1752

Découverte d'un nouveau principe de mécanique

Leonhard Euler

DECOUVERTE
D'UN NOUVEAU PRINCIPE DE MECANIQUE,

PAR M. EULER.

I.

Un corps eſt appellé ſolide, dont l'intérieur n'eſt aſſujetti à aucun changement, ou dont toutes les parties conſervent conſtamment la même ſituation entr'elles, quelque mouvement que puiſſe avoir le corps entier. Nonobſtant cette ferme & invariable liaiſon des parties, un corps ſolide peut recevoir une infinité de mouvemens differens, dont la determination & les loix, qui s'y obſervent, ſont l'objet de la Mecanique, ou Dynamique: & c'eſt par là, que cette ſcience ſe diſtingue de l'Hydrodynamique, ou Hydraulique, qui s'occupe dans la recherche du mouvement des corps fluides, dont toutes les parties ſont tellement dégagées les unes des autres, que chacune peut avoir un mouvement à part. Entre ces deux eſpeces de corps on peut conſtituer une moyenne, qui renferme les corps fléxibles, dont la figure eſt ſuſceptible d'une infinité de changemens: mais la conſidèration du mouvement de ces corps ſe reduit aiſément à la Mecanique, & peut être dévelopée par les mêmes principes, de ſorte que dans cette Science il ne s'agit que des loix du mouvement, qui regardent les corps ſolides.

II. Entre l'infinité des mouvemens, dont un corps solide est susceptible, le premier, qu'il faut considèrer, est celui, où toutes les parties demeurent constamment dirigées vers les mêmes points de l'espace absolu. C'est à dire, si nous concevons une ligne droite tirée par deux points quelconques du corps, cette ligne conservera toujours la même direction, ou ce qui revient au même, elle demeurera perpétuellement parallele à elle-même. Un tel mouvement est nommé purement progressif, dont la propriété consiste en ce qu'à chaque instant toutes les parties du corps se meuvent avec des vitesses egales selon la même direction. Ainsi lorsqu'un corps se meut d'un mouvement purement progressif, il suffit de savoir le mouvement d'un seul de ses élémens, c'est à dire, le chemin qu'il parcourt avec la vitesse à chaque endroit, pour connoitre le mouvement du corps tout entier.

III. Or un corps, quoique solide, peut recevoir une infinité d'autres mouvemens; car il peut arriver qu'un point du corps demeurant immobile, tout le corps tourne autour de ce point; & il est clair que dans ce cas la vitesse des differentes parties de ce corps ne sera plus la même, & que la direction du mouvement sera differente dans les differentes parties du corps. Neantmoins dès qu'on sait le mouvement d'un seul point de ce corps, pendant qu'un autre point demeure en repos, on sera en état de determiner le mouvement de tous les autres points du corps pour le même instant; car, puisque le corps est solide, il faut, que tous ses points conservent toujours la même situation par raport à ces deux, dont l'un est en repos, & le mouvement de l'autre connu. Ce mouvement de rotation se peut aussi joindre au mouvement purement progressif, d'où résulte un mouvement mixte, tel que nous observons dans la Terre, dont toutes les parties se meuvent en sorte que le mouvement de chacune est different du mouvement de toutes les autres, tant par raport à la vitesse, qu'à l'egard de la direction.

IV. Mais

IV. Mais comme le mouvement de rotation peut varier à l'infini, on n'a considéré jusqu'ici dans la Mecanique qu'une seule espece; faute de principes suffisans pour ramener les autres au calcul. Cette espece renferme les cas, où un corps tourne autour d'un axe, ou immobile, ou qui demeure constamment parallele à soi-même, pendant que le corps se meut d'un mouvement progressif. Car dans ce dernier cas on peut décomposer le mouvement du corps en deux, dont l'un est purement progressif, & l'autre se fait autour d'un axe fixe, conservant toujours la même direction. C'est ainsi qu'on se représente le mouvement de la Terre, en le décomposant dans le mouvement annuel, qu'on regarde comme purement progressif, & dans le mouvement diurne, qui se fait autour de l'axe de la Terre, entant qu'on regarde cet axe comme constamment dirigé vers les mêmes points du Ciel; faisant abstraction tant de la précession des équinoxes, que de la nutation de l'axe de la Terre.

V. Quelque composé que soit le mouvement d'un corps solide, on le peut toujours décomposer en un mouvement progressif & en un mouvement de rotation. Le premier s'estime par le mouvement du centre de gravité du corps, & il est toujours permis de considérer ce mouvement séparément & indépendamment de l'autre mouvement de rotation; & cette circonstance nous fournit l'avantage, que nous pouvons toujours réciproquement considérer le mouvement de rotation indépendamment du mouvement progressif, s'il y en a; ou on peut entreprendre la recherche du mouvement de rotation, tout comme si le corps n'avoit aucun mouvement progressif. Pour cet effet on n'a qu'à imprimer dans la pensée à l'espace, où le corps se trouve, un mouvement progressif égal & contraire au mouvement du centre de gravité du corps, & par ce moyen on obtiendra le cas, où le centre de gravité du corps demeure en repos, quelque mouvement de rotation que puisse avoir le corps.

VI. Donc, quelque mouvement qui ait été imprimé d'abord à un corps solide, & de quelques forces qu'il soit sollicité ensuite, pour déterminer son mouvement à chaque instant, on commencera par conſidèrer le corps, comme ſi toute ſa maſſe étoit réünie dans ſon centre de gravité, & alors on déterminera par les principes connus de la Mecanique le mouvement de ce point produit par les forces ſollicitantes; ce ſera le mouvement progreſſif du corps. Aprés cela on mettra ce mouvement progreſſif à part, & on conſidèrera ce même corps, comme ſi ſon centre de gravité étoit immobile, pour déterminer le mouvement de rotation, ayant égard tant au mouvement imprimé au commencement, qu'aux forces dont il doit être altéré dans la ſuite. Et quand on ſera venu à bout de cette recherche, en combinant enſemble ces deux mouvemens trouvés ſeparement, on ſera en état d'aſſigner pour chaque inſtant le vrai mouvement dont le corps ſera porté.

VII. Suppoſant donc le centre de gravité d'un corps ſolide quelconque en repos, ce corps ſera néantmoins ſuſceptible d'une infinité de mouvemens differens. Or je démontrerai dans la ſuite, que, quel que ſoit le mouvement d'un tel corps, ce ſera pour chaque inſtant non ſeulement le centre de gravité qui demeure en repos, mais il y aura auſſi toujours une infinité de points ſitués dans une ligne droite, qui paſſe par le centre de gravité, dont tous ſe trouveront également ſans mouvement. C'eſt à dire, quel que ſoit le mouvement du corps, il y aura en chaque inſtant un mouvement de rotation, qui ſe fait autour d'un axe, qui paſſe par le centre de gravité: & toute la diverſité qui pourra avoir lieu dans ce mouvement, dépendra, outre la diverſité de viteſſe, de la variabilité de cet axe, autour duquel le corps tourne à chaque inſtant; ou bien la queſtion revient à ce qu'on cherche, ſi le corps tournera conſtamment autour du même axe, qui ſeroit par conſéquent immobile, ou ſi l'axe de rotation changera lui même de ſituation, de ſorte que le corps tourne ſucceſſivement autour de diverſes lignes, qui paſſent par ſon centre de gravité.

VIII. Pour faire voir maintenant combien on eſt avancé jusqu'ici dans la détermination de ces mouvemens de rotation, dont un corps ſolide eſt ſuſceptible, je remarque que les principes de Mecani-

que

que, qui ont été établis jusqu'à présent, ne sont suffisans, que pour le cas, où le mouvement de rotation se fait continuellement autour du même axe. Donc, puisqu'on peut nommer les extrémités de cet axe les poles du corps, c'est le cas où les poles du corps demeurent constamment aussi bien en repos, que le centre de gravité. Or dès que l'axe de rotation ne demeure plus le même, & que les poles, autour desquels le corps tourne, changent eux-mêmes, alors les principes de Mecanique connus jusqu'ici ne sont plus suffisans à déterminer ce mouvement. Il s'agit donc de trouver & d'établir de nouveaux principes, qui soient propres à ce dessein; & cette recherche sera le sujet de ce Mémoire, dont je suis enfin venu à bout après plusieurs essais inutiles, que j'ai fait depuis long-tems.

IX. Mais, avant que d'entrer dans cette recherche, il sera à propos de déterminer plus exactement les cas, où un corps solide peut tourner autour d'un axe immobile passant par son centre de gravité, afin qu'on puisse mieux juger, en quelles occasions les principes connus de Mecanique peuvent être emploiés avec succès: & de là on connoitra en même tems, que dans tous les autres cas ces principes ne seront plus suffisans, mais qu'il faut avoir recours à ces principes nouveaux, dont j'entreprends ici la recherche. Or, pour juger si un corps peut tourner autour d'un axe immobile, ou non? il faut avoir égard tant à la constitution du corps même, qu'aux forces dont il est sollicité. Car, quand même il n'y a point de forces, qui agissent sur le corps, dès qu'il commence à tourner autour de quelque axe, chaque particule sera poussée par sa force centrifuge; & ce n'est que dans le cas, où toutes ces forces centrifuges se détruisent mutuellement, que le mouvement autour de cet axe immobile pourra subsister.

