1752

Réflexions sur les divers dégrés de lumière du soleil et des autres corps célestes

Leonhard Euler

REFLEXIONS
SUR LES DIVERS DE'GRE'S DE LUMIE'RE
DU SOLEIL ET DES AUTRES CORPS CELESTES,

PAR M. EULER.

I.

Pour juger de la Lumiére d'un objet, qui nous éclaire, il faut premiérement considerer cet objet même, entant qu'il renferme la source des rayons de lumiére, par lesquels nous sommes éclairés; & en second lieu, il faut avoir égard à notre situation par rapport à cet objet, d'où depend la force & la quantité des rayons, qui frappent immédiatement nos sens Ces deux circonstances étant jointes ensemble nous mettront en état de juger de la force de lumiére, dont nos yeux sont affectés par les rayons d'un objet lumineux quelconque. Et ce sera par là, que nous pourrons déterminer combien de fois la lumiére d'un objet est plus forte ou plus foible que celle d'un autre.

II. En considèrant l'objet même, d'où les rayons de lumiére émanent, il en faut d'abord distinguer deux sortes. `A la premiere je rapporte les corps lumineux d'eux-mêmes, ou ceux qui par une force, qui leur est propre, lancent des rayons: tels sont le Soleil, les étoiles fixes, & la flamme, qui jettent partout des rayons d'eux-mêmes, sans qu'ils soient éclairés par quelque autre lumiére. Or pour la seconde sorte, j'y range les corps opaques, qui d'eux-mêmes ne seroient pas visibles: mais étant éclairés par quelque autre lumiére, ils en

sont

font mis en un état femblable à celui des corps lumineux par eux-mêmes, & deviennent propres à produire eux-mêmes des rayons de lumiére, qui nous les rendent vifibles. Tels font les Planetes, les Cometes, & tous les corps opaques de notre terre, qui étant illuminés frappent par leurs rayons nos organes de la vuë auffi bien que les corps de la premiere forte.

III. Pour qu'un corps produife des rayons de lumiére, je crois avoir fuffifamment prouvé dans ma Differtation fur la Lumiére & les Couleurs, que les plus petites parcelles dans la furface de ces corps fe trouvent dans un mouvement de vibration extrèmement rapide : lequel fe communiquant à l'éther, à ce milieu auffi fubtil qu'élaftique, y produit ce que nous nommons rayons de lumiére. Tout de même qu'un corps, dont les parties font mifes dans un mouvement de vibration plus groffier, produifent dans l'air cet ébranlement, qui eft la caufe du fon : de forte que la lumiére eft à l'égard de l'éther la même chofe, que le fon à l'égard de l'air. Mais quoique l'éther foit répandu par tout, il eft naturel que la transmiffion des vibrations y doit être extrémement altérée & même arrêtée par les autres corps, qui s'y trouvent : & les corps qui ne refufent pas le paffage à ce mouvement de vibration, font ceux qu'on nomme tranfparens.

IV. Je ne m'arrêterai pas ici d'avantage à l'explication de cette Theorie : je remarquerai feulement que la force des rayons, qu'un corps lance, vient de la véhémence du mouvement de vibration, dont les moindres particules du corps font agitées. Je ne parle pas ici de la fréquence des vibrations, ou de leur nombre qui s'acheve dans un certain tems, car j'ai fait voir, que la couleur des rayons dépend de cette fréquence : mais quelle que foit cette fréquence, on conçoit que les parcelles du corps, tout comme une corde tenduë, peuvent faire dans leur mouvement des excurfions plus grandes ou plus petites. Et c'eft de là que les rayons feront d'autant plus forts ou plus foibles, plus ces excurfions feront grandes ou petites. Or plus les rayons feront forts, plus la lumiére fera brillante : & de là découle la premiére qualité des corps lumineux, qui entrera dans mes recherches, & que je nommerai la ſplendeur du Corps lumineux, dont la quantité eſt proportionelle à la force des rayons, ou bien à la force du mouvement de vibration.

V. Cette ſplendeur doit ſe rapporter à chaque particule du corps lumineux; puiſqu'il pourroit arriver, que chaque particule eut un mouvement de vibration particulier. Il ſeroit auſſi poſſible, que pluſieurs particules du corps fuſſent entiérement deſtituées d'un mouvement de vibration: & dans ce cas le brillant du corps ſeroit bien foible, quand même il y eût par-cy par-là des particules douées d'un très véhément mouvement. Donc pour bien déterminer la force des rayons, qui émanent d'un corps, il faut conſiderer toutes les particules dans chaque portion de la ſurface du corps, à l'égard de leur mouvement de vibration: & cette activité conſiderée conjointement ſera ce que je nommerai dans la ſuite l'éclat du corps lumineux, & qui tiendra lieu de la vraye meſure de la force des rayons. L'éclat ſera donc en raiſon compoſée de la ſplendeur des particules brillantes & de leur denſité ou de leur nombre.

VI Outre l'éclat du corps lumineux, qui eſt une qualité, qui lui eſt intrinſeque, il faut avoir égard à la grandeur de la ſurface du corps, ou du moins à ſa partie, qui jette des rayons ſur un point propoſé. Car puisque de chaque point de cette ſurface il émane des rayons, la quantité des rayons dont un endroit ſera frappé, dépendra non ſeulement de l'éclat du corps lumineux, mais auſſi de l'étenduë de la ſurface, ou du nombre des points lumineux, qui y lancent des rayons. Ainſi ſi le corps lumineux eſt ſphèrique, & que la diſtance où l'on reçoit ſes rayons, ſoit très grande par rapport à ſon diametre, la ſurface dont les rayons y peuvent parvenir, ſera la moitié de ſa ſurface entiére. Elle ſera donc deux fois plus grande, que l'aire de ſon grand cercle. L'obliquité de la ſurface des corps ſphèriques, ne diminuë rien dans cet effet, puisque chaque point d'une ſurface lumineuſe eſt ſuppoſée répandre de toute part également des rayons.

VII. Ayant

VII. Ayant fixé ces deux choſes, l'éclat & la quantité de la ſurface lumineuſe, qui appartiennent au corps lumineux même, quoique la détermination de la ſurface regarde déjà le lieu, qui en doit recevoir les rayons; il faut ſe ſouvenir que la force des rayons, en s'éloignant du corps lumineux, décroit en raiſon des quarrés des diſtances. Car les rayons, qui partent d'un point quelconque, devant ſe répandre de plus en plus, ils deviendront pour ainſi dire plus rares, & cette diminution doit ſuivre la raiſon des quarrés des diſtances. Cependant il faut bien remarquer que les rayons, quand ils ont à paſſer par un milieu tranſparent, plus groſſier que l'éther, comme par l'air ou par l'eau, ils y ſouffrent encore un affoibliſſement très conſiderable: comme Mr. *Bouguer* l'a prouvé par un grand nombre d'expériences dans ſon excellent Traité ſur la Gradation de la Lumiére. Ce n'eſt donc pas de cette diminution de la force des rayons, que je parle dans cet article, mais de celle qui eſt proportionelle aux quarrés des diſtances du corps lumineux, dont les rayons ſont originairement partis.

VIII. Soit donc propoſé un corps lumineux quelconque, ſoit qu'il ſoit lumineux de lui-même, ou qu'il ſoit éclairé par une lumiére étrangere: & que l'éclat de ce corps ſoit marqué par E. Que les rayons de ce corps tombent ſur un point à une grande diſtance $= D$, & que la ſurface du corps dont les rayons atteignent ce point, ſoit $= CC$. Cela poſé, il eſt clair par ce que je viens de remarquer, que la force des rayons, ou la force de lumiére qui éclaire ce point, ſera directement proportionelle 1. à l'éclat du corps lumineux E, 2. à la ſurface CC & 3. reciproquement au quarré de la diſtance DD. Ainſi la force de lumiére, qu'un point placé à la diſtance D recevra du corps lumineux ſera proportionelle à cette expreſſion $E . \frac{CC}{DD}$.

