1751

Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la terre

Leonhard Euler

RECHERCHES
SUR LA PRÉCESSION DES ÉQUINOXES, ET SUR LA NUTATION DE L'AXE DE LA TERRE,

PAR M. EULER.

Planc

LEMME I.

1. *Supposant la terre spherique* A E B F & *composée d'une matiere homogene, si la masse de la terre est nommée* $= M$ & *son rayon* $CA = CE = a$, *le moment d'inertie de la terre autour d'un axe quelconque, qui passe par son centre, sera* $= \frac{2}{5} Maa$. Fig.

COROLLAIRE.

2. Quoique la terre ne soit pas spherique, puisque sa figure ne differe de la spherique que très peu, on comprend aisément, que son moment d'inertie se peut néantmoins exprimer par $\frac{2}{5} Maa$. Car cette expresion ne changera pas sensiblement, soit qu'on prenne pour a son demi-axe, ou le demi-diametre de son équateur.

REMARQUE.

3. Il faut se souvenir ici, que je nomme le moment d'inertie d'un corps quelconque par rapport à un certain axe, autour duquel il doit tourner, ce qui résulte, lorsqu'on multiplie chaque particule du corps par le quarré de sa distance à cet axe, & qu'on assemble tous ces produits élémentaires dans une somme. Car alors cette somme donnera ce que je nomme le moment d'inertie de ce corps autour de cet axe.

LEMME II.

4. *Si la terre étant supposée spherique, a autour de son centre* un

un noyau également ſpherique a e b f, dont la denſité ſoit à celle de la croute comme $1 + \nu$ à 1; *alors nommant la maſſe de toute la terre* $= M$, *le rayon* $CA = a$, & *le rayon du noyau* $Ca = \alpha$, *le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, qui paſſe par ſon centre, ſera* $= \frac{2}{5} M. \frac{a^5 + \nu \alpha^5}{a^3 + \nu \alpha^3}$

COROLLAIRE I.

5. Si le noyau eſt plus denſe que le reſte de la terre, la valeur de ν ſera poſitive, mais ſi le noyau eſt moins denſe que la croute, ν ſera un nombre negatif: or ſi la terre étoit tout à fait creuſe en dedans, ou que l'eſpace *a e b f* fut vuide, il ſeroit $\nu = -1$, & dans ce cas le moment d'inertie deviendroit $= \frac{2}{5} M. \frac{a^5 - \alpha^5}{a^3 - \alpha^3}$

COROLL. II.

2. On ſera encore d'accord, qu'une petite aberration de la figure ſpherique ne change pas ſenſiblement l'expreſſion du moment d'inertie, pourvu que la figure du noyau ſoit auſſi à peu près ſpherique. Du moins il eſt bien certain, que dans l'application de ces deux propoſitions à la préceſſion des équinoxes, une petite difference ne ſauroit être d'aucune conſéquence; puisqu'on ſera obligé de ſe contenter d'approximations.

HYPOTHESE.

7. La terre ayant une fois reçu un mouvement rotatoire autour d'un axe, qui convient avec ſon axe de figure, ou qui n'en differe que très peu, elle conſervera toujours ce mouvement uniforme, & ſon axe de rotation demeurera toujours le même & ſera dirigé vers les mêmes points du ciel; à moins que la terre ne ſoit aſſujettie à des forces étrangeres, qui pourroient cauſer quelque changement, ou dans la viteſſe du mouvement rotatoire, ou dans la poſition de l'axe de rotation.

REMAR-

REMARQUE.

8. Pour qu'un corps puiſſe tourner librement autour d'un axe, il ne ſuffit pas que cet axe paſſe par ſon centre de gravité, il faut de plus, que toutes les forces centrifuges ſe maintiennent en équilibre: & quand cette derniére condition n'a pas lieu, il eſt impoſſible que l'axe de rotation demeure le même, mais il ſera continuellement changé par les forces centrifuges du corps. Il dépend donc uniquement de la diſtribution de la matiére de la terre, ſi l'axe autour duquel elle tourne, eſt doüé de cette propriéte ou non? Car ſi toutes les forces centrifuges ne ſe détruiſoient pas mutuellement, les poles de la terre ſouffriroient des changemens, quand même il n'y auroit point de forces étrangeres. Ce n'eſt donc qu'une pure ſuppoſition que je fais, que l'axe de la terre, autour duquel elle tourne, ne ſoit pas aſſujetti à un tel changement; mais il ſemble que cette ſuppoſition eſt confirmée par les phenomenes, & elle le ſera tout à fait, quand je ferai voir, qu'il ne ſe trouve actuellement d'autres changemens dans les poles, que ceux, qui ſont cauſés par les forces du Soleil & de la Lune.