X. Soit donc un corps solide quelconque, qui tourne librement *Fig.*
autour d'un axe immobile A*a*, qui passe par son centre de gravité O. Je considérerai cet axe A*a* comme perpendiculaire au plan de la planche, dans lequel soit le centre de gravité O; & dans ce plan je conçois

 deux

deux autres axes BOb & COc, normales tant entr'eux qu'au premier axe AOa: & c'eſt par rapport à ces trois axes, que je déterminerai la poſition de chaque élément du corps pour un inſtant quelconque. Car il eſt clair, que ces deux autres axes BOb & COc, entant qu'ils traverſent le corps, tourneront auſſi avec le corps autour du premier axe AOa, qui eſt l'axe de rotation, & qui demeure immobile par hypotheſe. Donc le point C de l'axe OC ſe mouvra en vertu du mouvement rotatoire par un arc de cercle $C\gamma$, dont le centre eſt en O ſur le plan BOC: & ſi nous poſons la diſtance $OC = f$ & la viteſſe du point C duë à la hauteur v, de ſorte que la viteſſe même ſera exprimée par $\sqrt{v}$, la viteſſe de tout autre point du corps ſera partout à ſa diſtance de l'axe AOa comme $\sqrt{v}$ à f: ou bien $\frac{\sqrt{v}}{f}$ marquera partout ce qu'on nomme la viteſſe angulaire, ou la viteſſe de rotation.

XI. Cela poſé, ſoit Z un élément quelconque du corps, dont la maſſe ſoit indiquée par dM, la maſſe du corps entier étant $= M$; qu'on tire de ce point Z ſur le plan BOC la perpendiculaire ZY, qui ſera parallele à l'axe de rotation AOa, & du point Y à OC la perpendiculaire YX: qu'on nomme de plus $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, qui ſeront les trois coordonnées orthogonales, par lesquelles le lieu du point Z eſt déterminé. Soit la droite ZY perpendiculaire à l'axe de rotation AO, & elle ſera parallele & égale à la droite YO, & partant il ſera auſſi $OV = YZ = z$. Donc la diſtance du point Z à l'axe de rotation ſera $ZV = OY = \sqrt{(xx+yy)}$, d'où la viteſſe du point Z, dont il tournera autour de l'axe AO, ſera à ſa diſtance $\sqrt{(xx+yy)}$ comme $\sqrt{v}$ eſt à f. Par conſéquent la viteſſe du point Z ſera $= \frac{\sqrt{v(xx+yy)}}{f}$, & la hauteur duë à cette viteſſe $= \frac{v(xx+yy)}{ff}$.

XII. De

XII. De là il s'ensuit que la force centrifuge de l'elément Z $= dM$, sera $= \frac{2v(xx+yy)}{ff} \cdot \frac{dM}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{2vdM}{ff}\sqrt{(xx+yy)}$. où dM marque le poids, que cet élément auroit aux environs de la terre. C'est donc de cette force que l'elément Z tachera de s'eloigner de l'axe AO selon la direction VZ, & partant l'effet de cette force sera le méme, que si l'axe de rotation étoit sollicité au point V selon la direction VZ par une force $= \frac{2vdM}{ff}\sqrt{(xx+yy)}$. Donc, puisqu'il résulte de chaque élément du corps une force semblable qui agit sur l'axe de rotation AOa, pour qu'il demeure néantmoins immobile, il faut que toutes ces forces se détruisent mutuellement. Car à moins que cela n'arrive, il est clair que l'axe de rotation ne sauroit demeurer immobile, mais comme il est supposé libre, il cederoit à la force résultante; & tomberoit dans le cas, qui ne sauroit plus etre développé par les principes deja établis de la Mecanique.

XIII. Décomposons chacune de ces forces VZ en deux autres dont les directions soient paralleles aux axes OC & OB, & puisque VZ est parallele & egale à OY $= \sqrt{(xx+yy)}$, la force qui agira sur l'axe de rotation OA en V selon la direction parallele à OC sera $= \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} \cdot \frac{2vdM}{ff}\sqrt{(xx+yy)} = \frac{2vxdM}{ff}$ & la force selon la direction parallele à OB sera $= \frac{2vydM}{ff}$. Ayant donc réduit toutes les forces centrifuges à deux especes, dont l'une agit sur l'axe de rotation en des directions paralleles a OC & l'autre en des directions paralleles à OB, pour que l'axe de rotation n'en soit point altéré, il faut que toutes les forces de chaque espece se détruisent mutuellement. Premiérement donc, il faut que la somme de toutes les forces de l'une & de l'autre espece évanouïsse, ce qui donne $\frac{\int 2vxdM}{ff} = o$

ou

ou $\frac{2v}{ff}\int x\,d\,M = o$ & $\frac{2v}{ff}\int y\,d\,M = o$: ou bien il faut qu'il ſoit $\int x\,d\,M = o$ & $\int y\,d\,M = o$. Or cette condition ſe trouve remplie dès que nous ſuppoſons, que l'axe de rotation A O *a* paſſe par le centre de gravité du corps O.

XIV. Mais cette ſeule condition ne ſuffit pas pour maintenir l'axe de rotation A O *a* en repos, il faut outre cela que tous les momens de toutes les forces de chaque eſpece, ſe détruiſent mutuellement. Car la premiére condition ne délivre l'axe de rotation que du mouvement progreſſif, & cette ſeconde condition eſt requiſe pour empêcher, qu'il ne s'incline de quelque côté vers le plan BCO. Or le moment des forces $\frac{2v\,x\,d\,M}{ff}$, qui agiſſent ſur le point V de l'axe, étant réduit au centre de gravité O ſera $= \frac{2v\,x\,z\,d\,M}{ff}$, & le moment de chaque force de l'autre eſpece ſera $= \frac{2v\,y\,z\,d\,M}{ff}$. Donc cette ſeconde condition qui doit empecher l'inclinaiſon de l'axe de rotation, exige qu'il ſoit tant $\frac{\int 2v\,x\,z\,d\,M}{ff} = o$ que $\frac{\int 2v\,y\,z\,d\,M}{ff} = o$, ou puiſque pour l'inſtant préſent $\frac{2v}{ff}$ eſt une quantité conſtante, il faut qu'il ſoit $\int x\,z\,d\,M = o$, & $\int y\,z\,d\,M = o$.

XV. Donc, pour qu'un corps ſolide puiſſe tourner librement autour d'un axe A O *a* immobile, il faut premiérement que cet axe paſſe par le centre de gravité O du corps, & outre cela il eſt néceſſaire, que la matiere, dont le corps eſt compoſé, ſoit tellement diſpoſée autour de cet axe, qu'il ſoit tant $\int x\,y\,d\,M = o$ que $\int y\,z\,d\,M = o$. On voit bien que cette derniere condition peut ne pas avoir lieu, quoique l'axe de rotation paſſe par le centre de gravité; & partant dans ce cas, il il ſera impoſſible de déterminer par les principes connus de Mecanique la continuation du mouvement, après que le corps aura reçu un mouvement quelconque autour d'un tel axe. Car alors dès le commencement l'axe de rotation s'inclinera, & le corps tournera à chaque inſtant autour d'un autre axe, ce qui rendra impoſſible l'application des principes, dont on ſe ſert ordinairement dans la détermination des mouvemens de rotation.

XVI. Mais ſi l'axe de rotation paſſe non ſeulement par le centre de gravité du corps, mais qu'il y ait auſſi tant $\int xz\,dM = o$ que $\int yz\,dM = o$, alors quelque mouvement de rotation que le corps puiſſe avoir reçu autour de cet axe, ce mouvement ſe continuera uniformément, ſans que l'axe ſouffre le moindre changement; ou le corps tournera autour de cet axe immobile d'un mouvement uniforme, à moins que le corps ne ſoit ſollicité par quelque force externe. Or il peut arriver que des forces externes agiſſent ſur le corps ſans troubler la poſition de l'axe; c'eſt lorsque la moyenne direction de ces forces tombe dans le plan BOC, perpendiculaire à l'axe de rotation dans le centre de gravité méme du corps O. Car alors ces forces n'auront point de moment ni par rapport à l'axe BO ni à CO, & partant toute la force ſera emploiée ou à accelerer ou à retarder le mouvement de rotation autour de l'axe AO, ſans altèrer l'axe méme. Et c'eſt ce cas, où l'on peut déterminer ces changemens cauſés par des forces externes à l'aide des principes connus de Mecanique.

XVII. Or ſi la moyenne direction des forces, qui agiſſent ſur le corps, ne ſe trouve pas dans le plan BOC, l'axe de rotation AO*a* ne pourra pas demeurer immobile, mais il s'inclinera vers le côté où il ſera forcé par le moment de ces forces. Ainſi, quoique l'axe ait les propriétés, qui viennent d'etre expliquées, les forces le rendront mobile, & ſans la découverte de nouveaux principes de Mecanique on ne ſera pas en état de développer ce cas, où l'axe de rotation ne ſauroit demeurer immobile. Donc toutes les fois que les conditions marquées ne ſe rencontrent pas dans l'axe de rotation, ou que les

 forces

forces follicitantes renferment un moment pour incliner l'axe de rotation, ou que l'un & l'autre arrive à la fois, il faut recourir à ces nouveaux principes pour déterminer les changemens, qui feront caufés tant dans le mouvement de rotation, que dans la pofition de l'axe, autour duquel le corps tournera à chaque inftant. Or pendant tous ces changemens on peut toujours fuppofer, que le centre de gravité du corps demeure immobile.

