1751

De la parallaxe de la lune tant par rapport à sa hauteur qu'à son azimuth, dans l'hypothèse de la terre sphéroidique

Leonhard Euler

De la Parallaxe de la Lune tant par rapport a sa hauteur qu'a son azimuth dans l'hypothese de la terre spheroidique.

PAR M. EULER.

§. 1.

Aprés que M. de Maupertuis a publié ſon excellent Traité ſur la parallaxe de la lune, où il a montré combien les régles ordinaires de la parallaxe, entant qu'elles ſont fondées ſur la figure ſphérique de la terre, doivent être changées pour la figure veritable de la terre; cette matiere paroit d'abord ſi épuiſée, qu'on n'y ſauroit plus rien découvrir, qui ſoit échappé à ſon attention, à moins que ce ne ſoient de petites circonſtances, dont on ſe peut paſſer ſans aucune erreur ſenſible dans la pratique. Ayant remarqué que cet Illuſtre Auteur n'a pas eu égard à l'azimuth de la lune, qui devroit entrer dans la recherche de la parallaxe, lorsque la terre n'eſt pas ſphérique, j'ai d'abord cru que cette circonſtance pourroit être de quelque conſéquence: or auſſi-tot que j'en eus fait le calcul, j'ai trouvé que l'irrégularité qui peut réſulter de l'azimuth, eſt ſi petite, qu'on la peut négliger ſans faire tort à la préciſion de cette theorie. Cependant, quand on veut avoir égard à cette circonſtance dans la recherche de la parallaxe, le calcul devient beaucoup plus difficile; & puisqu'il eſt impoſſible, avant qu'on en ſoit venu à bout, qu'on puiſſe prononcer avec aſſès d'aſſurance, ſi l'effet qui en réſulte, merite quelque attention ou non? je me crois obligé de déveloper encore cette matière, en faiſant entrer dans l'analyſe cette circonſtanconſtance de l'azimuth. Et comme cette conſidération deviendroit abſolument néceſſaire, ſi la figure de la terre differoit plus conſiderablement de la ſphérique, cette recherche pourra apporter quelque uſage dans la réſolution d'autres queſtions.

§. 2. M. de Maupertuis a toujours regardé la lune, comme ſi elle ſe trouvoit dans le plan du meridien, & dans ce cas il n'y a aucun doute, que la lune ne doive paroitre dans le même cercle vertical, ſoit qu'elle ſoit regardée de la ſurface de la terre, ou de ſon centre. Mais dès que la lune eſt vuë hors du plan du meridien, non ſeulement ſa diſtance au zenith, mais auſſi ſon azimuth, doit ſouffrir quelque altération de la parallaxe; puiſque la droite tirée du centre de la terre à la lune ſera non ſeulement moins inclinée au plan horizontal, mais elle ne le coupera plus dans le même azimuth. Pour ſe mieux convaincre de cette verité on n'a qu'à concevoir un plan parallele à l'horizon, qui paſſe par le centre de la terre; & comme l'angle, que fait la droite tirée de la ſurface de la terre à la lune, avec le plan horizontal, marque la hauteur apparente, & la perpendiculaire baiſſée de la lune ſur l'horizon, l'azimuth apparent; ainſi l'angle, que fait la droite tirée du centre de la terre à la lune avec ce plan parallele à l'horizon, qui paſſe par le centre de la terre, ſera la meſure de ſa hauteur vraie, & la perpendiculaire baiſſée de la lune ſur ce même plan y marquera un point, d'où la droite tirée au centre donnera à connoitre l'azimuth vrai de la lune. Ces deux choſes rapportées au centre étant differentes que ſi on les rapportoit à la place du ſpectateur, il en réſultera une double correction de la place de la lune, l'une qui regarde la hauteur de la lune, & l'autre pour l'azimuth. Je nommerai la premiere correction la parallaxe de la hauteur, & l'autre la parallaxe de l'azimuth.

