



1752

Recherches sur l'effet d'un machine hydraulique proposée par M. Segner, professeur à Göttingue

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Recherches sur l'effet d'un machine hydraulique proposée par M. Segner, professeur à Göttingue" (1752). *Euler Archive - All Works*. 179.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/179>



RECHERCHES SUR L'EFFET
D'UNE MACHINE HYDRAULIQUE PROPO-
SÉE PAR MR. SEGNER PROFESSEUR A GÖTTINGUE;

PAR M. EULER.

Cette Machine est composée d'un vaisseau cylindrique, dont l'axe tient une situation verticale, autour duquel le vaisseau peut librement tourner. Ce vaisseau n'est pas exprimé dans la figure, qui n'en représente qu'une section horizontale *A B C D E F* faite près de la base inférieure. Dans cet endroit le vaisseau est percé de plusieurs trous *A, B, C, D, E, F* pour y recevoir des tuyaux horizontaux *Aa, Bb, Cc, Dd, &c.* qui communiquent avec le grand vaisseau. Ces tuyaux sont fermés à l'autre bout, mais ils ont tous une ouverture à côté marquée par les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, &c.$ La Machine étant construite de cette façon, si l'on remplit d'eau le grand vaisseau, elle en sortira par les ouvertures $\alpha, \beta, \gamma, \delta, &c.$ des tuyaux horizontaux; & chacun d'eux sera repoussé par la force de réaction de l'eau. Donc, puisque la machine est mobile autour de son axe, & que ces forces de réaction la poussent en même sens, elle commencera d'abord à tourner autour de son axe dans le sens *abcdef*. Et si l'on verse dans le vaisseau continuellement autant d'eau, qu'il faut pour l'entretenir toujours plein, le mouvement de rotation de la machine continuera non seulement, mais il deviendra aussi de plus en plus rapide, jusqu'à ce qu'il aura atteint un certain degré de vitesse, qu'il conservera ensuite sans aucune variation.

Fig. I.

Puisque les forces de l'eau peuvent devenir considérables, on voit aussi, que cette machine pourra être employée à vaincre des obstacles,



flacles, ou à élever des poids ; & peut-être sera-t-on en état de tirer par ce moyen un plus grand effet de la dépense d'eau, qui est requise pour l'entretien de cette machine, que si on la vouloit employer d'une autre façon.

Après avoir donné une description en gros de cette machine, pour rendre mes recherches plus générales, je m'en vai exposer l'état des pièces, auxquelles il faut avoir égard, en leur supposant une telle figure, qui convient à la généralité que j'ai en vuë.

I. Quant aux tuyaux horizontaux, qui sont attachés au grand vaisseau, que Mr. *Segner* suppose droits, je leur donnerai une figure courbe quelconque, en sorte pourtant, qu'ils ne s'écartent point du plan horizontal, auquel on les conçoit arrangés.

II. Pour la largeur de ces tuyaux, je la supposerai variable d'une manière quelconque ; de sorte que la quantité, qui exprime la largeur dans un endroit quelconque, soit une fonction variable qui dépend de cet endroit.

III. Au lieu que Mr. *Segner* suppose ces tuyaux percés à coté pour donner l'issue à l'eau, je les supposerai courbés à leur bout ; afin que la continuité ne soit point interrompue, & que je puisse renfermer dans le calcul non seulement le mouvement de l'eau dans les tuyaux mais aussi sa sortie à leur bout.

IV. Cependant, quoique je donne à ces tuyaux une largeur variable, je la supposerai pourtant par tout assés petite, pour que la direction du mouvement de l'eau soit partout parallèle à la direction du tuyau ; ou bien que l'eau, qui se trouve à chaque section du tuyau, se meuve avec une vitesse égale.

V. Le grand vaisseau sera, comme Mr. *Segner* le suppose, librement mobile autour de son axe, qui est vertical, de sorte que lorsque la machine tourne autour de cet axe, les tuyaux se meuvent tous dans un plan horizontal.

VI. Enfin pour connoître l'effet d'une telle machine, je lui concevrai attaché un poids, qu'elle doit élever par son mouvement de rotation.

Comme



Comme il s'agit maintenant de déterminer l'effet, qu'une telle machine est capable de produire, il faut remarquer que cet effet résulte des efforts, que l'eau en passant par les tuyaux y exerce. Car premièrement il est connu que l'eau en sortant d'un vaisseau le repousse avec une force, qu'on nomme la réaction: Et ensuite, si les tuyaux sont courbes, entant que l'eau est obligée de changer de direction, il en nait une force centrifuge, dont les tuyaux éprouvent la pression. On comprendra aussi aisément que ces forces doivent être bien différentes, lorsque la machine aura déjà acquis un mouvement de rotation, & lorsqu'elle est en repos: il conviendra donc de commencer mes recherches par celle des efforts, que l'eau en passant par les tuyaux d'un mouvement quelconque y exerce, pendant que ces tuyaux mêmes tournent autour de l'axe de la machine aussi avec un mouvement quelconque. Pour cet effet, comme le mouvement tant des tuyaux que de l'eau est supposé connu, il faudra chercher les forces requises, pour entretenir ce mouvement supposé dans l'eau, ce qui sera le sujet de mon premier probleme.

PROBLEME I.

Le mouvement tant de la machine même que de l'eau qui coule par les tuyaux étant connu, déterminer les forces qui sont requises pour maintenir l'eau dans ce mouvement.

SOLUTION.

Que le plan de la planche représente la section horizontale du vaisseau à l'endroit où il porte les tuyaux horizontaux; soit O l'axe ou le centre de la base du vaisseau, dont le rayon OA soit nommé $= a$. Que la droite AME ensuite représente un des tuyaux horizontaux, dont la largeur en A soit $= ff$, où il communique avec le vaisseau. De plus, ayant tiré d'un endroit quelconque M du tuyau au centre O la droite OM , soit $AX = x$ & $OM = y$: & la figure du tuyau sera exprimée par une équation entre x & y . Soit outre cela

Fig. II.

la largeur du tuyau en $M = z z$, qui pourra être regardée comme une fonction de x ou y . Pour le mouvement de rotation de la machine, soit la vitesse dont le point A tourne à présent dans le sens CA autour du centre $O = V u$, & supposant que le point A ait été au commencement en C , qu'il soit parvenu en A après un tems $= t$, je regarderai la quantité u comme une fonction du tems t , pour donner à ce mouvement toute la variabilité possible. Ensuite soit $V v$ la vitesse dont l'eau entre à présent par l'ouverture ff en A dans le tuyau $A M E$, de sorte que $V v$ marque, non la vitesse véritable de l'eau, mais sa vitesse relative à l'égard du tuyau : & soit v également une fonction quelconque du tems écoulé t . Dans ce même instant la vitesse d'une goutte d'eau qui se trouve en M sera $= \frac{ff V v}{z z}$, à cause de la largeur du tuyau en $M = z z$, celle en A étant $= ff$. Ainsi $\frac{ff V v}{z z}$ exprimera aussi la vitesse relative de l'eau dans le tuyau en M , & partant sa direction sera celle du tuyau même savoir $M m$. Or à cause du mouvement de rotation, le point du tuyau M sera emporté suivant la direction $M M'$ perpendiculaire à $O M$, avec une vitesse $= \frac{y V u}{a}$. Donc le vrai mouvement d'une goutte d'eau en M sera composé de ces deux mouvemens, dont l'un se fait avec la vitesse $\frac{ff V v}{z z}$ suivant la direction $M m$ & l'autre avec la vitesse $\frac{y V u}{a}$ suivant la direction $M M'$. Décomposons ce mouvement suivant deux directions fixes, dont l'une soit la droite $O C D$, & l'autre y soit perpendiculaire ; qu'on tire pour cet effet la droite $M P$ perpendiculaire à $O D$, & qu'on nomme $O P = X$ & $P M = Y$. Les vitesses de l'eau en M selon les directions $O P$ & $P M$ seront donc $\frac{d X}{d t}$ & $\frac{d Y}{d t}$: d'où il s'ensuit que posant l'élément du tems $d t$ constant, il faut que

l'eau



l'eau en M soit sollicitée par deux forces acceleratrices, l'une suivant la direction OP, qui sera $= \frac{2 d d X}{d t^2}$ & l'autre suivant la direction PM,

qui sera $= \frac{2 d d Y}{d t^2}$. Reduisons maintenant ces deux forces à deux

autres directions OM & MM', qui ne dépendent plus de la position de la droite OP, & la force selon OP $= \frac{2 d d X}{d t^2}$ donne pour la di-

rection OM ou Mμ la force $\frac{2 X d d X}{y d t^2}$ & pour la direction MM'

la force $= \frac{2 Y d d X}{y d t^2}$. De même la force selon PM $= \frac{2 d d Y}{d t^2}$

donne pour la direction Mμ la force $\frac{2 Y d d Y}{y d t^2}$ & pour MM' la

force $= \frac{2 X d d Y}{y d t^2}$; de sorte que nous aurons deux forces

$$\text{l'une selon M } \mu = \frac{2 X d d X + 2 Y d d Y}{y d t^2}$$

$$\text{l'autre selon MM}' = \frac{2 X d d Y - 2 Y d d X}{y d t^2}$$

Soit l'angle DOM = φ, & ayant X = y cos φ & Y = y sin φ nous aurons dX = dy cos φ - y dφ sin φ & dY = dy sin φ + y dφ cos φ & encore

$$d d X = d d y \cos \phi - 2 d y d \phi \sin \phi - y d \phi^2 \cos \phi - y d d \phi \sin \phi$$

$$d d Y = d d y \sin \phi + 2 d y d \phi \cos \phi - y d \phi^2 \sin \phi + y d d \phi \cos \phi$$

& partant nos deux forces acceleratrices seront

$$\text{la force selon M } \mu = \frac{2}{d t^2} (d d y - y d \phi^2)$$

$$\text{la force selon MM}' = \frac{2}{d t^2} (2 d y d \phi + y d d \phi).$$



Il faut donc à présent chercher les valeurs des différentiels $d\Phi$ & $d^2\Phi$, par les mouvements supposés. Soit pour cet effet l'angle $COA = \omega$, & puisque dans l'élément du tems dt le point A est transporté en A' de sorte que $AA' = dt V u$, nous en tirons $d\omega = \frac{dt V u}{a}$. Ensuite

ayant $AX = x$, l'angle AOX fera $= \frac{x}{a}$; & partant à cause de

$\Phi = \omega - \frac{x}{a}$, nous aurons $d\Phi = \frac{dt V u}{a} - \frac{dx}{a}$ & $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{V u}{a} - \frac{dx}{a dt}$. Or à cause du mouvement de l'eau dans le tuyau avec la

vitesse $= \frac{ff V v}{zz}$ selon la direction Mm , elle parcourra dans le tems dt l'espace $Mm = \frac{ff dt V v}{zz}$. Donc, posant pour abrégier Mm

$= V (dy^2 + \frac{yy dx^2}{aa}) = ds$, & l'angle AMX ou $Mmk = \theta$, nous aurons $dy = ds \cos \theta$ & $\frac{y dx}{a} = ds \sin \theta$ ou $dx = \frac{a ds \sin \theta}{y}$.