IX. Si la ſurface du corps lumineux eſt irréguliére & que la diſtance du point, qui en doit être éclairé, ne ſoit pas fort grande, on voit bien qu'on ne ſauroit emploier cette formule; puiſque les diſtances de ce point aux diverſes parties de la ſurface lumineuſe pour-

 roient

roient être trop differentes entr'elles, pourqu'on pût estimer laquelle d'entr'elles doit être mise pour D. Mais si la distance D est extrèmement grande à l'égard de l'étendue du corps lumineux, ou que ce corps soit comme infiniment petit, il n'y a aucun doute que notre formule ne soit parfaitement d'accord à la verité. Pour cet effet, quel que soit le corps lumineux, & quelque petite la distance du point, qui en reçoit l'illumination, on n'aura qu'à résoudre la surface lumineuse en ses élémens infiniment petits, & à déterminer l'illumination causée par chaque élément consideré separément. La somme de toutes ces illuminations élémentaires fournira l'illumination totale.

Fig. I. X. Puisque je me bornerai ici aux corps lumineux sphèriques, je m'en vai déterminer par le moyen de cette formule fondamentelle le degré d'illumination, dont un point placé à une distance quelconque d'un corps lumineux sphèrique en doit être éclairé. Soit donc AEBF un corps lumineux sphèrique, dont le rayon soit $CA = CB = a$ & l'éclat dont il lance des rayons de chacun de ses élémens soit $= E$. Soit ensuite O le point, qui en est illuminé, dont la distance au centre du corps lumineux soit $OC = c$. Qu'on tire du point O les tangentes OE & OF, qui détermineront la portion EAF de la surface sphèrique dont le point O reçoit l'illumination, & soit l'angle $OCE = OCF = \xi$, dont le complément ou l'angle $COE = COF$ marquera le démi-diametre apparent du corps lumineux vû du point O. Ainsi posant le démi-diametre apparent $COE = COF = \theta$, il sera $\xi = 90° - \theta$.

XI. Prenant à present les angles $ACM = ACN = \Phi$, qu'on considere l'élément annulaire de la surface lumineuse, lequel est produit par la conversion de l'élément Mm autour de l'axe CO, & puisque le point O est également éloigné de tous les points de cet élément annulaire, l'illumination qu'il en reçoit, sera aisément déterminée par notre formule. Car l'élément de l'arc circulaire AM étant $Mm = a\,d\Phi$ & le démi-diametre de l'anneau $PM = a \sin \Phi$, posant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, la surface de notre

élément

élément annulaire ſera $= 2\pi a \sin\Phi.\ a\,d\Phi = 2\pi aa\,d\Phi \sin\Phi$. De plus la diſtance du point O à chaque point de cet anneau ſera $OM = \sqrt{(aa + cc - 2ac \cos\Phi)}$; donc l'illumination, que le point O recevra de l'anneau $MmNn$, deviendra $= \frac{E.\ 2\pi aa\,d\Phi \sin\Phi}{aa + cc - 2ac\cos\Phi}$.

XII. L'integrale de cette formule dépendant des logarithmes ſera $= \frac{\pi a E}{c}\ l\ \frac{aa + cc - 2ac\cos\Phi}{aa + cc - 2ac}$, en le prenant en ſorte qu'il évanoüiſſe poſant l'angle $\Phi = o$. Et partant, mettant pour Φ l'angle entier $OCE = \xi$, l'illumination entiére, que le point O recevra du globe lumineux AEBF, ſe trouvera $= \frac{\pi a E}{c}\ l\ \frac{aa + cc - 2ac\cos\xi}{aa + cc - 2ac}$ $= \frac{2\pi a}{c}.\ E\,l\,\frac{OE}{OA}$. Ou bien, puisque $\cos\xi = \sin\theta$, cette illumination ſera auſſi $= \frac{\pi a E}{c}\ l\ \frac{aa + cc - 2ac\sin\theta}{aa + cc - 2ac}$. Donc ſi l'angle θ eſt fort petit, & la diſtance c très grande à l'égard de a, il ſera aſſés prés $\frac{aa + cc - 2ac\sin\theta}{aa + cc - 2ac} = 1 + \frac{2ac\,(1 - \sin\theta)}{aa + cc - 2ac} = 1 + \frac{2a}{c}$, dont le logarithme ſera $= \frac{2a}{c}$: & partant toute l'illumination du point O ſera $= \frac{2\pi aa}{cc} E = 2\pi E \sin\theta^2$, puisque $\sin\theta = \frac{a}{c}$. Or poſant $\frac{a}{c}$ pour $\sin\theta$, cette illumination ſera en général $= \frac{\pi a E}{c}\ l\ \frac{cc - aa}{(c-a)^2}$ $= \frac{\pi a E}{c}\ l\ \frac{c + a}{c - a} = \frac{\pi a E}{c}\ l\ \frac{OB}{OA}$.

XIII. Mais dans cette ſolution nous n'avons conſideré l'objet O, qui reçoit l'illumination, que comme un point, ce qui ne peut pas avoir lieu dans aucune illumination réélle, où la ſurface, qui reçoit l'illu-

 mination,

mination, a toujours quelque étendue, quelque petite qu'elle soit. Et partant, il ne suffit pas de considérer la quantité des rayons, qui tombent sur un de ses points, mais il faut aussi avoir égard à l'obliquité, dont les rayons y viennent frapper : parce que plus la surface O o recevra les rayons obliquement, plus sera aussi petite la quantité des rayons, qui tombent sur la même étendue. Par cette raison on sera obligé de diminuer la force de l'illumination tirée de notre formule en raison du sinus de l'angle d'incidence au sinus total. Par conséquent, si les rayons incidens font avec la surface, qu'ils éclairent un angle $= \omega$, l'illumination ne sera plus selon notre formule $= \frac{E.\ CC}{DD}$, mais elle doit être estimée $= \frac{E.\ CC}{DD} \sin \omega$.

XIV. Cela remarqué, soit O o la surface, que les rayons du corps lumineux sphèrique AEBF éclairent, & je supposerai, que cette surface O o soit perpendiculaire à l'axe CO ; de sorte que les rayons, qui y frappent de l'élément annulaire Mm Nn, fassent avec elle un angle M O o = O M P. Le sinus de cet angle étant $= \frac{OP}{OM}$ $= \frac{c - a \cos\Phi}{\sqrt{(aa + cc - 2ac\cos\Phi)}}$ à cause de C P $= a \cos\Phi$, l'illumination causée par les rayons de l'élément annulaire Mm Nn ne sera plus $= \frac{E.\ 2\pi aa\, d\Phi \sin\Phi}{aa + cc - 2ac\cos\Phi}$, comme nous avons supposé, mais elle deviendra $= \frac{E.\ 2\pi aa\, d\Phi \sin\Phi\, (c - a\cos\Phi)}{(aa + cc - 2ac\cos\Phi)^{\frac{3}{2}}}$; où mettant $\cos\Phi = u$, à cause de $du = -d\Phi \sin\Phi$, cette expression se changera en $\frac{-2\pi E aa\, du\, (c - au)}{(aa + cc - 2acu)^{\frac{3}{2}}}$, dont il est clair que l'integrale sera $= \frac{2\pi E aa}{cc} . \frac{a - cu}{\sqrt{(aa + cc - 2acu)}} + \text{Const},$

XV. Remet-

XV. Remettant pour u sa valeur cof Φ, l'illumination causée par la portion MAN fera :

$$\frac{2\pi Eaa}{cc}\left(\text{Conft.}+\frac{\sqrt{(aa+cc-2ac\cos\Phi)}}{a-c\cos\Phi}\right)$$

où il eft clair que la valeur de Conft. doit être

$=\frac{c-a}{\sqrt{(cc+aa-2ac)}}=1.$ Maintenant pour avoir toute l'illumination, il faut mettre $\Phi=\xi=$ OCE & puisque alors cof ξ $=\frac{\text{CE}}{\text{CO}}=\frac{a}{c}$, il fera $a-c\cos\xi=o$, de forte que l'illumination cherchée fera $=\frac{2\pi Eaa}{cc}=2\pi$ E fin θ^2. Cette expreffion convient avec la précedente, fi l'on y pofe l'angle θ très petit : or ici nous voyons qu'en général la force d'illumination, dont un corps expofé directement au globe lumineux en eft éclairé, eft toujours en raifon compofée de l'éclat du corps lumineux E & du quarré du finus du demidiametre apparent du corps lumineux.

XVI. Donc fi l'éclat d'un corps celefte quelconque, qu'on peut toujours regarder comme fphèrique, eft pofé $=$ E, & qu'on expofe à ce corps directement une furface, le demidiametre apparent du corps lumineux étant $=\theta$, la quantité d'illumination, dont cette furface fera illuminée, fera proportionelle à E fin θ^2. De plus il fuit de ce que je viens de dire, que lorsque la furface, qu'on veut éclairer, tient une fituation oblique à l'égard du corps celefte, deforte que les rayons y tombent fous un angle quelconque $=\omega$, le degré d'illumination fera comme E fin θ^2. fin ω. Car puisqu'on peut fuppofer fort petit le demidiametre apparent θ, tous les rayons, qui tombent fur la furface Oo, y feront inclinés à peu près du même angle ω.