§. 3. Pour entreprendre cette recherche, je commence par conſiderer la figure de la terre. Soient E & F les poles de la terre, & C ſon centre: EAF ſoit un meridien tiré par la place du ſpectateur, que je ſuppoſe en M, & on ſait que la figure de ce meridien ſera une demi-ellipſe, par la révolution de laquelle autour de l'axe EF nait la figure Fig. 1

de

de la terre. Qu'on nomme le demi-axe $EC = FC = a$, & le demidiametre de l'équateur $AC = b$, & qu'on poſe $b = (1+n)\,a$, & ſuivant les meſures faites tant vers le pole, que ſous l'équateur le nombre n ſera à peu près $= \frac{1}{200}$. Qu'on tire par le point M la tangente TMV, qui repréſentera au ſpectateur la ligne meridienne, le point T étant dirigé vers le nord, & V vers le ſud, lorsque E eſt le pole boreal de la terre. De plus l'angle CTM donnera l'elevation du poſe au point M qui étant ſuppoſée connuë, ſoit cet angle ou l'elévation du pole $CTM = p$. Enſuite ayant tiré le rayon CM & la perpendiculaire à l'axe PM, avec la normale MN à la tangente MT, ſoit $CP = x$ & $PM = y$; & la nature de l'ellipſe donnera cette égalité:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)} \text{ ou } yy = bb - \frac{bb}{aa} xx$$

D'ou nous tirons la ſubnormale $PN = \frac{-ydy}{dx} = \frac{bb}{aa} x$, ou $PN = (1+n)^2 x$. Mais l'angle PMN étant egal à $PTM = p$, nous aurons $\tang p = \frac{PN}{PM} = \frac{(1+n)\,x}{\sqrt{(aa-xx)}}$; & partant $x = \frac{a \tang p}{\sqrt{(\tang p^2 + (1+n)^2)}}$, & $\sqrt{(aa-xx)} = \frac{(1+n)\,x}{\tang p} = \frac{(1+n)\,a}{\sqrt{(\tang p^2 + (1+n)^2)}}$; par conſequent $y = \frac{(1+n)^2\,a}{\sqrt{(\tang p^2 + (1+n)^2)}}$. Outre cela nous aurons $PN = \frac{(1+n)^2 a \tang p}{\sqrt{(\tang p^2 + (1+n)^2)}}$, & $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{(1+n)^2\, a \cot p}{\sqrt{(\tang p^2 + (1+n)^2)}}$, d'où il s'enſuit $\frac{PM}{PT} = \tang p$.

§. 4. Soit enſuite la diſtance du ſpectateur placé en M au centre C ou le rayon $CM = r$: & puiſque $rr = xx + yy$ nous aurons:

$rr =$

$$rr = \frac{aa(\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^4)}{\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^2}.$$

$$\& \; r = a\sqrt{\left(1 + \frac{n(1+n)^2(2+n)}{\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^2}\right)}$$

Or si n est un nombre fort petit, nous aurons par approximation:
$r = a(1 + n\,\mathrm{cos}\,p^2 + \frac{5}{2}n^2 \mathrm{sin}\,p^2 \mathrm{cos}\,p^2 + n^3 \mathrm{sin}\,p^2 \mathrm{cos}\,p^2 (2 - \frac{13}{2}\mathrm{cos}\,p^2) + \&c.)$
où il suffit pour la terre, ou $n = \frac{1}{200}$ de prendre les deux premiers termes: $r = a(1 + n\,\mathrm{cos}\,p^2)$ ou $r = (1+n)\,a\,(1 - n\,\mathrm{sin}\,p^2)$. Depuis j'ai besoin pour mon dessein de savoir l'angle CMT, que le rayon de la terre CM fait avec la meridienne TMV: soit cet angle CTM $= \Phi$; & puisque tang TCM $= \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PC}} = \frac{x}{y}$, nous aurons tang TCM $= \frac{(1+n)^2}{\mathrm{tang}\, p}$ & ajoutant cet angle TCM à CTM $= p$, pour avoir leur somme CMV, nous trouverons

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{CMV} = \frac{\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^2}{-n(2+n)\,\mathrm{tang}\, p} \quad \& \text{ partant}$$

$$\mathrm{tang}\,\Phi = \frac{\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^2}{n(2+n)\,\mathrm{tang}\, p} : \text{ d'où l'on déduira:}$$

$$\mathrm{sin}\,\Phi = \frac{\mathrm{cos}\,p\,(\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^2)}{\sqrt{(\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^4)}} \;\&\; \mathrm{cos}\,\Phi = \frac{n(2+n)\,\mathrm{sin}\,p}{\sqrt{(\mathrm{tang}\, p^2 + (1+n)^4)}}$$

