1753

De partitione numerorum

Leonhard Euler

E 191

DE PARTITIONE NVMERORVM.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Problema *de partitione numerorum* primum mihi eſt propoſitum a *Celeb. Profeſſore Haude*, in quo quaerebat, quot variis modis datus numerus integer, (hic enim perpetuo de numeris tantum integris et affirmatiuis eſt ſermo,) poſſit eſſe aggregatum, duorum vel trium vel quatuor, vel in genere quot libuerit numerorum. Siue quod eodem redit, quaeritur, quot variis modis datus numerus vel in duas, vel tres, vel quatuor, vel quot libuerit partes diſpertiri queat, vnde huic Problemati aptiſſime *partionis numerorum* nomen eſt impoſitum. Bipartitum autem hoc Problema a *Viro Celeb*: proponi ſolet: primo ſcilicet eos tantum partitionis modos poſtulat, quibus ſingulae partes, in quas numerus propoſitus reſoluitur, ſint inter ſe inaequales; tum vero hac inaequalitatis conditione omiſſa omnes omnino partitionis modos requirit, ſiue partes quaepiam inter ſe fuerint aequales, ſiue omnes inaequales. Perſpicuum autem eſt, hoc poſteriori caſu numerum partitionum plerumque multo eſſe maiorem, quam priori, cum non ſolum omnes partitiones, quae caſui priori ſatisfaciunt, ſimul poſteriorem reſoluant, ſed etiam plerumque plures alii accedant, in quibus partes aequales contineantur.

§. 2. Vt vis Problematis huius clarius perſpiciatur, non nullos caſus ſimpliciores, qui actuali partitionum enumeratione facile expediuntur. Si quaeratur, quot variis modis numerus 6. in duas partes reſolui poſſit, ſtatim apparet, hoc tribus modis fieri poſſe, cum ſit:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$$

ſi quidem partium aequalitas non excludatur. Sin autem partes tantum inaequales deſiderentur, vltima partitio $3 + 3$ eſt omittenda, hocque caſu numerus 6 duobus tantum modis in duas partes inter ſe inaequales diſpertiri poteſt. Quod ſi numerus impar, vti 9 proponatur, in duas partes diſtribuendus, quatuor prodibunt partitiones, quae ſunt:

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

vbi cum partes aequales non occurrant, numerus 9 quatuor modis in duas partes diſpertietur, ſiue partes aequales excludantur, ſiue ſecus. Si plures duabus partes deſiderentur, vti ſi quaeratur, quot variis modis numerus 12. in tres partes diſpertiri poſſit, hoc ſequentibus 12. modis fieri poterit:

$$12 = 1 + 1 + 10;\quad 12 = 1 + 2 + 9;\quad 12 = 1 + 3 + 8$$
$$12 = 1 + 4 + 7;\quad 12 = 1 + 5 + 6;\quad 12 = 2 + 2 + 8$$
$$12 = 2 + 3 + 7;\quad 12 = 2 + 4 + 6;\quad 12 = 2 + 5 + 5$$
$$12 = 3 + 2 + 6;\quad 11 = 2 + 4 + 5;\quad 12 = 4 + 4 + 4$$

Sin autem partes aequales excludantur, reſpondendum erit, numerum 12. tantum 7. modis in tres partes diſtribui poſſe.

§. 3. Hinc facile intelligitur, ſi tam numerus diſpertiendus fuerit maior, atque numerus partium, in quas eum reſolui oporteet, ternarium quaternariumue ſuperet, nume-

numerum partitionum tam fieri magnum, vt per enumerationem actu instituendam difficillime obtineri queat. Neque etiam in hoc negotio inductioni multum est fidendum, quae, vti periculum facienti facile patebit, plerumque fallit, si ab enumeratione pro casibus simplicioribus facta ad magis compositos conclusiones formare voluerit. Sic ex methodo post explicanda patebit numerum 50 in septem partes non exclusa partium aequalitate dispertiri posse 8946 modis; sin autem partes aequales excludantur, remanebunt tantum 522 partitiones. Numerus porro 42 mille diuersis modis in 20 partes omnino resolui potest. At si quaeratur, quot variis modis numerus 125 in 12 partes, quae sint inter se omnes inaequales distribui possit, reperietur hoc fieri posse 64707 modis.

§. 4. Quemadmodum hic omnes numeri integri partium loca tenere possunt, ita hoc Problema in infinitum variari potest, prout numeri partes constituentes restringuntur. Ita aliud erit Problema, si quaeratur, quot variis modis datus numerus n in p partes, quarum nulla datum numerum m excedat, resolui possit. Partium quoque numerus omitti potest, vti si quaeratur, quot variis modis numerus 6 ex his numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci possit, quod sequentibus 9 modis fieri poterit:

$6 = 1+1+1+1+1+1$	$6 = 1+1+1+3$
$6 = 1+1+1+1+2$	$6 = 1+1+4$
$6 = 1+1+2+2$	$6 = 1+2+3$
$6 = 2+2+2$	$6 = 2+4$
	$6 = 3+3$

Vel

Vel etiam qualitas numerorum praescribi potest, qui partes constituant; vti si partes debeant esse vel numeri impares, vel quadrati, vel tringulares, vel alius cuiusque generis. Sic si quaeratur, quot variis modis datus numerus possit esse summa quatuor quadratorum, quaestio ad hoc genus pertinebit. Iam pridem quoque partitio numerorum omnium in partes, quae sint termini huius progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. est considerata, et quilibet numerus obseruatus est vnico tantum modo ex his numeris 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. per additionem componi posse. Cuius quaestionis post *Stifelium* mentionem facit *Scotenius* in suis *Exercitationibus*, vbi ostendit pondera 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. librarum sufficere posse ad merces quotcunque librarum ponderandas. Neque vero ad hoc ostendendum alia methodo praeter inductionem vtitur. Quam ob rem non abs re erit veritatem huius effati rigorose demonstrasse.

§. 5. Quem ad modum ergo haec aliaque similia Problemata resolui oporteat, hic eiusmodi methodum certam ac tutam proponam, vt inductione, cui vulgo ad solutionem istius modi quaestionum plurimum tribui solet, plane non sit opus. Vtor ad hoc sequenti Lemmate notissimo:

Si istud productum $(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)$ $(1+ez)$ *etc. siue factorum numerus sit finitus, siue infinitus, per actualem multiplicationem euoluatur, vt huiusmodi forma prodeat;*

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{ etc.}$$

erit coefficiens secundi termini A *summa quantitatum omnium* a, b, c, d, e, etc. *Coefficiens vero* B *erit summa* *ma, productorum ex binis harum quantitatum inaequalium. Coefficiens* C *erit summa productorum ex ternis istarum quantitatum inaequalium; et coefficiens* D *erit summa productorum ex quaternis harum earundem quantitatum; et ita porro.* In huiusmodi enim productis eadem quantitas puta a, vel quaevis alia plus quam semel nusquam inesse potest. Vnde hoc Lemma mihi fundamentum suppeditat ad partitiones in partes inaequales.

§. 6. Sin autem aequalitas partium non excludatur, adhibeo hoc Lemma:

Si ista formula $\frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)}$ *etc. factorum, siue denominatorem constituentium numerus sit finitus, siue infinitus, post euolutionem denominatoris ope multiplicationis factum, per diuisionem in seriem explicetur huius formae:*

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+ \text{etc.}$$

tum erit A *quidem vt ante summa quantitatum* $a+b+c+d+e+$ etc. *At coefficiens* B *erit summa productorum ex binis harum quantitatum, non exclusa repetitione eiusdem quantitatis, erit scilicet:*

$B=aa+ab+bb+ac+bc+cc+ad+bd+cd+dd+ae+$ etc.

Simili modo coefficiens C *erit summa productorum ex ternis harum quantitatum;* a, b, c, d, e, etc. *factoribus aequalibus in quouis producto non exclusis. Atque eadem conditione adiecta erit coefficiens* D *summa productorum ex quaternis harum quantitatum, et ita porro.*

Hincque istud Lemma viam aperiet ad partitiones, in quibus partium aequalitas non excluditur, absoluendas.

§. 7. Cum autem in Problemate proposito non de productis, sed de summis numerorum, quaestio instituatur, loco quantitatum a, b, c, d, e, etc. ſubſtituo poteſtates x^p, x^q, x^r, x^s, x^t, etc. Sic enim in productis ex binis eiusmodi occurrent poteſtates, quarum exponentes ſint ſummae binarum ex ſerie p, q, r, s, t, etc. Simili modo producta ex ternis conſtantibus eiusmodi poteſtatibus, quarum exponentes ſint ſummae trium numerorum ex eadem ſerie p, q, r, s, etc. Atque producta ex quaternis erunt poteſtates, quarum exponentes ſint aggregata ex quaternis horum numerorum, et ita porro. Sicque quae ante de productis ſunt notata, nunc ad ſummas transferuntur; et ita quidem, vt, ſi Lemma prius adhibeatur, ſummae ex partibus tantum inaequalibus conflentur, ſin autem Lemma poſterius in vſum vocetur, partium aequalitas non excludatur. Hoc igitur modo ambo Lemmata ad ſolutionem quaeſtionum ante memoratarum accommodari debebunt.

§. 8. Aggrediamur ergo hanc primum quaeſtionem. *Inuenire quot variis modis datus numerus* N *poſſit diſpertiri in* p, *partes, quae ſint inter ſe inaequales*:

Quoniam huc omnes numeri integri affirmatiui ad partes conſtituendas ſunt idonei, pro ſerie ſuperiorum exponentium accipienda eſt ſeries numerorum naturalium: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Formetur ergo ſecundum Lemma prius haec expreſſio:

$$s=(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ etc.}$$

in infinitum, quae multiplicatione actu inſtituta euoluatur in hanc ſeriem:

$$s=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+ \text{ etc.}$$

eritque: $A=x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ etc.

quod

quod est aggregatum omnium potestatum ipsius x. Deinde quia B est summa productorum ex binis terminis inaequalibus seriei A, erit B summa potestatum ipsius x omnium, quarum exponentes sint aggregata duorum numerorum inaequalium: et cum eadem potestas saepius resultare possit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea potestas modis sit productum ex duobus terminis seriei A; seu quot variis modis eius exponens possit esse summa duorum numerorum inaequalium. Binis autem terminis seriei A re ipsa multiplicandis reperietur:

$$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \text{etc.}$$

Cuius seriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens potestatis ipsius x adiunctae in duas partes inaequales dispertiri possit. Hac igitur serie in infinitum continuata, ope legis post eruendae, resoluitur Problematis propositi casus, quo partitio in duas partes requiritur.