XVIII. Quoique les principes dont il s'agit ici foient nouveaux, entant qu'ils ne font pas encore connus ou étalés par les Auteurs, qui ont traité la Mecanique, on comprend néantmoins, que le fondement de ces principes ne fauroit être nouveau, mais qu'il eft abfolument nécesfaire, que ces principes foient déduits des premiers principes, ou plutôt des axiomes, fur lesquels toute la doctrine du mouvement eft établie. Ces axiomes fe rapportent à des corps infiniment petits, ou tels, qui ne foient fufceptibles d'autre mouvement, que de progresfif; & c'eft de là que tous les autres principes du mouvement doivent être déduits, tant ceux qui fervent à déterminer les mouvemens des corps folides que des fluides: tous ces autres principes dérivés n'étant que des applications des axiomes felon les diverfes manieres, dont les corps font compofés des élémens, & felon la diverfité du mouvement, dont toutes les parties du corps font fufceptibles.

XIX. On trouve ordinairement plufieurs tels principes, qui femblent devoir être mis au rang des axiomes de la Mecanique, puisqu'ils fe rapportent aux mouvement des corps infiniment petits; or je remarque que tous ces principes fe réduifent à un feul, qu'on peut regarder comme l'unique fondement de toute la Mecanique & des autres Sciences, qui traitent du mouvement des corps quelconques. Et c'eft fur ce feul principe, que doivent être établis tous les autres principes, tant ceux qui font déja reçus dans la Mecanique & l'Hydraulique, & dont on fe fert actuellement pour déterminer le mouvement des corps folides & fluides; que ceux aufli qui ne font pas encore connus, & dont nous avons befoin pour développer tant les cas marqués

qués cy-dessus des corps solides, que plusieurs autres qui se trouvent dans les corps fluides. Car dans tous ces cas il ne s'agit que d'y appliquer adroitement ce principe fondamental, dont je viens de parler, & que je m'en vai expliquer plus soigneusement.

EXPLICATION DU PRINCIPE GENERAL ET FONDAMENTAL DE TOUTE LA MECANIQUE.

XX. Soit un corps infiniment petit, ou dont toute la masse soit réünie dans un seul point, cette masse étant $= M$; que ce corps ait reçu un mouvement quelconque, & qu'il soit sollicité par des forces quelconques. Pour déterminer le mouvement de ce corps, on n'a qu'à avoir égard à l'éloignement de ce corps d'un plan quelconque fixe & immobile; soit à l'instant présent la distance du corps à ce plan $= x$; qu'on décompose toutes les forces qui agissent sur le corps, selon des directions, qui soient ou paralleles au plan, ou perpendiculaires, & soit P la force qui résulte de cette composition selon la direction perpendiculaire au plan, & qui tachera par conséquent ou à éloigner ou à rapprocher le corps du plan. Aprés l'elément du tems dt, soit $x + dx$ la distance du corps au plan, & prenant cet élément dt pour constant, il sera $2 M ddx = \pm P dt^2$, selon que la force P tend ou à eloigner ou à approcher le corps du plan. Et c'est cette formule seule, qui renferme tous les principes de la Mecanique.

XXI. Pour mieux comprendre la force de cette formule, il faut expliquer à quelles unités se rapportent les diverses quantités M, P, x & t, qui s'y trouvent. Or d'abord il est à remarquer, que M marquant la masse du corps, exprime en même tems le poids que ce corps auroit aux environs de la superficie de la terre; de sorte que la force P étant aussi réduite à celle d'un poids, les lettres M & P contiennent des quantités homogenes. Ensuite la vitesse du corps dont il s'eloigne du plan étant comme $\frac{dx}{dt}$; si nous supposons, que cette viteſſe ſoit egale à celle qu'un corps grave acquiert en tombant de la hauteur v, il faut prendre $\frac{dx^2}{dt^2} = v$, ou l'elément du tems ſera $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$; d'où l'on connoit le rapport entre le tems t & l'eſpace x.

XXII. Comme cette formule ne détermine que l'eloignement ou l'approchement du corps par rapport à un plan fixe quelconque, pour trouver le vrai lieu du corps à chaque inſtant, on n'aura qu'à le rapporter en méme tems à trois plans fixes, qui ſoient perpendiculaires entr'eux. Donc, comme x marque la diſtance du corps à un de ces plans, ſoient y & z ſes diſtances aux deux autres plans : & aprés avoir décompoſé toutes les forces qui agiſſent ſur le corps, ſuivant des directions perpendiculaires à ces trois plans, ſoit P la force perpendiculaire qui en réſulte ſur le premier, Q ſur le ſecond, & R ſur le troiſième. Suppoſons que toutes ces forces tendent à eloigner le corps de ces trois plans ; car en cas qu'elles tendent à le rapprocher, on n'auroit qu'à faire les forces negatives. Cela poſé, le mouvement du corps ſera contenu dans les trois formules ſuivantes:

I. $2Mddx = Pdt^2$; II. $2Mddy = Qdt^2$; III. $2Mddz = Rdt^2$.

XXIII. Si le corps n'eſt ſollicité par aucune force, de ſorte que $P = o$, $Q = o$, $R = o$, les trois formules trouvées, à cauſe de dt conſtant, ſe réduiront par l'intégration à celles-cy:

$$M\,dx = A\,dt; \quad M\,dy = B\,dt; \quad \& \quad M\,dz = C\,dt.$$

d'où l'on voit d'abord, que dans ce cas le corps ſe mouvra dans une ligne droite, avec un mouvement uniforme; & partant ces formules renferment en ſoi la premiere loi du mouvement, en vertu de laquelle tout corps étant en repos y demeure ; or étant en mouvement le corps continuë uniformément ſelon la méme direction, à moins qu'il ne ſoit ſollicité par quelque force de dehors. Mais il eſt clair que

nos

nos formules ne ſe bornent point à cette grande loi, elles renferment outre cela les loix, ſuivant lesquelles des forces quelconques agiſſent ſur les corps. Par conſéquent le principe que je viens d'etablir contient tout ſeul tous les principes qui peuvent conduire à la connoiſſance du mouvement de tous les corps, de quelque nature qu'ils ſoient.

XXIV. C'eſt donc de ce même grand principe, d'où il faudra dériver les regles, dont nous avons beſoin pour déterminer le mouvement d'un corps ſolide, lorsque l'axe de rotation ne demeure pas immobile. Pour cet effet il faudra conſidérer non ſeulement tous les élémens du corps, mais auſſi leur liaiſon mutuelle, en vertu de laquelle tous les élémens conſervent entr'eux le même ordre & les mêmes diſtances. Car le mouvement du corps entier eſt composé des mouvemens de tous ſes élémens, & le mouvement de chacun doit ſuivre le principe, que je viens d'expliquer, entant que chaque élément participe des forces, qui agiſſent ſur le corps, & qu'il eſt outre cela ſollicité par de certaines forces, qui l'empêchent, qu'il n'abandonne la connéxion avec les autres. Or avant que de déterminer cet effet des forces, auxquelles les élémens ſont aſſujettis, il faut conſidérer en general le mouvement, dont un tel corps eſt ſuſceptible.

DÉTERMINATION DU MOUVEMENT EN GENERAL, DONT UN CORPS SOLIDE EST SUSCEPTIBLE, PENDANT QUE SON CENTRE DE GRAVITÉ DEMEURE EN REPOS.

XXV. Soit donc O le centre de gravité du corps, ſuppoſé en repos, qu'on conſidére trois plans fixes, qui ſe croiſent perpendiculairement dans ce point O. Ou ce qui revient au même, conſidérons trois axes AO, BO, CO qui ſe rencontrent en O à angles droits, dont deux BO, CO ſoient ſur le plan de la table, & le troiſième AO y ſoit perpendiculaire. Ces trois axes détermineront les trois *Fig. II.*

plans

plans normales entr'eux, dont je viens de parler, & qui feront AOB, AOC, & BOC, dont celui-cy eſt le plan de la table. Or je ſuppoſerai que ces plans, & partant auſſi ces trois axes, demeurent immobiles, pendant que le corps ſe meut d'un mouvement quelconque; ſon centre de gravité reſtant pourtant toujours en O ſans mouvement. C'eſt pour avoir des lieux fixes, par rapport auxquels on puiſſe déterminer à chaque inſtant la ſituation du corps.

XXVI. Soit maintenant un élément quelconque du corps en Z, duquel on baiſſe ſur le plan BOC la perpendiculaire ZY, & du point Y à OC la normale YX: qu'on nomme $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$: & $OX = x$ marquera la diſtance du point Z au plan AOB; $XY = y$ ſa diſtance au plan AOC, & $YZ = z$ ſa diſtance au plan BOC. A préſent, quel que ſoit le mouvement du point Z, on le pourra réſoudre ſelon les directions de ces trois axes; ſuppoſons donc qu'après un tems infiniment petit $= dt$, ſa diſtance au plan AOB devienne $= x + Pdt$; au plan AOC $= y + Qdt$, & au plan BOC $= z + Rdt$, ou que ce point Z s'eloigne dans le tems dt du plan AOB de l'elément $= Pdt$; du plan AOC de l'elément $= Qdt$, & du plan BOC de l'elément $= Rdt$: ou ce qui revient au méme ſoient P, Q, R les viteſſes, dont le point Z s'eloigne de chacun des plans fixes AOB, AOC, & BOC.