Par les approximations nous trouverons:

$$\mathrm{sin}\,\Phi = 1 - 2nn\,\mathrm{sin}\,p^2\,\mathrm{cos}\,p^2 - 2n^3\,\mathrm{sin}\,p^2\,\mathrm{cos}\,p^2\,(1 - 4\,\mathrm{cos}\,p^2)\;\&c.$$

$$\&\; \mathrm{cos}\,\Phi = 2n\,\mathrm{sin}\,p\,\mathrm{cos}\,p + nn\,\mathrm{sin}\,p\,\mathrm{cos}\,p\,(1 - 4\,\mathrm{cos}\,p^2) + 4n^3\,\mathrm{sin}\,p\,\mathrm{cos}\,p^3\,(2 - 3\,\mathrm{cos}\,p^2)$$

dans lesquelles expressions on peut rejetter les derniers termes, comme extremement petits.

§. 5. Ces valeurs r & Φ étant trouvées de l'élevation du pole donnée $= p$, soit maintenant TMQ le plan horizontal tiré par le lieu *Fig. II.*

lieu du ſpectateur M, dans lequel ſoit TMV la ligne meridienne, dont le bout T tend vers le nord, & l'autre bout V vers le ſud. Que la lune ſe trouve actuellement en L, d'où l'on conçoive baiſſée au plan horizontal la perpendiculaire LQ, & ayant tiré les droites ML & MQ, la ligne ML marquera la diſtance de la Lune au ſpectateur, l'angle LMQ la hauteur de la Lune obſervée, & l'angle TMQ ſon azimuth obſervé. Nommons donc

La diſtance de la Lune au ſpectateur $ML = x$
La hauteur de la Lune obſervée $LMQ = h$
& l'azimuth obſervé ou l'angle $TMQ = k$.

De là nous tirerons :

$$LQ = x \sin h \quad \& \quad MQ = x \cos h.$$

§. 6. Soit C le centre de la terre, & on aura le rayon $MC = r$ & l'angle $CMT = \Phi$, où il faut remarquer que le plan CMT eſt perpendiculaire au plan horizontal TMQ. Qu'on conçoive maintenant par le centre de la terre C un plan tCq parallele au plan horizontal TMQ, dans lequel la ligne tCv ſoit parallele à la meridienne TMV, à laquelle on baiſſe du point M la perpendiculaire MN, & à cauſe de $MC = r$ & de l'angle $MCN = \Phi$ nous aurons $MN = r \sin \Phi$ & $CN = r \cos \Phi$. Depuis la perpendiculaire LQ étant prolongée jusqu'au plan tCq, y ſera auſſi perpendiculaire, & il ſera $Qq = MN = r \sin \Phi$, & tirant la droite Nq, elle ſera parallele & egale à $MQ = x \cos h$, & à cauſe du parallelisme des plans TMQ, tNq l'angle tNq ſera égal à l'angle TMQ, c. à. d. à l'azimuth obſervé : d'où il s'enſuit que ſi l'on regardoit la lune du point N, par le rayon LN, on l'obſerveroit au même azimuth tNq, que du point propoſé M : & c'eſt la raiſon, que dans l'hypotheſe de la terre ſpherique, où le rayon eſt partout perpendiculaire au plan horizontal, ou le centre en N, la diverſité des points de vuë de M & de N ne change rien dans l'azimuth de la Lune.

§. 7. Or il n'en eſt pas de même, lorsqu'on regarde la Lune du vrai centre C; car tirant les lignes CL & Cq, puisque Lq eſt perpendipendiculaire au plan horizontal conçu passer par le centre C ; l'angle qCL donnera la vraie hauteur de la Lune, & l'angle tCq son vrai azimuth. Soit donc

La distance de la Lune au centre de la terre CL $= z$
La vraie hauteur de la Lune LCq $= v$
& le vrai azimuth ou l'angle tCq $= u$.

Et la difference entre les hauteurs h & v sera la parallaxe de la hauteur observé ; & la difference entre les azimuths k & u la parallaxe de l'azimuth observé.

§. 8. Cela remarqué nous aurons :

la perpendiculaire Lq $= x \sin h + r \sin \Phi$

& dans le triangle CNq il y a connu :

L'angle CNq $= k$.
le coté Nq $=$ MQ $= x \cos h$
& le coté NC $= r \cos \Phi$

d'où l'on obtiendra :

le coté Cq $= \sqrt{(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h \cos \Phi \cos k)}$.

