare poterimus; erit enim

$\frac{e e \sin. \theta \cos. \Phi}{\sin. (\theta - \Phi)} = \frac{ff \sin. \theta \cos. (\theta - \Phi)}{\sin. \Phi}$

feu $ee \sin. 2\Phi = ff \sin. 2(\theta - \Phi) = ff \sin. 2\theta \cos. 2\Phi - ff \cos. 2\theta \sin. 2\Phi$

vnde

vnde fit vt ante :

$$\frac{\sin. 2 \Phi}{\cos. 2 \Phi} = \text{tang. } 2 \Phi = \frac{ff \sin. 2 \theta}{ee + ff \cos. 2 \theta}.$$

Ex quatuor superioribus formulis quoque obtinemus :

$$\frac{\sin. (\theta - \Phi)}{\cos. \Phi} = \frac{ee \sin. \theta}{aa} = \frac{bb}{ff \sin. \theta} = A$$

$$\frac{\cos. (\theta - \Phi)}{\sin. \Phi} = \frac{aa}{ff \sin. \theta} = \frac{ee \sin. \theta}{bb} = B$$

vnde fit

$$\sin. \theta - \frac{\cos. \theta \sin. \Phi}{\cos. \Phi} = A \text{ et } \frac{\cos. \theta \cos. \Phi}{\sin. \Phi} + \sin. \theta = B$$

$$\text{ergo } \frac{\cos. \theta \sin. \Phi}{\cos. \Phi} = \sin. \theta - A \text{ et } \frac{\cos. \theta \cos. \Phi}{\sin. \theta} = B - \sin. \theta$$

quae aequationes inuicem multiplicatae praebent :

$$\cos. \theta^2 = (A+B) \sin. \theta - AB - \sin. \theta^2 \text{ seu } 1 + AB = (A+B) \sin. \theta.$$

Cum iam A et B geminos habeant valores, erit

$$AB = \frac{ee}{ff} \text{ et } (A+B) \sin. \theta = \frac{bb}{ff} + \frac{aa}{ff}$$

vnde fit $1 + \frac{ee}{ff} = \frac{aa+bb}{ff}$, ideoque hinc ista nota ellipsoos
proprietas resultat : $aa + bb = ee + ff$.

Porro si alterum focum ponamus in U, erit vti constat

$$CU = \sqrt{(aa - bb)} = \sqrt{(aa - bb)^2}$$

$$\text{at } (aa - bb)^2 = (aa + bb)^2 - 4aabb.$$

Cum igitur sit $aa + bb = ee + ff$ et $ab = ef \sin. \theta$ erit

$$CU = \sqrt{(e^2 + f^2 + 2eeff(1 - 2 \sin. \theta^2))}$$

verum est $1 - 2 \sin. \theta^2 = \cos. 2 \theta$, hincque obtinetur :

$$CU = \sqrt{(e^2 + f^2 - 2eeff. \cos. 2 \theta)}$$

His inuentis ratio constructionum datarum fiet perspicua :

Pro I. Constructione. Ob $ECF = FCG = \theta$ erit ECG Fig. 1.

2θ ; et cum sit $EC(e) : CF(f) = CF(f) : CG$ erit

$$CG = \frac{ff}{e}; \text{ Porro ducta } eG \text{ erit tang. } CeG = \frac{CC \sin. eCG}{Ce - CG \cos. eCG}$$

F f 3.

At

At $Ce = e$; $\sin. eCG = \sin. 2\theta$ et $\cos. eCG = -\cos. 2\theta$,
 unde fit tang. $CeG = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$ quae est expressio ante
 pro tang. 2Φ inuenta. Erit ergo $CeG = 2\Phi$, angu-
 loque CeG bisecto per eH erit angulus CeH eique aequa-
 lis $ECl = \Phi$. Unde recta CI erit positio alterius axis,
 eique normalis CK dabit positionem alterius. Deinde recta
 IEK per E ipsi CF parallela ducta est tangens ellipsis in
 E , quare si ex E in utrumque axem perpendiculara EL ,
 EM demittantur, semiaxis CA erit media proportionalis in-
 ter CL et CI , itemque semiaxis CB media proportionalis
 inter CM et CK , plane vti constructio habet.