§. 9. Quantitas deinde C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur, ternis terminis inaequalibus seriei A inuicem multiplicandis, constabit ex serie potestatum ipsius x, quarum exponentes sunt summae trium numerorum inter se inaequalium. Atque eadem potestas toties in ista serie C occurret, quoties eius exponens ex tribus numeris inter se inaequalibus per additionem resultare poterit, reperieturque:

$$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + \text{etc.}$$

Cuius seriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens potestatis ipsius x adiunctae in tres partes inaequales dispertiri possit, sic ex termino $8x^{13}$ colligitur, numerum 13 octo diuersis modis in tres partes inaequales secari posse, quae sunt:

$13 = 1 + 2 + 10$	$13 = 2 + 3 + 8$
$13 = 1 + 3 + 9$	$13 = 2 + 4 + 7$
$13 = 1 + 4 + 8$	$13 = 2 + 5 + 6$
$13 = 1 + 5 + 7$	$13 = 3 + 4 + 6$

Iſta igitur ſeries, C in infinitum continuata inſeruiet omnibus numeris in tres partes inaequales diſpertiendis.

§. 10. Quantitas porro D, cum contineat omnia producta ex quaternis terminis inaequalibus ſeriei: $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 +$ etc. conſtabit ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſint aggregata quatuor numerorum inter ſe inaequalium; et in hac ſerie quaelibet poteſtas eiusmodi habebit coefficientem, qui indicat, quot variis modis eius exponens per additionem quatuor numerorum inter ſe inaequalium reſultare poſſit. Reperietur autem:

$$D = x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + \text{etc.}$$

Haec igitur ſeries in infinitum continuata oſtendet, quot variis modis quisque numerus poſſit eſſe ſumma quatuor numerorum inaequalium. Ex termino quippe $9x^{16}$ cognoſcitur numerum 16 nouem modis in quatuor partes inter ſe inaequales diſtribui poſſe.

§. 11. Si hoc modo vlterius progrediamur, patebit litteram E fore ſeriem poteſtatum ipſius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipſius x in quinque partes inaequales diſſecari poſſit. Erit autem:

$$E = x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + \text{etc.}$$

Simili modo valor litterae F erit ſeries partitionibus in ſex partes inaequales inſeruiens, et litterae G, H, I, etc. pro

pro partitionibus in partes ſeptem, octo, nouem etc. valebunt, eruntque:

$$F = x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + \text{etc.}$$
$$G = x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + \text{etc.}$$
etc.

Vnde perſpicitur primi cuiusque ſeriei termini exponentem eſſe numerum trigonalem numeri partium propoſiti: tum vero tam huius, quam ſecundi termini coefficientem eſſe $= 1$. Cuius quidem ratio facile intelligitur: minimus enim numerus, qui eſt ſumma ſeptem numerorum inter ſe inaequalium, neceſſario eſt $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1}{2} 7 . 8 =$ numero trigonali ipſius ſeptenarii: hicque numerus pariter ac ſequens vnitate maior plus vno modo in ſeptem partes inaequales diſpertiri nequit.

§. 12. Totum ergo negotium redit ad commodam ſerierum B, C, D, E, F, etc. formationem, ne id ipſum, quod quaeritur, ſcilicet partitionum numerus ad cuiusque ſeriei formationem adhibeatur. Ac primo quidem lex progreſſionum A et B eſt aperta, cum prioris coefficientes ſint omnes vnitates, poſterioris vero termini ſeriei numerorum naturalium geminati: ſequentium vero ſerierum lex minus eſt aperta, et quousque eas hic continuauimus, coefficientes ex ipſis cuiusque exponentis partitionibus conſtituimus. Alio itaque modo valores iſtarum litterarum A, B, C, D, etc. inueſtigari oportet, vnde haec exoritur quaeſtio: Inuenire valores litterarum A, B, C, D, E, etc. ita vt ſumma huius ſeriei:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

 aequa-

aequalis fiat isti expressioni:

$$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ etc.}$$

Hunc in finem igitur perpendendus est nexus, qui inter has duas expressiones intercedit, et quem ad modum altera immutari debeat, si in altera mutatio instituatur.

§. 13. Quia vtriusque expressionis idem est valor s, ambae inter se manebunt aequales, si in vtraque loco z scribatur quaecunque alia quantitas. Ponamus igitur in vtraque xz loco z, et valor vtrinque resultans vocetur $=t$, eritque primo:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + \text{ etc.}$$

tum vero altera expressio transmutabitur in hanc:

$$t = (1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ etc.}$$

qui posterior ipsius t valor, si cum posteriore valore ipsius s comparetur, quo erat:

$$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z) \text{ etc.}$$

mox patebit esse $s = (1+xz)t$. Quae relatio cum etiam in alteris valoribus ipsarum s et t locum habere debeat, nobis praebebit hanc aequationem:

$$\begin{aligned} s &= 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.} \\ \hline (1+xz)\,t &= 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + \text{etc.} \\ &\quad + xz + Ax^2z^2 + Bx^3z^3 + Cx^4z^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Vnde terminis homogeneis inter se aequandis, fiet:

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)},$$

$$C = \frac{Bx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1-x^5} = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

etc.

§. 14.

§. 14. Series ergo, quae ſupra pro litteris A, B, C, D, E, etc. prodire obſeruatae ſunt, oriuntur ex euolutione fractionum, quas hic inuenimus, vnde conſtat, ſeriem A eſſe Geometricam, nempe $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc. quae, quod quidem eſt planiſſimum, indicat quemque numerum vnico modo ex vno numero integro conſtare. Reliquae vero ſeries B, C, D, E, etc. ſunt recurrentes, quarum ſcala relationis ex cuiusuis fractionis denominatore per multiplicationem euoluto patebit. Ad hoc oſtendendum negligamus tantiſper numeratores, qui ſunt poteſtates ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri trigonales, earumque loco ſcribamus vnitatem. Sit igitur.

$$\frac{A}{x} = 1 + \alpha' x + \beta' x^2 + \gamma' x^3 + \delta' x^4 + \varepsilon' x^5 + \ldots + v' x^n = \mathfrak{A}$$
$$\frac{B}{x^3} = 1 + \alpha'' x + \beta'' x^2 + \gamma'' x^3 + \delta'' x^4 + \varepsilon'' x^5 + \ldots + v'' x^n = \mathfrak{B}$$
$$\frac{C}{x^6} = 1 + \alpha''' x + \beta''' x^2 + \gamma''' x^3 + \delta''' x^4 + \varepsilon''' x^5 + \ldots + v''' x^n = \mathfrak{C}$$
$$\frac{D}{x^{10}} = 1 + \alpha^{IV} x + \beta^{IV} x^2 + \gamma^{IV} x^3 + \delta^{IV} x^4 + \varepsilon^{IV} x^5 + \ldots + v^{IV} x^n = \mathfrak{D}$$
$$\frac{E}{x^{15}} = 1 + \alpha^{V} x + \beta^{V} x^2 + \gamma^{V} x^3 + \delta^{V} x^4 + \varepsilon^{V} x^5 + \ldots + v^{V} x^n = \mathfrak{E}$$
$$\frac{F}{x^{21}} = 1 + \alpha^{VI} x + \beta^{VI} x^2 + \gamma^{VI} x^3 + \delta^{VI} x^4 + \varepsilon^{VI} x^5 + \ldots + v^{VI} x^n = \mathfrak{F}$$

etc.

15. Solutio ergo quaeſtionis ad inuentionem ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. reducitur, quas patet ſingulas eſſe recurrentes. Ac primo quidem ſeries $\mathfrak{A}$, cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, eſt adeo Geometrica, atque $\alpha' = 1$, $\beta' = 1$, $\gamma' = 1$, $\delta' = 1$, etc. quod per ſe eſt perſpicuum. Series autem $\mathfrak{B}$, cum ſit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$, erit recurrens, ſcala relationis exiſtente $+1$, $+1$, -1; Vnde erit:

$\alpha'' =$

$$\alpha'' = 1,$$
$$\beta'' = \alpha'' + 1$$
$$\gamma'' = \beta'' + \alpha'' - 1$$
$$\delta'' = \gamma'' + \beta'' - \alpha''$$
$$\varepsilon'' = \delta'' + \gamma'' - \beta''$$
$$\zeta'' = \varepsilon'' + \delta'' - \gamma''$$
etc.

Simili modo ſeries $\mathfrak{C}$ ob $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$ erit recurrens et ſcalam relationis habebit $+1$, $+1$, 0, -1, -1, $+1$. Vnde erit:

$$\alpha''' = 1$$
$$\beta''' = \alpha''' + 1$$
$$\gamma''' = \beta''' + \alpha''' + *$$
$$\delta''' = \gamma''' + \beta''' + * - 1$$
$$\varepsilon''' = \delta''' + \gamma''' + * - \alpha''' - 1$$
$$\zeta''' = \varepsilon''' + \delta''' + * - \beta''' - \alpha''' + 1$$
$$\eta''' = \zeta''' + \varepsilon''' + * - \gamma''' - \beta''' + \alpha'''$$
$$\theta''' = \eta''' + \varepsilon''' + * - \delta''' - \gamma''' + \beta'''$$
etc.

Eodem modo ſeries ſequentes perſpicientur eſſe recurrentes, ſingularumque ſcalae relationis hoc modo aſſignari poterunt. Etſi autem hoc pacto iſtae ſeries non difficulter formari poſſunt, tamen iſta ratione relicta mox multo commodiorem modum exhibebo, harum ſerierum quamuis ex praecedente formandi, poſtquam obſeruationem maximi momenti communicauero.

§. 16.

§. 16. Cum sit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, patet in serie euoluta $\mathfrak{B}$, quamuis potestatem ipsius x toties occurrere debere, quoties ea ex potestatibus x^1, x^2 per multiplicationem oriri potest, seu quoties eius exponens ex numeris 1 et 2 per additionem produci potest. Ita cum sit:
$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \ldots + v'' x^n$
ex termino $3x^4$ intelligitur, numerum 4 tribus modis ex numeris 1 et 2 per additionem oriri posse, qui sunt:
$4 = 1 + 1 + 1 + 1$; $4 = 1 + 1 + 2$; et $4 = 2 + 2$.
In genere ergo terminum $v'' x^n$ considerando, coefficiens v'' indicabit, quot modis exponens n ex numeris 1 et 2 per additionem produci possit. Cum igitur sit $B = \mathfrak{B} x^3$, in serie B habebitur iste terminus $v'' x^{n+3}$, qui cum indicet, numerum $n+3$ tot variis modis in duas partes inaequales secari posse, quot vnitates coefficiens v'' in se complectatur, manifestum est, numerum $n+3$ tot modis in duas partes inaequales distribui posse, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci queat.