Maintenant puisque l'angle tNq est l'azimuth observé & l'angle tCq le vrai azimuth, l'angle CqN sera la parallaxe de l'azimuth, qui doit être ajouté à l'azimuth observé TMQ. Or le sinus de cet angle CqN sera $=$

$$\frac{\sin k . \mathrm{CN}}{\mathrm{C}q} = \frac{r \cos \Phi \sin k}{\sqrt{(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h . \cos \Phi \cos k)}}.$$

Ou nous aurons :

$$\sin (u-k) = \frac{r \cos \Phi \sin k}{\sqrt{(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h . \cos \Phi . \cos k)}}$$

$$\& \cos (u-k) = \frac{x \cos h - r \cos \Phi \cos k}{\sqrt{(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h \cos \Phi \cos k)}}$$

 & par

& par conféquent :

$$\text{tang}\,(u-k) = \frac{r \operatorname{cof} \Phi \operatorname{fin} k}{x \operatorname{cof} h - r \operatorname{cof} \Phi \operatorname{cof} k}$$

ce qui eft la parallaxe de l'azimuth.

§. 9. Pour la hauteur vraie de la Lune $= v$, puisqu'elle eft égale à l'angle qCL, nous en avons d'abord la tangente $= \frac{Lq}{Cq}$, c. à. d.

$$\text{tang}\ v = \frac{x \operatorname{fin} k + r \operatorname{fin} \Phi}{\sqrt{(xx \operatorname{cof} h^2 + rr \operatorname{cof} \Phi^2 - 2rx \operatorname{cof} h \operatorname{cof} \Phi \operatorname{cof} k)}}$$

ou bien ayant pofé CL $= z$, nous aurons :

$$\operatorname{fin} v = \frac{x \operatorname{fin} h + r \operatorname{fin} \Phi}{z}$$

Mais la diftance de la Lune au centre de la terre CL $= z$, fe trouve par le triangle CqL :

$$z = \sqrt{\left(xx + rr + 2rx\ (\operatorname{fin} h \operatorname{fin} \Phi - \operatorname{cof} h \operatorname{cof} \Phi \operatorname{cof} k)\right)}.$$

Or les tables aftronomiques, d'où nous tirons la parallaxe de la lune, marquent pour chaque tems non pas la diftance de la lune au fpectateur, mais la diftance au centre de la terre C; & partant la quantité z doit être regardée comme connue, de laquelle il faut déterminer la valeur de x par le moien de cette équation:

$$zz = xx + rr + 2rx\ (\operatorname{fin} h \operatorname{fin} \Phi - \operatorname{cof} h \operatorname{cof} \Phi \operatorname{cof} k)$$

§. 10. Puisque les deux derniers termes font fort petits par rapport aux premiers, il y aura à peu prés $x = z$, & cette valeur étant fubftituée dans le dernier terme, nous en tirerons une valeur plus approchante de la verité:

$$x = \sqrt{(zz - 2rz\ (\operatorname{fin} h \operatorname{fin} \Phi - \operatorname{cof} h \operatorname{cof} \Phi \operatorname{cof} k) - rr.)} \text{ ou}$$

$$x = z - r\ (\operatorname{fin} h \operatorname{fin} \Phi - \operatorname{cof} k \operatorname{cof} \Phi \operatorname{cof} h)$$

qui

qui peut être suffisante, mais si on la souhaite plus exacte, qu'on cherche un angle ψ tel que

$$\cos\psi = \sin h \sin \Phi - \cos h \cos \Phi \cos k$$

& on en déduira:

$$x = z - r\cos\psi - \frac{rr}{2z}\sin\psi^2 - \frac{r^4}{8z^3}\sin\psi^4 - \&c.$$

Depuis les parallaxes cherchées seront exprimées ainsi

I. La parallaxe de l'azimuth $u-k$:

$$\operatorname{tang}(u-k) = \frac{r\cos\Phi\sin k}{z\cos h - r\sin h(\cos h\sin\Phi + \sin h\cos\Phi\cos k)}$$