XXVII. Or puiſque le corps eſt ſuppoſé ſolide, il faut que le point Z demeure toujours à la méme diſtance depuis le centre de gravité O. Mais au commencement du tems dt la diſtance OZ étoit $= \sqrt{(xx + yy + zz)}$, & au bout de ce tems elle ſera $= \sqrt{\left((x + Pdt)^2 + (y + Qdt)^2 + (z + Rdt)^2\right)}$. Il faut donc que ces deux diſtances ſoient egales entr'elles, d'où, en effaçant les termes qui évanouïſſent par rapport aux autres, réſultera cette équation:

$$2xPdt + 2yQdt + 2zRdt = 0.$$

qui ſe réduit à celle-cy:

$$Px + Qy + Rz = 0$$

Ces

Ces lettres P, Q, R, marquent des fonctions de nos trois variables x, y, z. & partant après avoir trouvé la nature de ces fonctions, on sera en etat de déterminer le mouvement de chaque point du corps à l'instant proposé, c'est à dire, au commencement du tems dt.

XXVIII. Considérons de plus pour ce même instant un autre point du corps en z, qui soit infiniment proche du précédent Z. Soient pour ce point z les trois variables $Ox = x + dx$, $xy = y + dy$, & $yz = z + dz$: où il faut remarquer que ces differentielles dx, dy, dz sont indépendantes entr'elles, vû que l'autre point z est pris à volonté. La distance de ce point au premier Z sera donc $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; or différentiant les fonctions P, Q, R en donnant à dx, dy, dz les valeurs, que la position du point z par rapport à Z exige; après le tems dt, ce point z avancera dans la direction OC de l'elément $(P + dP)\,dt$, dans la direction OB de l'elément $(Q + dQ)\,dt$, dans la direction OA de l'elément $= (R + dR)\,dt$. Ou bien après le tems dt les distances seront

	du point z	or du point Z
au plan AOB	$= x + dx + (P + dP)\,dt$ . . .	$= x + P\,dt$
au plan AOC	$= y + dy + (Q + dQ)\,dt$ . . .	$= y + Q\,dt$
au plan BOC	$= z + dz + (R + dR)\,dt$ . . .	$= z + R\,dt$.

XXIX. Ainsi au bout du tems dt la distance entre les points Z & z sera $= \sqrt{((dx + dP\,dt)^2 + (dy + dQ\,dt)^2 + (dz + dR\,dt)^2)}$ qui à cause de la solidité du corps doit être la même qu'au commencement. Posant donc cette expression égale à $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ nous obtiendrons cette équation $2\,dx\,dP\,dt + 2\,dy\,dQ\,dt + 2\,dz\,dR\,dt = o$, en négligeant les termes qui sont incomparablement moindres que ceux-cy. Cette équation se réduit donc à cette forme plus simple

$$dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = o$$

qui étant jointe à celle qui a été trouvée, savoir

$$Px + Qy + Rz = o$$

nous

nous servira à découvrir la nature des fonctions P, Q, R, d'où nous connoitrons tous les mouvemens, dont toutes les parties d'un corps solide sont susceptibles à la fois, pendant que son centre de gravité demeure immobile en O. D'où il est dabord clair que posant $x = o$, $y = o$, $z = o$, toutes ces trois fonctions P, Q, R, doivent évanouïr aussi.

XXX. Pour mieux connoitre ces fonctions, supposons qu'il soit $Ox = OX$ & $XY = xy$, ou $dx = o$ & $dy = o$: & l'équation trouvée en dernier lieu donnera $dRdz = o$ & partant $dR = o$. d'où l'on voit que la fonction R ne sauroit renfermer la variable z. Car supposant pour prouver cela $dR = Ldx + Mdy + Ndz$, il sera dans le cas présent $dR = Ndz$ à cause de $dx = o$ & $dy = o$, & partant $N = o$: donc il sera en général $dR = Ldx + Mdy$, & par conséquent la fonction R ne contiendra point la variable z. De même posant $dx = o$ & $dz = o$, il doit être $dQdy = o$ ou $dQ = o$, d'où l'on voit que la fonction Q ne sauroit contenir la variable y. Et enfin si nous considérons le cas ou $dy = o$ & $dz = o$, nous aprendrons pareillement qu'à cause de $dPdx = o$, la fonction P ne sauroit contenir la variable x.

XXXI. Ayant reconnu ces propriétés de ces fonctions P, Q, R posons donc:

$$dP = Ady + Bdz;\quad dQ = Cdz + Ddx;\quad dR = Edx + Fdy.$$

& ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$dPdx + dQdy + dRdz = o$$

produiront l'équation suivante:

$$\left.\begin{array}{l} + Adxdy + Bdxdz + Cdydz \\ + Ddxdy + Edxdz + Fdydz \end{array}\right\} = o$$

d'où il est clair qu'il doit être $D = -A$; $E = -B$; $F = -C$ puisque cette équation doit avoir lieu, soit qu'on mette $dx = o$ ou $dy = o$ ou $dz = o$. Ainsi les differentiels de nos fonctions seront:

$$dP = Ady + Bdz;\quad dQ = Cdz - Adx:\quad dR = -Bdx - Cdy.$$

Or

Or comme ces formules doivent être intégrables, il eſt évident de la premiere, que ni A ni B ne ſauroit renfermer x; de la ſeconde on comprend que ni C ni A ne ſauroit contenir y, & enfin la troiſième nous donne a connoitre que ni B ni C ne peut contenir z. Ainſi A ne contenant ni x ni y, ſera fonction de z, B fonction de y, & C fonction de x.

XXXII. Poſons donc en conſéquence de ce que nous venons de trouver:

$$dA = L\,dz,\ dB = M\,dy \ \&\ dC = N\,dx.$$

& puisque $A\,dy + B\,dz$ doit être un differentiel intégrable, il faut qu'il ſoit $\frac{dA}{dz} = \frac{dB}{dy}$: ou $L = M$. Enſuite l'intégrabilité de la ſeconde formule $C\,dz - A\,dx$ donne $\frac{dC}{dx} = \frac{-dA}{dz}$ ou $N = -L$: enfin l'intégrabilité de la troiſième formule $-B\,dx - C\,dy$ donne $\frac{-dB}{dy} = \frac{-dC}{dx}$ ou $-M = -N$. Ayant donc $M = L$; $N = -L$ & $M = N$ ou $L = -L$, il eſt clair que $L = o$ & partant auſſi $M = o$ & $N = o$. Donc les lettres A, B, C marqueront des quantités conſtantes; d'où l'on tire par conſéquent, en intégrant

$$P = Ay + Bz;\ Q = Cz - Ax;\ R = -Bx - Cy$$

expreſſions, qui ſatisfont déja d'elles mêmes à la premiére condition:

$$Px + Qy + Rz = o.$$

XXXIII. Tout mouvement donc, qu'un corps ſolide peut recevoir, ſon centre de gravité demeurant immobile, doit toujours avoir cette propriété: Que ſi d'un point quelconque du corps Z on tire les trois coordonnées orthogonales $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, ſelon les trois axes perpendiculaires entr'eux OA, OB, OC, & qu'on décompoſe le mouvement du point Z ſelon les mêmes trois directions, en nommant la viteſſe du mouvement ſelon $OC = P$,

 celle

celle du mouvement ſelon $OB = Q$ & celle du mouvement ſelon $OA = R$; ces lettres P, Q, R ne ſauroient jamais avoir d'autres valeurs, que telles, qui ſont renfermées dans les formules ſuivantes.

$$P = Ay + Bz; \quad Q = Cz - Ax; \quad R = -Bx - Cy.$$

Donc toute la diverſité, qui peut avoir lieu dans le mouvement du corps, ne provient que des diverſes valeurs, que peuvent recevoir les quantités conſtantes A, B, C.

XXXIV. Puisque ces formules ſerviront à déterminer le mouvement de chaque point du corps pendant l'elément du tems dt, voyons s'il y a, outre le centre de gravité O, des points deſtitués de tout mouvement; ou pour lesquels devienne $P = o$, $Q = o$ & $R = o$. Or poſant $P = o$ nous aurons $Ay + Bz = o$, & partant $z = Au$ & $y = -Bu$, où u marque une nouvelle variable quelconque; donc prenant ces valeurs pour y & z quelque valeur qu'on ne donne à x, les points du corps qui répondent ne changeront point de diſtance par rapport au plan AOB. Soit de plus $Q = o$, & il deviendra $Cz = Ax$, ou $x = Cu$; & la même valeur ſe trouve pour x, en poſant $R = o$. D'où il s'enſuit que tous les points du corps, qui ſont contenus dans ces formules $x = Cu$; $y = -Bu$; $z = Au$ demeureront en repos pendant le tems dt. Or tous ces points ſe trouvent dans une ligne droite, qui paſſe par le centre de gravité O; donc cette ligne droite demeurant immobile ſera l'axe de rotation, autour duquel le corps tourne dans le préſent inſtant.