Partant puisque $ds = \frac{ff dt V v}{zz}$, nous aurons

$\frac{dy}{dt} = \frac{ff \cos \theta V v}{zz}$ & $\frac{dx}{dt} = \frac{aff \sin \theta}{yzz} V v$; donc $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{V u}{a} - \frac{ff \sin \theta V v}{yzz}$

Passons aux seconds différentiels, & nous trouverons

$\frac{ddy}{dt^2} = \frac{-ff d\theta \sin \theta V v}{zz dt} + \frac{ff dv \cos \theta}{2zz dt V v} - \frac{2ff dz \cos \theta V v}{z^3 dt}$

$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{du}{2adt V u} - \frac{ff \cdot \theta \cos \theta V v}{yzz dt} - \frac{ff dv \sin \theta}{2yzz dt V v} + \frac{ff dy \sin \theta V v}{yyzz dt} + \frac{2ff dz \sin \theta V v}{yz dt}$

De



De là nos forces acceleratrices seront

I. Selon $M\mu$

$$-\frac{2yu}{aa} + \frac{4ff\sin\theta Vuv}{azz} - \frac{2fv^2\sin\theta^2}{yz^2} - \frac{2ff d\theta\sin\theta Vv}{zzdt} \\ + \frac{ffdv\cos\theta}{zzdtVv} - \frac{4ffdz\cos\theta.Vv}{zdt}$$

II. Selon MM'

$$\frac{4ff\cos\theta Vuv}{azz} - \frac{4f^2v\sin\theta\cos\theta}{yz^2} + \frac{ydu}{adtVu} - \frac{2ff d\theta\cos\theta.Vv}{zzdt} \\ - \frac{ffdv\sin\theta}{zzdtVv} + \frac{2ffdy\sin\theta Vv}{yz z dt} + \frac{4ffdz\sin\theta Vv}{z^3 dt}$$

Or il convient de réduire ces forces encore à d'autres directions, qui se rapportent à celle du tuyau, dont l'une soit suivant la direction du tuyau Mm & l'autre y soit perpendiculaire suivant MR : & on aura

la force selon $Mm =$ force $M\mu$. $\cos\theta$ - force MM' . $\sin\theta$

la force selon $MR =$ force $M\mu$. $\sin\theta$ - force MM' . $\cos\theta$

ainsi il en résultera.

I. La force selon Mm

$$-\frac{2yu\cos\theta}{aa} + \frac{2f^2v\sin\theta^2\cos\theta}{yz^2} - \frac{ydu\sin\theta}{adtVu} + \frac{ffdv}{zzdtVv} - \frac{2ffdy\sin\theta^2 Vv}{yz z dt} \\ - \frac{4ffdzVv}{z^3 dt}$$

II. La force selon MR

$$\frac{2yu\sin\theta}{aa} - \frac{4ffVuv}{azz} + \frac{2f^2v\sin\theta(\sin\theta^2 + 2\cos\theta^2)}{yz^2} + \frac{2ff d\theta Vv}{zzdt} \\ - \frac{ydu\cos\theta}{adtVu} - \frac{2ffdy\sin\theta\cos\theta.Vv}{yz z dt}$$



Ici il faut remarquer que nous avons deux especes de quantités, dont l'une comprend des fonctions du tems t , & l'autre les quantités qui dependent de la variabilité du point M. De la premiere espece sont

les vitesses $V u$ & $V v$, & partant $\frac{du}{dt}$ & $\frac{dv}{dt}$ seront des quantités fi-

nies & fonctions du tems t : l'autre espece comprend les autres quantités x, y, z, θ , & ds qui se rapportent ensemble. Par conséquent,

pour que les fractions $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ & $\frac{d\theta}{dt}$ aient des valeurs détermi-

nées, il faut mettre au lieu de dt sa valeur $\frac{z z ds}{ff V v}$: d'où nous aurons à

cause de $dy = ds \cos \theta$;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ff \cos \theta \cdot V v}{z z}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{ff dz V v}{z z ds}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{ff d\theta V v}{z z ds}$$

Faisant donc ces substitutions, & séparant en chaque terme les fonctions du tems t de celles qui dependent du tuyau, nos forces acceleratrices seront.

I. La force selon Mm

$$- \frac{2u}{aa} \cdot y \cos \theta - \frac{du}{adt V u} \cdot y \sin \theta + \frac{dv}{dt V v} \cdot \frac{ff}{z z} - 4 v \cdot \frac{f^2 dz}{z^3 ds}$$

II. La force selon MR

$$\frac{2u}{aa} \cdot y \sin \theta - \frac{4 V u v}{a} \cdot \frac{ff}{z z} + 2 v \cdot \frac{f^2 \sin \theta}{y z^3} - \frac{du}{adt V u} \cdot y \cos \theta + 2 v \cdot \frac{f^2 d\theta}{z^3 ds}$$

Or nommant le rayon de courbure du tuyau en M savoir $MR = r$,

$$\text{on aura } r = \frac{y \frac{dy}{ds}}{\frac{dy \sin \theta}{ds} + y \frac{d\theta \cos \theta}{ds}}, \quad \& \text{ partant } \frac{1}{r} = \frac{\sin \theta}{y} + \frac{d\theta \cos \theta}{dy}$$

$$= \frac{\sin \theta}{y} + \frac{d\theta}{ds}: \text{ d'où l'expression pour la force acceleratrice selon}$$

MR



MR deviendra plus simple savoir

$$\frac{2u}{aa} \cdot y \sin \theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a} \cdot \frac{ff}{zz} + 2v \cdot \frac{f^4}{rz^4} - \frac{du}{adt\sqrt{u}} \cdot y \cos \theta$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

Donc, pour que l'eau poursuive le mouvement, que nous venons de supposer, il faut qu'un élément d'eau quelconque, qui se trouve en M, soit sollicité par deux forces acceleratrices, dont l'une agisse selon la direction du tuyau Mm qui est $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ff}{zz} - \frac{du}{adt\sqrt{u}} \cdot y \sin \theta$
 $- \frac{2u}{aa} \cdot y \cos \theta - 4v \cdot \frac{f^4 dz}{z^5 ds}$ & l'autre selon la direction du rayon de courbure MR, qui est $= 2v \cdot \frac{f^4}{rz^4} - \frac{du}{adt\sqrt{u}} \cdot y \cos \theta + \frac{2u}{aa} \cdot y \sin \theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a} \cdot \frac{ff}{zz}$

COROLL. II

C'est donc l'inertie de l'eau qui exige ces deux forces pour la conservation du mouvement supposé ; & on pourra nommer la force qui agit selon Mm la force tangentielle, & l'autre force qui agit selon MR la force normale.

COROLL. III

Puisque les vitesses \sqrt{u} & \sqrt{v} sont des fonctions du tems, on aura à chaque tems proposé aussi les valeurs des fractions $\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ & $\frac{du}{adt\sqrt{u}}$; & puisque la figure du tuyau est supposée connue, on pourra pour chaque tems déterminer les forces, dont chaque élément d'eau dans le tuyau sera sollicité.

CO-



COROLL. IV.

Pour la force tangentielle elle doit être produite par les forces qui agissent actuellement sur l'eau dans le tuyau. Or puisque le tuyau est supposé horizontal, la gravité de l'eau n'y contribue rien : il ne reste donc que l'état de compression de l'eau dans le tuyau, dont elle puisse recevoir des impressions suivant la direction du tuyau. C'est donc de là qu'on pourra déterminer l'état de compression de l'eau à chaque endroit du tuyau.

COROLL. V.

La force normale selon MR est requise pour conserver l'eau dans le tuyau ; ce seront donc les parois du tuyau qui exercent cette force sur l'eau. D'où il s'ensuit que l'eau presse le tuyau avec la même force selon la direction opposée MS : Donc le tuyau sera pressé en M se-

lon la direction MS avec une force acceleratrice $= 2 v \cdot \frac{f^2}{r z^2}$
 $- \frac{du}{adt \sqrt{u}} \cdot y \cos \theta + \frac{2u}{a a} \cdot y \sin \theta - \frac{4 \sqrt{uv}}{a} \cdot \frac{ff}{zz}$

PROBLEME II.

Le mouvement de rotation, tant du tuyau que celui de l'eau par le tuyau, étant connu, déterminer l'état de compression, où l'eau se trouve dans le tuyau à tout tems & à chaque endroit du tuyau.

SOLUTION.

Fig. III.

Quoique l'eau ne se laisse pas réduire en un plus petit espace par quelque force que ce soit, elle soutient pourtant les forces, qui tendent à la comprimer : ainsi si nous considérons une eau dormante, ses parties qui se trouvent à une plus grande profondeur, éprouvent une plus grande force de compression ; & on peut dire qu'elles se trouvent dans l'état d'une plus grande compression. Comme cette compression est causée par le poids de l'eau supérieure, on pourra exprimer l'état de compression par la profondeur, où l'eau se trouve. Ainsi

on



on pourra assigner une profondeur dans l'eau dormante, où l'état de compression est égal à celui qui convient à l'eau en M, pendant qu'elle passe par notre tuyau mobile. Soit donc p cette hauteur, qui exprime l'état de compression de l'eau en M, dans le tuyau pour l'instant present, & l'état de compression de l'eau en m sera $= p + dp$.

pour le même instant ; donc posant $Mm = ds$, la fraction $\frac{dp}{ds}$ sera

une quantité finie. Considérons donc la particule d'eau, qui remplit l'élément du tuyau $MNmn$, & la masse de cette eau sera $= z z ds$, qui soutenant en MN la force motrice $= p z z$ en sera poussée en avant selon Mm avec une force acceleratrice $= \frac{p z z}{z z ds} = \frac{p}{ds}$: or la

même particule d'eau étant repoussée par la pression de l'eau sur la base mn , cette force acceleratrice contraire sera $= \frac{p + dp}{ds}$: donc

l'élément d'eau $MNmn$ sera poussé en avant selon Mm avec la force acceleratrice $= - \frac{dp}{ds}$. Il faut donc que cette force soit égale à

celle, dont nous avons trouvé que l'eau en M doit être sollicitée selon la direction Mm , & partant nous aurons cette équation :

$$- \frac{dp}{ds} = \frac{dv}{dt Vv} - \frac{ff}{zz} \frac{du}{adt V u} \cdot y \sin \theta - \frac{2u}{aa} \cdot y \cos \theta - 4v \cdot \frac{f^4 dz}{z^5 ds}$$

ou bien à cause de $dy = ds \cos \theta$

$$dp = - \frac{dv}{dt Vv} \cdot \frac{ff ds}{zz} + \frac{du}{adt V u} \cdot y ds \sin \theta + \frac{2u}{aa} \cdot y dy + 4v \cdot \frac{f^4 dz}{z^5}$$

Et puisque nous regardons ici le même instant du tems, pour connoître l'état de compression de l'eau dans tous les points du tuyau pour cet instant, nous devons considérer comme constant le tems t & les quantités qui en dependent. Par conséquent prenant les integrales nous obtiendrons



$$p = C - \frac{dv}{dt \sqrt{v}} \int \frac{ff ds}{zz} + \frac{du}{a dt \sqrt{u}} \int y ds \sin \theta + \frac{u}{aa} \cdot yy - v \cdot \frac{f^4}{z^4}$$

où je suppose que ces integrales $\int \frac{ff ds}{zz}$ & $\int y ds \sin \theta$ sont prises en sorte qu'elles évanouissent au point A, où il devient $y = a$, & $zz = ff$.