Fig. 2. *Pro II. Constructione.* Ob triangulum CED isosce-
 les et angulum $ECD = EDC = \theta$ erit ang. $CED = 180^\circ - 2\theta$.
 Deinde ob $EC = e$, $EG = EH = CF = f$, quia GI ipsi
 CH est parallela, erit $EI = \frac{ff}{e}$. Porro est tangens $ECl =$
 $\frac{EI \sin. CED}{CE - EI \cos. CED}$ ergo ob $\sin. CED = \sin. 2\theta$ et $\cos.$
 $CED = -\cos. 2\theta$ habebitur tangens $ECl = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$,
 eritque ergo $ECl = 2\Phi$; unde sumta $CK = CE = e$,
 bisectaue EK in M , recta CM angulum $ECK = 2\Phi$
 bisecabit, ita vt sit $ECM = \Phi$, ideoque $CMAP$ posi-
 tio alterius axis, cuius scmissis quantitas CA vt ante defi-
 nitur, et determinatio alterius semiaxis CB ex ipsa con-
 structione est manifesta.

Fig. 3. *Pro III. Constructione.* Ex ratione praecedentis con-
 structionis intelligitur rectam CU angulum ECl bisecan-
 tem dare positionem axis transuersi. Cum igitur sit $CE = e$,
 $EI = \frac{ff}{e}$ et $CEI = 180^\circ - 2\theta$ et erit $CI = \sqrt{CE^2 +$
 $EI^2 - 2 CE \cdot EI \cos. CEI} = \sqrt{ee + \frac{f^4}{e^2} + 2ff \cos. 2\theta}$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \cos. 2\theta)}$.

Hinc

Hinc cum sit CU media proportionalis inter CE et CI
erit $CU = \sqrt{e \cdot \frac{1}{2} \sqrt{e^2 + f^2 + 2eff \cos. 2\theta}}$

seu $CU = \sqrt[3]{e^2 + f^2 + 2eff \cos. 2\theta}$.

Ex qua expressione manifestum est fore U alterum ellipseos focum, unde simul alter focus innotescit.

Hic tantum certum esse oportet, rectam CU esse positionem axis transversi non vero coniugati; sed in hoc error facile euitatur, si perpendamus, axem transversum semper intra angulum acutum, quem diametri coniugatae constituunt, cadere.

Verum ut hae constructiones faciles videntur, tamen fateri cogor, constructionem, quam *Pappus Alexandrinus* sine demonstratione quidem exhibuit, his palmam longe praeripere. Quoniam vero demonstrationem non addidit, eamque *Commentator eius Commendinus* non satis feliciter supplere conatus est, hic non solum constructionem *Pappi*, sed etiam eius rationem coronidis loco subiungam.

Sint igitur CE et CF semidiametri ellipsis datae, Fig. 5.
ac per F agatur ipsi CE parallela indefinita, quae ellipsin in F tanget. Cadant axes principales in rectas CG et CH, atque perspicuum est, si puncta G et H essent cognita, positionem axium principalium inde determinari. Totum negotium ergo huc redit, ut puncta G et H definiantur. Concipiamus per haec puncta quaesita G et H, atque ellipsis centrum C transire, et quoniam angulus GCH rectus est iam nouimus huius circuli centrum alicubi in recta GH existere. Praeterea vero ex natura tangentium ellipsis nouimus, quoniam CE et semidiamete-
ter

ter coniugata ad CF , tangensque in F ab axibus principalibus in G et H secatur, esse rectangulum FG , FH aequale quadrato ipsius CE . Duas ergo habemus conditiones, quibus circulus quaesitus per C et ambo desiderata tangens puncta G et H transiturus determinatur: altera ut quod eius centrum in ipsa hac recta GH situm esse debet, altera vero quod rectangulum FG , FH quadrato ipsius CE aequale esse debet. Transeat iste circulus etiam nunc incognitus per rectae CF productae punctum K . et quia erit $CF \cdot FK = FG \cdot FH$, erit quoque $CF \cdot FK = CE^2$, ideoque FK tertia proportionalis ad CF et CE quarum cum utraque sit data, innotescet punctum K et circulus quaesitus transire debet per puncta C et K , ita ut eius centrum in rectam GH cadat. Bisecta ergo CK in L , eique in L iuncta normali LI rectam GH in I secante erit I centrum circuli quaesiti, ex quo circulus radio IC vel IK descriptus rectam GH in punctis quaesitis secabit; quae est *Pappi* constructio.