XXXV. Pour trouver le mouvement de rotation du corps autour de cet axe, que nous venons de trouver, ſoit $YZ = z = o$, & que le point Y ſoit tellement ſitué, que la droite OY devienne perpendiculaire à l'axe de rotation. Pour cet effet il ſera $y : x = Cu : Bu$. Prenons donc $x = Bu$ & $y = Cu$, & la diſtance du point Y à l'axe de rotation ſera $= u\sqrt{(BB + CC)}$. Or à cauſe de $x = Bu$; $y = Cu$ & $z = o$, les trois viteſſes du point Y ſelon les trois directions OC, OB, OA ſeront:

$$P = ACu; \quad Q = -ABu; \quad R = -BBu - CCu.$$

Donc

Donc la vraie viteſſe du point Y étant $= \sqrt{(PP + QQ + RR)}$ ſera $= u\sqrt{(BB + CC)(AA + BB + CC)}$; qui étant diviſée par la diſtance $OY = u\sqrt{(BB + CC)}$ donnera la viteſſe angulaire ou rotatoire du corps autour de l'axe de rotation, laquelle ſera par conſéquent $= \sqrt{(AA + BB + CC)}$.

XXXVI. Quelque mouvement donc, qui puiſſe être imprimé à un corps ſolide, ſon centre de gravité demeurant en repos, ce mouvement ſe fera à chaque inſtant autour d'un axe, qui ſera immobile pendant cet inſtant, & qui paſſera par le centre de gravité du corps; & la viteſſe rotatoire autour de cet axe ſera $= \sqrt{(AA + BB + CC)}$. De là il ſera aiſé de déterminer la vraie viteſſe de tous les points du corps; on n'aura qu'à chercher la diſtance d'un point quelconque à l'axe de rotation, & cette diſtance étant poſée $= s$, la viteſſe vraie de ce point ſera $= s\sqrt{(AA + BB + CC)}$, dont la direction ſera connuë par la nature du mouvement de rotation. Il eſt donc impoſſible que toutes les parties d'un corps, qui tourne ſur ſoi-même, ou autour de ſon centre de gravité, ſoient en mouvement à la fois; puisque il y a toujours une ligne droite, dont tous les points ſeront en repos du moins pour un inſtant, & le mouvement des autres points du corps ſera d'autant plus rapide, plus ils ſeront éloignés de l'axe de rotation.

XXXVII. Sans entrer dans le détail du calcul, que je viens de développer, on peut auſſi prouver la même vérité par la ſeule Géometrie. Qu'on conſidère dans le corps une couche ſphèrique, dont *Fig.* le centre ſoit dans le centre de gravité du corps; car il eſt évident, qu'ayant connu le mouvement de cette ſuperficie ſphèrique, le mouvement du corps tout entier ſera déterminé. Soit AB un arc quelconque d'un grand cercle de cette ſurface ſphérique, qui par le mouvement du corps parvienne en ab aprés le tems dt, de ſorte que $ab = AB$, & de là il ſera aiſé de déterminer les endroits où tous les autres points de la ſurface ſphèrique ſeront transportés. Qu'on prolonge ces deux arcs AB & ab jusqu'en C, où ils s'entrecoupent, &

 pre-

prenant $ac = AC$, le point C ſera transporté en c, & l'arc CAB en cab pendant le tems dt. De plus ſi nous conſidèrons hors du cercle CAB un autre point quelconque M, & que nous tirions de là à C l'arc d'un grand cercle MC, pour trouver où ce point M ſera transporté pendant le même tems dt, on n'a qu'à conſtituer en c un arc $cm = CM$, de ſorte que l'angle acm ſoit egal à l'angle ACM, & il eſt clair, que m ſera le lieu du point M après le tems dt.

XXXVIII. Il eſt auſſi clair que ces deux arcs CM & cm étant prolongés ſe rencontreront quelque part en O, & partant dans le tems dt l'arc entier CMO ſera transporté en cmO, & s'il étoit $CMO = cmO$, le point O demeureroit immobile. Or il eſt certain qu'on peut toujours conſtituer en ſorte l'arc CMO, qu'ayant décrit ſon arc correſpondant cmO, il ſoit $cmO = CMO$. Car pour que cela arrive on n'a qu'à conſtituer l'arc CMO en ſorte, que l'angle cCO devienne egal à l'angle CcO; afin que le triangle ſphèrique COc devienne iſoſcele, & partant les cotés CO & cO egaux entr'eux. Pour trouver cette poſition il faut remarquer que l'angle $cCO = ACO - ACc$ & $CcO = 180° - acO$; & de là puiſque l'angle $ACO = acO$ & $cCO = CcO$, on tirera $2cCO = 180° - ACc$ & partant $cCO = 90° - \frac{1}{2} ACc$. Donc, ſi nous partageons l'angle ACc en deux parties égales par l'arc $C\gamma$, l'angle γCO deviendra droit, & partant l'arc CMO doit être perpendiculaire à l'arc $C\gamma$.

XXXIX. Ayant ainſi déterminé la poſition de l'arc CMO, pour trouver le point O même, qui demeure immobile pendant le tems dt, le plus court moyen ſera de tirer du point O ſur le milieu ω de la baſe Cc l'arc perpendiculaire $O\omega$. Car alors connoiſſant dans le triangle ſphérique $C\omega O$ rectangle à ω le côté $C\omega = \frac{1}{2} Cc$ & l'angle $\omega CO = 90° - \frac{1}{2} ACc$, on en tirera $\operatorname{tang} C\omega = \operatorname{tang} CO \operatorname{cof} \omega CO$, ou $\operatorname{tang} CO = \dfrac{\operatorname{tang} C\omega}{\operatorname{cof} \omega CO} = \dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} Cc}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} ACc}$. Mais comme le tems dt eſt ſuppoſé infiniment petit, tant l'intervalle Cc que l'angle ACc

feront auffi infiniment petits, & partant égaux à leur finus ou tangentes. Donc la tangente de l'arc CMO fera $= \frac{Cc}{ACc}$, ou bien tang CO $= \frac{Cc}{ACc}$. Par ce moyen on déterminera aifément la grandeur de l'arc CMO, dont la pofition étant perpendiculaire à l'arc $C\gamma$, ou à l'arc BAC même, l'angle ACc étant infiniment petit, on connoitra le point O, par lequel paffe l'axe de rotation, autour duquel tourne le corps pendant l'elément du tems dt.

RECHERCHE DES FORCES REQUISES

POUR CONSERVER LE CORPS DANS UN MOUVEMENT QUELCONQUE.

XL. Ayant rapporté le corps à trois axes fixes AO, BO, CO *Fig. IV* perpendiculaires entr'eux, qui fe croifent dans le centre de gravité O du corps, qui demeure toujours immobile; foient $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$ les trois coordonnées orthogonales, qui déterminent le lieu d'un élément quelconque du corps fitué en Z, pour l'inftant préfent, & foit dM la maffe de cet élément. Que le mouvement de cet élément foit tel, qu'en le décompofant felon les directions de nos trois axes fixes, la viteffe felon OC foit $= \lambda y - \mu z$; la viteffe felon $OB = \nu z - \lambda x$; & la viteffe felon $OA = \mu x - \nu y$: pofant pour les lettres A, B, C du §. 33. les lettres $\lambda, -\mu, \nu$. Donc l'axe de rotation dans l'inftant préfent fe trouvera en prenant $x = \nu u$; $y = \mu u$ & $z = \lambda u$; & la viteffe rotatoire autour de cet axe fera $= \sqrt{(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu)}$. Or je fuppofe que ces viteffes étant affirmatives tendent a eloigner le point Z felon les directions des trois axes du point O.

XLI. Donc pendant l'elément du tems $= dt$, l'elément dM en Z s'eloignera du plan AOB par l'elément d'efpace $= (\lambda y - \mu z)\, dt$, du plan AOC par l'elément $= (\nu z - \lambda x)\, dt$, & du plan BOC par l'elément $= (\mu x - \nu y)\, dt$. Prenant donc $x + dx$, $y + dy$ & $z + dz$

Cc 3 pour

pour les coordonnées, qui déterminent le lieu de notre élément dM après le tems dt; nous aurons pour les differentiels dx, dy & dz les valeurs ſuivantes,

$$dx = (\lambda y - \mu z)\,dt; \quad dy = (\nu z - \lambda x)\,dt; \quad dz = (\mu x - \nu y)\,dt$$

qui ont cette propriété, comme nous avons vu, que tous les élémens du corps demeurent à la même diſtance, tant entr'eux, que du centre de gravité O. D'où il eſt clair qu'il eſt impoſſible que toutes ces trois expreſſions ſoient affirmatives à la fois, quoique nous les regardions comme telles; puisqu'il faut qu'il ſoit toujours $(x+dx)^2 + (y+dy)^2 + (z+dz)^2 = xx + yy + zz$, ou bien $x\,dx + y\,dy + z\,dz = o$.

XLII. Maintenant pour la continuation du mouvement en ſuppoſant l'elément du tems dt conſtant, il faut par le principe général du mouvement, que l'elément dM en Z ſoit ſollicité par trois forces ſelon les directions de nos trois axes. Car la maſſe de cet élément étant poſée $= dM$, il faut qu'il ſoit ſollicité dans la direction OC par une force $= \frac{2dM\,ddx}{dt^2}$, dans la direction OB par la force $= \frac{2dM\,ddy}{dt^2}$ & dans la direction OA par la force $= \frac{2dM\,ddz}{dt^2}$. Ces forces renferment en ſoi tant les forces externes, dont le corps peut être ſollicité par dehors, que les forces internes, dont les parties du corps ſont liées entr'elles, afinqu'elles ne changent pas leur ſituation rélative. Or il eſt à remarquer que les forces internes ſe détruiſent mutuellement, de ſorte que la continuation du mouvement ne demande des forces externes, qu'entant que ces forces ne ſe détruiſent pas mutuellement.