XVII. Si nous fuppofons que les étoiles fixes font doüées d'un éclat égal à celui du Soleil, l'illumination dont une étoile fixe eft capable d'éclairer, fera à l'illumination du Soleil comme le quarré du

finus

ſinus du demi-diametre apparent de l'étoile fixe, au quarré du ſinus du demi-diametre apparent du Soleil, où je ſuppoſe que la lumiére eſt reçue perpendiculairement ſur la ſurface éclairée. Or le demi-diametre apparent du Soleil eſt dans ſes moyennes diſtances $16', 7'' = 967''$; & le diametre apparent des étoiles fixes, même de la premiere grandeur, eſt ſi petit, que les Obſervations les plus délicates ne ſont pas ſuffiſantes à le déterminer. Cependant les occultations par la Lune prouvent évidemment, que le diametre apparent de la plus brillante étoile fixe ne ſauroit monter à une demi-ſeconde : de ſorte que le demi-diametre apparent doit être eſtimé au deſſous d'un quart de ſeconde ou de 15 tierces.

XVIII. Donc, puiſque les ſinus de ſi petits angles ſont en raiſon des angles mêmes, l'illumination tirée du Soleil ſera à l'illumination tirée de l'étoile fixe la plus brillante, dans une raiſon plus grande que celle du quarré de 967 au quarré de $\frac{1}{4}$; *c. à d.* la lumiére du Soleil ſurpaſſera plus de 15000000 de fois la lumiére d'une étoile fixe de la premiere grandeur : ou il faudroit plus que 15000000 d'étoiles fixes de la plus grande ſorte pour nous éclairer autant que le Soleil, & même ces étoiles devroient pour cet effet être ramaſſées dans la même région du ciel, pour que les rayons de chacune d'elles puſſent tomber à peu près perpendiculairement ſur la même ſurface, qu'on expoſeroit à leur lumiére. De là on comprendra aiſement, pourquoi toutes les étoiles fixes, qui ſe trouvent à la fois ſur l'horizon, ne ſont pas capables de nous fournir tant de lumiére, qui puiſſe être miſe en comparaiſon avec celle du Soleil.

XIX. Or ſi nous comparons la lumiére d'une étoile fixe à celle de la pleine Lune, que Mr. *Bouguer* a trouvé être 300000 fois plus foible que la lumiére du Soleil, on conviendra aiſément, que la lumiére trouvée par le calcul précedent eſt encore trop forte. Car en vertu de ce calcul 50 étoiles de la premiere grandeur nous devroient fournir autant de lumiére que la pleine Lune ; or, pour peu qu'on peſe le peu de rapport, qu'il y a entre la lumiére de la pleine Lune & celle

celle de toutes les étoiles fixes ensemble, il ne restera plus le moindre doute, que la lumiére de plusieurs mille étoiles fixes de la premiere grandeur ne sauroit égaler la lumiére de la pleine Lune: & de là je tire cette conclusion, que le diametre apparent des étoiles fixes est plusieurs fois plus petit, que je ne l'ai supposé, & qu'il ne monte peut-être pas même à une tierce.

XX. Mais il faut avouër, que ce raisonnement est fondé sur deux hypotheses, qui s'ecartent peut-être beaucoup de la vérité. Par la premiere j'ai supposé, que l'éclat des étoiles fixes, ou leur lumiére propre, est égale à l'éclat du Soleil; or il y a bien de l'apparence qu'il se trouve une aussi grande difference dans l'éclat que dans la grandeur des étoiles fixes: vû qu'il y a des étoiles, dont la lumiére semble presque s'éteindre de tems en tems. En second lieu j'ai supposé, que les rayons des étoiles fixes ne souffrent aucune débilitation en passant par cette immense étendue, qu'on nomme éther. Car quelque petite que soit la perte, que les rayons du Soleil souffrent dans leur chemin, celle que les rayons des étoiles fixes doivent souffrir, doit toujours être fort considerable, à cause de leur distance presque inconcevable. Donc, à moins que les rayons de lumiére ne souffrent absolument aucun affoiblissement dans l'éther, la derniére supposition doit être fort sujette à caution.

XXI. Il sera aussi fort important de découvrir le rapport de l'éclat du Soleil à celui d'une lumiére terrestre. Pour cet effet je ferai usage d'une experience, que Mr. *Bouguer* rapporte, par laquelle il a trouvé, qu'après avoir diminué la lumiére du Soleil dans la raison de 11664 à un, elle lui parût égale à la lumiére d'une bougie éloignée à la distance de 16 pouces. Mais il ne marque pas la grandeur de la flamme de la bougie, dont il s'est servi: je crois cependant ne me tromper pas fort, quand je suppose son diametre d'un demi-pouce, en regardant la flamme même comme un globe: donc le sinus de son demi-diametre apparent à la distance de 16 pouces auroit été $= \frac{1}{64}$, ou

 bien

bien de $51' = 3060''$. Par conféquent pofant l'éclat du Soleil $=$ E & celui de la bougie $= e$, cette expérience fournira $\frac{967^2 . E}{11664} = 3060^2 . e$, d'où l'on tire le rapport de E: $e = 116860 : 1$, de forte que l'éclat du Soleil feroit plus de 100000 fois plus fort que l'éclat d'une bougie.

XXII. Mais, puisque le Soleil fe trouvoit alors à la hauteur de 31°, & que fes rayons ont eu à parcourir dans notre atmofphère un chemin confiderable, il faut qu'ils ayent perdu beaucoup de leur force, avant que de parvenir jusqu'à nous ; de forte que fans cet affoiblisfement la lumiére du Soleil auroit été beaucoup plus forte. Mr. *Bouguer* a donné une table pour la diminution de la lumiere des aftres à chaque hauteur, d'où l'on voit que la lumiére du Soleil étant à la hauteur de 31° eft à la lumiére, dont il éclaireroit, fi fes rayons ne perdoient rien de leur force, comme 2 à 3. Ayant donc égard à cette circonftance, on trouvera que le veritable éclat du Soleil eft à celui d'une bougie comme 175000 eft à 1. Et fi les rayons du Soleil avoient perdu quelque chofe en parcourant l'efpace de l'éther jusqu'à nous, outre la diminution ordinaire, qui fuit la raifon des quarrés des diftances, l'éclat du Soleil deviendroit encore plus grand.

XXIII. Il eft vray que la lumiére d'une bougie n'eft pas le feu le plus brillant, qu'on peut produire fur la terre, & qu'un feu de fonte, ou bien les metaux mis en fufion, ont une beaucoup plus grande force d'illuminer. Cependant on conviendra aifément, qu'a quelque force qu'on pût porter un feu terreftre, il s'en faudra toujours beaucoup, qu'il n'approchât de celui, dont le Soleil eft compofé. La matiére donc du Soleil doit être entiérement differente de toute matiere combuftible, qui fe trouve fur la terre, & elle doit être réduite à un tel dégré d'ignition, dont aucune matiere fur la terre n'eft fufceptible. Et on aura raifon de dire, que lorsque le Soleil n'étoit qu'une maffe d'or mife au plus haut dégré de fufion, il ne feroit pas capable de nous

procu-

procurer ni la lumiére ni la chaleur, que nous en recevons, & qu'il s'en faudroit méme beaucoup.

XXIV. Le Soleil étant donc un tel feu, dont la force ou l'éclat ſurpaſſe pluſieurs mille fois toutes les eſpeces de feu, qu'on eſt capable de produire ſur la terre, il faut abſolument, que la matiere, dont ce corps lumineux eſt formé, ſoit d'une nature tout à fait differente des matieres, qui ſe trouvent ſur la terre. Et en effet, de quelque matiere qu'on voudroit s'imaginer, que le Soleil fut compoſé, & à quelque dégré de chaleur, qu'elle eut été portée; ou elle auroit été bientot réduite en cendre, ou le dégré de chaleur y auroit bientot diminué. Donc, puisqu'on ne remarque aucun changement dans la ſubſtance du Soleil depuis quelques milliers d'années, & que cela méme eſt un des plus grands ſujets de notre admiration, nous en devons étre encore plus ſurpris, après avoir reconnu cette exceſſive force de lumiére, qui y eſt ramaſſée, & qui ſurpaſſe tant de fois les feux les plus brillans, que les hommes ſont en état d'exciter.