COROLL.

9. De là il s'enſuit, que toute force, dont la direction paſſe par le centre de gravité de la terre, ne change rien, ni dans ſon mouvement rotatoire, ni dans la poſition de ſon axe, & que ce n'eſt que des forces, qui agiſſent ſur la terre, dont la direction ne paſſe pas par le centre de gravité, qu'il faut expliquer les changemens qu'on obſerve dans ſes poles.

Probleme I.

10. *Toutes les parties de la terre étant attirées vers un point fixe* O, *dont les forces ſoient proportionelles à une puiſſance quelconque des diſtances, trouver la force totale dont la terre ſera ſollicitée; ſuppoſant la terre ſpheroïdique, & compoſée d'une matiere homogene.* Fig. II.

 SOLU-

SOLUTION.

Soit le demi-axe de la terre CA $=$ CB $= a$; le demi-diametre de l'équateur CE $=$ CF $= e$: & du point attirant O qu'on baisse sur le plan de l'équateur la perpendiculaire OT, & ayant tiré les droites CT, CO, soit CT $= f$, TO $= g$, CO $= h = \sqrt{(ff+gg)}$. Que la force attirante du point O à une distance quelconque z soit $= \frac{k^n}{z^n}$, ou que cette force soit réciproquement proportionnelle à la puissance z^n de la distance. Soit de plus la masse de la terre $=$ M. Cela posé on trouve par la Theorie des forces, que la force totale, dont la terre est sollicitée vers le point O, se résout en ces deux forces.

1. La force selon CO qui est $=$

$$\frac{Mk^n}{h^n}\left(1-\frac{(n+1)aa-4(n+1)ee}{10hh}+\frac{(n+1)(n+3)(aagg+eeff)}{10h^4}\right)$$

2. La force selon TO qui est $= \frac{n+1}{5} M \frac{k^n}{h^n} \cdot \frac{g(ee-aa)}{h^3}$

On pourroit bien réduire ces deux forces à une seule, qui passeroit par le point O & par un point de l'axe un peu au dessous du centre C; mais pour notre dessein il conviendra mieux de se servir de ces deux forces selon CO & TO. C.Q F.T.

COROLL. I.

11. Comme la direction de la force selon CO passe par le centre de la terre, elle ne contribuë rien, ni au mouvement de rotation de la terre, ni au changement de ses poles. Et, si la terre n'étoit sollicitée que par cette seule force, ni son mouvement de rotation, ni la position de ses poles, ne souffriroit aucun changement.

COROLL. II.

12. Ce n'est donc qu'à l'autre force selon TO, qu'il faut avoir égard, si l'on veut rechercher les changemens, que l'attraction du point O peut

O peut produire dans le mouvement de rotation de la terre, & dans la ſituation de ſes poles. Et pour cet effet on comprend aiſément, que ces effets ne réſultent que du moment de cette force.

COROLL. III.

13. Or le moment de cette force ſelon TO ſe raporte à un diametre de l'équateur, qui eſt perpendiculaire au plan ABO, qui eſt déterminé par l'axe de la terre AB & le point O: & le moment de cette force ſera $= \frac{n+1}{5} \cdot M. \frac{k^n}{h^n} \cdot \frac{g(ee-aa)}{h^3}$. CT. Ce moment ſera donc $= \frac{n+1}{5} \cdot M. \frac{k^n}{h^n} \cdot \frac{fg(ee-aa)}{h^3}$.

COROLL. IV.

14. On pourra donc concevoir une force équivalente AG, appliquée perpendiculairement à l'axe en A, & qui tend à éloigner le point A du point O; cette direction AG étant pareillement ſituée dans le plan ABO. Donc le moment de cette force ſera:

$$AG.\ AC = \frac{n+1}{5}. M. \frac{k^n}{h^n} \cdot \frac{fg(ee-aa)}{h^3}.$$

Et ce moment produira le même effet ſur le mouvement rotatoire de la terre, que la force dont elle eſt ſollicitée vers le point O.

COROLL. V.