§. 17. Deinde cum sit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$, patet in hac serie $\mathfrak{C}$, quamuis potestatem ipsius x toties occurrere debere, quoties ea ex potestatibus x^1, x^2, x^3 per multiplicationem oriri queat, seu quod idem est, quoties eius exponens ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci possit. Ita cum sit:
$\mathfrak{C} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \ldots + v'' x^n$
ex quouis eius termino $5x^5$ cognoscetur, exponentem 5 quinque modis ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci posse, qui sunt:

$5 = 1+1+1+1+1$; $5 = 1+1+1+2$; $5 = 1+1+3$;
$5 = 1+2+2$; $5 = 2+3$.

In genere autem terminum $v''' x^n$ confiderando, coefficiens v''' indicabit, quot variis modis numerus n ex numeris 1, 2, 3, per additionem oriri queat. Cum igitur fit $C = \mathfrak{C} x^6$, in ferie C habebitur ifte terminus $v''' x^{n+6}$ quo indicatur, numerum $n+6$ tot modis, quot vnitates continentur in coefficiente v''' in tres partes inaequales difpertiri poffe. Vnde confequitur, numerum $n+6$ totidem modis in tres partes inaequales diftribui poffe, quot modis numerus 6 ex numeris 1, 2, 3, per additionem produci poffit.

§. 18. Non opus eft, vt hoc ratiocinium longius profequamur, cum hinc iam abunde perfpiciatur, quemuis numerum $n+10$ tot variis modis in quatuor partes inaequales difpertiri poffe, quot modis numerus n ex his quatuor numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci poffit. Simili modo quilibet numerus $n+15$ tot variis modis in quinque partes inaequales difpertiri poterit, quot modis numerus n ex his quinque numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci poteft. Generatim ergo numerus $n + \frac{m(m+1)}{2}$ tot variis modis in m partes inaequales difpertiri poterit, quot variis modis numerus n ex his numeris 1, 2, 3, 4 ...... m per additionem produci poteft. Quod fi ergo quaeratur, quot variis modis numerus N in m partes inaequales difpertiri poffit, refponfio reperietur, fi cafuum numerus inueftigetur, quibus numerus $N - \frac{m(m+1)}{2}$ ex numeris 1, 2, 3, 4 ..... m per additionem produci poteft.

§. 19. Hoc igitur modo refolutio quaeftionis propofitae, de partitione cuiusque numeri, in quot libuerit partes,

tes inaequales, reducitur ad solutionem alius Problematis iam supra commemorati, quo quaeritur, quot variis modis quilibet numerus ex aliquot terminis huius progressionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci possit. Hacque posteriore quaestione resoluta simul prior resoluetur. Quod vt clarius explicemus, noua signa ad commodiorem expressionem adhibeamus. Denotet ergo haec scriptio:

$n^{(2)}$ numerum casuum, quibus numerus n ex duobus numeris 1, 2 per additionem formari possit.

$n^{(3)}$ denotet numerum casuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3 per additionem formari possit.

Et $n^{(m)}$ denotet numerum casuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci possit. Cum igitur valores huiusmodi characterum fuerint definiti, quod deinceps praestabimus, Problema propositum ita resoluetur. Si quaeratur scilicet, quot variis modis numerus N in m partes inaequales dispertiri possit; numerus casuum quaesitus exprimetur hoc charactere $\left(N - \frac{m(m+1)}{1.2}\right)^{(m)}$, quippe quo indicatur, quot variis modis numerus $N - \frac{m(m+1)}{2}$ ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci possit.

§. 20. Ad hanc eandem quaestionem quoque reducitur solutio alterius Problematis a *Celeb. Naudeo* propositi, quam ob rem expediet, et hoc Problema ante resolui, quam ampliorem characterum modo assumtorum euolutionem suscipiamus, sic enim tria Problemata, quae inter se maxime videantur diuersa, vna eademque opera resoluemus. Problema autem ita se habet:

Inuenire quot variis modis datus numerus N *possit dispertiri in* p *partes, partium aequalitate non exclusa.*

Quoniam hic partium aequalitas non excluditur, sequentem formam contemplabor, quae huius quaestionis solutionem in se continebit

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)} \text{ etc.}$$

quae secundum potestates ipsius z euoluta praebeat hanc seriem:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ etc.}$$

eritque, vt supra §. VI. notauimus, coefficiens A summa omnium terminorum huius seriei x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc. seu $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 +$ etc. quae est eadem series, quam in solutione praecedentis Problematis pro littera A obtinuimus.

§. 21. Deinde vero est B summa productorum ex binis terminis seriei A, quadratis singulorum terminorum non exclusis. Hinc erit B summa omnium potestatum ipsius x, quarum exponentes sint aggregata duorum numerorum, siue aequalium, siue inaequalium: et cum eadem potestas hoc modo saepius resultare possit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea potestas modis fit productum ex binis terminis seriei A; seu quot variis modis eius exponens possit esse summa duorum numerorum, tam aequalium, quam inaequalium. Ex hoc fonte reperietur:

$$B = x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + \text{ etc.}$$

cuius

cuius feriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteftatis ipfius x adiunctae in duas partes difpertiri poffit. Hac igitur ferie in infinitum continuata, Problematis propofiti cafus, quo partitio in duas partes requiritur, facile refoluitur.

§. 22. Quantitas porro C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur terminis ternis feriei A, fiue inaequalibus fiue aequalibus inuicem multiplicandis, conftabit ex ferie poteftatum ipfius x, quarum exponentes fint fummae trium numerorum integrorum affirmatiuorum. Atque eadem poteftas x^n toties in ferie C occurret, quoties eius exponens n ex tribus numeris, fiue aequalibus, fiue inaequalibus per additionem refultare poteft. Erit autem:

$$C = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \text{etc.}$$

cuius feriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteftatis ipfius x adiunctae in tres partes, fiue aequales, fiue inaequales difpertiri poffit. Sic ex termino $8x^{10}$ colligitur, numerum 10 octo modis diuerfis in tres partes fecari poffe, quae partitiones funt:

$10 = 1 + 1 + 8$	$10 = 2 + 2 + 6$
$10 = 1 + 2 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 1 + 3 + 6$	$10 = 2 + 4 + 4$
$10 = 1 + 4 + 5$	$10 = 3 + 3 + 4$

Ifta igitur feries C in infinitum continuata omnibus numeris in tres partes difpertiendis inferuiet.

§. 23. Simili modo quantitas D, cum contineat omnia producta ex quatuor terminis feriei $A = x + x^2 + x^3 + x^4 +$ etc. eiusdem termini repetitione non exclufa:

clusa: constabit serie potestatum ipsius x, quarum exponentes sint aggregata quatuor numerorum, siue aequalium, siue inaequalium. In hac igitur serie quaelibet potestas ipsius x eiusmodi habebit coefficientem, qui indicet, quot variis modis eius exponens per additionem 4 numerorum resultare possit. Reperietur autem hinc:

$$D = x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + \text{etc.}$$

Haec igitur series in infinitum continuata ostendet, quot variis modis quilibet numerus in quatuor partes dispertiri possit. Sic ex termino $9x^{10}$ concluditur numerum 10 nouem modis in quatuor partes dispertiri posse, quae partitiones sunt:

$10 = 1 + 1 + 1 + 7$	$10 = 1 + 2 + 2 + 5$
$10 = 1 + 1 + 2 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$10 = 1 + 1 + 3 + 5$	$10 = 1 + 3 + 3 + 3$
$10 = 1 + 1 + 4 + 4$	$10 = 2 + 2 + 2 + 4$

$$10 = 2 + 2 + 3 + 3$$

§. 24. Hoc modo vlterius procedendo patebit, litteram E fore seriem potestatum ipsius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipsius x in quinque partes dispertiri possit. Erit autem:

$$E = x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + \text{etc.}$$

Pari modo valor litterae F erit series partitionibus in sex partes inseruiens, et litterarum G, H, I, etc. valores pro partitionibus in partes septem, octo, nouem, etc. valebunt, erit autem:

F =

$$F = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + \text{etc.}$$
$$G = x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Si hae ſeries cum illis, quas in ſolutione ſuperioris Problematis pro iisdem litteris inuenimus, mox patebit totum diſcrimen tantum in poteſtatibus ipſius x conſtare, coefficientesque ſolos vtrinque ſimiliter procedere. Ne autem hic inductioni vllum locum concedamus, iſtam conuenientiam ſequenti demonſtratione euincemus.

§. 25. Conſideremus, vt ſupra duos valores ipſius s, qui ſunt:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$
$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{etc.}}$$

qui ſi loco z vbique ponatur xz, abeant in t eritque:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.}$$
$$t = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{etc.}}$$

Vnde ſi poſteriores ipſarum s et t valores inuicem comparentur, mox patet eſſe $s = \frac{t}{1-xz}$ ſeu $t = (1-xz)s$, quae eadem relatio cum quoque inter priores litterarum s et t valores locum tenere debeat, erit:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.} =$$
$$(1-xz)s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$
$$\quad - xz - Axz^2 - Bxz^3 - Cxz^4 - Dxz^5 - \text{etc.}$$

Vnde per coaequationem terminorum homogeneorum inuenitur:

A =

$$A = \frac{x}{1-x}$$
$$B = \frac{Ax}{1-xx} = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$C = \frac{Bx}{1-x^3} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$
$$D = \frac{Cx}{1-x^4} = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$
etc.

§. 26. Ex his formulis intelligitur, iſtas ſeries non ſolum quoque eſſe recurrentes, vti ſuperiores, ſed etiam coefficientium vtrinque eandem eſſe legem. Quare ſi neglectis numeratoribus ponatur:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$
etc.

vt ſit

$$A = \mathfrak{A}x$$
$$B = \mathfrak{B}x^2$$
$$C = \mathfrak{C}x^3$$
$$D = \mathfrak{D}x^4$$
etc.

Partitio cuiusque numeri in partes quotcunque, ſiue aequales, ſiue inaequales, pendet a formatione ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. quae, vti ante obſeruauimus, indicant, quot variis modis quiuis numerus ex aliquot terminis initialibus huius ſeriei 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci queat. Sic cum ſit $B = \mathfrak{B}x^2$, quiuis numerus $n + 2$ totidem modis in duas partes diſpertiri poteſt, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci poteſt. Simili modo cum ſit $C = \mathfrak{C}x^3$, numerus $n + 3$ tot modis in tres partes diſpertietur, quot modis numerus n per additionem ex numeris 1, 2, 3 componi poterit. Atque generaliter numerus $n + m$ tot variis

riis modis in m partes, siue aequales, siue inaequales dispertiri potest, quot modis numerus n ex numeris $1, 2, 3, \ldots m$ per additionem produci potest.