II. La hauteur vraie, v:

$$\sin v = \sin h - \frac{r\sin h\cos\psi}{z} + \frac{r\sin\Phi}{z} - \frac{rr}{2zz}\sin h\sin\psi^2 \text{ ou}$$

$$\sin v = \sin h - \frac{r}{z}\cos h(\cos h\sin\Phi + \sin h\cos\Phi\cos k) - \frac{rr}{2zz}\sin h\sin\psi^2$$

§. 11. Puisque la fraction $\frac{r}{z}$ étant environ $= \frac{1}{60}$ est fort petite, & l'angle Φ ne differe qu'insensiblement d'un angle droit, son cosinus $\cos\Phi$ sera extremement petit, & pourra être rejetté dans les termes, qui sont fort petits d'eux mêmes. Or pour avoir la veritable parallaxe de la hauteur, nous la trouverons:

$$\sin(v-h) = \frac{r}{z}(\cos h\sin\Phi + \sin h\cos\Phi\cos k) + \frac{2zz}{rr}\operatorname{tang} h\sin\psi^2$$
$$+ \frac{rr}{2zz}\operatorname{tang} h(\cos h\sin\Phi + \sin h\cos\Phi\cos k)^2$$

& négligeant dans les derniers termes le $\cos\Phi$, nous aurons:

$$\sin(v-h) = \frac{r}{z}\cos h\sin\Phi + \frac{r}{z}\sin h\cos\Phi\cos k + \frac{2zz}{rr}\operatorname{tg.} h(1+\sin\Phi^2\cos 2h)$$

ou puisque dans ce dernier terme il est permis de supposer $\sin\Phi = 1$,

 à cause

à cauſe de $\frac{1 + \cos 2h}{2} = \cos h^2$, la parallaxe de la hauteur $v - h$ ſe trouvera par cette formule

$$\sin(v-h) = \frac{r}{z}\cos h \sin\Phi + \frac{r}{z}\sin h \cos\Phi \cos k + \frac{rr}{zz}\sin h \cos h$$

qu'il faut ajouter à la hauteur obſervée pour avoir la veritable. De même il faut ajouter la parallaxe de l'azimuth $u-k$ à l'azimuth obſervé, & compté depuis le nord, cette parallaxe ſe trouvant de cette formule.

$$\operatorname{tang}(u-k) = \frac{r\cos\Phi \sin k}{z\cos h - r\sin h(\cos h \sin\Phi + \sin h \cos\Phi \cos k)}$$

Or des formules trouvées là haut nous tirons:

$r\sin\Phi = a(1 + n\cos p^2 + \frac{1}{2}nn\sin p^2 \cos p^2 - \frac{1}{2}n^3 \sin p^2 \cos p^4)$ &

$r\cos\Phi = a(2n\sin p\cos p - nn\sin p\cos p(2\cos p^2 - 1) + 7n^3\sin p\cos p^3(2-3\cos p^2))$

ou bien

$$r\sin\Phi = a((1+\tfrac{1}{4}n)^2 + \tfrac{1}{2}n\cos 2p - \tfrac{1}{16}nn\cos 4p) \;\&$$
$$r\cos\Phi = a(n\sin 2p - \tfrac{1}{4}nn\sin 4p)$$

en négligeant les termes qui contiennent n^3.

§. 12. Que la lune ſoit obſervée à l'horizon, de ſorte que la hauteur apparente $h = 0$, or ſon azimuth reſte $= k$. Dans ce cas la parallaxe de la hauteur ſera $= v$, & on aura

$$\sin v = \frac{r}{z}\sin\Phi = \frac{a}{z}(1 + n\cos p^2 + \tfrac{1}{2}nn\sin p^2\cos p^2)$$

qui ſera la parallaxe horizontale, & on voit qu'elle ne dépend plus de l'azimuth de la lune k. Donc ſous l'équateur ou $p = 0$ la parallaxe horizontale de la lune ſera $= \frac{a}{z}(1+n) = \frac{b}{z}$: & ſous l'un ou l'autre pole $= \frac{a}{z}$. Comme la parallaxe horizontale, qu'on trouve dans

les

les tables astronomiques, eſt tirée des Obſervations faites ou à Paris, où à Londres : c'eſt à dire environ ſous le 49^{me} degré de l'elevation du pole, en poſant $p = 49°$, la parallaxe horizontale de la Lune tirée des tables aſtronomiques ſera $= \frac{a}{z}(1 + 0{,}43041\,n + 0{,}12258\,nn)$.