15. Si nous nommons l'angle $ACO = \Phi$, qui marquera la diſtance apparente du point O au pole de la terre A, vuë du centre de la terre, nous aurons $\frac{f}{n} = \sin\Phi$ & $\frac{g}{n} = \cos\Phi$.

Donc le moment en queſtion ſera

$$AG.\ AC = \frac{n+1}{5}. \ M. \frac{k^n}{h^{n+1}} (ee-aa) \sin\Phi \cos\Phi$$

 COROLL.

COROLL. VI.

16. Il eſt clair que ce moment évanouïroit, ſi la terre étoit ſpherique, puisqu'il ſeroit alors $e = a$. Mais ſi le diametre de l'équateur EF ſurpaſſe l'axe de la terre AB, ou ſi $e > a$, alors ce moment eſt affirmatif, ou tel qu'il eſt préſenté dans la figure. Mais ſi le diametre de l'équateur étoit plus petit, que l'axe de la terre, ce moment deviendroit negatif, & produiroit par conſéquent un effet contraire.

COROLL. VII.

17. Ce même moment deviendra encore negatif, quoiqu'il ſoit $e > a$, ſi l'angle ACO ſera obtus, ou plus grand qu'un droit. Car ſi $\Phi > 90^c$, ſon coſinus ou $\cos \Phi$ deviendra negatif: & partant auſſi le moment. On reconnoit de là auſſi, que ce moment évanouïra lorsque l'angle ACO eſt droit, & que ce même moment deviendra le plus grand, lorsque l'angle $ACO = \Phi$ ſera un demi-droit, ou un droit & demi.

Probleme II.

18. *La terre étant ſuppoſée avoir un noyau $aebf$ ſpheroïdique autour de ſon centre, ſi toutes ſes parties ſont attirées vers un centre de forces O, qui attire en raiſon des puiſſances quelconques des diſtances, trouver le moment de force, dont la terre ſera ſollicitée.*

SOLUTION.

Soit comme auparavant le demi-axe $CA = CB = a$, le demi-diametre de ſon équateur $CE = CF = e$; & pour le noyau ſoit le demi-axe $Ca = Cb = \alpha$, & le demi-diametre de ſon équateur $Ce = Cf = \varepsilon$. Enſuite ſoit la denſité du noyau à celle de la croute comme $1 + \nu$ à 1. Depuis ayant baiſſé du point O ſur le plan de l'équateur la perpendiculaire OT, ſoient $CT = f$, $TO = g$, $CO = h = \sqrt{(ff + gg)}$: or à la diſtance $= z$ ſoit la force attractrice du point $O = \frac{k^n}{z^n}$. Cela poſé marquant la maſſe de toute la terre $= M$, la force dont toute la terre eſt ſollicitée vers le point O produira le

même

même effet sur son mouvement de rotation, que si l'on appliquoit à l'axe dans le plan ABO une certaine force AG, dont

le moment feroit $= \frac{(n+1)Mk^n fg}{5h^{n+3}} \cdot \frac{aee(ee-aa)+\nu\alpha\varepsilon\varepsilon(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{aee+\nu\alpha\varepsilon\varepsilon}$

Ou bien posant l'angle $ACO = \Phi$, ce moment sera

$$AG.AC = \frac{(n+1)Mk^n \sin\Phi \cos\Phi}{5h^{n+1}} \cdot \frac{aee(ee-aa)+\nu\alpha\varepsilon\varepsilon(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{aee+\nu\alpha\varepsilon\varepsilon}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

19. Si l'aberration de la figure spherique, tant de la terre même que de son noyau, est extrèmement petite, comme on peut supposer seurement, ce moment sera assès exactement

$$AG.AC = \frac{(n+1)Mk^n \sin\Phi \cos\Phi}{5h^{n+1}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu\alpha^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^3+\nu\alpha^3}$$

COROLL. II.

20. Si le noyau étoit exactement spherique, ce moment feroit

$$AG.AC = \frac{(n+1)Mk^n \sin\Phi \cos\Phi}{5h^{n+1}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)}{a^3+\nu\alpha^3}$$

Or si toute la terre étoit composée de matiére uniforme, ce moment

feroit $= \frac{(n+1)Mk^n \sin\Phi \cos\Phi}{5h^{n+1}}(ee-aa)$. Donc le moment

pour la terre douée d'un noyau spherique sera plus petit que celui pour la terre homogene, si le noyau est plus dense que la croute. Or si le noyau étoit moins dense, le premier moment surpasseroit l'autre.

COROLL. III.