XLIII. Pour rendre notre recherche générale, ſuppoſons que l'axe de rotation change après le tems dt d'une maniere quelconque, de même que la viteſſe angulaire, ce qui arrivera, lorsque les lettres λ, μ, ν, ne marqueront plus des quantités conſtantes. Soient donc les quantités λ, μ, ν, variables, & pour trouver les differentio-differen-

differentiels ddx, ddy & ddz, les valeurs de dx, dy, dz nous fourniront :

$$ddx = (\lambda dy + y d\mu - \mu dz - z d\mu) dt$$
$$ddy = (\nu dz + z d\nu - \lambda dx - x d\lambda) dt$$
$$ddz = (\mu dx + x d\mu - \nu dy - y d\nu) dt$$

ou bien :

$$ddx = (y d\lambda - z d\mu) dt + (\lambda dy - \mu dz) dt$$
$$ddy = (z d\nu - x d\lambda) dt + (\nu dz - \lambda dx) dt$$
$$ddz = (x d\mu - y d\nu) dt + (\mu dx - \nu dy) dt$$

XLIV. Dans ces formules remettons pour dx, dy, dz, leurs valeurs données cy-dessus, & nous obtiendrons :

$$ddx = (y d\lambda - z d\mu) dt + (\lambda\nu z + \mu\nu y - (\lambda\lambda + \mu\mu) x) dt^2$$
$$ddy = (z d\nu - x d\lambda) dt + (\mu\nu x + \lambda\mu z - (\nu\nu + \lambda\lambda) y) dt^2$$
$$ddz = (x d\mu - y d\nu) dt + (\lambda\mu y + \lambda\nu x - (\mu\mu + \nu\nu) z) dt^2$$

Donc si les lignes $Z\alpha$, $Z\beta$, $Z\gamma$ sont tirées pour marquer les trois forces, qui sont requises à solliciter l'élément dM en Z selon les directions des trois axes OA, OB, OC, nous aurons pour ces forces les expressions suivantes.

$$\text{force } Z\gamma = \frac{2\,dM}{dt}(y d\lambda - z d\mu) + 2\,dM(\lambda\nu z + \mu\nu y - (\lambda\lambda + \mu\mu)x)$$

$$\text{force } Z\beta = \frac{2\,dM}{dt}(z d\nu - x d\lambda) + 2\,dM(\mu\nu x + \lambda\mu z - (\nu\nu + \lambda\lambda)y)$$

$$\text{force } Z\alpha = \frac{2\,dM}{dt}(x d\mu - y d\nu) + 2\,dM(\lambda\mu y + \lambda\nu x - (\mu\mu + \nu\nu)z)$$

XLV. Pour réduire ces expressions dans une somme, ou pour trouver les forces totales, il faut remarquer que dans ces intégrations on n'aura d'autres variables, que l'elément dM & les coordonnées

x, y,

x, y, z, qui déterminent le lieu de cet élément, & que dM doit ſucceſſivement paſſer par tous les élémens du corps, de ſorte que l'integrale $\int dM$ rende la maſſe du corps entier M: ainſi dans toutes ces intégrations, qui ne regardent que la variabilité du point Z, les quantités λ, μ, ν, avec leurs differentiels $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, & l'élément du tems dt ſeront à conſidérer comme invariables. De là il eſt clair que l'intégrale de chacune de ces trois forces deviendra $= o$, puiſque par la nature du centre de gravité O il eſt $\int x\, dM = o$, $\int y\, dM = o$ & $\int z\, dM = o$. Donc, quelles que ſoient les forces requiſes à ſolliciter le corps, il faut qu'étant appliquées au centre de gravité O, chacune ſelon ſa direction, elles ſe détruiſent mutuellement.

XLVI. Donc, pour connoitre exactement l'état de ces forces, il ne faut qu'avoir égard à leurs momens par rapport à nos trois axes OA, OB, OC. Or la force $Z\alpha$ donne pour l'axe OC un moment dans le ſens $BA = Z\alpha.y$, & pour l'axe OB un moment dans le ſens $CA = Z\alpha.x$. Enſuite la force $Z\beta$ donne pour l'axe OC un moment dans le ſens $AB = Z\beta.z$, & pour l'axe OA un moment dans le ſens $CB = Z\beta.x$. Enfin la force $Z\gamma$ donne pour l'axe OB un moment dans le ſens $AC = Z\gamma.z$, & pour l'axe OA un moment dans le ſens $BC = Z\gamma.y$. Par conſéquent des forces $Z\alpha$, $Z\beta$, $Z\gamma$ réſultera pour l'axe OA un moment dans le ſens $BC = Z\gamma.y - Z\beta.x$; pour l'axe OB un moment dans le ſens $CA = Z\alpha.x - Z\gamma.z$; & pour l'axe OC un moment dans le ſens $AB = Z\beta.z - Z\alpha.y$.

XLVII. Si nous ſubſtituons pour ces forces les valeurs trouvées, le moment qui en réſulte pour l'axe OA dans le ſens BC ſera

$$= \frac{2\,dM}{dt}(yy\,d\lambda + xx\,d\lambda - yz\,d\mu - xz\,d\nu)$$
$$+ 2\,dM(\lambda\nu yz - \lambda\mu xz + \mu\nu yy - \mu\nu xx - (\mu\mu - \nu\nu)xy)$$

Le moment qui en réſulte pour l'axe OB dans le ſens CA ſera

$$= \frac{2\,dM}{dt}(xx\,d\mu + zz\,d\mu - xy\,d\nu - yz\,d\lambda)$$
$$+ 2\,dM(\lambda\mu xy - \mu\nu yz + \lambda\nu xx - \lambda\nu zz - (\nu\nu - \lambda\lambda)xz)$$

Enfin

Enfin le moment qui résulte pour l'axe OC dans le sens AB sera

$$= \frac{2\,dM}{dt}(zz\,d\nu + yy\,d\nu - xz\,d\lambda - xy\,d\mu)$$

$$+ 2\,dM(\mu\nu xz - \lambda\nu xy + \lambda\mu zz - \lambda\mu yy - (\lambda\lambda - \mu\mu)yz)$$

Or quand je dis qu'il y a un moment pour l'axe OC dans le sens AB, il faut entendre que la force de ce moment tend à tourner le corps autour de l'axe OC, & cela dans le sens AB.

XLVIII. Maintenant on n'aura qu'à prendre les intégrales de ces trois formules trouvées, pour avoir les momens tout entiers des forces, dont le corps doit être sollicité, afin que son mouvement soit tel, que nous venons de le supposer. Or ces intégrales se réduisent à l'intégration des formules, qui dépendent uniquement de la figure du corps & de la distribution de la matiere dont il est composé, par rapport à nos trois axes fixes, OA, OB, OC. Supposons donc qu'il soit

$$\int dM(xx+yy) = Mff \qquad \int xy\,dM = Mll$$

$$\int dM(xx+zz) = Mgg \qquad \int xz\,dM = Mmm$$

$$\int dM(yy+zz) = Mhh \qquad \int yz\,dM = Mnn$$

où il faut remarquer que Mff est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OA ; Mgg le moment d'inertie par rapport à l'axe OB, & Mhh le moment d'inertie par rapport à l'axe OC. Les trois autres formules contiennent les forces centrifuges, qu'auroit le corps, s'il tournoit autour d'un de ces trois axes.

XLIX. De là les momens totals, dont le corps doit être sollicité, se trouveront exprimés de la maniere suivante ;

I. Le moment pour l'axe OA dans le sens BC sera :

$$2M\left(\frac{ff\,d\lambda}{dt} - \frac{nn\,d\mu}{dt} - \frac{mm\,d\nu}{dt} + \lambda\nu nn - \lambda\mu mm - (\mu\mu-\nu\nu)ll + \mu\nu(hh-gg)\right)$$

II. Le moment pour l'axe OB dans le sens CA sera

$$2M\left(\frac{gg\,d\mu}{dt} - \frac{ll\,d\nu}{dt} - \frac{nn\,d\lambda}{dt} + \lambda\mu ll - \mu\nu nn - (\nu\nu-\lambda\lambda)mm + \lambda\nu(ff-hh)\right)$$

III. Le moment pour l'axe OC dans le fens AB fera

$$2\,\mathrm{M}\left(\frac{hh\,dv}{dt}-\frac{mm\,d\lambda}{dt}-\frac{ll\,d\mu}{dt}+\mu v\,mm-\lambda v\,ll-(\lambda\lambda-\mu\mu)nn+\lambda\mu(gg-ff)\right)$$

D'où l'on voit que ces momens de forces dépendent, tant des quantités λ, μ, v, qui fe rapportent à l'axe de rotation & au mouvement rotatoire, que de leurs changemens inftantanés $d\lambda$, $d\mu$, dv, qui arrivent dans l'elément du tems dt.