Et puisque par la figure de la terre eſt $n = \frac{1}{200}$, la parallaxe horizontale tabulaire ſera $= 1{,}002155\,\frac{a}{z}$: laquelle étant connue pour chaque tems propoſé, ſoit nommée $= \theta$, de ſorte que $\theta = 1{,}002155\,\frac{a}{z}$.

Or pour toute autre elevation du pole $= p$, ſoit la parallaxe horizontale de la Lune $= \pi$ à la meme diſtance de la lune à la terre, & on aura, ſin π ou $\pi = \frac{a}{z}\left(1 + \frac{1}{200}\,\text{coſ}\,p^2 + \frac{1}{80000}\,\text{ſin}\,p^2\,\text{coſ}\,p^2\right)$

& partant $\pi = \frac{\theta}{1{,}002155}\left(1 + \frac{1}{200}\,\text{coſ}\,p^2 + \frac{1}{80000}\,\text{ſin}\,p^2\,\text{coſ}\,p^2\right)$

Par conſéquent ſous l'équateur ſera la parallaxe horizontale de la lune $\pi = 1{,}00284\,\theta$, ou d'une $\frac{1}{352}$ partie plus grande que ſous l'elevation du pole $49°$. Mais ſous le pole la parallaxe horizontale de la lune ſera $\pi = 0{,}99785\,\theta$ ou d'une $\frac{1}{465}$ partie plus petite, que ſous l'elevation du pole de $49°$. Donc quand la parallaxe horizontale à l'elevation du pole de $49°$ eſt $= 60'$, elle ſera alors ſous l'équateur $= 60', 10'', 14'''$ & ſous le pole elle ſera $= 59', 52'', 15'''$. Donc la difference entre les parallaxes de l'équateur & des poles ſera $= 17'', 59'''$.

§. 13. C'eſt ainſi qu'on trouvera pour chaque endroit de la terre & pour chaque tems propoſé la parallaxe horizontale de la lune, par le le moyen des tables parallactiques, que je suppose justes pour l'elevation du pole de 49°. Et nommant cette parallaxe $= \pi$, on aura $\pi = \frac{r}{z} \sin \Phi$, & partant $\frac{r}{z} = \frac{\pi}{\sin \Phi}$. Laquelle étant trouvée, on obtiendra la parallaxe de l'azimuth, supposant la lune encore à l'horizon, & son azimuth $= k$, de sorte que $h = o$, par cette formule:

$$\tang (u-k) = \pi \sin k \cot \Phi = u - k = \frac{\pi \sin k}{\tang \Phi}$$

d'où l'on voit que cette parallaxe $u - k$ est à la parallaxe horizontale π en raison du sinus de l'azimuth, à la tangente de l'angle Φ. Cette parallaxe sera donc la plus grande, lorsque la lune se leve vers l'est, ou se couche vers l'oüest, où son azimuth k est $= 90$; & lorsque l'angle Φ est le plus petit; ce qui arrive sous l'elevation du pole p, quand tang $p = 1 + n$, ou sous l'elevation du pole de 45°, 8′ à cause de $n = \frac{1}{200}$ Dans ce cas il deviendra tang $\Phi = \frac{2(1+n)}{n(2+n)}$ & $u - k = \frac{n(2+n)}{2(1+n)}$ π si k: par conséquent si $k = 90$ & $n = \frac{1}{200}$ cette parallaxe de l'azimuth sera $= \frac{2}{401}\pi$. Dans ce cas donc, si la parallaxe horizontale de la hauteur π est 60′, la parallaxe horizontale de l'azimuth $k = 90°$ sera $= 17''$, $57'''$. Or dans ce cas la parallaxe de l'azimuth étant la plus grande, puisqu'elle ne monte qu'à 18″, erreur qui dans l'observation de l'azimuth est insensible, on voit bien qu'on se peut sans faute passer de cette correction de l'azimuth observé.