XXV. Voyons maintenant, ſi les principes que je viens d'établir ne ſont pas ſuffiſans pour déterminer la ſplendeur ou l'éclat, dont une planete doit reluire, étant illuminée par les rayons du Soleil. Il s'agit donc de déterminer, quel ſera le mouvement de vibration, que les rayons du Soleil, en frappant les moindres parcelles de la ſurface d'une planete, ſont capables de leur imprimer. Car je crois avoir ſuffiſamment prouvé que nous ne voyons pas les corps opaques par des rayons reflèchis de leur ſurface, comme la plupart des Phyſiciens l'ont ſoutenu; mais que les rayons qui éclairent un corps opaque excitent les moindres particules, qui en ſont frapées, à un certain mouvement de vibration, qui engendre enſuite lui-méme des rayons. Tout de méme comme on ſait, qu'un ſon peut produire dans une corde tenduë à l'uniſſon, des vibrations, dont elle ſonne enſuite elle-méme.

XXVI. Cette production de lumiére donc dans un corps opaque dépendra principalement de la nature de ſes moindres particules, &

 de

de leur tenſion. Car ſi ces particules ne ſont pas propres à recevoir un tel mouvement de vibration, qu'il faut pour produire des rayons de lumiére, ce corps ne reluira jamais, quelque éclairé qu'il ſoit. C'eſt à peu près le cas des corps noirs, qui ne nous renvoyent presque point de rayons, quoiqu'ils ſoient illuminés, & nous demeurent pour ainſi dire inviſibles: cependant l'experience nous fait voir, qu'il n'y a point de corps ſi noirs, qui étant illuminés ne répandent point du tout des rayons, quoique ces rayons ſoient de beaucoup plus foibles que ceux des corps colorés ou blancs. Donc, ſi les planetes étoient des corps noirs, il n'y a aucun doute, que nous n'en verrions presque rien, quelque éclairées qu'elles ſoient du Soleil. Il eſt donc certain, que les planetes renferment dans leurs ſurfaces quantité de particules colorées ou blanches, lesquelles étant illuminées par les rayons du Soleil, nous deviennent viſibles ſelon la nature & la couleur des particules, qui conſtituent leur ſurface.

XXVII. Une planete ſera donc la plus propre à reluire ou à recevoir un éclat, ſi ſa ſurface eſt couverte de particules blanchâtres, puisque des corps de cette nature ſont les plus ſenſibles à recevoir l'impreſſion de toute ſorte de rayons, tels que ſont les rayons du Soleil; au lieu que les particules colorées ne peuvent être ébranlées que par des rayons de la même couleur, quoiqu'il n'y ait point de couleur ſi pure qui ne reçoive quelque impreſſion des rayons d'une couleur toute differente. Donc, pour rendre le cas le plus favorable pour la lumiére des planetes, je les ſuppoſerai couvertes de particules blanches, afin qu'elles puiſſent recevoir du Soleil le plus grand éclat qu'il eſt poſſible. Enſuite il ſera aiſé de rabattre quelque choſe de l'éclat que je trouverai en conſidération des particules noires & colorées, qui y pourroient être mêlées.

XXVIII. Soit donc O o une telle particule blanche de la ſurface d'une planete, ſur laquelle tombe directement le cone lumineux E O F: & je ſuppoſe que cette particule ſoit tellement dégagée & dans une telle tenſion, qu'elle puiſſe obeïr parfaitement aux impreſ-

ſions

ſions, dont elle eſt frappée par les rayons de ce cone lumineux. Cela poſé, je remarque d'abord que cette particule ne ſauroit être miſe dans un tel mouvement de vibration, qu'elle en devint capable de répandre des rayons de lumiére auſſi forts que ſont ceux qu'elle reçoit. Car, ſi cela arrivoit, vû qu'elle lanceroit toute part des rayons de la force de ceux du cone EOF, l'effet ſeroit beaucoup plus grand que la cauſe, & cela dans la raiſon de ce cone à la capacité d'une ſphère entiére, dont le rayon ſeroit O E. Or ſi la particule Oo lançoit des rayons auſſi forts que ceux dont elle eſt frappée, ſon éclat ſeroit égal à l'éclat du corps AEBF, dont elle eſt illuminée; donc l'éclat de la particule Oo ſera toujours beaucoup plus petit.

XXIX. Mais ſi la particule Oo étoit frappée de toute part par des rayons égaux à ceux du cone EOF, alors il n'y auroit plus de répugnance, qu'elle n'en reçût un mouvement de vibration auſſi fort que celui des particules du corps EAF; & que par conſéquent ſon éclat ne fut égal à l'éclat du corps EAF. Par là on conclura que, n'étant frappée que par le cone EOF, ſon éclat ſera d'autant de fois plus petit que l'éclat du corps lumineux AEBF, que la ſolidité du cone EOF eſt plus petite que la ſolidité d'une ſphère, dont le rayon eſt $=$ OE. Or on ſait que ce raport du cone à la ſphère eſt comme le ſinus verſe de la moitié de l'angle EOF au diametre ou au double du ſinus total. Donc, poſant l'angle EOC, ou le demi-diametre apparent du corps lumineux $= \theta$ & ſon éclat $=$ E, l'éclat de la particule Oo ſe trouvera $= \frac{1}{2} E \sin \text{vers.}\ \theta = \frac{1}{2} E (1 - \cos \theta) = E \sin \frac{1}{2} \theta^2$.

XXX. Icy j'ai ſuppoſé que le cone lumineux tombe directement ſur la particule Oo; d'où l'éclat trouvé $E \sin \frac{1}{2} \theta^2$ n'aura lieu, qu'aux endroits des planetes, qui ont le Soleil dans leur Zenith. Pour les autres endroits, qui reçoivent obliquement les rayons du Soleil, cette valeur doit encore être diminuée en raiſon du ſinus de cette obliquité. Ainſi l'éclat évanouïra tout à fait dans les lieux de la planete, qui auront le Soleil dans leur horizon. En prenant donc un milieu entre le plus grand éclat & cet évanouiſſant, on pourra regarder la planete en ſorte, comme ſi par toute ſa ſurface étoit repandu un éclat égal $= \frac{1}{2} E \sin \frac{1}{2} \theta^2$. Cette diminution ſeroit néceſſaire, ſi la ſurface de la planete étoit comme polie; mais, puisqu'il y a probablement quantité de petites éminences, qui pourroient recevoir les rayons plus directement, l'éclat en tirera quelque augmentation, outre que dans ce cas toute la ſurface illuminée ſeroit plus grande que nous n'avons ſuppoſé dans le calcul.

XXXI. Mais la conſidération d'un tel milieu dans les divers dégrés d'éclat, dont les diverſes parties d'une planete ſeront éclairées, ne pourra avoir lieu, que lorsque nous voyons toute la moitié éclairée. Car il eſt clair, que s'il ne ſe préſente à notre vuë, qu'une petite partie de la moitié éclairée, il faut avoir égard à l'éclat de cette partie même, ſans que celui de la partie, qui nous eſt cachée, y puiſſe contribuer quelque choſe. Cette recherche ſera donc abſolument néceſſaire, lorsqu'il faut déterminer la lumiére de la Lune, quand elle ſe trouve loin de ſon oppoſition au Soleil, ou quand elle ne nous paroit pas pleine: la même choſe doit s'obſerver à l'égard de Venus & de Mercure, dont on ne voit jamais la moitié éclairée toute entiére. Pour Mars, il ne ſera pas ſuperflu non plus de conſidérer ſes phaſes; mais on s'en pourra paſſer tout à fait, lorsqu'on demande l'éclat de lumiére de Jupiter & de Saturne.