Maintenant, pour connoître la constante C, il faut avoir égard à l'endroit, où l'eau sort du tuyau ; supposons que cela arrive en EF, où l'ouverture soit $= hh$, la distance OE $= b$, & étendant les integrales jusqu'à cet endroit là, c'est à dire par le tuyau ABEF tout entier, soit $\int \frac{ff ds}{zz} = E$ & $\int y ds \sin \theta = F$. Or on fait, que là, où l'eau échappe dans l'air, l'état de compression évanouit ; Donc, transportant le point M en E, où devient $y = b$ & $zz = hh$, il faut qu'il soit $p = 0$; d'où nous tirerons

$$0 = C - \frac{dv}{dt \sqrt{v}} \cdot E + \frac{du}{a dt \sqrt{u}} \cdot F + \frac{u}{aa} \cdot bb - v \cdot \frac{f^4}{h^4}$$

Et partant pour cet instant l'état de compression de l'eau dans un endroit quelconque M du tuyau sera

$$p = \frac{dv}{dt \sqrt{v}} (E - \int \frac{ff ds}{zz}) - \frac{du}{a dt \sqrt{u}} (F - \int y ds \sin \theta) - \frac{u}{aa} (bb - yy) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4} \right)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

De là il s'en suit qu'au commencement du tuyau en A, où l'eau entre dans le tuyau, l'état de compression de l'eau sera exprimé par la hauteur :

$$\frac{du}{dt \sqrt{u}} \cdot E - \frac{du}{a dt \sqrt{u}} \cdot F - \frac{u}{aa} (bb - aa) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - 1 \right)$$

puisque pour cet endroit il devient $y = a$; $zz = ff$ & $\int \frac{ff ds}{zz} = 0$,
 $\int y ds \sin \theta = 0$.

CO.



COROLL. II.

Si, tant le mouvement de rotation du tuyau, que le mouvement de l'eau qui entre en A continuellement dans le tuyau, étoit uniforme, ou qu'il fut tant $du = 0$ que $dv = 0$, alors l'état de compression de l'eau dans un endroit quelconque M seroit exprimé par la hauteur

$$p = - \frac{u}{aa} (bb - yy) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4} \right)$$

SCHOLIE I.

On voit qu'il peut arriver souvent, que la hauteur p qui exprime l'état de compression, devienne negative; & dans ce cas les parois du tuyau seroient non seulement non pressées en dehors, mais elles seroient même comme attirées par l'eau en dedans; & partant l'eau devroit quitter les parois du tuyau, & cesser de remplir toute la cavité, puisque rien ne résisteroit à cette force negative. Et en effet, ce cas doit arriver dans le vuide, & la continuité de l'eau sera interrompue dans ces endroits, où la valeur de p devient negative, entant que la cohésion des particules d'eau au tuyau n'est pas capable de maintenir la continuité. Mais on comprendra aussi, que dans le plein la pression de l'atmosphère doit empêcher un tel vuide dans le tuyau: car si nous avons égard à la pression de l'atmosphère, que nous avons négligée dans cette recherche, nous verrons aisément, que le poids de l'atmosphère doit augmenter l'état de compression de l'eau dans le tuyau, & que cette augmentation sera égale au poids de l'atmosphère. Donc, si nous posons k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui contrebalance le poids de l'atmosphère, la véritable compression de l'eau dans le tuyau en M sera exprimée par la hauteur

$$p = k + \frac{dv}{dtVv} (E - \int \frac{ff'ds}{zz}) - \frac{du}{adtVu} (F - \int y ds \sin \theta) - \frac{u}{aa} (bb - yy) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4} \right)$$

où k marque comme on fait une hauteur d'environ 30 pieds. Donc, à moins que cette quantité p ne devienne negative, il n'y a aucun dan-



ger, que la continuité de l'eau dans le tuyau ne soit interrompue : mais cet inconvenient ne manquera pas d'arriver, lorsque p devient negatif; & alors le mouvement de l'eau ne suivra plus les régles que nous venons de supposer : & partant il faudra arranger les machines de cette espece, en forte que ce cas n'arrive jamais.

SCHOLIE II.

Dans la solution de ce problème j'ai aussi supposé, que l'eau ne rencontre aucun obstacle qui empêcheroit son mouvement. Or on fait que l'eau en passant par des tuyaux y éprouve aussi une espece de frottement tout comme les corps solides; & l'expérience nous fait voir, que lorsque les tuyaux sont fort étroits, le mouvement de l'eau y souffre une diminution très considerable. Cependant personne que je sache n'a encore decouvert les régles, auxquelles ce frottement est assujetti : je m'en vai donc faire un essai pour arriver à ce but, quoique je sois assuré, que cette question demande de plus profondes recherches, vu que ce n'est que l'eau qui touche immédiatement les parois du tuyau, qui en éprouve la résistance, & que l'eau qui en est éloignée, n'en est arrêtée, qu'entant que la voisine a déjà éprouvé l'effet : d'où l'on voit, que l'eau qui se trouve au milieu du tuyau se mouvra plus vite que celle qui touche aux parois : circonstance qui rend l'application de la theorie extrêmement difficile. Cela nonobstant, je supposerai que l'élément $MNnm$ se meuve tout entier d'un même mouvement, & je tacherai d'en déterminer le frottement sur le pied des corps solides. Or si un tel corps se meut sur une surface, on fait que la force du frottement est proportionnelle à la force dont le corps est pressé contre la surface : donc, si p exprime l'état de compression en M , où il faut prendre cette force toute entiere, ou augmentée du poids de l'atmosphère k , puisque l'atmosphère contribue aussi à presser l'eau contre les parois du tuyau, la force dont les parois du tuyau $MNnm$ sont pressées, sera comme $pzas$: de là nait une force acceleratrice
contraire



contraire au mouvement comme $\frac{p z d s}{z z d s}$ ou comme $\frac{p}{z}$: soit donc cette force $= \frac{\delta p}{z}$, & on aura pour trouver p cette équation

$$dp + \frac{\delta p ds}{z} = -\frac{dv}{dt} \frac{ff ds}{v z z} + \frac{adtVu}{du} \cdot y ds \sin \theta + \frac{2u}{aa} \cdot y dy + 4v \cdot \frac{f^4 dz}{z^5}$$

Poſons pour rendre le cas plus ſimple, $dv = 0$ & $du = 0$, & puis que δ eſt un nombre très petit, cette équation deviendra intégrable en la multipliant par $1 + \delta f \frac{ds}{z}$: & on aura

$$p(1 + \delta f \frac{ds}{z}) = C + \frac{u}{aa} \cdot yy - v \cdot \frac{f^4}{z^4} + \frac{2\delta u}{aa} \int y dy f \frac{ds}{z} + 4\delta v \int \frac{f^4 dz}{z^5} f \frac{ds}{z}$$

ou bien :

$$p(1 + \delta f \frac{ds}{z}) = C + \frac{u}{aa} \cdot yy - v \cdot \frac{f^4}{z^4} + \frac{\delta u}{aa} \cdot yy f \frac{ds}{z} - \frac{\delta u}{aa} \int \frac{yy ds}{z} - \delta v \cdot \frac{f^4}{z^4} \int \frac{ds}{z} + \delta v \int \frac{f^4 ds}{z^5}$$

ſoit en étendant ces integrales par toute la longueur du tuyau, $\int \frac{ds}{z} = \lambda$; $\int \frac{yy ds}{z} = \mu$, $\int \frac{f^4 ds}{z^5} = v$; & puis qu'à l'iffue de l'eau devient $p = k$, puis que là la ſeule preſſion de l'atmoſphere agit, on aura :

$$k(1 + \delta \lambda) = C + \frac{u}{aa} bb(1 + \delta \lambda) - v \cdot \frac{f^4}{b^4} (1 + \delta \lambda) - \frac{\delta u}{aa} \cdot \mu + \delta v \cdot v$$



Par conséquent ayant trouvé cette valeur constante nous aurons :

$$p(1 + \delta f \frac{ds}{z}) = k(1 + \delta \lambda) - \frac{u}{aa} bb(1 + \delta \lambda) + v \frac{f^4}{h^4} (1 + \delta \lambda) + \frac{\delta u}{aa} \mu$$

$$- \delta v \cdot v + \frac{u}{aa} \gamma \gamma (1 + \delta f \frac{ds}{z}) - v \frac{f^4}{z^4} (1 + \delta f \frac{ds}{z})$$

$$- \frac{\delta u}{aa} \int \frac{\gamma \gamma ds}{z} + \delta v \int \frac{f^4 ds}{z^4}$$

ou puisque δ est très petit, il fera fort à peu près

$$p = k + \delta k (\lambda - f \frac{ds}{z}) - \frac{u}{aa} bb - \frac{\delta u}{aa} bb (\lambda - f \frac{ds}{z}) + v \frac{f^4}{h^4}$$

$$+ \delta v \frac{f^4}{h^4} (\lambda - f \frac{ds}{z}) + \frac{\delta \mu u}{aa} - \delta v v + \frac{u}{aa} \gamma \gamma - v \frac{f^4}{z^4}$$

$$- \frac{\delta u}{aa} \int \frac{\gamma \gamma ds}{z} + \delta v \int \frac{f^4 ds}{z^5}$$

ou bien

$$p = k - \frac{u}{aa} (bb - \gamma \gamma) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4} \right) + \delta k (\lambda - f \frac{ds}{z})$$

$$- \frac{\delta u}{aa} (\gamma bb - bb f \frac{ds}{z} - \mu + f \frac{\gamma \gamma ds}{z}) + \delta v \left(\frac{\lambda f^4}{h^4} - \frac{f^4}{h^4} f \frac{ds}{z} - v + f \frac{f^4 ds}{z^5} \right)$$

Donc l'état de compression en A sera exprimé par cette hauteur :

$$k - \frac{u}{aa} (bb - aa) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - 1 \right) + \delta \lambda k - \frac{\delta u}{aa} (\lambda bb - \mu) + \delta v \left(\frac{\lambda f^4}{h^4} - v \right)$$

où parmi les petits termes $\delta \lambda k$ est pour la plupart le plus considérable, puisque k marque une hauteur d'environ 30 pieds. Ainsi ayant déterminé par quelque expérience la valeur de δ , on pourra dans la suite employer cette valeur trouvée pour p au lieu de celle, qui



qui a été trouvée cy devant. Au reste on voit que les quantités λ , μ , ν sont réciproquement proportionnelles au diamètre du tuyau, les autres quantités demeurant les mêmes.