§. 27. Pendet ergo et hoc Problema a solutione quaestionis, qua quaeritur, quot variis modis datus numerus ex aliquot terminis initialibus huius seriei $1, 2, 3, 4$, etc. per additionem resultare possit. Si igitur vt supra haec scribendi formula $N^{(m)}$ denotet numerum modorum, quibus numerus N ex numeris $1, 2, 3, \ldots m$ per additionem componi potest, seu quibus numerus N in partes quotcunque distribui possit, quarum nulla maior sit numero m; huius modi characteribus et hoc Problema propositum resolui poterit. Scilicet $n^{(m)}$ indicabit, quot variis modis numerus $n + m$ in m partes, siue aequales, siue inaequales dispertiri possit. Hinc si quaeratur, quot modis numerus N in partes m, siue aequales, siue inaequales distribui possit, numerum modorum quaesitum indicabit haec formula $(N - m)^{(m)}$. Si igitur hoc Problema cum praecedente conferatur, perspicuum erit, numerum $n + m$ totidem modis in m partes, siue aequales, siue inaequales distribui posse, quot modis numerus $n + \frac{m(m+1)}{2}$ in m partes inaequales dispertiri possit.

§. 28. Solutio ergo amborum Problematum a *Cel. Naudeo* propositorum huc reuocatur, vt definiatur, quot variis modis numerus quicunque n ex his numeris $1, 2, 3 \ldots m$ per additionem produci possit; seu vt inuestigetur valor characteris $n^{(m)}$. Quemadmodum ergo hoc nouum Problema ex formulis iam ante inuentis commodissime resolui queat, videamus. Ac primo quidem, si

 sit

ſit $m = 1$, quia quilibet numerus vnico modo ex meris vnitatibus per additionem elici poteſt, erit $n^{(1)} = 1$, quod idem prima formula $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, ſeu ſeries inde formata: $\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc. manifeſto indicat.

§. 29. Quoniam ſeries $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ indicat, quot modis quisque numerus ex numeris 1 et 2 per additionem formari poſſit, in hac ſerie poteſtatis x^n coefficiens erit $= n^{(2)}$, haec enim expreſſio aſſumta eſt ad ſignificandum, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem oriri poſſit. Hinc igitur erit:

$$\mathfrak{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.}$$

atque ad ſimilitudinem huius expreſſionis erit:

$$\mathfrak{A} = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.}$$

Deinde vero cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$ et $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ erit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(1 - x^2)$, vnde ſequens inter has ſeries relatio oritur:

$$\begin{array}{ll}\mathfrak{A} & = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.}\\ \left.\begin{array}{l}+\mathfrak{B}\\ -\mathfrak{B}x^2\end{array}\right\} & \begin{array}{l}= 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.}\\ \qquad\quad - x^2 - 1^{(2)}x^3 - 2^{(2)}x^4 - 3^{(2)}x^5 - 4^{(2)}x^6 - \text{etc.}\end{array}\end{array}$$

Quodſi hinc coaequatio terminorum homogeneorum inſtituatur, erit:

$1^{(2)} = 1^{(1)}$	$4^{(2)} = 4^{(1)} + 2^{(2)}$	$7^{(2)} = 7^{(1)} + 5^{(2)}$
$2^{(2)} = 2^{(1)} + 1$	$5^{(2)} = 5^{(1)} + 3^{(2)}$	$8^{(2)} = 8^{(1)} + 6^{(2)}$
$3^{(2)} = 3^{(1)} + 1^{(2)}$	$6^{(2)} = 6^{(1)} + 4^{(2)}$	$9^{(2)} = 9^{(1)} + 7^{(2)}$

§. 30. Generaliter ergo erit $n^{(2)} = n^{(1)} + (n-2)^{(2)}$. Cum igitur ſit $n^{(1)} = 1$, erit $n^{(2)} = 1 + (n-2)^{(2)}$; ſicque coefficientes ſeriei $\mathfrak{B}$ ita determinabuntur, vt quisque

que terminus vltimus aequalis ſit antepenultimo vnitate aucto. Seu cum ſeries $\mathfrak{A}$ omnes coefficientes ſint vnitates, ex ſerie $\mathfrak{A}$ ſequenti modo ſeries $\mathfrak{B}$ formabitur:

$$\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \text{etc.}$$
$$\qquad\qquad 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4$$
$$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \text{etc.}$$

Scilicet cum ſeriei $\mathfrak{B}$ duo termini initiales $1 + x$ conſtent, ſubſcribantur ii ſub terminis tertio et quarto ſeriei $\mathfrak{A}$, hincque per additionem orientur termini tertius et quartus ſeriei $\mathfrak{B}$, qui porro terminis quinto et ſexto ſeriei $\mathfrak{A}$ ſubſcripti et additi dabunt terminos quintum et ſextum ſeriei $\mathfrak{B}$, hocque modo ſeries $\mathfrak{B}$, quousque libuerit, facillime continuatur. Patet autem hinc eſſe $n^{(2)} = \frac{1}{2}\left(n \begin{smallmatrix}+1\\+2\end{smallmatrix}\right)$, ſcilicet ſi n eſt numerus impar, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 1)$, ſin autem n ſit numerus par, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 2)$.

§. 31. Cum porro ſit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ erit $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}(1 - x^3)$, vnde cum ſeriei $\mathfrak{C}$ terminus generalis ſit $n^{(3)}x^n$ ſequens naſcetur relatio inter ſeries $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} \quad &= 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.} \\
\left.\begin{array}{l} +\mathfrak{C} \\ -\mathfrak{C}x^3 \end{array}\right\} &= \begin{array}{l} 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \\ 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \end{array} \\
&\qquad\qquad\qquad - 1x^3 - 1^{(3)}x^4 - 2^{(3)}x^5 - 3^{(3)}x^6 - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Si iam hic aequatio inter terminos homogeneos inſtituatur erit:

$$\begin{array}{l|l|l}
1^{(3)} = 1^{(2)} & 4^{(3)} = 4^{(2)} + 1^{(3)} & 7^{(3)} = 7^{(2)} + 4^{(3)} \\
2^{(3)} = 2^{(2)} & 5^{(3)} = 5^{(2)} + 2^{(3)} & 8^{(3)} = 8^{(2)} + 5^{(3)} \\
3^{(3)} = 3^{(2)} + 1 & 6^{(3)} = 6^{(2)} + 3^{(3)} & 9^{(3)} = 9^{(2)} + 6^{(3)}
\end{array}$$

et generaliter $n^{(3)} = n^{(2)} + (n-3)^{(3)}$

Series ergo $\mathfrak{C}$ ex ſerie $\mathfrak{B}$ ſuisque terminis antecedentibus ſequenti modo facile formatur. Omittamus autem poteſtates ipſius x, quia totum negotium in coefficientibus verſatur:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{B} = & 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+ \text{etc.} \\ & 1+1+2+3+4+5+7+8+10 \\ \hline \mathfrak{C} = & 1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+ \text{etc.} \end{array}$$

Scilicet ſeriei $\mathfrak{B}$ ſubſcribatur ſeries $\mathfrak{C}$, initium ſub termino quarto faciendo, et pro vti hoc modo ſeries $\mathfrak{C}$ per additionem oritur, ita quoque ſub ſerie $\mathfrak{B}$ continuabitur.

§. 32. Quia deinde eſt $\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ erit $\mathfrak{C} = (1-x^4)\mathfrak{D}$. Vnde ſimili modo, quo hactenus ſumus vſi, reperietur:

$$\begin{array}{l|l|l} 1^{(4)} = 1^{(3)} & 4^{(4)} = 4^{(3)} + 1 & 7^{(4)} = 7^{(3)} + 3^{(4)} \\ 2^{(4)} = 2^{(3)} & 5^{(4)} = 5^{(3)} + 1^{(4)} & 8^{(4)} = 8^{(3)} + 4^{(4)} \\ 3^{(4)} = 3^{(3)} & 6^{(4)} = 6^{(3)} + 2^{(4)} & 9^{(4)} = 9^{(3)} + 5^{(4)} \end{array}$$

et generaliter $n^{(4)} = n^{(3)} + (n-4)^{(4)}$

Pari modo vlterius progrediendo colligetur fore:

$$n^{(5)} = n^{(4)} + (n-5)^{(5)}$$
$$n^{(6)} = n^{(5)} + (n-6)^{(6)}$$
$$n^{(7)} = n^{(6)} + (n-7)^{(7)}$$
etc.

Generatim ergo hinc colligetur fore:

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$

Vbi notandum eſt, ſi fuerit $n < m$, tum terminum $(n-m)^{(m)}$ prorſus euaneſcere, ſin autem ſit $n = m$, etiamſi ſit $n-m = 0$, tamen terminum $(n-m)^{(m)}$ valere vnitatem. Deinde ſi ſit $n-m = 1$, quoque erit $(n-m)^{(m)} = 1$.

Erit

Erit ergo perpetuo tam $0^{(m)} = 1$, quam $1^{(m)} = 1$, et $n^{(1)} = 1$.

§. 33. His relationibus inter series 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. notatis eae facillime formantur, et quousque libuerit, continuantur, quae operatio per hic adiunctum schematismum fiet manifestum:

	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}	etc.
𝔄 =	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	etc.
			1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5 +	6 +	6 +	7 +	7 +	etc.
𝔅 =	1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5 +	6 +	6 +	7 +	7 +	8 +	8 +	etc.
				1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12 +	14 +	16 +	19 +	etc.
ℭ =	1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12 +	14 +	16 +	19 +	21 +	24 +	27 +	etc.
					1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18 +	23 +	27 +	etc.
𝔇 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18 +	23 +	27 +	34 +	39 +	47 +	54 +	etc.
						1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23 +	30 +	etc.
𝔈 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23 +	30 +	37 +	47 +	57 +	70 +	84 +	etc.
							1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26 +	etc.
𝔉 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26 +	35 +	44 +	58 +	71 +	90 +	110 +	etc.
								1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	etc.
𝔊 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	28 +	38 +	49 +	65 +	82 +	105 +	131 +	etc.
									1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	etc.
ℌ =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	29 +	40 +	52 +	70 +	89 +	116 +	146 +	etc.
										1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	etc.
𝔍 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	41 +	54 +	73 +	94 +	123 +	157 +	etc.
											1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	etc.
𝔎 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	55 +	75 +	97 +	128 +	164 +	etc.
												1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	etc.
𝔏 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	76 +	99 +	131 +	169 +	etc.
													1 +	1 +	2 +	3 +	etc.
𝔐 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	77 +	100 +	133 +	172 +	etc.
														1 +	1 +	2 +	etc.
𝔑 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	77 +	101 +	134 +	174 +	etc.