Fig. II. XXXII. Que la planche répreſente le plan, où ſe trouvent les centres du Soleil S, de la terre T, & de la planete dont il s'agit de trouver le dégré de l'éclat, dont elle eſt viſible à la Terre. Que le cercle AEBF répreſente la planete en queſtion, dont le corps ſoit produit par la révolution de ce cercle autour de l'axe AB; & ſoit le demi-diametre $CA = CB = a$. Suppoſant maintenant la diſtance du Soleil CS, auſſi bien que celle de la terre CT comme infinie à l'égard de a, il eſt clair que le diametre EF perpendiculaire à AB déterminera la moitié éclairée EAF; qui ſera ſeparée de l'autre moitié obſcure par le plan perpendiculaire a celui de la figure, qui le coupe ſelon la droite EF. Donc le point A recevra du Soleil le plus grand éclat, & ſi

nous

nous nommons l'éclat du Soleil $= E$, & le demi-diametre apparent du Soleil vû de la planete $= \theta$, nous venons de voir, que l'éclat du point A fera $= E. \sin \frac{1}{2} \theta^2$, fuppofant que la planete reçoive des rayons du Soleil autant d'éclat qu'il eft poffible.

XXXIII. Soit pour abréger cet éclat en A favoir $E \sin \frac{1}{2} \theta^2 = e$ & prenant un point quelconque M de la moitié éclairée, d'où ayant tiré le rayon MC & l'appliquée MP perpendiculaire à l'axe AB, puisque l'angle d'incidence SMA eft égal à CMP, l'éclat au point M fera $= e \sin CMP = \frac{e.\, CP}{a}$: & cet éclat conviendra également à tous les points de la planete, qui fe forment par la révolution du point M autour de l'axe AB. Maintenant la terre étant à une diftance infinie en T, qu'on tire le diametre GH perpendiculaire à CT; & le plan perpendiculaire à la figure, qui le coupe par GH, féparera la moitié de la planete tournée vers la terre, de celle qui nous eft cachée: & partant nous ne verrons que la partie GE de la moitié éclairée, que le plan perpendiculaire à GH en retranche. C'eft donc de cette partie, qu'il faut déterminer l'éclat total, ou la fomme des éclats de tous fes élémens.

XXXIV. Soit l'angle ECG, ou celui qui lui eft égal $TCB = \alpha$, que fait la ligne CT avec la prolongée SC; & qu'on nomme $CQ = z$; d'où l'on aura $CP = z \sin \alpha$ & $PQ = z \cos \alpha$: donc $PM = \sqrt{(aa - zz \sin \alpha^2)}$; & l'éclat dans l'élément Mm fera $= \frac{ez \sin \alpha}{a}$. Qu'on conçoive que l'élément Mm foit tourné autour AC jusqu'à ce qu'il vienne rencontrer le plan GH, & il parcourra en haut & en bas un arc de cercle, dont le rayon fera $= PM$, & le cofinus $= \frac{PQ}{PM} = \frac{z \cos \alpha}{\sqrt{(aa - zz \sin \alpha^2)}}$. Et partant fi nous nommons Φ l'angle, dont le cofinus $= \frac{z \cos \alpha}{\sqrt{(aa - zz \sin \alpha^2)}}$, l'arc vifible

entier

entier du cercle, qui nait par la révolution des point M sera $= 2\,\Phi.\,PM$ $= 2\,\Phi\,\sqrt{(aa - zz\sin\alpha^2)}$. Donc, en y joignant l'élément Mm, l'éclat de la portion élémentaire sera $2\,\Phi\,\sqrt{(aa-zz\sin\alpha^2)}.\ Mm.\ \frac{ez\sin\alpha}{a}$. Or $Mm.\ PM = a.\,d.\,CP = a\,dz\sin\alpha$; & partant cet éclat sera $= 2\,e\,\Phi\,z\,dz\sin\alpha^2$, dont l'integrale pris en sorte qu'il évanoüisse en faisant $z = o$. & posant ensuite $z = a$, donnera l'éclat total cherché.

XXXV. Soit V l'éclat total que nous cherchons, & il sera $V = 2\,e\sin\alpha^2.\ \int\Phi\,z\,dz = e\,\Phi\,zz\sin\alpha^2 - e\sin\alpha^2\int zz\,d\Phi$ dont la partie integrée devenant $= o$ si $z = o$, posant $z = a$ évanouit, puisque l'angle Φ évanouit alors, de sorte que $V = - e\sin\alpha^2\int zz\,d\Phi$. Or puisque $\cos\Phi = \frac{z\cos\alpha}{\sqrt{(aa-zz\sin\alpha^2)}}$ il sera $d\Phi = \frac{-aadz\cos\alpha}{(aa-zz\sin\alpha^2)\sqrt{(aa-zz)}}$, doù l'on aura

$$V = eaa\sin\alpha^2\cos\alpha\int\frac{zz\,dz}{(aa-zz\sin\alpha^2)\sqrt{(aa-zz)}}$$

ou posant $z = av$, il sera

$$V = eaa\sin\alpha^2\cos\alpha\int\frac{vv\,dv}{(1-vv\sin\alpha^2)\sqrt{(1-vv)}}$$

où après l'integration on doit mettre $v = 1$, supposé qu'on ait pris l'integrale, en sorte qu'il évanoüisse dans le cas où $v = o$.

XXXVI. Soit $\int\frac{vv\,dv}{(1-vv\sin\alpha^2)\sqrt{(1-vv)}} = T$, & il sera

$$T = \int\frac{dv}{\sqrt{(1-vv)}}(vv + v^4\sin\alpha^2 + v^6\sin\alpha^4 + v^8\sin\alpha^6 + v^{10}\sin\alpha^8 \mp \&)$$

Or

Or mettant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, on fait qu'il sera dans le cas $v = 1$.

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int \frac{vvdv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{v^4\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{v^6\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\pi}{2}$$

&c.

D'où nous tirerons :

$$T = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1.3}{2.4}\sin\alpha^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\alpha^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin\alpha^6 + \&c.\right)$$

Or il est aisé de voir, que la somme de cette serie est $=$ $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha^2\cos\alpha}$, de sorte que $T = \frac{\pi(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha^2\cos\alpha}$ & partant $V = \frac{1}{2}\pi eaa(1-\cos\alpha)$.

XXXVII. Posant donc l'angle BCT que la ligne tirée à la terre fait avec le prolongement de la ligne tirée au Soleil $= \alpha$, l'éclat total qui éclaire la terre sera $= \frac{1}{2}\pi eaa(1-\cos\alpha) = \pi eaa \sin\frac{1}{2}\alpha^2$: & mettant pour e sa valeur $E \sin\frac{1}{2}\theta^2$, cet éclat sera $= \pi E aa \sin\frac{1}{2}\theta^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2$. Donc, si le demi-diametre apparent de cette planete vüe de la terre est posé $= \xi$, la lumiére dont cette planete est capable d'éclairer sur la terre, sera $= \pi E \sin\xi^2 . \sin\frac{1}{2}\theta^2 . \sin\frac{1}{2}\alpha^2$. Or si nous posons le demi-diametre apparent du Soleil vû de la terre $= \eta$, nous avons vû, que la lumiére dont le Soleil éclaire sur la terre est $= 2\pi E \sin\eta^2$. d'où l'on peut comparer ensemble la lumiére des planetes, en quelque situation qu'elles se trouvent à l'égard de la terre, avec la lumiére du Soleil.

 XXXVIII. Si

XXXVIII. Si nous voyons la moitié éclairée d'une planete toute entiére, l'angle α devient alors égal à deux droits, & partant $\sin \frac{1}{2} \alpha^2 = 1$. Donc la lumiére d'une planete, que nous voyons pleine sera $= \pi E \sin \xi^2 . \sin \frac{1}{2} \theta^2$, où θ marque le demi-diametre apparent du Soleil vû de la planete, & ξ le demi-diametre apparent de la même planete vuë de la terre. Donc, si le demi-diametre apparent du Soleil vû de la terre est $= \eta$, & qu'on pose la lumiére que nous fournit le Soleil $= L$, la lumiére, dont la planete nous éclairera, étant pleine sera $= \frac{L. \sin \xi^2 . \sin \frac{1}{2} \theta^2}{2 \sin \eta^2} = \frac{L \xi^2 \theta^2}{8 \eta^2}$, puisque les sinus de ces petits angles sont égaux aux angles mêmes. Or dans toute autre situation de la planete, où l'angle $BCT = \alpha$, la lumiére de la planete sera $= \frac{L \sin \xi^2 . \sin \frac{1}{2} \theta^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2}{2 \sin \eta^2}$.