PROBLEME III.

Le mouvement, tant du tuyau autour l'axe O, que de l'eau par le tuyau étant donné, trouver le moment de forces dont la machine sera sollicitée autour de son axe, à cause de l'inertie de l'eau dans le tuyau.

SOLUTION.

Cette force dont nous cherchons le moment, provient donc des pressions, que le tuyau éprouve de l'eau en vertu de son mouvement: & nous avons vû cy-dessus, que la force acceleratrice, dont l'eau pousse le tuyau en M, suivant la direction MS perpendiculaire au tuyau, selon la direction du mouvement de rotation, qui se fait dans le sens CAG, est Fig.

$$2 v. \frac{f^4}{r z^4} - \frac{d u}{a d t V u}. y \cos \theta + \frac{2 u}{a a}. y \sin \theta - \frac{4 V u v}{a}. \frac{f f}{z z}.$$

& toute la quantité d'eau comprise dans l'élément MNnm, dont la masse est $= z z d s$, agit avec cette force sur le tuyau pour le pousser dans le sens NS. De là résulte la force motrice en même sens, qui fera

$$2 v. \frac{f^4 d s}{r z z} - \frac{d u}{a d t V u}. y z z d s \cos \theta + \frac{2 u}{a a}. y z z d s \sin \theta - \frac{4 V u v}{a}. f f d s$$

& partant le moment de cette force se trouvera, en multipliant la force par la distance y multipliée par $\cos \theta$. ou conjointement par $y \cos \theta$: donc à cause de $d s \cos \theta = d y$ le moment de cette force élémentaire fera

$$2 v. \frac{f^4 y^2 d y}{r z z} - \frac{d u}{a d t V u}. y z z d y \cos \theta + \frac{2 u}{a a}. y z z d y \sin \theta - \frac{4 V u v}{a}. f f y d y$$

Prenant donc l'intégrale en supposant le tems t constant, nous trouverons le moment des forces de l'eau contenue dans la partie du tuyau



tuyau $ABMN$ pour tourner la machine dans le sens CAG , ou bien pour en accélérer le mouvement ; ce moment fera

$$2v \cdot \int \frac{f^4 y dy}{r z z} - \frac{d u}{a dt \sqrt{u}} \cdot y y z z dy \cos \theta + \frac{2u}{a a} y y z z dy \sin \theta - \frac{4 \sqrt{u v}}{a} \cdot f f (y y - a a)$$

prenant ces integrales, en sorte qu'elles évanouissent au point A . Qu'on étende maintenant ces integrales par toute la longueur du tuyau AME jusqu'au bout EF , où il devient $y = b$, & $z z = h h$; & que leurs valeurs totales deviennent $\int y y z z dy \cos \theta = M$; $\int y y z z dy \sin \theta = N$; $\int \frac{f^4 y dy}{r z z} = L$; & l'inertie de l'eau, qui se trouve à l'instant présent dans le tuyau, fera des efforts, pour tourner la machine dans le sens CAG , ou pour en accélérer le mouvement de rotation qu'elle est supposée avoir déjà, dont le moment total fera

$$2 v \cdot L - \frac{d u}{a dt \sqrt{u}} \cdot M + \frac{2 u}{a a} \cdot N - \frac{2 \sqrt{u v}}{a} f f (b b - a a)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

Cette expression ne sert que pour l'instant présent de la machine, où les vitesses sont \sqrt{v} & \sqrt{u} ; & l'accélération de celle-cy $\frac{d u}{d t \sqrt{u}}$: Pour un autre tems où ces quantités auront d'autres valeurs, ce moment changera aussi, mais il faut remarquer que les lettres L , M , N marquent toujours les mêmes quantités, qui dépendent uniquement de la figure du tuyau.

COROLL. II.

Si la largeur du tuyau $z z$ est constante, on pourra assigner la valeur integrale L . Car, puisque $\frac{1}{r} = \frac{\sin \theta}{y} + \frac{d \theta}{d s}$, nous aurons

$$f^4 y dy$$

$$\frac{f^4 y dy}{r z z} = \frac{f^4}{z z} \left(dy \sin \theta + \frac{y dy d\theta}{ds} \right) = \frac{f^4}{z z} (dy \sin \theta + y d\theta \cos \theta).$$

Donc

$$\int \frac{f^4 y dy}{r z z} = \frac{f^4}{z z} \cdot y \sin \theta + C.$$

Et pour avoir la valeur de L, il faut étendre cette integrale depuis le commencement AB jusqu'au bout EF.

COROLL. III.

S'il n'y a qu'une partie du tuyau, qui ait partout la même largeur, on trouvera aisément la partie de L qui en résulte. Car soient pour le commencement de cette partie y' & θ' les quantités, qui sont pour la fin y & θ : & la partie de L qui résulte de cette partie fera

$$\frac{f^4}{z z} (y \sin \theta - y' \sin \theta')$$

SCHOLIE.

Mais l'inertie de l'eau n'est pas la seule source des forces, qui agissent sur le mouvement de rotation de la machine; l'état de compression de l'eau dans le tuyau est aussi capable d'y contribuer quelque chose, quoiqu'il semble que ces forces agissant également de toute part sur chaque élément du tuyau, se détruisent mutuellement. Donc le moment de forces trouvé dans ce probleme n'épuise pas toutes les forces, que l'eau exerce sur le tuyau; mais il faut séparément chercher celles, qui résultent de l'état de compression de l'eau dans chaque élément du tuyau : ce qui sera le sujet du probleme suivant.

PROBLEME IV.

Déterminer le moment de forces sur la machine, qui résulte de l'état de compression de l'eau, qui passe par le tuyau horizontal, pendant que la machine même tourne d'un mouvement quelconque autour de son axe.



SOLUTION.

Considérons un élément du tuyau $MNnm$ terminé de deux bases MN & mn perpendiculaires à la direction du tuyau, & soit p l'état de compression de l'eau qui occupe cet élément, & la surface intérieure sera pressée par cette force dans tous ses points : or puisque le tuyau est pressé en dehors par l'atmosphère, afin que je n'aye pas besoin d'y avoir égard, je prendrai pour p la quantité trouvée d'abord, où la valeur de p n'est pas augmentée de la pression de l'atmosphère k . Maintenant pour connoître, si ces forces qui agissent sur la surface interne du tuyau $MNnm$ se soutiennent en équilibre ou non ? je concevrai en MN & mn deux cloisons, entre lesquelles & le tuyau la quantité d'eau $MNnm$ soit renfermée, & qui agisse également sur ces deux bases MN & mn . Dans ce cas il est clair que toutes ces forces, savoir celle sur le tuyau & sur les deux bases, se soutiennent en équilibre, ou se détruisent mutuellement, ou bien nous aurons :

$$f. \text{ du tuyau } + f. \text{ de la base } MN + f. \text{ de la base } mn = 0.$$

& partant la force de l'eau sur le tuyau sera égale & contraire aux forces sur les deux bases MN & mn conjointement. Ainsi nous n'aurons qu'à chercher les forces de l'eau sur ces deux bases, pour en conclure celle que le tuyau en soutient. Or la base $MN = zz$ étant pressée par le poids d'une colonne d'eau de la hauteur $= p$, cette force sera $= pzz$, qui étant multipliée par $y \sin \theta$ donnera le moment $pyzz \sin \theta$, pour tourner la machine dans le sens CAG : & la force de l'autre base donne un moment $= pyzz \sin \theta + 2pyzdz \sin \theta + pzzd. y \sin \theta$ pour faire tourner la machine dans le sens contraire GAC . Et partant les forces sur les deux bases MN & mn produisent un moment $= 2pyzdz \sin \theta + pzzd. y \sin \theta$ dans le sens GAC . Par conséquent la force de l'eau, qui agit actuellement sur la surface interne du tuyau $MNnm$, donnera un moment $= 2pyzdz \sin \theta + pzzd. y \sin \theta$ dans le sens CAG . Or
puis-



puisque $d. y \sin \theta = \frac{y dy}{r}$ ce moment sera

$$2 p y z d z \sin \theta + \frac{p y z z d y}{r}$$

Or, sans faire réflexion au frottement, nous avons trouvé cy-dessus :

$$p = \frac{dtVv}{dv} \left(E - f \frac{ff ds}{z z} \right) - \frac{du}{adtVu} (F - fy ds \sin \theta) - \frac{u}{aa} (bb - yy) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4} \right)$$

Donc le moment de forces, qui résulte de la compression de l'eau de l'élément MN nm dans le sens C A G sera

$$\begin{aligned} & + \frac{dv}{dtVv} \left(2 y z dz \sin \theta + \frac{y z z dy}{r} \right) \left(E - f \frac{ff ds}{z z} \right) + v \left(2 y z dz \sin \theta + \frac{y z z dy}{r} \right) \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4} \right) \\ & - \frac{du}{adtVu} \left(2 y z dz \sin \theta + \frac{y z z dy}{r} \right) (F - fy ds \sin \theta) - \frac{u}{aa} \left(2 y z dz \sin \theta + \frac{y z z dy}{r} \right) (bb - yy) \end{aligned}$$

& prenant les integrales ce moment sera

$$\begin{aligned} & + \frac{dv}{dtVv} \left(y z z \sin \theta \left(E - f \frac{ff ds}{z z} \right) + f f y ds \sin \theta \right) + v \left(y z z \sin \theta \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4} \right) - 4 f^4 \int \frac{y dz \sin \theta}{z^3} \right) \\ & - \frac{du}{adtVu} \left(y z z \sin \theta (F - fy ds \sin \theta) + \int y y z z ds \sin^2 \theta \right) - \frac{u}{aa} \left(y z z \sin \theta (bb - yy) + 2 \int y y z z dy \sin \theta \right) \end{aligned}$$

où il faut ajouter telles constantes, que chaque membre évanouisse au point A, où est le commencement du tuyau.

Donc si nous supposons, que les tuyaux en A soient perpendiculairement attachés au vaisseau, ou qu'il soit en A, $\theta = 0$; & posant les valeurs des formules integrales prises par toute la longueur du tuyau :

$$\int y ds \sin \theta = F; \quad \int \frac{y dz \sin \theta}{z^3} = H; \quad \int y y z z ds \sin^2 \theta = K$$

$$\& \int y y z z dy \sin \theta = N$$



Le moment de toutes les forces, qui résultent de l'état de compression de l'eau dans le tuyau tout entier A B E F, sera

$$+ \frac{dv}{dtVv} \cdot \iint F - 4 v \cdot f^4 H - \frac{du}{adtVu} \cdot K - \frac{2u}{aa} \cdot N$$

C. Q. F.

COROLL. I.