§. 34. Hoc modo tabula hic adiuncta per solam continuam additionem est constructa, atque ratio constructionis tam est perspicua ex inspectione, vt ampliori explicatione non egeat. Ope huius tabulae igitur immediate resoluitur hoc Problema, quo quaeritur, *quot variis modis datus numerus* n *ex his numeris* 1, 2, 3 . . . . . m *per additionem produci possit.*

Sic si quaeratur, quot variis modis numerus 10 ex his numeris 1, 2, et 3 per additionem oriri possit, erit $n = 10$ et $m = 3$, atque ex tabula reperitur modorum numerus $= 14$, qui modi sunt:

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+1+1+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2$	$10 = 1+1+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+2+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+2+2$	$10 = 1+2+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+2+3$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+2+2+2$	$10 = 2+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+3+3$	$10 = 2+2+3+3$

Si quaeratur, quot variis modis numerus 25 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci possit, facto $n = 25$ et $m = 5$, reperietur ex tabula numerus modorum $= 377$.

Si quaeratur quot variis modis numerus 50 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9, 10 per additionem resultare possit, posito $n = 50$ et $m = 10$, inuenitur modorum numerus $= 62740$

Si vel numerus propositus, vel numerus partium maior sit quam in tabula, tum nihilo minus casuum numerus ex tabula ope formularum supra inuentarum colligi poterit. Vti si quaeratur, quot modis numerus 60 ex his numeris 1, 2, 3 . . . . 20 per additionem resultare possit, erit $n = 60$ et $m = 20$, quaeriturque valor formulae $60^{(20)}$. Est vero $60^{(20)} = 60^{(19)} + 40^{(20)}$, at $60^{(19)} = 60^{(18)} + 41^{(19)}$, porroque $60^{(18)} = 60^{(17)} + 42^{(18)}$, et $60^{(17)} = 60^{(16)} + 43^{(17)}$, sicque deinceps. Vnde tandem erit $60^{(20)} = 40^{(20)} + 41^{(19)} + 42^{(18)} + 43^{(17)} + 44^{(16)} + \ldots\ldots 59^{(1)}$, qui numeri ex tabula collecti dant 791131, totque modis numerus 60 ex numeris 1, 2, 3 . . . . . . 20 per additionem elici potest.

§. 35.

§. 35. Ope huius tabulae deinde ambo Problemata *Cel. Naudei* expedite resolui possunt. Ac primo quidem si quaeratur, *quot variis modis datus numerus* N *in* m *partes inter se inaequales dispertiri possit, hoc fiet, vti supra ostendimus, tot modis, quot vnitates continentur in hac expressione* $(N - \frac{m(m+1)}{2})^{(m)}$ *quam tabula indicat.* Vsum igitur huius tabulae aliquot exemplis ostendamus.

I. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 25 *in quinque partes inaequales dispertiri possit?* Erit ergo hic $N = 25$ et $m = 5$, vnde $\frac{m(m+1)}{2} = 15$ et responsum continebit formula $10^{(5)}$, quae ex tabula est $= 30$ ita vt partitio 30 modis institui possit:

II. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 50 *in* 7 *partes inaequales dispertiri possit?* Hic est $N = 50$, $m = 7$ et $N - \frac{m(m+1)}{2} = 22$, vnde numerus partitionum quaesitus est $= 22^{(7)} = 522$.

III. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 100 *in* 10 *partes inaequales dispertiri possit?* Cum sit $N = 100$ et $m = 10$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 45$ et numerus partitionum reperietur $45^{(10)} = 33401$.

IV. *Quaeratur, quot diuersis modis numerus* 256 *in* 20 *partes inaequales dispertiri possit?* Ob $N = 256$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 46$, et numerus partitionum fiet $= 46^{(20)} = 96271$.

V. *Quaratur, quot diuersis modis numerus* 270 *in* 20 *partes inaequales dispertiri possit?* Ob $N = 270$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 60$, ideo-

ideoque numerus partitionum quaesitus fit $= 60^{(20)}$, cuius valorem ante inuenimus esse $= 791131$. Tot ergo diuersis modis numerus 270 in 20 partes inaequales dispertiri potest.

§. 36. Simili modo ex tabula quoque alterum Problema resoluetur, quo quaerebatur: *quot variis modis numerus* N *in* m *partes aequalitate partium non exclusa dispertiri possit?*
Supra enim ostendimus partitionum numerum quaesitum contineri in hac formula $(N-m)^{(m)}$, quem valorem ex tabula depromere licet. Quae solutio quo facilius intelligatur, aliquot exempla adiiciamus.

I. *Quaeratur, quot variis modis numerus 25 in quinque partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*
Hic est $N = 25$ et $m = 5$ vnde $N - m = 20$, et partitionum numerus erit $20^{(20)} = 192$.

II. *Quaeratur, quot variis modis numerus 50 in septem partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 50$ et $m = 7$ erit $N - m = 43$; et partitionum numerus quaesitus fiet $43^{(7)} = 8946$.

III. *Quaeratur, quot variis modis numerus 50 in decem partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 50$ et $m = 10$ erit $N - m = 40$ et partitionum numerus erit $40^{(10)} = 16928$.

IV. *Quaeratur, quot variis modis numerus 60 in 12 partes siue aequales siue inaequales dispertiri qossit?*
Cum sit $N = 60$ et $m = 12$ erit $N - m = 48$, et partitionum numerus quaesitus erit $48^{(12)} = 74287$.

V. *Quaeratur, quot variis modis numerus 80 in 20 partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*

Erit

Erit ergo $N = 80$ et $m = 20$, vnde $N - m = 60$, et partitionum numerus erit: $= 60^{(20)} = 791131$.

§. 37. In feriebus horizontalibus, quas tabula exhibet notatu digna eſt conuenientia inter terminos initiales harum ſerierum, quae eo longius procedit, quo maior fuerit numerus m: ſic ſeries decima quinta quindecim ſuos terminos initiales cum omnibus ſeriebus ſequentibus habet communes. Hinc inueniri poterit ſeries, quae numero m in infinitum aucto reſpondet, quae ergo continebit valores huius formulae $n^{(\infty)}$; quae denotat, quot variis modis numerus n, ex omnibus prorſus numeris integris per additionem produci poſſit. Haec ergo quaeſtio digna videtur, quae diligentius euoluatur. Cum $n^{(\infty)}$ complectatur omnes omnino partitiones numeri n, pro quocunque partium numero ſimul ſumtas: erit $n^{(\infty)}$ aggregatum ex numeris partitionum in $1, 2, 3, 4, \ldots$ vsque ad n partes, ſiue aequales, ſiue inaequales; quia numerus n in plures quam n partes ſecari nequit. Quam ob rem erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + \ldots \ldots (n-n)^{(n)}$$

in qua ſerie tam primus terminus $(n-1)^{(1)}$, qui denotat ſectionem in vnam partem, quam vltimus $(n-n)^{(n)}$, qui denotat ſectionem in n partes, eſt vnitas. Hinc igitur ſeries numerorum $n^{(\infty)}$, quae in calce tabulae exhibetur per additionem terminorum ex ſuperioribus ſeriebus inueniri poteſt. Sic erit: $6^{(\infty)} = 5^{(1)} + 4^{(2)} + 3^{(3)} + 2^{(4)} + 1^{(5)} + 0^{(6)}$ $= 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$, qui numerus in infima tabulae ſerie ſub numero 6 habetur.

§. 38. Poteſt autem haec operatio contrahi ope Lemmatis ſupra inuenti $n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$, vnde fit $n^{(m)} - n^{(m-1)} = (n-m)^{(m)}$.

 Cum

Cum enim ſit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + (n-6)^{(6)} + \text{etc.}$$

ſi vbique loco n ſcribatur $n-1$, erit:

$$(n-1)^{(\infty)} = (n-1)^{0} + (n-2)^{(1)} + (n-3)^{2} + (n-4)^{(3)} + (n-5)^{(4)} + (n-6)^{(5)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem praefigitur terminus $(n-1)^{0}$, cuius valor eſt $= 0$. Si igitur inferior ſeries a ſuperiori ſubtrahatur, ope Lemmatis prodibit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (11-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + (n-12)^{(6)}$$

ſicque terminus quisque $n^{(\infty)}$ ope praecedentis $(n-1)^{(\infty)}$ per additionem duplo pauciorum terminorum quam ante inuenitur. Erit ergo ex: gr. $12^{(\infty)} = 11^{(\infty)} + 10^{(1)} + 8^{(2)} + 6^{(3)} + 4^{(4)} + 2^{(5)} + 0^{(6)}$ ſiue $12^{(\infty)} = 56 + 1 + 5 + 7 + 5 + 2 + 1 = 77$, qui numerus quoque pro valore ipſius $12^{(\infty)}$ in tabula reperitur.

§. 39. Simili modo haec operatio vlterius contrahi poteſt, cum enim ſit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + \text{etc.}$$

ſi loco n ponamus $n-2$ habebimus:

$$(n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} = (n-2)^{(0)} + (n-4)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-8)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem terminum $(n-2)^{(0)} = 0$ praemittimus. Nunc hanc ſeriem a ſuperiore ſubtrahando ope Lemmatis obtinebimus.

$$\left.\begin{array}{l} + n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} \\ - (n-2)^{(\infty)} + (n-3)^{(\infty)} \end{array}\right\} = (n-3)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-9)^{(3)} + (n-12)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + \text{etc.}$$

Haec ergo ſeries ſi dicatur $= P$ erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} + P.$$

In ſerie ergo quaeſita ad definiendum terminum quemuis $n^{(\infty)}$ praeter valorem ipſius P noſſe oportet ternos termi-

nos

nos praecedentes. Hoc modo procedendo tandem quantitas P euanescet, et quilibet terminus istius seriei per solos terminos praecedentes definietur, quae est proprietas serierum recurrentium.

§. 40. Hanc vero seriem re vera esse recurrentem ex eius genesi est manifestum, cum oriatur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ etc.}}$$

Scala ergo relationis istius seriei habebitur, si iste denominator actu per multiplicationem euoluatur. Instituta autem hac multiplicatione denominator sequenti modo expressus inuenietur.