Sequens autem constructio simplicior videtur quam hactenus allatae, quoniam non solum axium principalium positionem sed etiam quantitatem sponte exhibet, atque omnes operationes, quibus opus est, iam in se complectitur, ita ut ne mediae quidem proportionalis sumptione indigeamus.

Noua Constructio.

Problematis propositi.

Fig. 6. Sint CE , CF semidiametri coniugatae propositae ad angulum acutum ECF inclinatae, ad quas compleatur paralle-

parallelogrammum $CEDF$. Tum producat EC in e ,
 ut sit $Ce = CE$, et ad CF normaliter iungatur $CG =$
 CF . Iunctis EG et eG producat EG in H , ut sit
 $GH = Ge$, et ducta eH bifecetur in I ; atque in recta CL
 capiatur $KL = KI$. Deinde ex centro C circini apertura
 CI describatur arcus MN rectas FD et ED secans in
 M et N , atque ad has rectas ex punctis istis perpendi-
 culares constituantur MO et NO se mutuo in O secantes,
 per quod punctum O ex centro C vsque ad arcum MN
 ducatur recta COA , erit haec semiaxis transuersus, in
 eoque punctum O alter ellipseos focus. Denique ad CA
 normaliter statuat $CB = CL$, eritque CB semiaxis
 coniugatus.

Demonstratio.

Ponantur semidiametri coniugatae $CE = e$ et $CF = f$
 angulus vero $ECF = \theta$; erit ex constructione $Ce = e$,
 $CG = f$, et angulus $GCE = 90^\circ - \theta$, ideoque $\cos GCE$
 $= \sin \theta$. Porro vocetur semiaxis transuersus $CA = a$,
 et semiaxis coniugatus $CB = b$; erit per supra inuenta
 $aa + bb = ee + ff$ et $abef \sin \theta$. Hinc fiet:

$$aa + 2ab + bb = ee + ff + 2ef \sin \theta \text{ et } aa - 2ab + bb = ee + ff - 2ef \sin \theta$$

$$\text{ergo } a + b = \sqrt{ee + ff + 2ef \sin \theta} \text{ et } a - b = \sqrt{ee + ff - 2ef \sin \theta}$$

At ex triangulo ECG ab $CE = e$, $CG = f$ et $\cos GCE =$
 $\sin \theta$ reperitur $EG = \sqrt{ee + ff + 2ef \sin \theta}$, ex triangu-
 lo vero eCG , ubi est $Ce = e$, $CG = f$ et $\cos GCe = \sin \theta$,
 fit $Ge = \sqrt{ee + ff - 2ef \sin \theta}$. Hanc ob rem habebitur:

$$a + b = EG \text{ et } a - b = eG$$

ideoque $2a = EG + eG$ et $2b = EG - eG$.

234 SOLVITIO PROBLEMATIS GEOMETRICI.

Cum iam fit $GH = eG$, erit $2a = EH$, ac bisecta eH in I , ob C rectae Ee punctum medium, erit CI parallela ipsi EH eiusque semissis, vnde $a = CI$; et quia $IK = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}Ge$, et $KL = IK$, erit $CL = CI - 2IK = CI - GH = a - Ge$, ideoque $CL = b$. Aequatur ergo CI semiaxi transverso et CL semiaxi coniugato. His inuentis praeterea ex natura ellipsis constat, quia ED et FD sunt ellipsis tangentes, si ex altero foco O in has tangentes perpendiculara demittantur ON et OM , punctorum M et N a centro C distantias semiaxi transverso aequari. Vicissim ergo si puncta M et N ita accipiantur, vt eorum distantia a centro C aequalis sit semiaxi transverso CI , quemadmodum ea quoque in constructione sunt sumpta, atque ex his punctis ad tangentes perpendiculara ducantur MO et NO , haec perpendiculara se inuicem in foco O esse intersectura. Reperitur ergo hoc modo alter focus O , qui cum in axe transverso sit situs, erit recta CA per O ducta ad arcum MN non solum axi transverso aequalis, sed etiam veram eius positionem tenet. Cum igitur sit CA semiaxis transuersus, si ad eum normaliter statuatur $CB = CL$, erit quoque CB semiaxis coniugatus.