Puisque ce moment tend dans le même sens, que celui qui a été trouvé dans le problème précédent, si nous les joignons ensemble, le moment total des forces de l'eau pour faire tourner la machine dans le sens C A G sera

$$\frac{dv}{dtVu} \cdot \iint F + 2v(L - 2f^4 H) - \frac{du}{adtVu} (K + M) - \frac{2Vuv}{a} \iint (bb - aa)$$

COROLL. II

Or ayant $L - 2f^4 H = f^4 \int \left(\frac{y dy}{r z z} - \frac{2 \gamma dz \sin \theta}{z^3} \right)$, à cause

de $d. \gamma \sin \theta = \frac{y dy}{r}$, il sera $L - 2f^4 H = \frac{f^4 y \sin \theta}{z z}$: où il n'y a

pas besoin d'ajouter une constante, lorsque en A l'angle θ évanouit, comme nous le supposons. Et si cet angle θ à l'autre bout devient droit,

la valeur de cette intégrale sera $= \frac{f^4 b}{h h}$: ainsi le moment trouvé

prendra cette forme

$$\frac{dv}{dtVv} \cdot \iint F - \frac{du}{adtVu} (K + M) + 2v \cdot \frac{f^4 b}{h h} - \frac{2Vuv}{a} \cdot \iint (bb - aa), \text{ où } K + M = \iint \gamma y z z ds$$

Mais si l'angle A E O n'étoit pas droit, mais égal à ζ , on devrait multiplier le terme $2 v \cdot \frac{f^4 b}{h h}$ encore par $\sin \zeta$.

COROLL. III

Si l'un est l'autre mouvement est uniforme, ou u & v des quantités constantes, le moment des forces de l'eau dans le tuyau pour faire tourner la machine dans le sens C A G sera $\equiv 2 v \cdot \frac{f^4 b \sin \zeta}{h h}$
 $-\frac{2 \sqrt{uv}}{a} ff (bb - aa)$, supposant l'angle A E O $\equiv \zeta$; & que les tuyaux horizontaux sont perpendiculairement inferés dans le vaisseau vertical.

SCHOLIE I.

Tant que l'un ou l'autre mouvement subit des changemens, on voit que le moment des forces de l'eau dépend de la figure du tuyau, puisque les valeurs integrales F, K & M se trouvent dans l'expression: mais dès que ces deux mouvemens sont devenus uniformes, alors le moment trouvé ne dépend plus, ni de la courbure, ni de la diverse largeur du tuyau. Voyons donc quels sont les élémens qui composent ce moment de forces, que nous venons de trouver. Soit pour cet effet $V \omega$ la vitesse dont l'eau échappe par l'orifice EF $\equiv hh$, & puisque $hh V \omega \equiv ff V v$, notre formule deviendra

$$2 b h h \omega \sin \zeta - \frac{2 h h V u \omega}{a} (b b - a a)$$

Donc les élémens, qui constituent cette formule sont

I. La distance OE $\equiv b$, dont l'orifice du tuyau EF est éloigné de l'axe de la machine.

II. La grandeur de cet orifice indiquée par hh .

III. La vitesse, avec laquelle l'eau échappe du tuyau par cet orifice EF $\equiv hh$, laquelle est supposée due à la hauteur ω .

IV. L'angle AEO $\equiv \zeta$, que la direction de l'extrémité du tuyau fait avec le rayon OE, cette direction est la même que celle du jet d'eau, qui sort du tuyau.



V. La vitesse angulaire de la machine qui est exprimée par $\frac{V u}{a}$: car, puisque $V u$ marque la vitesse de rotation à la distance $O A = a$, la formule $\frac{V u}{a}$ exprimera le mouvement absolu de rotation.

VI. Enfin le rayon $O A = a$ entre aussi par lui-même dans notre formule, entant que le commencement du tuyau $A B$ en est indiqué. D'où l'on comprend, que si le tuyau $A E$ pénétrait au dedans du vaisseau jusqu'à l'axe O , nous aurions au lieu de $b b - a a$ seulement $b b$, de sorte que le moment des forces de l'eau seroit $= 2 b h h \omega \sin \zeta$

$$= \frac{2 b b h h V u \omega}{a}$$

Or je ferai voir qu'il revient au même, à quelle distance $O A = a$ le tuyau commence; car si cette distance n'est pas égale à zero, on verra que l'eau en entrant du vaisseau dans le tuyau y exerce aussi une force, dont le moment détruira exactement la partie $\frac{2 h h V u \omega}{a} . a a$. Et partant l'effet fera toujours entierement le même, quelque figure qu'on donne aux tuyaux horizontaux, & de quelque largeur qu'ils soient en dedans; il est aussi de même indifferent, à quelle distance de l'axe $O A$ ces tuyaux commencent. Par cette raison il fera convenable de donner à ces tuyaux une aussi grande largeur qu'il est possible, pour rendre l'effet du frottement d'autant plus insensible.

SCHOLIE II.

Ayant ainsi trouvé le véritable moment de forces, dont le tuyau est sollicité par le mouvement de l'eau qui y passe, je crois que cet article ne sera plus assujetti à aucun doute, vû que cette force est évidemment composée de deux parties, dont l'une tire son origine des forces normales, dont l'eau agit sur les parois du tuyau, & l'autre de l'état de compression de l'eau dans le tuyau, dont les pressions n'étant pas en équilibre entr'elles, produisent aussi quelque moment, qui
 tend



tend à mouvoir le tuyau autour de l'axe. C'est aussi un grand argument de la justesse de mon raisonnement, que les deux parties trouvées se font si admirablement liées ensemble, que l'expression composée est devenuë plus simple, que n'étoit l'une ou l'autre séparément, en quoi consiste toujours un caractère bien marqué de la vérité. Mais cette même simplicité de la conclusion est aussi une marque seure, que j'y suis arrivé par des détours, & qu'il y a infailliblement une route plus simple & plus naturelle, qui conduit à la même conclusion. Ayant donc examiné plus soigneusement cette circonstance, je remarque que la même conclusion se peut tirer immédiatement des deux forces, dont chaque particule d'eau dans le tuyau est sollicitée, sans avoir recours à la connoissance de l'état de compression de l'eau dans le tuyau. Et effectivement, puisque l'état de compression est déterminé par l'accélération de l'eau dans le tuyau, on comprendra aisément, que la partie du moment de forces, qui résulte de l'état de compression, se peut déduire immédiatement de la force requise à l'accélération. Ayant donc trouvé que chaque particule d'eau, qui se trouve dans l'élément du tuyau Mm , requiert pour la conservation de son mouvement deux forces acceleratrices, dont l'une dirigée selon Mm est
$$= \frac{dv}{dtVv} \frac{ff}{zz} - \frac{du}{adtVu} y \sin \theta - \frac{2u}{aa} y \cos \theta - 4v \frac{f^4 dz}{z^5 ds}$$

que je nommerai $= T$, & l'autre dirigée selon MR , qui est
$$= - \frac{du}{adtVu} y \cos \theta + \frac{2u}{aa} y \sin \theta - \frac{4Vuv}{a} \frac{ff}{zz} + 2v \frac{f^4}{r z^4},$$

que je nommerai $= V$; à cause de la masse d'eau, qui occupe l'élément $Mm = zz ds$, ces deux forces motrices seront, la première selon $Mm = Tzz ds$ & l'autre selon $MR = Vzz ds$. Ce fera donc le tuyau même qui doit fournir ces deux forces, & partant il en fera également repoussé en vertu de la réaction. Donc l'élément d'eau $MNnm$ exercera deux forces sur le tuyau, l'une dans la direction de la tangente MT , & l'autre dans la direction normale MS , dont

Fig. III.



dont celle-là est $= T z z ds$, & celle-cy $= V z z ds$, & chacune fournira un moment pour tourner la machine dans le sens C A G. Or, puisque l'angle OMT $= \theta$, le premier de ces deux moments sera $= T y z z ds \sin \theta$, & l'autre $= V y z z ds \cos \theta$, de sorte que ces deux moments ensemble seront $= y z z ds (T \sin \theta + V \cos \theta)$ Mais les valeurs de T & V donnent

$$T \sin \theta + V \cos \theta = \frac{dv}{dtVu} \cdot \frac{ff \sin \theta}{z z} - \frac{du}{adtVu} \cdot y - \frac{4Vuv}{a} \cdot \frac{ff \cos \theta}{z z} - \frac{4v \cdot f^2 dz \sin \theta}{z^5 ds} + \frac{2v \cdot f^4 \cos \theta}{r z^4}$$

& partant le moment en question sera

$$\frac{dv}{dtVv} \cdot ff y ds \sin \theta - \frac{du}{adtVu} \cdot y y z z ds - \frac{4Vuv}{a} \cdot ff y ds \cos \theta + 2f^4 v \left(\frac{y ds \cos \theta}{r z z} - \frac{2y dz \sin \theta}{z^3} \right)$$

Prenant donc les integrales par toute la longueur du tuyau ABEF où devient $z z = h h$; $y = b$; & $\theta = \zeta$, à cause de $ds \cos \theta = dy$, le moment total sera :

$$\frac{dtVu}{du} \cdot ff \int y ds \sin \theta - \frac{du}{adtVu} \cdot \int y y z z ds - \frac{2Vuv}{a} \cdot ff (bb - aa) + 2f^4 v \cdot \frac{b \sin \zeta}{h h}$$

supposant qu'il y a en A l'angle $\theta = o$. Ce qui est la même formule qui résulte par la combinaison des deux problèmes precedens.

PROBLEME V.

Fig. IV. La machine étant toujours entretenüe pleine d'eau, & garnie d'un certain nombre de tuyaux horizontaux, & mise dans un certain mouvement de rotation, trouver la vitesse dont l'eau sortira par ces tuyaux, & le moment des forces de l'eau.

SOLUTION.

Soit OO l'axe, autour duquel la machine est tournée avec un tel mouvement, qu'elle ait à la distance de l'axe $= a$, la vitesse $= Vu$. Soit ensuite la hauteur de l'eau dans ce vaisseau audessus des tuyaux horizontaux $= e$, & que l'eau y soit toujours entretenüe à cette hauteur

teur



teur par le moyen d'un réservoir V , d'où l'eau coule dans le vaisseau. Soit de plus $AB = ff$ l'embouchure d'un des tuyaux horizontaux, par laquelle l'eau y entre avec une vitesse $= Vv$, que je regarde comme constante, puisqu'on fait par l'expérience, que dans ce cas le mouvement parvient bientôt à l'uniformité : soit a la distance de cette embouchure AB à l'axe OO , & b celle de l'orifice EF de chaque tuyau, ou $OE = b$, & que hh marque la largeur de cet orifice, par laquelle l'eau échape, avec la vitesse qui sera $V\omega = \frac{ffVv}{hh}$: Soit ζ

l'angle que la direction de l'extrémité du tuyau en E fait avec le rayon OE ; & soit n le nombre des tuyaux horizontaux dont le vaisseau est garni. Cela posé nous avons trouvé que l'état de compression de l'eau à l'embouchure AB est exprimé par la hauteur, qui est :

$$- \frac{u}{aa} (bb - aa) + v \left(\frac{f^4}{h^4} - 1 \right)$$

à cause de $du = 0$ & $dv = 0$.