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+\text{etc.}$$

Quae ipsius x potestates qualem teneant legem, ex ipsa formatione vix definiri posse videtur; interim tamen ex inspectione mox patet, alternatim binos terminos esse affirmatiuos et negatiuos. Neque minus exponentes ipsius x certam legem tenere obseruantur, vnde eius terminus generalis colligitur esse $x^{n(3n\pm1):2}$. Scilicet nullae aliae potestates occurrunt nisi quarum exponentes continentur in hac formula $\frac{3nn\pm n}{2}$; et ita quidem vt potestates, quae ex numeris imparibus pro n assumtis oriuntur, habeant signum $-$, quae vero ex numeris paribus formantur, signum $+$.

§. 41. Haec igitur forma nobis suppeditat scalam relationis seriei quaesitae, qua constat fore:

$$n^{(\infty)}=(n-1)^{(\infty)}+(n-2)^{(\infty)}-(n-5)^{(\infty)}-(n-7)^{(\infty)}+(n-12)^{(\infty)}+(n-15)^{(\infty)}$$
$$-(n-22)^{(\infty)}-(n-26)^{(\infty)}+(n-35)^{(\infty)}+(n-40)^{(\infty)}(n-51)^{(\infty)}-(n-57)^{(\infty)}+\text{etc.}$$

 Hanc

Hanc autem legem progreſſionis locum haberi tentanti facile patebit. Sit enim $n = 30$ reperietur fore:

$$30^{(\infty)} = 29^{(\infty)} + 28^{(\infty)} - 25^{(\infty)} - 23^{(\infty)} + 18^{(\infty)} + 15^{(\infty)} - 8^{(\infty)} - 4^{(\infty)}$$

eſt enim his numeris ex tabula deſumtis

$$5604 = 4565 + 3718 - 1958 - 1255 + 385 + 176 - 22 - 5$$

Atque hoc modo iſta ſeries quo vsque libuerit continuari poteſt.

§. 42. Quoniam vero ſeries pro valore $m = 20$ iam eſt formata, ex ea aliquanto facilius ſeries quaeſita pro valore $m = \infty$ erui poterit. Cum enim ſeries $n^{(20)}$ formetur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1-x^{20})}$$

ſeries vero $n^{(\infty)}$ ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-^3)(1-x^4) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1-x^{\infty})}$$

manifeſtum eſt ſi haec ſeries multiplicetur per

$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25})$ etc. ſeu per

$$\begin{aligned}
&1 - x^{21} - x^{22} - x^{23} - x^{24} - x^{25} - x^{26} - x^{27} - \text{etc.}\\
&+ x^{43} + x^{44} + 2x^{45} + 2x^{46} + 3x^{47} + 3x^{48} + 4x^{49} + 4x^{50} + \text{etc.}\\
&- x^{66} - x^{67} - 2x^{68} - 3x^{69} - 4x^{70} - 5x^{71} - 7x^{72} - 8x^{73} - 10x^{74} - \text{etc.}\\
&+ x^{90} + x^{91} + 2x^{92} + 3x^{93} + 5x^{94} + 6x^{95} + 9x^{69} + 11x^{97} + 15x^{98} + \text{etc.}\\
&- x^{115} - x^{116} - 2x^{117} - 3x^{118} - 5x^{119} - 7x^{120} - 10x^{121} - 13x^{122} - 18x^{123} - \text{etc.}\\
&\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

tum prodire debere priorem. Hinc concluditur fore:

$n^{(20)}$

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - (n-21)^{(\infty)} - (n-22)^{(\infty)} - (n-23)^{(\infty)} - (n-24)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-43)^{(\infty)} + (n-44)^{(\infty)} + 2(n-45)^{(\infty)} + 2(n-46)^{(\infty)} + 3(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-66)^{(\infty)} - (n-67)^{(\infty)} - 2(n-68)^{(\infty)} - 3(n-69)^{(\infty)} - 4(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-90)^{(\infty)} + (n-91)^{(\infty)} + 2(n-92)^{(\infty)} + 3(n-93)^{(\infty)} + 5(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-115)^{(\infty)} - (n-116)^{(\infty)} - 2(n-117)^{(\infty)} - 3(n-118)^{(\infty)} - 5(n-119)^{(\infty)} - \text{etc}$$
$$\text{etc.}$$

quarum serierum coefficientes procedunt secundum series superiores pro partitione numerorum in 2, 3, 4, 5, 6, etc. partes inseruientes.

§. 43. Denotet $\int(n-21)^{(\infty)}$ summam omnium terminorum seriei $n^{(\infty)}$, quae est:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 15 + 22 + 30 + \text{etc.}$$

vsque ad terminum $(n-21)^{(\infty)}$ inclusiue: similique modo sit generaliter $\int p^{(\infty)}$ summa omnium terminorum eiusdem seriei vsque ad terminum $p^{(\infty)}$ inclusiue, quae summae cum successiue facile formentur, erit

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - \int(n-21)^{(\infty)} + \int(n-43)^{(\infty)} + \int(n-45)^{(\infty)} + \int(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-66)^{(\infty)} - \int(n-68)^{(\infty)} - \int(n-69)^{(\infty)} - \int(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-90)^{(\infty)} + \int(n-92)^{(\infty)} + \int(n-93)^{(\infty)} + 2\int(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Hincque adeo erit:

$$n^{(\infty)} = n^{(20)} + \int(n-21)^{(\infty)} - \int(n-43)^{(\infty)} - \int(n-45)^{(\infty)} - \int(n-47)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-66)^{(\infty)} + \int(n-68)^{(\infty)} + \int(n-69)^{(\infty)} + \int(n-70)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-90)^{(\infty)} - \int(n-92)^{(\infty)} - \int(n-93)^{(\infty)} - 2\int(n-94)^{(\infty)} - \text{etc.}$$

Huius formulae ope, nisi n sit numerus valde magnus, ex serie pro partitione in 20 partes inseruiente ipsa series $n^{(\infty)}$ facile constituitur, hocque modo ea in tabula conſtructa exhibetur, cum vbique exceſſus terminorum $n^{(\infty)}$ ſupra terminos $n^{(20)}$ ſint aſſignati.

§. 44. Hac igitur ſerie conſtructa propoſito quocunque numero definiri poterit, quot omnino modis is in partes diſpertiri poſſit. Sic patet numerum 10 omnino 42 modis ex additione reſultare poſſe; atque numerus 59 tot modis, quot indicat iſte numerus 831820 per additionem produci poterit. Sin autem numeri maiores proponantur, tum tabula hic exhibita vlterius continuari, vel pro quouis caſu numerus deſideratus per praecepta hic tradita inueſtigari debet. In his autem partitionibus aequalitas partium non excluditur. Vnde nouum oritur Problema, *quo pro quouis numero propoſito quaeritur omnium partitionum numerus in partes inter ſe inaequales*, quod Problema reſoluetur ope huius expreſſionis:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ etc.}$$

His enim factoribus in ſe inuicem multiplicatis orietur ſeries, in qua quilibet coefficiens oſtendet, quot variis modis exponens ipſius x in partes inter ſe inaequales diſpertiri poſſit.

§. 45. Quod ſi autem hoc productum actu euoluatur, reperietur haec ſeries:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+15x^{12}$$
$$+18x^{13}+22x^{14}+27x^{15}+32x^{16}+38x^{17}+46x^{18}+54x^{19}+64x^{20}+76x^{21}+89x^{22}+\text{etc.}$$

quae cum ſit productum ex factoribus infinitis tam ſimplicem legem ſeruantibus, omni attentione digna videtur. Ac primo quidem manifeſtum eſt coefficientes horum terminorum plerumque eſſe pares, et eos ſolum eſſe impares, qui ſint cum eiusmodi ipſius x poteſtatibus coniuncti, quarum exponentes in hac forma $\frac{3nn \pm n}{2}$ contineantur

neantur: cuius phaenomeni eadem eſt ratio, atque illius quod circa exponentes eiusdem formae $\frac{3nn \pm n}{2}$ in euolutione producti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. obſeruauimus. Cum autem ſit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)+etc. = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ etc.}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ etc.}$$

apparet, feriem ante inuentam exprimi hac fractione:

$$\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-x^{70}-x^{80}+\ etc.}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ etc.}$$

vnde ea ad modum ſerierum recurrentium formari poterit.

§. 46. Facillime autem ſine dubio haec ſeries conſtruitur ex ipſa eius indole, qua cuiuslibet termini coefficiens indicare debet, quot variis modis exponens ipſius x in partes inaequales diſpertiri poſſit. Sit N coefficiens poteſtatis x^n in iſta ſerie, eritque:

$$N = (n-1)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + (n-21)^{(6)} + \ etc.$$

nam $(n-1)^{(1)} = 1$ indicat numerum n vnico modo ex vna parte conſtare: $(n-3)^{(2)}$ oſtendit, quot modis numerus n in duas partes inaequales, $(n-6)^{(3)}$ oſtendit, quot modis numerus n in tres partes inaequales diſtribui poſſit, et ita porro: vnde et haec ſeries ope tabulae datae quousque libuerit continuari poteſt. Ceterum hic notatu dignum eſt; ſi numeri partitionum in partes numero pares negatiue capiantur, hanc expreſſionem reſultantem:

$$(n-1)^{(1)} - (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} - (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} - (n-21)^{(6)} + \ etc.$$

ſemper eſſe $= 0$, niſi fuerit n numerus in hac forma contentus $\frac{3zz \pm z}{2}$; ſin autem n in hac forma contineatur, tum illius expreſſionis valorem eſſe vel $+1$ vel -1, pro vt z fuerit numerus vel impar vel par.

§. 47.