Fig. III. XXXIX. Concevons donc que le Soleil soit en S, la terre en T & la planete en P, de sorte que α exprime l'angle externe TPp. Maintenant puisque η à θ comme $\frac{1}{TS}$ à $\frac{1}{PS}$, il sera $\frac{\sin \frac{1}{2} \theta^2}{\sin \eta^2} = \frac{TS^2}{4 PS^2}$: & posant le vray demi-diametre de la planete $= a$, il sera $\sin \xi = \frac{a}{PT}$: donc la lumiére dont la planete nous éclaire sera $= \frac{L a a. \ TS^2}{8. PT^2 . PS^2} \sin (\frac{1}{2} TPp)^2$ ou bien elle sera $= \frac{L a a. \ TS^2}{16 PT^2 . PS^2} (1 + \cos SPT)$. Or ayant $\cos SPT = \frac{PS^2 + PT^2 - ST^2}{2 PS. PT}$, cette lumiere sera $= \frac{L a a. \ TS^2 \ ((PS + PT)^2 - TS^2)}{32 PT^3 . PS^3}$ Ainsi la lumiere de la même planete diversement située par rapport à la terre sera comme $\frac{(PS + PT)^2 - TS^2}{PT^3 . PS^3}$; puisque $L. TS^2$ est constant.

XL. Ap-

XL. Appliquons ces formules à la Lune, & ſuppoſons d'abord qu'elle ſoit pleine, pour voir, combien notre calcul differera des concluſions, que Mr. *Bouguer* a tirées de ſes expériences. Or il eſt evident que dans ce calcul on pourra mettre $\eta = \theta$, & la lumiere de la Lune ſera $= \frac{1}{8}$ L ſin ξ^2, où ξ marque le demi-diametre apparent de la Lune, dont la grandeur moyenne eſt 15′, 35″ de ſorte que la lumiére de la Lune ſera $= \dfrac{1}{374000}$ L. ou la lumiére de la Lune pleine ſera 374000 fois plus petite que celle du Soleil, ce qui s'accorde aſſés bien avec les expériences de Mr. *Bouguer*, qui lui ont fait voir, que la lumiére de la Lune eſt environ 300000 fois plus petite, que celle du Soleil.

XLI. On ſera ſurpris, que mon calcul donne la lumiére de la Lune plus petite, que Mr. *Bouguer* ne l'a trouvée par ſes expériences, quoique j'aye ſuppoſé les particules de la Lune d'une telle nature, qu'elles obeïſſent parfaitement aux impreſſions des rayons; & il n'eſt pas probable que la matiere de la Lune ſe trouve à un tel dégré de perfection. Les taches noirâtres que nous obſervons dans la Lune, nous convainquent plutôt qu'il y a même de grandes contrées, qui ne rendent que fort foiblement les impreſſions, qu'elles reçoivent des rayons du Soleil: ce qui devroit rendre la lumiere de la Lune plus foible, que le calcul ne la donne. Mais il faut conſiderer que la ſurface de la Lune eſt couverte de grandes & fort hautes montagnes, qui en augmentant la ſurface lumineuſe, bien au delà que je l'ai ſuppoſée, doivent néceſſairement produire beaucoup plus de lumiére, que le calcul ne nous donne à connoitre; & c'eſt ſans doute la véritable raiſon, pourquoi la lumiére de la Lune ſe trouve plus forte, qu'elle ne devroit être ſelon le calcul.

XLII. Poſant donc pour les pleines Lunes la clarté de la Lune $= \dfrac{L}{300000}$, dont la valeur ne ſurpaſſe pas ſenſiblement celle qui

 vient

vient d'être trouvée par le calcul, où L marque la clarté du Soleil; lorsque la Lune paroit dichotome, ou qu'elle se trouve près de ses quadratures, sa clarté sera réduite à la moitié, & sera par conséquent $= \frac{L}{600000}$. Or en général la clarté de quelque phase de la Lune, que ce soit, sera toujours à la clarté de la pleine Lune, comme la plus grande largeur de la phase au diametre de la Lune: car le sinus verse de l'angle extérieur TPp ou $1 + \operatorname{cos} TPS$ est toujours proportionel à la largeur de la phase, laquelle devient égale au diametre apparent entier dans les pleines Lunes, & au demi-diametre apparent dans les quadratures.

XLIII. Puisque la vérité de ma formule tirée de la Theorie paroit asses confirmée par les expériences de la Lune, de sorte qu'on ne sauroit se flatter d'un plus grand accord de quelque Theorie que ce soit, avec les experiences, je m'en vai déterminer par la même Theorie la clarté des planetes principales, dont elles doivent frapper notre vuë. Soit donc premiérement P la planete de Saturne, dont le diametre est à celui du Soleil comme 79, 3 à 1000. Donc posant a pour le vray demi-diametre de Saturne, si nous le voyons à la distance du Soleil, son demi-diametre apparent seroit $\frac{a}{TS} = 0,0793.$ $\sin 16', 5'' = 76\frac{1}{2}''$, & partant $a = TS \sin 76\frac{1}{2}'' = 0,0003708.$ TS & $aa = \frac{TS^2}{7273100}$. Cette valeur étant substituée donnera la clarté de Saturne vû de la terre,

$$\frac{L}{116369600} \cdot \frac{TS^4}{PT^2 . PS^2} (1 + \operatorname{cos} SPT)$$

XLIV. Ne regardons ici que le mouvement moyen de Saturne, & selon les Tables Astronomiques on aura,

$$l\, TS = 5,000000 \quad \& \quad l\, PS = 5,979234$$
$$\text{ou } TS = 100000 \quad \& \quad PS = 953310$$

Donc

Donc, ſi Saturne ſe trouve en oppoſition du Soleil, où ſa clarté doit être la plus grande, il deviendra $PT = 853310$ & $\text{coſ}\, SPT = 1$; donc ſa lumiere ſera alors

$$\frac{L}{38502000000}$$

d'où il paroit que la lumiere de Saturne eſt environ 1000000 fois plus foible que la lumiere de la Lune. Or ſi Saturne paroit éloigné du Soleil de 90°, ou que l'angle T ſoit droit, la clarté de Saturne ſera

$$\frac{L}{59998000000}$$

& par conſéquent 1500000 fois plus foible que la lumiere de la pleine Lune. Cependant n'ayant pas eu égard à l'anneau de cette planete, il eſt clair que la lumiere de l'anneau doit conſidérablement augmenter celle de Saturne même.

XLV. Concevons maintenant la planete de Jupiter en P, dont le diametre eſt à celui du Soleil comme 100, 7 à 1000. On aura donc $\frac{a}{TS} = 0,1007$ ſin $16', 5'' = 97''$, & partant $a = 0,0004704 . TS$, & $aa = \frac{TS^2}{4519200}$. Donc la clarté apparente de Jupiter ſera $= \frac{L}{72307200} \cdot \frac{TS^4}{PT^2 . PS^2} (1 + \text{coſ}\, SPT)$, & ſelon les tables $TS = 100000$ & $PS = 519550$. Soit Jupiter en oppoſition du Soleil, & à cauſe de $PT = 419550$ & $\text{coſ}\, SPT = 1$, la clarté de Jupiter ſera $= \frac{L}{17178000000}$, & partant 46000 fois plus petite que celle de la pleine Lune: or elle ſurpaſſe $22\frac{1}{2}$ fois la clarté de Saturne dans ſes oppoſitions. Mais lorſque Jupiter eſt en quadrature avec le Soleil, ſa clarté ſe trouve $= \frac{L}{2556000000}$,

& partant elle sera à celle dans les oppositions comme 2 à 3. Je néglige ici les corrections, qui pourroient convenir aux figures elliptiques des orbites des planetes ; vù qu'on n'ose pas pretendre à une précision dans ces déterminations.

XLVI. Pour Mars, on aura le rapport de son diametre à celui du Soleil comme 4, 47 à 1000, & partant $\frac{a}{TS} = 0,00447$ sin $16', 5'' = 4\frac{1}{3}''$, donc $a = 0,0000210$. TS & $aa = \frac{TS^2}{2267500000}$ d'où résulte la clarté de Mars $= \frac{L}{36280000000} \cdot \frac{TS^4}{PT^2\,PS^2}$. $(1 + \cos SPT)$. Or les tables donnant $TS = 100000$ & $PS = 151950$, pour les oppositions de Mars on aura $PT = 51950$, & sa clarté apparente se trouvera $= \frac{L}{1130500000}$. Elle sera donc 30228 fois plus petite que la clarté de la pleine Lune, & devroit encore surpasser celle de Jupiter : & si cela n'arrive point, la cause en doit être attribuée à la nature de Mars, qui paroit telle, qu'il n'est pas parfaitement sensible aux impressions de la lumiere. Aussi voyons nous que cette planete ne répand que des rayons rougeatres ; donc puisqu'elle absorbe les autres rayons, il n'est pas surprenant que sa clarté soit plus foible, que le calcul ne montre. Pour les quadratures de Mars avec le Soleil, sa clarté se trouve $= \frac{L}{6254200000}$, où elle est par conséquent presque $5\frac{1}{2}$ fois plus petite que dans les oppositions.