§. 14. Que la lune se trouve maintenant élevée sur l'horizon à la hauteur $= h$, & qu'elle soit observée à l'azimuth $= k$, les parallaxes tant de la hauteur h, que de l'azimuth k seront aisément determinées par la parallaxe horizontale de la hauteur $= \pi$, que je suppose

deja

dejà connuë. Car puisque $\frac{r}{z} = \frac{\pi}{\sin \Phi}$, la parallaxe à ajouter à la hauteur ſera:

$$\sin(v-h) = \pi \left(\cos h + \frac{\sin h \cos k}{\tan \Phi} \right) + \frac{\sin h \cos h}{\sin \Phi^2} \cdot \pi^2$$

ou puisque dans les parties du rayon il y a à peu près $\pi = \frac{1}{60}$, cette valeur ſera aſſez exacte pour le dernier terme, & ainſi la parallaxe de la hauteur ſera =

$$\pi \left(\cos h + \frac{\sin h \cos k}{\tan \Phi} + \frac{\sin h \cos h}{60 \sin \Phi^2} \right)$$

Or la parallaxe de l'azimuth ſe trouvera =

$$\frac{\pi \sin k}{\cos h \tan \Phi - \frac{1}{60} \sin h (\cos h \tan \Phi + \sin h \cos k)}$$

ſuppoſant dans le dénominateur $\pi = \frac{1}{60}$. Il eſt bien vrai qu'à une très grande hauteur, lorsque la lune ſe trouve près du zenith, cette correction peut devenir très conſiderable: mais dans ces cas l'azimuth même devient très incertain, & les Aſtronomes n'y ayant plus égard, on n'a pas beſoin de correction. Quand la lune eſt plus éloignée du zenith, la parallaxe de l'azimuth ſera aſſès exactement $= \frac{\pi \sin k}{\cos h \tan \Phi}$.

Enfin il faut encore remarquer, que quand la lune eſt obſervée au zenith même, de ſorte que $h = 90°$, la parallaxe n'evanouïra point entierement ſur la terre ſpheroïdique; elle ſera encore $= \frac{\pi}{\tan \Phi}$, dont la lune doit être approchée du pole. Cette parallaxe ſeroit la plus grande ſous l'elevation du pole de 45°, 8′, ſi la lune dans ces régions pouvoit monter au zenith, auquel cas elle ſeroit = 17″, 57‴, la parallaxe horizontale de la hauteur étant $\pi = 60'$.

§. 15. Si la terre étoit ſpherique, nous n'aurions pour la parallaxe de la hauteur que cette formule $\pi\left(\operatorname{cof} h+\frac{\operatorname{fin} h \operatorname{cof} h}{60}\right)$, dont on fait uſage dans l'Aſtronomie, & qui aura auſſi lieu ſous l'équateur & ſous les poles, quoique la figure de la terre ſoit elliptique. Mais pour les autres endroits de la terre, la parallaxe de la hauteur ſera pour l'ordinaire plus grande, que ſuivant la régle vulgaire. Car nous avons vû, que pour la hauteur $= h$, & l'azimuth $= k$ & ſous l'elevation du pole ou le rayon de la terre fait avec la meridienne un angle $= \Phi$, la parallaxe de la hauteur eſt $= \pi\left(\operatorname{cof} h+\frac{\operatorname{fin} h \operatorname{cof} k}{\operatorname{tang} \Phi}+\frac{\operatorname{fin} h \operatorname{cof} h}{60 \operatorname{fin} \Phi^2}\right)$ Car premiérement ſi l'angle Φ n'eſt pas droit, le dernier terme $\frac{\operatorname{fin} h \operatorname{cof} h}{60 \operatorname{fin} \Phi^2}$ devient plus grand, & la parallaxe par conſequent plus grande. Et ſi la lune ſe trouve dans la moitié boreale du ciel, ou que ſon azimuth k eſt moindre que 90°, le cof k étant poſitif, augmentera encore la parallaxe de la hauteur. Mais ſi la lune ſe rencontre dans la moitié meridionale du Ciel, le cof k devenant negatif, diminuera la parallaxe; de ſorte que ſi la lune paſſe par le meridien, où il y a cof $k = -1$, la parallaxe de la hauteur ſera $= \pi\left(\operatorname{cof} h-\frac{\operatorname{fin} h}{\operatorname{tang} \Phi}+\frac{\operatorname{fin} h \operatorname{cof} h}{60 \operatorname{fin} \Phi^2}\right)$ & puiſque dans les paſſages de la lune par le meridien il eſt de la derniere importance de connoitre exactement ſa parallaxe, il ſera d'autant plus néceſſaire d'avoir égard à ce changement de la parallaxe, qui réſulte de la figure de la terre, plus on tâche de porter la methode d'obſerver à un plus haut degré de perfection.

DE