Supposons d'abord que les tuyaux horizontaux pénètrent au dedans du vaisseau jusqu'à l'axe OO , de sorte que $a = 0$, entant que cette lettre n'est point jointe à u , & l'état de compression sera alors à

l'embouchure $AB = - \frac{u}{aa} bb + v \left(\frac{f^4}{h^4} - 1 \right)$. Or l'eau qui

y entre du grand vaisseau n'ayant pas près de l'axe de mouvement, y suivra les loix selon lesquelles l'eau sort d'un vaisseau en repos ; d'où l'on fait que lorsque l'eau sort à une profondeur $= e$ avec une vitesse $= Vv$, l'état de compression y est $= e - v$: dont il faut que cette compression soit égale à celle qu'exige le mouvement dans les tuyaux, & partant nous aurons.

$$e - v = - \frac{bbu}{aa} + v \left(\frac{f^4}{h^4} - 1 \right)$$

ou bien $\frac{f^4 v}{h^4} = \omega = e + \frac{bbu}{aa}$: & ainsi nous connoissons la vi-



tesse avec laquelle l'eau sortira des tuyaux horizontaux. Mais si l'embouchure AB est à la distance OA = a, la compression de l'eau dans le vaisseau y sera plus grande que e - v, à cause de la force centrifuge de l'eau, & puisque la vitesse de rotation y est due à la hauteur u, l'état de compression sera e + u - v, qui étant égalée à - $\frac{u}{aa} (bb - aa)$

+ v $\left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)$ donne comme auparavant $\frac{f^4}{h^4} = \omega = e + \frac{bbu}{aa}$;

d'où l'on voit, qu'il est indifférent de supposer l'embouchure AB à telle distance de l'axe OO qu'on veut. Supposons donc cette distance = o, & le moment de forces, qui résulte d'un tuyau horizontal sera

$2 b h h \omega \sin \zeta - \frac{2 b b h h \sqrt{u} \omega}{a}$; & puisque le nombre des tuyaux horizontaux est = n, le moment de toutes les forces de la machine sera

= $2 n h h \left(b \omega \sin \zeta - \frac{b b \sqrt{u} \omega}{a} \right)$. Or ayant trouvé $\omega = e + \frac{b b u}{a a}$,

le moment des forces de la machine sera

= $2 n h h \left(b \left(e + \frac{b b u}{a a} \right) \sin \zeta - \frac{b b}{a} \sqrt{u} \left(e + \frac{b b u}{a a} \right) \right)$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

La force de la machine sera donc la plus grande, si l'angle ζ est droit, ou si la direction des extrémités E des tuyaux horizontaux est perpendiculaire aux rayons OE. Dans ce cas le moment des

forces de la machine sera donc = $2 n h h \left(b \left(e + \frac{b b u}{a a} \right) - \frac{b b}{a} \sqrt{u} \left(e + \frac{b b u}{a a} \right) \right)$.

Comme il s'agit de rendre la force de la machine aussi grande qu'il est possible, je supposerai dans la suite toujours l'angle AEO droit.

CO-

COROLL. II.

Si le vaisseau est en repos ou $u = 0$, la vitesse dont l'eau sort par les orifices des tuyaux horizontaux est $= \sqrt{e}$, ou duë à la hauteur de l'eau e : mais si la machine tourne, la vitesse de l'eau, qui sort par les orifices EF fera d'autant plus grande, plus sera vite le mouvement de rotation de la machine, puisque $\omega = e + \frac{bbu}{aa}$.

COROLL. III.

Pour trouver le tems que la machine met à faire un tour entier, on n'a qu'à exprimer la hauteur u en milliemes parties d'un pied de Rhin, & alors $250 \sqrt{u}$ marquera l'espace que le point A parcourt dans une seconde. Donc posant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$ puisque la peripherie du cercle AGC est $= 2\pi a$, un tour de la machine s'achevera en $\frac{2\pi a}{250 \sqrt{u}} = \frac{\pi a}{125 \sqrt{u}}$ secondes.

COROLL. IV.

Soit τ ce nombre de secondes, & q la longueur d'un pendule simple, qui fasse en même tems ses oscillations & on fait que $\sqrt{\frac{1}{2}q} = \frac{125\tau}{\pi} = \frac{a}{\sqrt{u}}$; dont $\frac{\sqrt{u}}{a} = \sqrt{\frac{2}{q}}$. Ainsi au lieu de la vitesse de rotation $\frac{\sqrt{u}}{a}$ on pourra introduire dans le calcul le pendule q dont les oscillations se font en même tems que les révolutions de la machine. Alors on aura $\omega = e + \frac{2bb}{q}$, & le moment des forces de la machine sera $= 2nhh \left(b \left(e + \frac{2bb}{q} \right) - bb \sqrt{\frac{2}{q}} \left(e + \frac{2bb}{q} \right) \right)$.

COROLL V.

Si la machine est arrêtée en repos, on aura $q = \infty$ & $\omega = e$, & le moment des forces de la machine sera $= 2nhhb e$. Or il est possible



possible que la machine tourne si vite, que sa force évanouit, ce qui arrivera lorsque $V(e + \frac{2bb}{q}) = b V \frac{2}{q}$, ou bien $q = 0$. Ainsi, à moins que le mouvement de rotation ne soit infiniment rapide, la machine produira toujours une force, qui tend à accélérer son mouvement.

COROLL. VI.

On connoitra aussi la dépense d'eau qu'il faut employer pour entretenir toujours le vaisseau plein d'eau, car elle doit être égale à la perte qui se fait par les orifices $= nhh$ avec la vitesse $V \omega = V(e + \frac{2bb}{q})$. Donc la dépense d'eau pourra être exprimée par la formule $nhh V(e + \frac{2bb}{q})$.

COROLL. VII.

Pour entretenir donc la machine pendant une seconde, en exprimant la hauteur $e + \frac{2bb}{q}$ en milliemes parties du pied de Rhin, la dépense d'eau sera égale à un volume $= 250 nhh V(e + \frac{2bb}{q})$. Ou bien si q marque la hauteur, d'où un corps tombe dans une seconde, la dépense d'eau pour une seconde demandera un volume $= 2 nhh Vg(e + \frac{2bb}{q})$. Donc pour un tems de τ secondes il faudra une dépense $= 2 \tau nhh Vg(e + \frac{2bb}{q})$.

PROBLEME VI.

Une telle machine étant entretenüe, moyennant une certaine quantité d'eau destinée à la dépense, déterminer l'effet qu'elle sera capable de produire avec cette dépense.



SOLUTION.

Que l'axe de la machine OO porte en haut ou en bas un pignon, engagé à une rouë MM , dont l'essieu NN soit garni d'un tambour RS , autour duquel soit la corde PQ avec le poids Q qui doit être élevé. Soit le rayon de ce tambour $RS = c$, & que la rouë MM fasse une révolution, pendant que le pignon avec la machine en fait μ . Donc le moment du poids Q pour mettre la machine en mouvement, fera

$= \frac{1}{\mu} Q c$, qui doit être égal au moment de la force de la machine,

en exprimant le poids Q par le volume d'une masse d'eau dont le poids lui est égal. Soit pour cet effet la hauteur de l'eau dans le vaisseau au dessus des tuyaux horizontaux $= e$, la distance de l'orifice des tuyaux horizontaux à l'axe de la machine $= b$, l'orifice même $= hh$, dont la direction soit perpendiculaire au rayon OE , & le nombre des tuyaux soit $= n$. Ensuite que la machine fasse une révolution dans le tems, qu'un pendule de la longueur q fait une oscillation ; donc, posant l pour la longueur d'un pendule à secondes, qui est comme on fait $= 3, 166$ pieds de Rhin, & le tems d'une révolution fera de $\sqrt{\frac{q}{l}}$ secondes, & pendant ce tems le poids Q fera éle-

vé à la hauteur de $\frac{2\pi c}{\mu}$; donc pendant une seconde il fera élevé à la

hauteur $= \frac{2\pi c}{\mu} \sqrt{\frac{l}{q}}$. Soit de plus g la hauteur de la chute d'un grave pendant une seconde, & on aura $g = \frac{1}{2} \pi \pi l$, & partant le poids Q fera élevé dans une seconde à la hauteur $= \frac{2c}{\mu} \sqrt{\frac{2g}{q}}$.

Or la force de la machine nous fournit d'abord cette équation

$$\frac{1}{\mu} Q c = 2 n h h \left(b \left(e + \frac{2bb}{q} \right) - bb \sqrt{\frac{2}{q} \left(e + \frac{2bb}{q} \right)} \right)$$



Ensuite soit D le volume d'eau qu'on veut employer pour entretenir le vaisseau plein d'eau, & supposons que cette dépense soit capable de fournir à la machine pendant un tems de τ secondes, d'où nous tirons cette équation

$$D = 2 \tau n h h V g \left(e + \frac{2bb}{q} \right)$$

& partant $\tau = \frac{D}{2 n h h V g \left(e + \frac{2bb}{q} \right)}$ & pendant ce tems le

poids Q sera élevé à la hauteur $\frac{Dc}{\mu n h h V g \left(e + \frac{2bb}{q} \right)}$

$$\frac{Dc}{\mu n h h V g \left(e + \frac{2bb}{q} \right)} = \frac{Dc}{\mu n h h V \left(eq + 2bb \right)}$$

Mais le poids Q étant donné, la machine prendra d'elle-même un tel mouvement de rotation, que l'état d'équilibre exige: ainsi le pendule q sera déterminé par cette équation.

$$\frac{Qc}{2\mu n b h h} = e + \frac{2bb}{q} - V \frac{2bb}{q} \left(e + \frac{2bb}{q} \right)$$

Soit pour abrégier $\frac{2bb}{q} = z$, & $\frac{Qc}{2\mu n b h h} = S$ pour avoir $e + z - S = V(ez + zz)$, d'où l'on tire

$$z = \frac{2bb}{q} = \frac{(e-S)^2}{2S-e}; \text{ donc } q = \frac{2bb(2S-e)}{(e-S)^2}$$

ou bien $q = \frac{8\mu n b^3 h h (Qc - \mu n b e h h)}{(2\mu n b e h h - Qc)^2}$

Ensuite on aura $e + \frac{2bb}{q} = \frac{SS}{2S-e} = \frac{Q Q c c}{4\mu n b h h (Qc - \mu n b e h h)}$

Donc la dépense d'eau proposée suffira pour un tems

$$\text{de } \frac{D}{Qc} V \frac{\mu b (Qc - \mu n b h h e)}{n g h h} \text{ secondes}$$

pendant

pendant lequel le poids Q sera élevé à la hauteur qui est
 $= \frac{D}{Q} \left(2e - \frac{\mu n b h h}{Q c} \right)$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

Comme la racine quarrée $\sqrt{(cz + z^2)} = \sqrt{\frac{2bb}{q} \left(e + \frac{2bb}{q} \right)}$
 est toujours prise affirmativement, il faut qu'il soit $S < e + z$ ou
 $S < \frac{S S}{2S - e}$, & partant $S < e$, ou bien $Q < \frac{2 \mu n b e h h}{c}$; ou
 $\frac{1}{\mu} Q c < 2 n b e h h$. Car si ce poids étoit plus grand, la machine ne
 parviendroit jamais dans l'état d'équilibre; & s'il étoit $\frac{1}{\mu} Q c =$
 $2 n b e h h$, la machine resteroit en repos. D'où l'on voit, que si l'on
 suspendoit en Q un plus grand poids, la machine n'étant pas capable
 de le soutenir, tourneroit en sens contraire.