L. Rapportons maintenant ces formules à l'axe de rotation qui foit Oz ; & nous avons vû qu'il fera $Ox = vu$, $xy = \mu u$ & $yz = \lambda u$; & que la viteffe angulaire autour de cet axe eft $= \sqrt{(\lambda\lambda+\mu\mu+vv)}$; or en quel fens cette viteffe foit dirigée, on trouvera en confidèrant l'élément du corps fitué en X, dont la viteffe à caufe de $y = o$ & $z = o$ fera felon OB ou $XY = -\lambda x$ & felon $OA = \mu x$. Donc ce point s'elevera au deffus du plan BOC, & de là on conclura aifement en quel fens le corps tourne autour de l'axe Oz. Soit maintenant la viteffe angulaire autour de cet axe $Oz = \upsilon$, de forte que $\sqrt{(\lambda\lambda+\mu\mu+vv)} = \upsilon$. Enfuite foient ζ, η, θ les angles AOz, BOz, COz, que l'axe de Oz conftitue avec les trois axes OA, OB, OC & puifque $Oz = u\sqrt{(\lambda\lambda+\mu\mu+vv)} = u\upsilon$, on aura $\mathrm{cof}\,\zeta = \frac{\lambda}{\upsilon}$; $\mathrm{cof}\,\eta = \frac{\mu}{\upsilon}$ & $\mathrm{cof}\,\theta = \frac{v}{\upsilon}$; d'où l'on voit qu'il y a toujours $\mathrm{cof}\,\zeta^2 + \mathrm{cof}\,\eta^2 + \mathrm{cof}\,\theta^2 = 1$: & ainfi on aura

$$\lambda = \upsilon\,\mathrm{cof}\,\zeta;\qquad \mu = \upsilon\,\mathrm{cof}\,\eta;\qquad v = \upsilon\,\mathrm{cof}\,\theta.$$

LI. Suppofant donc pour la variabilité de l'axe de rotation Oz les angles ζ, η, θ variables, & outre cela la viteffe angulaire υ variable, on obtiendra :

$$d\lambda = d\upsilon\,\mathrm{cof}\,\zeta - \upsilon\,d\zeta\,\mathrm{fin}\,\zeta:\ d\mu = d\upsilon\,\mathrm{cof}\,\eta - \upsilon\,d\eta\,\mathrm{fin}\,\eta:\ dv = d\upsilon\,\mathrm{cof}\,\theta - \upsilon\,d\theta\,\mathrm{fin}\,\theta$$

Or à caufe de $\mathrm{cof}\,\zeta^2 + \mathrm{cof}\,\eta^2 + \mathrm{cof}\,\theta^2 = 1$ on aura

$$d\zeta\,\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cof}\,\zeta + d\eta\,\mathrm{fin}\,\eta\,\mathrm{cof}\,\eta + d\theta\,\mathrm{fin}\,\theta\,\mathrm{cof}\,\theta = o$$

Or puifque nos formules deviendroient trop compliquées par ces fubftitutions, & que la pofition de nos trois axes eft arbitraire, pofons qu'à qu'à l'inſtant préſent, ou au commencement de l'elément du tems dt, le corps ait tourné exactement autour de l'axe OA, de ſorte que $\mu = o$ & $\nu = o$, & que partant le mouvement ſe fit dans le ſens BC, avec la viteſſe angulaire v, la valeur de λ étant affirmative. Il ſera donc $\zeta = o$; $\eta = 90°$; $\theta = 90°$; d'où $\lambda = v$; $\mu = o$, $\nu = o$; or après l'elément du tems dt, l'axe de rotation s'ecarte infiniment peu de l'axe OA, de ſorte qu'il faſſe alors avec l'axe OA un angle $= \zeta$, avec l'axe OB un angle $= 90° + d\eta$, & avec l'axe OC un angle $= 90° + d\theta$; & il doit étre $d\zeta^2 = d\eta^2 + d\theta^2$

LII. Dans cette ſuppoſition nous aurons donc :

$$d\lambda = dv; \quad d\mu = -v\,d\eta \quad \& \quad d\nu = -v\,d\theta.$$

Et ces valeurs étant ſubſtituées dans nos expreſſions précédentes du § 49 donneront.

I. Le moment requis pour l'axe OA dans le ſens BC $=$

$$2\,M\left(\frac{ff\,dv}{dt} + \frac{nn\,v\,d\eta}{dt} + \frac{mm\,v\,d\theta}{dt}\right)$$

II. Le moment requis pour l'axe OB dans le ſens CA $=$

$$2\,M\left(\frac{-nn\,dv}{dt} - \frac{gg\,v\,d\eta}{dt} + \frac{ll\,v\,d\theta}{dt} + mm\,vv\right)$$

III. Le moment requis pour l'axe OC dans le ſens AB $=$

$$2\,M\left(\frac{-mm\,dv}{dt} + \frac{ll\,v\,d\eta}{dt} - \frac{hh\,v\,d\theta}{dt} - nn\,vv\right)$$

Où il faut remarquer que le mouvement rotatoire autour de l'axe AO eſt ſuppoſé ſe faire dans le ſens BC, avec la viteſſe angulaire $= v$.

LIII. Donc, pour que le corps tourne conſtamment autour du même axe OA, ou qu'il ſoit $d\eta = o$ & $d\theta = o$, mais d'un mouvement variable, il faut que ce corps ſoit ſollicité par des forces, qui fourniſſent

I. Pour l'axe OA un moment dans le ſens BC $= \frac{2\,M\,ff\,dv}{dt}$.

 II. Pour

II. Pour l'axe OB un moment dans le ſens CA $= \left(mmvv - \frac{nn\,dv}{dt}\right)$

III. Pour l'axe OC un moment dans le ſens BA $= \left(nnvv + \frac{mm\,dv}{dt}\right)$

D'où l'on voit que pour accélerer le mouvement rotatoire, il faut un moment de forces pour l'axe de rotation OA, lequel ſoit proportionel à Mff, c'eſt à dire au moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OA. Mais, pour que le corps tourne autour de l'axe immobile OA d'un mouvement uniforme, il faut que ce corps ſoit ſollicité de dehors par des forces, qui n'ayent aucun moment pour l'axe OA, mais qui donnent pour l'axe OB un moment dans le ſens CA $= 2\,M\,mmvv$, & pour l'axe OC un moment $= 2\,M\,nnvv$. Donc ce mouvement ne ſaura ſubſiſter ſans le ſecours de forces externes, à moins qu'il n'y ſoit $mm = o$ & $nn = o$, ou $\int xz\,dM = o$ & $\int yz\,dM = o$, ce qui eſt préciſement le cas remarqué cy-deſſus, où les forces centrifuges ſe dètruiſent mutuellement.

RECHERCHE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ, LES FORCES DONT IL EST SOLLICITÉ ÉTANT DONNÉES.

Fig. IV. LIV. Le corps étant rapporté aux trois axes fixes OA, OB, OC, qui ſe coupent perpendiculairement au centre de gravité O, ſoit comme nous avons poſé cy-deſſus, nommant les coordonnées $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, & l'élément du corps en $Z = dM$.

$$\int dM\,(xx + yy) = M\,ff \qquad \int xy\,dM = M\,ll$$
$$\int dM\,(xx + zz) = M\,gg \qquad \int xz\,dM = M\,mm$$
$$\int dM\,(yy + zz) = M\,hh \qquad \int yz\,dM = M\,nn$$

Cela poſé, que le corps ait déja un mouvement quelconque qui ſe faſſe autour d'un axe Oz, de ſorte que $Ox = \nu u$; $x\eta = \mu u$; $\eta z = \lambda u$, & que la viteſſe rotatoire autour de cet axe ſoit $= \sqrt{(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu)}$.

LV. Dans

LV. Dans cet état le corps soit sollicité par des forces quelconques, & pour trouver le changement, qui en sera causé dans le mouvement du corps, on n'aura qu'à avoir égard aux momens des ces forces par rapport aux trois axes OA, OB, OC: soit donc le moment qui résulte de ces forces

pour l'axe OA dans le sens BC $= Pa$.
Le moment pour l'axe OB dans le sens CA $= Qa$.
Le moment pour l'axe OC dans le sens CO $= Ra$.

Maintenant égalant ces moments à ceux qui ont été trouvés cy-dessus (§. 49.) nous obtiendrons les trois équations suivantes.

$$\text{I.}\quad \frac{Pa}{2M} = \frac{ffd\lambda}{dt} - \frac{nnd\mu}{dt} - \frac{mmd\nu}{dt} + \lambda\nu nn - \lambda\mu mm - (\mu\mu - \nu\nu)ll + \mu\nu(hh - gg)$$

$$\text{II.}\quad \frac{Qa}{2M} = \frac{ggd\mu}{dt} - \frac{lld\nu}{dt} - \frac{nnd\lambda}{dt} + \lambda\mu ll - \mu\nu nn - (\nu\nu - \lambda\lambda)mm + \lambda\nu(ff - hh)$$

$$\text{III.}\quad \frac{Ra}{2M} = \frac{hhd\nu}{dt} - \frac{mmd\lambda}{dt} - \frac{lld\mu}{dt} + \mu\nu mm - \lambda\nu ll - (\lambda\lambda - \mu\mu)nn + \lambda\mu(gg - ff)$$

d'où on pourra déterminer les changemens infiniment petits $d\lambda, d\mu$ & $d\nu$, qui seront produits dans l'elément du tems dt.