XLVII. Pour les planetes inferieures, il est d'abord à remarquer, que leur plus grande clarté n'arrive, ni dans leur conjonction inferieure, ni dans la superieure ; puisqu'elles nous présentent dans la conjonction inferieure leur moitié obscure, & quoique dans la superieure leur moitié éclairée soit tournée vers nous, leur distance est

si

ſi grande, qu'à une plus petite diſtance la clarté peut devenir plus forte, quoique tout le disque apparent ne ſoit pas illuminé. Donc, pour trouver le lieu dans leur orbite, où leur clarté devient la plus grande, on n'aura qu'à rendre la formule $\frac{(PS + PT)^2 - TS^2}{PT^3 . PS^3}$ un *maximum*. Suppoſons que tant la planete que la terre décrive un cercle autour du Soleil, & nommant $ST = g$; $SP = h$, & $TP = y$, la valeur de la formule $\frac{(h+y)^2 - gg}{h^3 y^3}$ deviendra la plus grande, ſi $yy + 4hy + 3hh = 3gg$; ou $y = -2h + \sqrt{(3gg + hh)}$ & alors la plus grande clarté de la planete ſera $= \frac{Laagg((h+y)^2 - gg)}{32 h^3 y^3}$ $= \frac{Laagg(h+y)}{48 h^3 yy}$.

XLVIII. Pour que cette ſolution devienne poſſible il faut 1°. que y ſoit une quantité affirmative, ce qui arrive lorsque $g > h$, ou $h < g$, ce qui eſt le cas des planetes inferieures. 2°. il faut qu'il ſoit $g + h > y$ ou $g + 3h > \sqrt{(3gg + hh)}$, d'où l'on tire $h > \frac{1}{4}g$. Donc la ſolution n'aura pas lieu à moins que h au PS ne ſe trouve entre les limites g & $\frac{1}{4}g$ ou entre TS & $\frac{1}{4}$ TS. Car ſi $h = g$ ou PS $=$ TS, il devient $y = o$, ce qui marque la conjonction inferieure, & ſi $h > g$, qui eſt le cas des planetes ſuperieures, la plus grande clarté tombe dans les oppoſitions. Mais ſi $h = \frac{1}{4}g$, ou $g = 4h$, il reſulte $y = 5h = g + h$, & dans ce cas la plus grande clarté ſe trouvera dans les conjonctions ſuperieures, & la même choſe doit arriver, ſi $h < \frac{1}{4}g$. Donc, s'il y avoit une planete inferieure, dont la diſtance au Soleil fut moindre que le quart de la diſtance de la terre au Soleil, ſa clarté paroitroit la plus grande dans ſes conjonctions ſuperieures; en ſuppoſant que la lumiere du Soleil n'empêche point l'apparence de la planete.

XLIX Con-

XLIX. Confidérons à préfent la planete de Venus, & puisque fon diametre eft à celui du Soleil, comme 10, 75 à 1000, on aura $\frac{a}{TS} = 0,01075$ fin $16', 5'' = 10\frac{1}{3}''$: donc $a = TS$ fin $10\frac{1}{3}''$ $= 0,0000501\ TS$. Or pofant $TS = g = 100000$, les tables donnent $PS = h = 72327$; d'où nous trouvons pour la plus grande clarté $TP = y = 43046$, & la plus grande clarté étant $= \frac{L}{19123500000} \cdot \frac{g^4(h+y)}{h^3 yy}$ deviendra $= \frac{L}{1162200000}$. Elle fera donc 3107 fois plus petite que la lumiére de la pleine Lune; ou presque 15 fois plus brillante que celle de Jupiter dans fes oppofitions. Mais, fi Venus fe trouve près fes plus grandes élongations du Soleil où l'angle SPT devient droit, fa clarté apparente fera $\frac{L}{6374500000} \cdot \frac{g^4}{hh.PT^2}$ & $PT^2 = gg - hh$; donc la clarté apparente fera dans ce cas $= \frac{L}{1590200000}$, & partant 4250 fois plus petite que celle de la pleine Lune, & presque d'un quart plus petite que dans le cas de la plus grande clarté.

L. Mais voyons auffi en quel endroit de fon orbite Venus doit fe trouver, afin qu'elle nous paroiffe dans fon plus grand luftre; or ayant pour cet effet fin $\frac{1}{2}$ STP $= \sqrt{\frac{(h+g-y)(h-g+y)}{4gy}}$ on trouvera l'angle $STP = 39°, 43'$, où Venus paroitra alors éloignée du Soleil de l'angle $39°, 43'$, & l'angle au Soleil deviendra $TSP = 22°, 21'$, d'où l'angle SPT fera $= 117°, 56'$. Donc, quand Venus nous paroit la plus brillante, elle nous eft plus proche, que lorsqu'elle eft dans fes plus grandes élongations du Soleil; & alors la partie éclairée, que nous voyons, fera plus petite que la moitié. Car la largeur de la partie illuminée fera au diametre apparent de Venus, comme le finus ſinus verſe de $62°, 4'$ au double du ſinus total, ou comme ſin $(31°, 2')^2$ à 1, c'eſt à dire comme 266 à 1000 ou comme 1 à 4 à peu prés. Or le diametre apparent entier de Venus ſera alors $48''$.

LI. Pour Mercure on ſe ſervira de la méme methode. Son diametre étant à celui du Soleil comme 4, 25 à 1000, on aura $\frac{a}{TS} = 0,00425$ ſin $16', 5'' = 4,825''$, donc $a = 0,00002446$. TS. Or il eſt $TS = 100000$, $PS = 38336$ d'où $y = 100728$, & partant ſa plus grande clarté $\frac{L}{80229000000} \cdot \frac{g^4 (h+y)}{h^3\, yy} = \frac{L}{3297900000}$, qui eſt par conſéquent environ 8818 fois plus petite que celle de la pleine Lune, & 5 fois plus brillante que Jupiter dans ſes oppoſitions; or cette clarté ſera à celle de Venus, lorsqu'elle eſt la plus grande, comme 1 à 3 à peu près. Mais puisque Mercure n'eſt alors éloigné du Soleil que de $22°, 2'$; & qu'il n'eſt pas viſible par conſéquent que près de l'horizon dans le crepuſcule, il n'eſt pas ſurprenant, que la clarté viſible de Mercure réponde ſi peu au calcul. Alors l'angle SPT ſe trouve $= 78°, 7'$ & l'angle $PST = 79°, 51'$. Cette poſition tombe à peu près dans la plus grande élongation de Mercure au Soleil, & partant je ne chercherai point ſa clarté dans ſes plus grandes élongations.

LII. Ayant ainſi déterminé la lumiére apparente des planetes principales & de la Lune, je dirai encore un mot ſur les ſatellites de Jupiter & de Saturne. Si l'on ſavoit le rapport des diametres de ces ſatellites au diametre du Soleil, ou à celui de leur principale, il ſeroit aiſé d'en déduire la clarté, qui ſeroit à celle de la planete principale en raiſon quarrée de leurs diametres. Ainſi, ſi le diametre d'un ſatellite étoit la dixième partie de celui de ſa principale, ſa lumiére ſeroit 100 fois plus foible. Donc, puisque la clarté de Jupiter dans ſes oppoſitions eſt $= \frac{L}{17178000000}$, ſi nous ſuppoſons, que le diametre d'un de ſes ſatellites étoit à celui de Jupiter comme 1 à 10, ou que ce ſatellite fut à peu près égal à la terre, ſa lumiére feroit $= \frac{L}{1717800000000}$ ou 100 fois plus foible que la lumiére de Jupiter, & partant environ 4 fois plus foible que la lumiére de Saturne.