COROLL. II.

Or il faut aussi qu'il soit $2S > e$ ou $\frac{1}{\mu} Q c > n b e h h$: car s'il
 étoit $\frac{1}{\mu} Q c = n b e h h$, à cause de $q = 0$, le mouvement de ro-
 tation de la machine deviendroit infiniment vite, avant que de par-
 venir à l'état d'équilibre: & s'il étoit $\frac{1}{\mu} Q c < n b e h h$, le mou-
 vement de rotation iroit toujours en augmentant sans atteindre ja-
 mais l'équilibre.

COROLL. III.

Donc, pour que la machine puisse arriver à une uniformité de
 mouvement, il faut que le moment du fardeau à vaincre, que nous in-
 diquons

diquons par $\frac{1}{\mu} Qc$, soit contenu entre ces deux limites $n b e h h$ & $2 n b c h h$: dont celui-là demande un mouvement infini, or celui-cy arrêtera la machine en repos.

COROLL. IV.

Si nous multiplions le poids Q par la hauteur, à laquelle il est élevé $\frac{D}{Q} \left(2e - \frac{Qc}{\mu n b h h} \right)$, le produit $D \left(2e - \frac{Qc}{\mu n b h h} \right)$ exprimera l'effet absolu de la machine. D'où nous voyons, que cet effet évanouit, lorsque $\frac{1}{\mu} Qc = 2 n b e h h$; & qu'il devient le plus grand si $\frac{1}{\mu} Qc = n b e h h$, ou bien si le mouvement de la machine est infiniment rapide, & dans ce cas l'effet sera $= D e$.

COROLL. V.

Donc ce plus grand effet $D e$, auquel la machine ne sauroit jamais arriver, est équivalent à l'élevation de la masse d'eau D à la hauteur du vaisseau e ; ou bien dans ce cas la machine feroit capable d'élever à la hauteur même du vaisseau e précisément autant d'eau, qu'il faut pour sa dépense : Donc, puisque ce cas ne sauroit jamais avoir lieu, l'effet de la machine est toujours moindre que le produit $D e$.

COROLL. VI.

Dans ce cas du plus grand effet $D e$, qui répond à la dépense d'eau $= D$, il est aussi très remarquable, qu'à cause de $q = 0$ cet effet est produit dans un tems infiniment petit, car il devient $\tau = 0$. Et nous voyons en général, que plus l'effet de la machine sera grand, plus aussi sera petit le tems, $p e$, dans lequel il est produit; ce qui est une circonstance tout à fait particulière dans cette espèce de machine.

Or



Or si la machine demeure en repos, ce qui arrive lorsque $\frac{\gamma}{\mu} Q c = 2 n b e h h$, la dépense d'eau $= D$ suffira pour un tems de $\frac{D}{2 n h h \sqrt{e g}}$ secondes.

COROLL. VII.

Soit donc $\frac{\gamma}{\mu} Q c = (1 + \nu) n b e h h$, ou $Q = \frac{(1 + \nu) \mu n b e h h}{c}$, & que ν marque un nombre quelconque plus petit que l'unité. Donc ayant $S = \frac{(1 + \nu)}{2} e$ nous aurons pour le tems d'une révolution de la machine $q = \frac{8 \nu b b}{(1 - \nu)^2 e}$. La dépense d'eau proposée D suffira d'entretenir la machine pendant un tems de $\frac{D \sqrt{\nu}}{(1 + \nu) n h h \sqrt{e g}}$ secondes, & pendant ce tems le poids Q sera élevé par une hauteur $= \frac{(1 - \nu) D c}{(1 + \nu) \mu n b h h}$. Et partant l'effet de la machine sera $= (1 - \nu) D e$.

SCHOLIE I.

Pour tirer donc le plus grand avantage de ces fortes de machines, il faut tacher de les arranger en forte, qu'elles puissent recevoir un mouvement de rotation extrêmement rapide, puisque nous venons de voir, que plus ce mouvement est vite plus aussi sera grand l'effet, qui en résulte. Pour cet effet il faut ôter soigneusement tous les obstacles, qui se pourroient opposer à un mouvement si rapide. Premièrement donc il sera nécessaire, que l'axe de la machine soit parfaitement vertical, & librement mobile sur ses pivots, de sorte qu'il rencontre de ce côté aussi peu de frottement, qu'il sera possible. En second lieu, le vaisseau $\alpha\alpha\gamma\gamma$ doit être parfaitement rond & bien uni dans sa surface extérieure, afin qu'en tournant autour de son ax il ne



choque nulle part l'air, & qu'il n'en effuye aucune résistance. En troisieme lieu, afin que les tuyaux horizontaux ne frappent pas l'air non plus, il sera à propos de les renfermer dans un tambour cylindrique attaché en bas au vaisseau, en sorte que seulement les derniers bouts des tuyaux sortent de ce tambour, pour donner une issue libre à l'eau. Il sera aussi bon de donner à ce tambour un assés grand poids, pour qu'il conserve mieux le mouvement qu'il aura une fois reçu. Il n'importe, ni combien de tuyaux on enferme dans ce tambour, ni quelle figure on leur donne, pourvù que la somme de leurs orifices soit $= nbb$, & que l'eau y échape de chacun selon une direction perpendiculaire à l'axe de la machine. Enfin, si la machine est employée à mettre en mouvement d'autres parties par le moyen des rouës, il faut avoir soin d'arranger tellement ces rouës, & de donner à leurs dents une telle figure, que leur mouvement devienne parfaitement uniforme. Car si le mouvement étoit inégal, & qu'il fût tantôt accéléré tantôt retardé, il se perdrait une bonne partie de la force pour produire tant les accélérations que les retardations; au lieu que le mouvement uniforme ne demande aucune force pour sa conservation.

SCHOLIE II.

Dans le problème precedent nous avons supposé que la dépense d'eau D , qui est employée à entretenir le vaisseau toujours plein, est en notre pouvoir, & que nous la pouvons verser dans le vaisseau, ou plus vite, ou plus lentement, selon que les besoins l'exigent. Cette maniere parut la plus propre pour faire des expériences avec une machine déjà construite de cette façon, & pour les comparer avec la

Fig. IV. Theorie. Mais s'il y a une source, ou un reservoir V , qui ne fournit qu'une certaine quantité d'eau dans un tems donné, il faut construire la machine en sorte que, quand elle est en action, cette quantité d'eau soit suffisante à entretenir le vaisseau toujours plein: & alors l'action même de la machine doit être tellement disposée, que les forces de l'eau soient suffisantes à la produire. J'examinerai donc dans le problème



blème suivant de quelle maniere il conviendra d'arranger la machine pour chaque cas proposé.

PROBLEME VII.

La quantité d'eau qu'une source fournit à l'entretien de la machine, étant donnée, arranger la machine d'une telle maniere, que la quantité d'eau donnée soit suffisante à son entretien, & que la machine produise le plus grand effet qu'il est possible, en élevant un poids donné.

SOLUTION.

Soit D le volume d'eau que la source ou le reservoir fournit par seconde : & il faudra tellement arranger la machine, que cette quantité d'eau soit suffisante à entretenir la machine. Or posant le nombre des tuyaux horizontaux $= n$, l'orifice de chacun $= hh$, leur distance à l'axe de rotation $= b$; & que la machine acheve par son mouvement une révolution en même tems qu'un pendule de la longueur $= q$ fait ses oscillations : ou bien soit u la hauteur due à la vitesse, dont les orifices des tuyaux tournent autour de l'axe, de sorte que $u = \frac{2bb}{q}$. Ensuite, posant la hauteur du vaisseau, ou plutôt de l'eau dans le vaisseau au dessus des tuyaux $= e$, & la hauteur de la chute pendant une seconde $= g$, qui est comme on fait de 15, 625 pieds de Rhin. Cela posé, nous avons vu que l'entretien de la machine demande par seconde une quantité d'eau dont le volume est $=$

$$2 n h h \sqrt{g} \left(e + \frac{2 b b}{q} \right) = 2 n h h \sqrt{g} (e + u), \text{ \& partant}$$

nous aurons d'abord cette équation

$$D = 2 n h h \sqrt{g} (e + u)$$

Soit ensuite le poids $= Q$ qui doit être élevé, & supposons que cela

se fasse par le moyen d'un pignon & d'une rouë, qui fait une révolution pendant que la machine en fait μ révolutions ; & que ce poids s'éleve autour d'un tambour attaché à l'essieu de la rouë, dont le rayon soit $= c$, & le moment de ce poids fera $= \frac{1}{\mu} Q c$, nous aurons donc :

$$\frac{1}{\mu} Q c = 2 n b h h (e + u - V(e u + u u))$$

exprimant Q par le volume d'eau, dont le poids est égal au poids proposé. Et alors ce poids fera élevé pendant une seconde à la hauteur,

$$\text{qui est } = \frac{2 c}{\mu} V \frac{2 g}{q} = \frac{2 c}{\mu b} V g u.$$

Or la dépense d'eau D étant donnée, si nous regardons le mouvement de rotation de la machine ou la quantité u comme donnée, nous

$$\text{aurons } 2 n h h = \frac{D}{V g (e + u)} ; \text{ ou bien la somme des orifices}$$

$$n h h = \frac{D}{2 V g (e + u)} : \text{ d'où nous tirons :}$$

$$\frac{1}{\mu} Q c = \frac{D b}{V g} (V e + u) - V u$$

& puisque le poids Q est aussi donné, l'épaisseur du tambour c en sera déterminée ; & on aura

$$\frac{c}{\mu} = \frac{D b}{Q V g} (V(e + u) - V u).$$

Par conséquent le poids Q sera élevé par la force de la machine pendant une seconde à une hauteur qui est

$$= \frac{2 D}{Q} (V(e u + u u) - u).$$

D'où



D'où l'on voit que cette hauteur sera d'autant plus grande, plus on donne de vitesse de rotation à la machine, ou plus fera grande la vitesse Vu , avec laquelle tournent les orifices des tuyaux horizontaux : & s'il étoit possible de rendre cette vitesse infinie, la hauteur

d'élevation pendant une seconde feroit $= \frac{De}{Q}$; puisque alors

$V(eu + uu) - u = \frac{1}{2} e$. Mais comme il est impossible d'augmenter cette vitesse à l'infini, voyons combien les valeurs de la formule $V(eu + uu) - u$ différeront de cette plus grande valeur $\frac{1}{2} e$, lorsqu'on donne à u des valeurs plus petites.