§. 47. Quemadmodum hactenus omnes numeros integros ad partes constituendas admisimus, ita partium conditione limitanda numerus quaestionum in infinitum augeri posset: cui negotio, cum methodus certa ad huiusmodi quaestiones resoluendas sit tradita, non diutius immorabimur. Sufficiat ex praecedente insignem proprietatem partitionis in partes impares annotasse. Cum sit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \text{ etc.} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9) \text{ etc.}}$$

quae formula ex aequatione in §. XLIV. exhibita sponte fluit, hinc sequitur, quemuis numerum totidem modis ex numeris solis imparibus per additionem produci posse, quot modis idem numerus omnino in partes inter se inaequales dispertiri possit. Sic cum numerus 10 decem modis in partes inaequales dispertiri possit, qui modi sunt:

$10 = 10$	$10 = 1 + 2 + 7$
$10 = 1 + 9$	$10 = 1 + 3 + 6$
$10 = 2 + 8$	$10 = 1 + 4 + 5$
$10 = 3 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 4 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

idem numerus 10 quoque decem modis ex solis numeris imparibus per additionem produci potest, hoc modo

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+1+1+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+5$	$10 = 1+1+3+5$
$10 = 1+1+1+7$	$10 = 3+7$
$10 = 1+9$	$10 = 5+5$

§. 48. Relictis autem his speculationibus progredior ad inuestigandum, quomodo quisque numerus ex terminis progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.

etc. per additionem formari possit. Ac primo quidem si istae partes inter se debeant esse omnes inaequales, quaestio resoluetur per euolutionem huius expressionis:

$$s=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{etc.}$$

Multiplicatione enim actu instituta, cuiusque termini coefficiens indicabit, quot modis exponens potestatis ipsius x adiunctae ex numeris progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. per additionem produci possit. Cum igitur quiuis numerus vnico modo sic resolui posse obseruatus sit, ostendendum est in hac serie omnes ipsius x potestates occurrere, omniumque eundem esse coefficientem vnitatem.

§. 49. Vt hoc demonstremus, ponamus esse

$$s=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\theta x^8+\text{etc.}$$

atque ad valores coefficientium α, β, γ, δ, etc. eruendos, ponamus xx loco x, sitque valor pro s hoc modo resultans $=t$, erit:

$$t=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{ etc.}$$

ideoque fiet $s=(1+x)t$. Qua relatione in seriebus considerata ob $t=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+$ etc. habebitur:

$$(1+x)t=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+\text{etc.}$$

quae cum aequalis esse debeat seriei s, comparatio coefficientium dabit:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\alpha=1 & \delta=\beta & \eta=\gamma & \varkappa=\varepsilon \\
\beta=\alpha & \varepsilon=\beta & \theta=\delta & \lambda=\varepsilon \quad \text{etc.} \\
\gamma=\alpha & \zeta=\gamma & \iota=\delta & \mu=\zeta
\end{array}$$

 vnde

vnde manifeſtum eſt, ſingulos coefficientes eſſe vnitati aequales, ac propterea eſſe:

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x},$$

quod idem per ſe perſpicuum eſt, cum ſit:

$$(1-x), (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \text{ etc.} = 1.$$

§. 50. Sin autem quaeratur, quot variis modis quisque numerus ex terminis progreſſionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. partium aequalitate non amplius ſublata, per additionem produci queat: ſolutio petenda erit ex euolutione huius fractionis:

$$s = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})} \text{ etc.}$$

hac enim in ſerie euoluta coefficiens cuiusque termini oſtendet, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae ex terminis progreſſionis Geometricae propoſitae per additionem reſultare poſſit. Ponamus xx loco x, et valor ipſius s abeat in t, erit:

$$t = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16}) \text{ etc.}} = (1-x)s,$$

ſit igitur:

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \text{etc.}$$

erit:

$$\begin{aligned}
(1-x)s &= 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 \text{ etc.} \\
&\quad\;\; - 1 \;\; - \alpha \;\; - \beta \;\; - \gamma \;\; - \delta \;\; - \varepsilon \;\; - \zeta \;\; - \eta \;\; - \theta \text{ etc.} \\
= t &= 1 \quad + \alpha x^2 \quad + \beta x^4 \quad + \gamma x^6 \quad + \delta x^8 \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

vnde

vnde ex aequalitate terminorum homogeneorum obtinebitur:

$$\begin{array}{lll|lll|lll}
\alpha = 1 & & = 1 & \eta = \zeta & & = 6 & \nu = \mu & & = 20 \\
\beta = \alpha + \alpha & & = 2 & \theta = \eta + \delta & & = 10 & \xi = \nu + \eta & & = 26 \\
\gamma = \beta & & = 2 & \iota = \theta + & & = 10 & o = \xi & & = 26 \\
\delta = \gamma + \beta & & = 4 & \varkappa = \iota + \varepsilon & & = 14 & \pi = o + \theta & & = 36 \\
\varepsilon = \delta & & = 4 & \lambda = \varkappa + & & = 14 & \varrho = \pi & & = 36 \\
\zeta = \varepsilon + \gamma & & = 6 & \mu = \lambda + \zeta & & = 20 & \sigma = \varrho + \iota & & = 46
\end{array} \quad \text{etc.}$$

§. 51. Notatu digna eſt haec ſeries, cum quod bini termini ſint vbique aequales, tum quod ea facillime quovsque libuerit continuetur. Vlterius autem continuata ita ſe habebit:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 6x^7 + 10x^8 + 10x^9 + 14x^{10} + 14x^{11} +$$
$$20x^{12} + 20x^{13} + 26x^{14} + 26x^{15} + 36x^{16} + 36x^{17} + 46x^{18} + 46x^{19} + 60x^{20} + 60x^{21} +$$
$$74x^{22} + 74x^{23} + 94x^{24} + 94x^{25} + 114x^{26} + 114x^{27} + 140x^{28} + 140x^{29} + 166x^{30} +$$
$$166x^{31} + 202x^{32} + 202x^{33} + 238x^{34} + 238x^{35} + 284x^{36} + 285x^{37} + \text{etc.}$$

Ex hac ergo ſerie patet numerum verbi gratia 30 centum ſexaginta, et ſex modis ex terminis progreſſionis Geometricae duplae per additionem produci poſſe. Ceterum attendenti facile patebit, legem huius progreſſionis nullo modo per terminum generalem exprimi poſſe cum reuera ſit ſeries recurrens, cuius ſcala relationis in infinitum extendatur. Dabit autem hoc productum infinitum:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-{}^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

ſi euoluatur ſcalam relationis. Ad quam inueniendam ponatur hoc productum $= p$, quod abeat in q ſi loco x ponatur x^2, eritque: $q = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})$ etc. $= \frac{p}{1-x}$, ſeu $p = (1-x)q$. ſtatuatur ergo:

$$p = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \varkappa x^{10} + \text{etc.}$$

eritque:

$$(1-x)q = 1 - x + \alpha x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4 - \beta x^5 + \gamma x^6 - \gamma x^7 + \delta x^8 - \delta x^9 + \varepsilon x^{10} - \text{etc.}$$

vnde per coaequationem terminorum ſimilium obtinetur:

$$\begin{array}{l|l|l}
\alpha = -1 = -1 & \theta = \delta = -1 & o = -\eta = +1 \\
\beta = \alpha = -1 & \iota = -\delta = +1 & \pi = \theta = -1 \\
\gamma = -\alpha = +1 & \kappa = \varepsilon = +1 & \rho = -\theta = +1 \\
\delta = \beta = -1 & \lambda = -\varepsilon = -1 & \sigma = \iota = +1 \\
\varepsilon = -\beta = +1 & \mu = \zeta = +1 & \tau = -\iota = -1 \\
\zeta = \gamma = +1 & \nu = -\zeta = -1 & \upsilon = \kappa = +1 \\
\eta = -\gamma = -1 & \xi = \eta = -1 & \Phi = -\kappa = -1
\end{array}$$

etc.

§. 52. Coefficientes ergo feriei p, quae ex euolutione huius producti:

$$(1-x((1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

nafcitur omnes funt vel $+1$ vel -1, neque tamen legem obtinent folito more affignabilem, erit enim:

$$\begin{aligned}p = {} & 1-x^1-x^2+x^3-x^4+x^5+x^6-x^7-x^8+x^9+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}-x^{14} \\ & +x^{15}-x^{16}+x^{17}+x^{18}-x^{19}+x^{20}-x^{21}-x^{22}+x^{23}+x^{24}-x^{25}-x^{26}+x^{27}-x^{28}+x^{29} \\ & +x^{30}-x^{31}-x^{32}+x^{23}+x^{34}-x^{35}+x^{36}-x^{37}-x^{38}+x^{39}+x^{40}-x^{41}-x^{42}+x^{43}-x^{44} \text{ etc.}\end{aligned}$$

vbi notandum eft, quamlibet poteftatem exponentis imparis x^{2n+1} contrarium habere fignum ei, quod habet poteftas x^{2n}, huiusque fignum perpetuo conuenire cum figno poteftatis x^n; vnde cuiusuis poteftatis fignum facile affignabitur. Vti fi quaeratur fignum poteftatis huius x^{1745}, erit refpectu ad fola figna habito:

$$\begin{aligned}& x^{1745} = -x^{1744} = -x^{872} = -x^{436} = -x^{218} = -x^{109} = +x^{108} = \\ & +x^{54} = +x^{27} = -x^{26} = -x^{13} = +x^{12} = +x^6 = +x^3 = -x^2 - -x^1\end{aligned}$$

fignum ergo poteftatis x^{1745} contrarium eft figno poteftatis x^1 quod cum fit $-$ erit id $+$.

Tabula

Tabula indicans, quot variis modis quilibet numerus n ex numeris 1, 2, 3, 4, - - - - m per additionem produci possit, seu exhibens valores formulae $n^{(m)}$.

Num. / m.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	Valores numeri n.																						
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1 2	1 2	2 3	2 3	3 4	3 4	4 5	4 5	5 6	5 6	6 7	6 7	7 8	7 8	8 9	8 9	9 10	9 10	10 11	10 11	11 12
3	1	1	2	1 3	1 4	2 5	3 7	4 8	5 10	7 12	8 14	10 16	12 19	14 21	16 24	19 27	21 30	24 33	27 37	30 40	33 44	37 48	40 52
4	1	1	2	3	1 5	1 6	2 9	3 11	5 15	6 18	9 23	11 27	15 34	18 39	23 47	27 54	34 64	39 72	47 84	54 94	64 108	72 120	84 136
5	1	1	2	3	5	1 7	1 10	2 13	3 18	5 23	7 30	10 37	13 47	18 57	23 70	30 84	37 101	47 119	57 141	70 164	84 192	101 221	119 255
6	1	1	2	3	5	7	1 11	1 14	2 20	3 26	5 35	7 44	11 58	14 71	20 90	26 110	35 136	44 163	58 199	71 235	90 282	110 331	136 391
7	1	1	2	3	5	7	11	1 15	1 21	2 28	3 38	5 49	7 65	11 82	15 105	21 131	28 164	38 201	49 248	65 300	82 364	105 436	131 522
8	1	1	2	3	5	7	11	15	1 22	1 29	2 40	3 52	5 70	7 89	11 116	15 146	22 186	29 230	40 288	52 352	70 434	89 525	116 638
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	1 30	1 41	2 54	3 73	5 94	7 123	11 157	15 201	22 252	30 318	41 393	54 488	73 598	94 732
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	1 42	1 55	2 75	3 97	5 128	7 164	11 212	15 267	22 340	30 423	42 530	55 653	75 807
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	1 56	1 76	2 99	3 131	5 169	7 219	11 278	15 355	22 445	30 560	42 695	56 863
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	1 77	1 100	2 133	3 172	5 224	7 285	11 366	15 460	22 582	30 725	42 905
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	1 101	1 134	2 174	3 227	5 290	7 373	11 471	15 597	22 747	30 935
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	1 135	1 175	2 229	3 293	5 378	7 478	11 608	15 762	22 957
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	1 176	1 230	2 295	3 381	5 483	7 615	11 773	15 972
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	1 231	1 296	2 383	3 486	5 620	7 780	11 983
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	1 297	1 384	2 488	3 623	5 785	7 990
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	1 385	1 489	2 625	3 788	5 995
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	1 490	1 626	2 790	3 998
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	1 627	1 791	2 1000
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	1 792	2 1002