LIII. Or une étoile dont la lumiére ne feroit que 4 fois plus foible que celle de Saturne, devroit encore être viſible à la vuë ſimple. Donc, puisque les ſatellites ne ſont viſibles qu'à l'aide des Lunettes, il s'enſuit, ou que les ſatellites de Jupiter ſont beaucoup plus petits que la Terre; ou que leur matière ne ſoit pas propre à devenir lumineuſe. Cette dernière raiſon paroit ſurtout fort probable, puisqu'on remarque que les ſatellites tant de Jupiter que de Saturne ſont remplis de taches obſcures, qui ſont la cauſe que nous ne voyons qu'une partie de leur corps. Peut être-auſſi que la lumiére ſi proche de Jupiter méme nous dérobe les ſatellites, ou qu'elle en empéche l'apparition. Or pour les ſatellites de Saturne, en les ſuppoſant auſſi égaux à la Terre, leur lumiére feroit $22\frac{1}{2}$ plus foible que celle des ſatellites de Jupiter; ce qui eſt ſans doute la raiſon, pourquoi il n'eſt pas poſſible de voir ces ſatellites que par le moyen de fort excellentes Lunettes.

LIV. Ces conſidérations nous peuvent conduire à eſtimer en quelque manière le diametre apparent des étoiles fixes en comparant leur lumiére à celle des planetes. Car ſoit ω le diametre apparent d'une étoile fixe, & ſa clarté apparente $= \frac{L}{n}$; ſi nous ſuppoſons que ſon éclat eſt égal à celui du Soleil, & que les rayons ne perdent rien de leur force en paſſant par l'éther, la lumiére apparente de cette étoile fixe doit être à la lumiére du Soleil L, comme le quarré de ſon

dia-

diametre apparent $\omega\omega$ au quarré du diametre apparent du Soleil. On aura donc $\frac{L}{n} : L = \omega\omega : (32', 10'')^2$, donc $\omega = \frac{32', 10''}{\sqrt{n}} = \frac{1930''}{\sqrt{n}}$. Donc, ſi la clarté d'une étoile fixe étoit égale à la plus grande clarté de Jupiter, à cauſe de $n = 1717800000$ & $\sqrt{n} = 131000$, ſon diametre apparent feroit $= \frac{193''}{13100}$, ou d'une tierce à peu près ; & ſi la clarté d'une étoile fixe étoit égale à la plus grande clarté de Saturne, à cauſe de $n = 385020000000$ & $\sqrt{n} = 620500$, ſon diametre apparent feroit $= \frac{193''}{62050} = 11^{\mathrm{IV}}$.

LV. Dans cette hypotheſe ſi nous ſavions la grandeur d'une étoile fixe, nous en pourrions conclure ſa vraie diſtance du Soleil. Poſons qu'une étoile fixe ſoit égale au Soleil en grandeur auſſi bien qu'en éclat, & que ſa lumiére apparente ſoit égale à celle de Jupiter dans ſes oppoſitions, alors ſa diſtance ſera à celle du Soleil à la Terre comme $\sqrt{n}$ à 1, *c. à. d.* comme 131000 à 1 : donc ſa parallaxe à à l'égard de l'orbite de la Terre feroit $= \frac{1}{65500} = 3''$. Or ſi la lumiére de cette étoile n'étoit égale qu'à la clarté de Saturne, alors ſa diſtance au Soleil feroit à la diſtance de la Terre au Soleil comme 620500 à 1, & ſa parallaxe annuelle ne vaudroit que $\frac{3}{5}$ ſecondes ou 36 tierces. Comme on n'a pu jusqu'ici découvrir aucune parallaxe dans les étoiles fixes, c'eſt une marque qu'elle doit être extrémement petite; ce qui ſert à confirmer mon hypotheſe, que les rayons de lumiére ne perdent rien dans leur paſſage par l'éther.

LVI. Pour expoſer plus diſtinctement aux yeux les dégrés de clarté, ſous lesquels les planetes nous doivent paroitre ſuivant ma

 Théo-

Théorie, je poſerai la lumiére du Soleil, que j'ai marqué jusqu'ici par L, égale à un Billion: & on aura

I. La lumiére du Soleil $=$	1000000000000
II. La lumiére de la pleine Lune $=$	2675000
III. La plus grande lumiére de ☿ $=$	303
IV. La plus grande lumiére de ♀ $=$	860
V. La plus grande lumiére de ♂ $=$	88
VI. La plus grande lumiére de ♃ $=$	58
VII. La plus grande lumiére de ♄ $=$	3

Pour les étoiles fixes de la premiére grandeur, il eſt ſeur que leur lumiére eſt moindre que celle de Jupiter dans ſes oppoſitions; donc on ne ſe trompera peut-être guéres en ſuppoſant la lumiére des étoiles de la premiére grandeur $= 40$, de la ſeconde grandeur $= 10$, de la troiſiéme $= 4\frac{1}{2}$, de la quatriéme $= 2\frac{1}{2}$, de la cinquiéme $= 1\frac{3}{5}$, de la ſixiéme $= 1\frac{1}{5}$ &c., quoique les Aſtronomes ne ſoient pas d'accord, à quel dégré il faut ranger chaque étoile fixe.

LVII. Les expériences de Mr. *Bouguer* nous fourniſſent auſſi le moyen de comparer la lumiére des étoiles avec celle d'une bougie, telle que Mr. *Bouguer* a emploiée dans ſes expériences. Or ayant vu que la lumiére du Soleil étoit à celle d'une bougie éloignée de 16 pouces, comme 11664 à 1; le Soleil étant à la hauteur de 30 dégré; il s'enſuit, que poſant la lumiére du Soleil $= 1000000000000$, celle d'une bougie placée à la diſtance de 16 pouces ſera $= 85734000$. Donc, puisque la clarté d'une bougie décroit en raiſon doublée des diſtances;

La

La clarté d'une Bougie	
à la diſtance d'un pied ſera	152416000
à la diſtance de 2 pieds . . .	38104000
à la diſtance de 3 pieds . .	16935111
à la diſtance de 4 pieds . . .	9526000
à la diſtance de 5 pieds . . .	6096640
à la diſtance de 10 pieds . . .	1524160
à la diſtance de 20 pieds . . .	381040
à la diſtance de 30 pieds . . .	169351
à la diſtance de 40 pieds . . .	95260
à la diſtance de 50 pieds . . .	60966
à la diſtance de 100 pieds . . .	15242
à la diſtance de 200 pieds . . .	3810
à la diſtance de 300 pieds . . .	1694
à la diſtance de 400 pieds . . .	952
à la diſtance de 500 pieds . . .	609
à la diſtance de 1000 pieds . . .	152
à la diſtance de 2000 pieds . . .	38
à la diſtance de 3000 pieds . . .	17
à la diſtance de 4000 pieds	9
à la diſtance de 5000 pieds	6
à la diſtance de 6000 pieds	4
à la diſtance de 7000 pieds	3
à la diſtance de 10000 pieds	$1\frac{1}{2}$

LVIII. De là nous pourrons tirer les conſéquences ſuivantes: 1°. Pour produire une lumiére auſſi brillante que celle du Soleil, il faudroit placer à la diſtance d'un pied 6560 bougies, &

quatre fois autant à la distance de deux pieds; d'où l'on voit l'impossibilité d'éclairer par des bougies autant que par le Soleil. Car si l'on allumoit dans une sale 10000 bougies, à la distance de 10 pieds, la lumiére ne seroit que 15241600000, & partant encore 65 fois plus foible que celle du Soleil.

2°. Pour produire une lumiére égale à celle de la pleine Lune, par une seule bougie, on n'a qu'à la placer à une distance de $7\frac{1}{2}$ pieds: & quatre bougies éloignées de 15 pieds produiront le même effet.

3°. Une bougie éclairera autant, que Venus, lorsqu'elle paroit la plus brillante, si elle est placée à une distance de 421 pieds, ou une bougie éloignée de 421 pieds nous paroitra de nuit aussi brillante que Venus.

4°. Et une bougie allumée à la distance de 1620 pieds nous paroitra avoir autant de lumiére que Jupiter, lorsqu'il est en opposition avec le Soleil.

5°. Ces réfléxions pourront être employées à juger, s'il est possible de voir une étoile en plein jour: car on n'a qu'à chercher la distance d'une bougie, où elle doit paroitre aussi brillante que l'étoile proposée; & on essayera si l'on s'appercevra en plein jour de la bougie allumée à la distance trouvée. Ainsi si l'on peut découvrir en plein jour une bougie à la distance de 421 pieds, ce sera une marque qu'on pourra aussi voir Venus en plein jour, lorsque sa lumiére est la plus grande.

RECHER-