Soit donc	& la valeur de $V(eu + uu) - u$ fera	Dechet de la plus grande valeur $\frac{1}{2} e$	la perte.
$u = e$	0, 4142. e	0, 0858. e	$\frac{1}{6}$
$u = 2e$	0, 4494. e	0, 0506. e	$\frac{1}{10}$
$u = 3e$	0, 4641. e	0, 0359. e	$\frac{1}{14}$
$u = 4e$	0, 4721. e	0, 0279. e	$\frac{1}{18}$
$u = 5e$	0, 4772. e	0, 0228. e	$\frac{1}{22}$
$u = 6e$	0, 4808. e	0, 0192. e	$\frac{1}{26}$
$u = 7e$	0, 4833. e	0, 0167. e	$\frac{1}{30}$
$u = 8e$	0, 4853. e	0, 0147. e	$\frac{1}{34}$
$u = 9e$	0, 4869. e	0, 0131. e	$\frac{1}{38}$
$u = 10e$	0, 4881. e	0, 0119. e	$\frac{1}{42}$

Ainsi si l'on faisoit $u = e$, on ne perdrait que la sixieme partie sur l'effet tout entier, qu'une vitesse infinie produiroit ; & on n'en perdrait que la dixieme partie, si l'on faisoit $u = 2e$. D'où l'on voit qu'on n'a pas besoin de s'empreser trop à faire la vitesse de la rotation extrêmement grande : puisqu'on voit, que pourvu que u surpas-



se e , on arrive déjà assés près du plus grand effet. Pour mettre donc la machine dans l'état le plus avantageux, on observera les maximas suivantes.

I. On donnera au vaisseau vertical une hauteur e si grande que les circonstances le permettront : car plus cette hauteur fera grande, plus aussi deviendra grand l'effet de la machine, & cela en même raison.

II. Ayant déterminé la hauteur e de la machine, la longueur des tuyaux horizontaux b sera déterminée par la vitesse de rotation de la machine. Ainsi, si l'on veut que le tems d'une révolution réponde au pendule $= q$, & qu'il soit $u = v e$, à cause de $\frac{2 b b}{q} = u = v e$, on aura $b = \sqrt{\frac{1}{2} v e q}$. Par exemple, si l'on vouloit, que les révolutions s'achevassent en 2 secondes & qu'on prit $v = 2$, ou auroit $q = 12, 66$ pieds, & $b = \sqrt{e q}$, & on ne perdrait que la dixieme partie de l'effet entier.

III. Ensuite connoissant la quantité d'eau D , que le reservoir fournit par seconde, on en déterminera la somme de toutes les ouvertures, par où l'eau sort des tuyaux horizontaux, cette somme étant $n h h = \frac{D}{2 \sqrt{g} (e + u)}$; où g marque la hauteur de 15, 625 pieds de Rhin. Il est indifferent combien de tuyaux on y veut appliquer, mais il conviendra que ce soient au moins deux, afin que la machine se maintienne d'autant mieux en équilibre.

IV. Quelque résistance que la machine ait à vaincre, on la peut réduire à un poids Q , qu'elle devrait élever, & pour l'endroit où ce poids doit être appliqué à la machine, on aura

$$\frac{c}{\mu} = \frac{D b}{Q \sqrt{g}} (V(e + u) - V u)$$

ou



ou bien il faudra appliquer ce poids à un tel endroit de la machine, que sa vitesse devienne $= \frac{D b}{Q V g} (V(e u + u u) - u)$.

C. Q. F. T.

COROLL. I.

L'effet de la machine étant estimé par le poids Q multiplié par la hauteur, à laquelle il est élevé pendant une seconde, cet effet sera $= 2 D (V(e u + u u) - u)$: d'où l'on voit que l'effet est proportionnel à la dépense d'eau D : & que le plus grand effet possible est $= D e$, qu'on obtiendrait s'il étoit $u = \infty$. Ainsi ce plus grand effet élèveroit précisément autant d'eau à la hauteur $= e$, qu'il faut pour l'entretien de la machine.

COROLL. II.

Donc, si la vitesse $V u$ n'est pas infinie, l'effet de la machine sera moindre que le plus grand, & le dechet sera $= 2 D (\frac{1}{2} e + u - V(e u + u u))$: donc la partie perduë sur l'effet tout entier sera $= \frac{e + 2 u - 2 V(e u + u u)}{e}$.

COROLL. III.

Puisqu'il faut donc perdre toujours quelque partie sur l'effet tout entier, supposons qu'on ne veuille perdre que la $\frac{1}{\lambda}$ partie de l'effet tout entier $D e$: & alors on aura $(1 - \frac{1}{\lambda}) e + 2 u = 2 V(e u + u u)$, d'où l'on tire la hauteur due à la vitesse $u = \frac{(\lambda - 1)^2}{4 \lambda} e$. Ainsi la perte, qu'on veut souffrir étant donnée, savoir $\frac{1}{\lambda}$ partie de l'effet
entier



entier, on trouvera aisément la vitesse, dont les bouts des tuyaux horizontaux doivent tourner, par cette table :

Perte	valeur de μ	Perte	valeur de μ	Perte	valeur de μ
I	0 e	$\frac{1}{7}$	1 $\frac{2}{7}$ e	$\frac{1}{13}$	2 $\frac{10}{13}$ e
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$ e	$\frac{1}{8}$	1 $\frac{17}{32}$ e	$\frac{1}{14}$	3 $\frac{1}{8}$ e
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ e	$\frac{1}{9}$	1 $\frac{7}{6}$ e	$\frac{1}{5}$	3 $\frac{4}{15}$ e
$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{8}$ e	$\frac{1}{10}$	2 $\frac{1}{10}$ e	$\frac{1}{6}$	3 $\frac{3}{8}$ e
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$ e	$\frac{1}{11}$	2 $\frac{3}{11}$ e	$\frac{1}{7}$	3 $\frac{1}{7}$ e
$\frac{1}{6}$	I $\frac{1}{4}$ e	$\frac{1}{12}$	2 $\frac{5}{12}$ e	$\frac{1}{8}$	4 $\frac{1}{12}$ e

COROLL. IV.

Si l'on vouloit se contenter de la moitié de l'effet total, on auroit $\mu = \frac{1}{8} e$, & $b = \frac{1}{4} \sqrt{e q}$, ou bien $q = \frac{16 b b}{e}$, & partant on

pourra rendre les révolutions aussi vites qu'on voudra : & de plus on aura $\frac{c}{\mu} = \frac{D b \sqrt{e}}{Q \sqrt{2 g}}$. Ou si l'on ne vouloit perdre que le tiers

de l'effet total, on auroit $\mu = \frac{1}{3} e$, $b = \sqrt{\frac{1}{6} e q}$ ou $q = \frac{6 b b}{e}$

& $\frac{c}{\mu} = \frac{D b \sqrt{e}}{Q \sqrt{3 g}}$. Et en général si l'on ne veut perdre que la partie

$\frac{1}{\lambda}$ de l'effet total, on aura $\mu = \frac{(\lambda-1)^2}{4 \lambda} e$, $b = \frac{(\lambda-1)}{2} \sqrt{\frac{e b}{2 \lambda}}$

ou $q = \frac{8 \lambda b b}{(\lambda-1)^2 e}$; & $\frac{c}{\mu} = \frac{D b \sqrt{e}}{Q \sqrt{\lambda g}} = \frac{(\lambda-1) D e}{2 \lambda Q} \sqrt{\frac{q}{2 g}}$.

COROLL. V.

Si nous posons qu'une révolution de la machine se doive achever en θ secondes, nous aurons $\sqrt{\frac{1}{2} q} = \frac{\theta}{\pi} \sqrt{g}$, & partant nous au-

rons

rons pour l'endroit de l'application du poids Q cette équation $\frac{e}{\mu}$
 $= \frac{(\lambda - 1) \theta D e}{2 \pi \lambda Q}$: & pour la longueur des tuyaux horizontaux
 $b = \frac{(\lambda - 1) \theta}{2 \pi} V \frac{1}{\lambda} e g$; or pour la somme de leurs orifices on
aura $n h h = (\lambda + 1) V \frac{1}{\lambda} g e$. D'où l'on voit que plus qu'on veut
que le mouvement de rotation soit lent, plus doivent être longs les
tuyaux horizontaux.

SCHOLIE.

Ayant vu que le plus grand effet d'une machine de cette façon monte à $D e$, & quoiqu'il soit impossible d'obtenir cet effet, vu que la vitesse de rotation devrait être infinie, on peut pourtant approcher de ce plus grand effet si près, que la différence est presque insensible ; cette espèce de machine mérite bien toute notre attention. Car si nous comparons cet effet avec celui qu'on est capable de produire avec la même dépense d'eau D & la même hauteur e , en laissant choquer cette eau contre une rouë comme à l'ordinaire, l'effet qu'on en peut tirer monteroit à peine à $\frac{1}{6} D e$: d'où il est clair que cette nouvelle manière de profiter d'une dépense d'eau donnée est beaucoup plus avantageuse que les manières ordinaires, attendu qu'elle est capable de produire un effet, qui est jusqu'à six fois plus grand. Une augmentation si considérable mériteroit donc bien, que les Mécaniciens apportassent tous leurs soins à découvrir les moyens, de rendre praticable cette nouvelle manière de profiter d'une dépense d'eau, que fournit une source ou un réservoir ; & il n'y a aucun doute qu'une telle application ne soit récompensée par des avantages très importants. Aussi ne trouvera-t-on pas dans l'exécution tant d'obstacles, qu'on se fera peut-être imaginé au commencement ; le principal chan-



gement, qu'il faudroit faire dans l'arrangement des machines, reviendroit à ce que l'axe de la rouë principale, qui est immédiatement mise en mouvement par la force de l'eau, doit être vertical, au lieu qu'on lui donne ordinairement une situation horizontale : pour les autres difficultés, on trouvera aisément les moyens de les surmonter. Au reste quoique le calcul, sur lequel est fondé l'effet de cette nouvelle sorte de machines, ne soit pas à la portée de tout le monde, on peut aisément se convaincre de ses avantages, si l'on pense qu'en employant la même dépense d'eau suivant les méthodes ordinaires, il s'en échape une bonne quantité, qui ne contribue rien au mouvement de la machine, & que celle qui frappe actuellement sur les aubes de la rouë, y produit un effet d'autant plus foible, plus le mouvement de la rouë sera rapide. Mais en mettant l'eau en action selon ce nouveau projet, aucune partie des forces, dont elle est susceptible, ne se perd inutilement, & le mouvement de la machine ne diminue pas l'effet des forces de l'eau : c'est en quoi consiste la véritable source des grands avantages de cette nouvelle manière.