m.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	11 12	12 13	12 13	13 14	13 14	14 15	14 15	15 16	15 16	16 17	16 17	17 18
3	44 56	48 61	52 65	56 70	61 75	65 80	70 85	75 91	80 96	85 102	91 108	96 114
4	94 150	108 169	120 185	136 206	150 225	169 249	185 270	206 297	225 321	249 351	270 378	297 411
5	141 291	164 333	192 377	221 427	255 480	291 540	333 603	377 674	427 748	480 831	540 918	603 1014
6	163 454	199 532	235 612	282 709	331 811	391 931	454 1057	532 1206	612 1360	709 1540	811 1729	931 1945
7	164 618	201 733	248 860	300 1009	364 1175	436 1367	522 1579	618 1824	733 2093	860 2400	1009 2738	1175 3120
8	146 764	186 919	230 1090	288 1297	352 1527	434 1801	525 2104	638 2462	764 2857	919 3319	1090 3828	1297 4417
9	123 887	157 1076	201 1291	252 1549	318 1845	393 2194	488 2592	598 3060	732 3589	887 4206	1076 4904	1291 5708
10	97 984	128 1204	164 1455	212 1761	267 2112	340 2534	423 3015	530 3590	653 4242	807 5013	984 5888	1204 6912
11	76 1060	99 1303	131 1586	169 1930	219 2331	278 2812	355 3370	445 4035	560 4802	695 5708	863 6751	1060 7972
12	56 1116	77 1380	100 1686	133 2063	172 2503	224 3036	285 3655	336 4401	460 5262	582 6290	725 7476	905 8877
13	42 1158	56 1436	77 1763	101 2164	134 2637	174 3210	227 3882	290 4691	373 5635	471 6761	597 8073	747 9624
14	30 1188	42 1478	56 1819	77 2241	101 2738	135 3345	175 4057	229 4920	293 5928	378 7139	478 8551	608 10232
15	22 1210	30 1508	42 1861	56 2297	77 2815	101 3446	135 4192	176 5096	230 6158	295 7434	381 8932	483 10715
16	15 1225	22 1530	30 1891	42 2339	56 2871	77 3523	101 4293	135 5231	176 6334	231 7665	296 9228	383 11098
17	11 1236	15 1545	22 1913	30 2369	42 2913	56 3579	77 4370	101 5332	135 6469	176 7841	231 9459	297 11395
18	7 1243	11 1556	15 1928	22 2391	30 2943	42 3621	56 4426	77 5409	101 6570	135 7976	176 9635	231 11626
19	5 1248	7 1563	11 1939	15 2406	22 2965	30 3651	42 4468	56 5465	77 6647	101 8077	135 9770	176 11802
20	3 1251	5 1568	7 1946	11 2417	15 2980	22 3673	30 4498	42 5507	56 6703	77 8154	101 9871	135 11937
∞	4 1255	7 1575	12 1958	19 2436	30 3010	45 3718	67 4565	97 5604	139 6842	195 8349	272 10143	373 12310

m	35	36	37	38	39	40	41	42	43
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	17	18	18	19	19	20	20	21	21
2	18	19	19	20	20	21	21	22	22
	102	108	114	120	127	133	140	147	154
3	120	127	133	140	147	154	161	169	176
	321	351	378	411	441	478	511	551	588
4	441	478	511	551	588	632	672	720	764
	678	748	831	918	1014	1115	1226	1342	1469
5	1115	1226	1342	1469	1602	1747	1898	2062	2233
	1057	1206	1360	1540	1729	1945	2172	2432	2702
6	2172	2412	2702	3009	3331	3692	4070	4494	4935
	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120	3539	4011
7	3539	4011	4526	5102	5731	6130	7190	8033	8946
	1527	1801	2104	2462	2857	3319	3828	4417	5066
8	5066	5812	6630	7564	8588	9749	1108	12450	14012
	1549	1845	2194	2592	3060	3589	4206	4904	5708
9	6615	7657	8824	10156	11648	13398	15224	17354	19720
	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888
10	8070	9418	10936	12690	1466	6928	19466	22367	25608
	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035	4802	5708
11	9373	11004	12866	15021	17475	20298	23501	27169	31316
	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262
12	10489	12384	14552	17084	19978	23334	27156	31570	36578
	935	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691
13	11424	13542	15988	18847	22142	25971	30366	35452	41269
	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057
14	12186	14499	17176	20325	23961	28212	33104	38797	45326
	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446
15	12801	15372	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772
	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871
16	13287	15892	18928	22518	26694	31603	37292	43951	51643
	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369
17	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45464	54012
	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928
18	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080	47420	55940
	231	297	385	490	626	790	998	1248	1563
19	14199	17062	20425	24412	29092	34624	41078	48668	57503
	176	231	297	385	490	627	791	1000	1251
20	14375	17292	20722	24801	29588	35251	41869	49668	58754
	508	684	915	1212	1597	2087	2714	3506	4507
∞	14883	17977	21637	26015	31185	37338	44583	53174	63261

m	44	45	46	47	48	49	50	51
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	22	22	23	23	24	24	25	25
2	23	23	24	24	25	25	26	26
	161	169	176	184	192	200	208	217
3	184	192	200	208	217	225	234	243
	632	672	720	764	816	864	920	972
4	816	864	920	972	1033	1089	1154	1215
	1602	1747	1898	2062	2233	2418	2611	2818
5	2418	2611	2818	3034	3266	3507	3765	4033
	3009	3331	3692	4070	4494	4935	5427	5942
6	5427	5942	6510	7104	7760	8442	9192	9975
	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8946	9953
7	9953	11044	12241	13434	14950	16475	18134	19928
	5812	6630	7564	8588	9749	11018	12450	14012
8	15765	17670	19805	22122	24699	27493	30588	33640
	6615	7657	8824	10156	11648	13338	15224	17354
9	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812	51294
	6912	8070	9418	10936	12690	14663	16928	19466
10	29292	33401	38047	43214	49037	55494	62740	70760
	6751	7972	9373	11004	12866	15021	17475	20298
11	36043	41373	47420	54218	61903	70515	80215	91058
	6290	7476	8877	10489	12384	14552	17084	19978
12	42333	48849	56297	64707	74287	85067	97299	111036
	5635	6761	8073	9624	11424	13542	15988	18847
13	47968	55610	64370	74331	85711	98609	113287	129883
	4920	5928	7139	8551	10232	12186	14499	17176
14	52888	61538	71509	82882	95943	110795	127786	147059
	4192	5096	6158	7434	8932	10715	12801	15272
15	57080	66634	77667	90316	104875	121510	140587	162331
	3523	4293	5231	6334	7665	9228	11098	13287
16	60603	70927	82898	96650	112540	130738	151685	175618
	2913	3579	4370	5332	6469	7841	9459	11395
17	63516	74506	87268	101982	119009	138579	161144	187013
	2391	2943	3621	4426	5409	6570	7976	9635
18	65907	77449	90889	106408	124418	145149	169120	196648
	1939	2406	2965	3651	4468	5465	6647	8077
19	67846	79855	93854	110059	128886	150614	176767	204725
	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703
20	69414	81801	96271	113039	132559	155112	181274	211528
	5761	7333	9287	11715	14714	18413	22952	28515
∞	75175	89134	105558	124754	147273	173525	204226	239943

m	52	53	54	55	56	57	58	59
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	26	26	27	27	28	28	29	29
2	27	27	28	28	29	29	30	30
	225	234	243	252	261	271	280	290
3	252	261	271	280	290	300	310	320
	1033	1089	1154	1215	1285	1350	1425	1495
4	1285	1350	1425	1495	1575	1650	1735	1815
	3034	3266	3507	3765	4033	4319	4616	4932
5	4319	4616	4932	5260	5608	5969	6351	6747
	6510	7104	7760	8442	9192	9975	10829	11720
6	10829	11720	12692	13702	14800	15944	17180	18467
	11044	12241	13534	14950	16475	18138	19928	21873
7	21873	23961	26226	28652	31275	34082	37108	40340
	15765	17674	19805	22122	24699	27493	30588	33940
8	37638	41635	46031	50774	55974	61575	67696	74280
	19720	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812
9	57358	64015	71362	79403	88252	97922	108527	120092
	22367	25608	29292	33401	38047	43214	49037	55494
10	79725	89623	100654	112804	126299	141136	157564	175586
	23501	27169	31316	36043	41373	47420	54218	61903
11	103226	116792	131970	148847	167672	188556	211782	237489
	23334	27156	31570	36578	42333	48849	56297	64707
12	126560	143948	163540	185425	210005	237465	268079	302196
	22142	25971	30366	35452	41269	47968	55610	64370
13	148702	169919	193906	220877	251274	285373	323689	366566
	20325	23961	28212	33104	38797	45326	52888	61538
14	169027	193880	222118	253981	290071	330695	376577	428104
	18148	21535	25469	30073	35403	41612	48772	57080
15	187175	215415	247587	284054	325475	372311	425349	485184
	15892	18928	22518	26694	31600	37292	43951	51643
16	203067	234343	270105	310748	357075	409603	469300	536827
	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45864
17	216738	250723	289656	334051	384759	442442	508137	582691
	11626	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080
18	228364	264691	306421	354091	408687	470914	541971	622771
	9770	11802	14199	17062	20425	24418	29098	34624
19	238134	276493	320620	371153	429112	495332	571069	657395
	8154	9871	11937	14375	17293	20722	24803	29588
20	246288	286364	332557	385528	446405	516054	595872	686983
	35301	43567	53598	65748	80418	98100	119348	144837
∞	281589	320931	386155	451276	526823	614154	715220	831820