LVI. Mais, puisque la résolution de ces équations nous conduiroit à des formules trop longues, posons, comme nous avons fait auparavant, que le corps tourne à l'instant présent autour de l'axe OA dans le sens BC avec une vitesse angulaire $= v$: & qu'après le tems $= dt$, l'axe de rotation change, en sorte qu'il fasse alors avec l'axe OA un angle $= d\zeta$, avec l'axe OB un angle $= 90° + d\eta$ & avec l'axe OC un angle $= 90° + d\theta$; & que la vitesse angulaire devienne alors $= v + dv$: & nous avons vû qu'il est $d\zeta^2 = d\eta^2 + d\theta^2$. Cela supposé, nous aurons les trois équations suivantes:

$$\text{I.}\quad \frac{Pa}{2M} = \frac{ffdv}{dt} + \frac{nnvd\eta}{dt} + \frac{mmvd\theta}{dt}.$$

$$\text{II. } \frac{Qa}{2M} = \frac{-nn\,d\upsilon}{dt} - \frac{gg\upsilon\,d\eta}{dt} + \frac{ll\upsilon\,d\theta}{dt} + mm\upsilon\upsilon$$

$$\text{III. } \frac{Ra}{2M} = \frac{-mm\,d\upsilon}{dt} + \frac{ll\upsilon\,d\eta}{dt} - \frac{hl\upsilon\,d\theta}{dt} - nn\upsilon\upsilon$$

LVII. Maintenant la résolution de ces trois équations nous fournira pour $d\upsilon$, $d\eta$ & $d\theta$ les valeurs suivantes:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{Pa(gghh - l^4) + Qa(hhnn + llmm) + Ra(ggmm + llnn) - 2M\upsilon\upsilon(mmnn(hh - gg) + ll(m^4 - n^4))}{2M(ffgghh - ffl^4 - ggm^4 - hhn^4 - 2llmmnn)}$$

$$-\frac{\upsilon\,d\eta}{dt} = \frac{Pa(hhnn + llmm) + Qa(ffhh - m^4) + Ra(ffll + mmnn) - 2M\upsilon\upsilon(ffhhmm - ffllnn - mm(m^4 + n^4))}{2M(ffgghh - ffl^4 - ggm^4 - hhn^4 - 2llmmnn)}$$

$$-\frac{\upsilon\,d\theta}{dt} = \frac{Pa(ggmm + llnn) + Qa(ffll + mmnn) + Ra(ffgg - n^4) + 2M\upsilon\upsilon(ffggnn - ffllmm - nn(m^4 + n^4))}{2M(ffgghh - ffl^4 - ggm^4 - hhn^4 - 2llmmnn)}$$

De ces formules donc on connoitra pour chaque instant le changement élémentaire, qui arrivera tant dans la position de l'axe de rotation, que dans la vitesse angulaire. Or il faut pour chaque instant changer la position des trois axes OA, OB, OC afin que OA convienne toujours avec l'axe de rotation: & alors on sera obligé de calculer de nouveau pour chaque instant les valeurs ll, mm, nn, ff, gg, hh; puisque le changement de la situation du corps par rapport aux trois axes y causera des variations continuelles.

LVIII. Ce seront donc ces trois formules, qui contiennent les nouveaux principes de Mecanique, dont on a besoin pour déterminer le mouvement des corps solides, lorsque l'axe de rotation, autour duquel ils tournent, ne demeure pas immobile, ou dirigé vers la même plage du Ciel, ou de l'espace absolu. Et il est évident que ces nouveaux principes sont suffisans pour tous les cas imaginables des mouvemens, dont les corps solides sont susceptibles. Or jusqu'ici on n'a été en état que de résoudre ce cas fort particulier, où il est pour le corps $m = o$ & $n = o$, & ensuite pour les forces sollicitantes $Q = o$ & $R = o$: Mais pour ce cas on aura $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{Pa}{2Mff}$, & $d\eta = o$ & $d\theta = o$:

$d\theta = o$: d'où l'on voit combien font bornées les recherches de Mecanique, fans le fecours de ces nouveaux principes, que je viens de déduire de l'axiome général, fur lequel eſt fondée toute la Mecanique.

LIX. Comme les formules qui contiennent ces principes, font trop embaraſſées, pour en pouvoir faire voir clairement leur nature; il fera à propos d'en faire l'application à une certaine eſpece de corps, où ces formules deviennent aſſés fimples. Suppoſons donc que le corps folide, dont il s'agit de déterminer le mouvement, foit un globe formé d'une matiére homogene, ou du moins des couches ſphèriques concentriques, dont chacune foit homogene. Dans ce cas il eſt clair, que les momens d'inertie Mff, Mgg, Mhh par rapport à chaque axe feront égaux entr'eux, & partant $gg = hh = ff$; de plus il fera toujours $ll = o$, $mm = o$, & $nn = o$. Donc les trois formules, qui renferment le changement du mouvement cauſé par les trois momens Pa, Qa, Ra feront:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Pa}{2Mff}; \quad \frac{v\,d\eta}{dt} = \frac{-Qa}{2Mgg} \quad \& \quad \frac{v\,d\theta}{dt} = \frac{-Ra}{2Mhh}.$$

dont la raifon ne fera plus difficile à comprendre.

LX. Les deux axes OB & OC étant arbitraires, pourvu qu'ils foient dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation OA, on les peut toujours arranger en forte, que les moments de forces par rapport à un d'eux fe détruifent. Soient donc ces axes OB & OC tellement choifis que le moment par rapport à OC évanouïſſe, ou qu'il foit $R = o$: nous aurons donc $\frac{dv}{dt} = \frac{Pa}{2Mff}$; $\frac{vd\eta}{dt} = \frac{-Qa}{2Mqq}$ & $d\theta = o$, d'où nous voyons que l'axe OA approchera de l'axe OB par un angle infiniment petit $-d\eta = \frac{Qa\,dt}{2Mggv}$ dans le tems dt; car puisque $a\theta = o$, c'eſt un figne que l'axe de rotation demeure perpendipendiculaire à l'axe OC. Donc c'est le moment de forces, qui tend à tourner le corps autour de l'axe OB dans le sens CA, duquel est produite l'inclinaison de l'axe de rotation OA vers l'axe OB, pendant que le corps tourne autour de OA dans le sens BC, & cette inclinaison est réciproquement proportionelle à la vitesse rotatoire du corps autour de son axe de rotation.

Fig. V. LXI. Soient pour mieux répresenter cela OA, OB, OC les trois axes, autour du premier desquels OA le corps sphèrique que je considere ici, tourne dans le sens BC avec une vitesse angulaire $= v$. Que ce corps soit sollicité par deux forces P & Q, dont la premiere P lui soit appliquée en B selon la direction BP parallele à OC, & l'autre Q en C selon la direction CQ parallele à OA, de sorte que les distances soient OB $= a$ & OC $= a$. Cela posé, la premiere force n'aura pas d'autre moment que par rapport à l'axe OA, & ce moment sera $= Pa$ dans le sens BC; or l'autre force CQ $= Q$ n'aura pas d'autre moment que par rapport à l'axe OB, & ce moment sera $= Qa$ dans le sens CA. Maintenant le moment d'inertie du corps par rapport à un axe quelconque, qui passe par son centre de gravité étant posé $= Mff$: l'effet de la premiere force P consistera dans l'accéleration du mouvement rotatoire, donnant $dv = \frac{Padt}{2Mff}$: & l'effet de l'autre force Q sera incliner l'axe de rotation OA vers OB, & le transportera en Oa, de sorte que l'angle AO$a = \frac{Qadt}{2Mffv}$.

Fig. VI. LXII. On comprendra mieux le fondement de ces effets, si nous regardons la superficie sphèrique BCD du corps, dont le rayon soit OB $=$ OC $=$ OA $= a$, & qui tourne autour de l'axe OA dans le sens BC avec la vitesse rotatoire $= v$. Soit BP la force P, qui accélere le mouvement de rotation, autour de l'axe OA; & on voit que cette force produit le même effet, que si l'autre force Q n'agissoit point sur le corps; donc cet effet est connu par les principes vulgai-

vulgaires, desquels il doit être $dv = \frac{P\,a\,dt}{2\,M\,ff}$. Considerons l'autre force Q appliquée en A selon la direction AQ parallele à CO, car il est évident que cette force produira le même moment, que si elle étoit appliquée en C selon une direction parallele à OA. L'effet donc de cette force consistera en ce qu'elle transportera l'axe de rotation OA en O a par l'angle A O $a = \frac{Q\,a\,dt}{2Mff\,\upsilon}$.

LXIII. Pour donner une explication de cet effet, qu'on considere d'abord le seul mouvement de rotation, par lequel le point a sera transporté autour de A en α, par l'angle a A α dans le tems dt : la vitesse angulaire étant $= \upsilon$, cet angle a A α sera $= \upsilon\,dt$; & partant l'espace $a\alpha =$ A$a.\,\upsilon\,dt$. Ensuite faisons abstraction du mouvement rotatoire, & considerons le corps, comme s'il étoit sollicité par la seule force A Q = Q, qui lui imprimera un mouvement de rotation autour de l'axe B O D, dans le sens CA ou $\alpha\,a$; & la vitesse rotatoire engendrée dans le tems dt sera $= \frac{Q\,a\,dt}{2\,M\,ff}$: donc dans le tems dt ce mouvement se fera par un angle $= \frac{Q\,a\,dt^2}{2\,M\,ff}$. Par ce mouvement le point α sera retiré vers a par un espace $= \frac{Q\,aa\,dt^2}{2\,M\,ff}$; & il est clair que le point α doit exactement être rétabli en a, afin que ce soit le point a & l'axe O a qui demeure en repos. De là nous aurons $a\alpha =$ A$a.\,\upsilon\,dt = \frac{Q\,aa\,dt^2}{2\,Mff}$, & partant $\frac{A\,a}{AO} =$ angl. A O $a = \frac{Q\,a\,dt}{2\,Mff\,\upsilon}$; ce qui est la même expression qui a été déduite de nos principes.