21. Si le point O attiroit exactement en raison réciproque des quarrés des distances, ou qu'il fut $n = 2$, alors le moment cherché feroit :

AG.

$$AG.\ AC = \frac{3 M kk \sin \Phi \cos \Phi}{5 h^3} \cdot \frac{a^3 (ee - aa) + \nu \alpha^3 (\epsilon\epsilon - \alpha\alpha)}{a^3 + \nu \alpha^3}$$

& ce fera le cas de la force du foleil fur la terre.

COROLL. IV.

22. Si la force du point O étoit en raifon directe des diftances, il feroit $n = -1$, & partant ce moment évanouïroit tout à fait. Ce qui devient d'abord affés clair, pour peu qu'on réflechiffe à la nature de cette force.

COROLL. V.

23. Si la force étoit compofée de deux parties, ou qu'elle fut exprimée de la forte $\frac{k^n}{z^n} \pm \frac{i^m}{z^m}$, on comprend aifément que le moment cherché feroit exprimé de cette façon :

$$\frac{M \sin \Phi \cos \Phi}{5 h} \left(\frac{(n+1) k^n}{h^n} \pm \frac{(m+1) i^m}{h^m} \right) \frac{a^3 (ee - aa) + \nu \alpha^3 (\epsilon\epsilon - \alpha\alpha)}{a^3 + \nu \alpha^3}$$

COROLL. VI.

§. 24. Donc fi la force de la lune étoit exprimée pour la diftance z de la forte $\frac{k^2}{h^2} - \delta$, où δ marque une quantité conftante, comme plufieurs phenomenes le paroiffent confirmer, à caufe de $n = 2$, $m = 0$ & $\frac{i^m}{h^m} = \delta$, le moment en queftion feroit, en fuppofant la lune en O

$$AG.\ AC = \frac{M \sin \Phi \cos \Phi}{5 h} \left(\frac{3 kk}{hh} - \delta \right) \frac{a^3 (ee - aa) + \nu \alpha^3 (\epsilon\epsilon - \alpha\alpha)}{a^3 + \nu \alpha^3}$$

COROLL. VII.

§. 25. Ce moment feroit donc plus petit, que fi la force de la lune fuivoit exactement la raifon renverfée des quarrés des diftances. Il fera toujours à propos d'avoir égard à cette conftante δ dans le calcul, que j'entreprendrai fur la variation des poles de la terre, pour voir fi cette nouvelle hypothefe fe confirme ou non.

Proble-

Probleme. III.

§. 26. *La terre pendant qu'elle tourne autour de l'axe* CA *étant sollicitée par une force* AG *appliquée à l'extremité* A *de cet axe, dont le moment* AG. AC *est connu, trouver le changement instantané, qui sera causé par cette force dans l'axe de rotation.*

SOLUTION.

Soit C le centre de la terre, & CA l'axe de la terre prolongé jusqu'au Ciel, autour duquel la terre tourne présentement dans le sens EHF; dont la vitesse soit telle, que dans un tems infiniment petit $= dt$, elle décrive autour de son axe A C un angle $= ds$: & qu'on nomme comme auparavant la masse de la terre $=$ M, & son demi-axe $= a$. Dans cet instant donc A sera le pole de la terre marqué dans le Ciel, autour duquel la terre continueroit à tourner uniformément, si elle n'étoit sollicitée par aucune force étrangere. Mais comme elle est sollicitée par la force AG, dont le moment AG. AC soit $=$ S, cette force, puisqu'elle passe par l'axe de la terre ne changera rien dans la vitesse de rotation; mais elle obligera la terre de tourner autour d'un autre axe, ce qui se fera en sorte qu'après un tems infiniment petit $= dt$ le pole de la terre ne réponde plus au point A dans le Ciel, mais à un autre point a situé dans le meridien, qui est eloigné de 90° du meridien AE, qui répond à la direction de la force A G selon le sens du mouvement rotatoire. Et par des principes de la Mecanique, que j'expliquerai ailleurs, on trouve que ce changement, ou l'angle AC a, sera exprimé de la sorte:

$$ACa = \frac{S\,dt^2}{2ds} : \tfrac{2}{5} M\,aa = \frac{5 S\,dt^2}{4 M\,aa\,ds}.$$

où $\frac{2}{5}$ M $a\,a$ marque le moment d'inertie de la terre, en la supposant homogene. Or si la terre avoit un noyau autour de son centre, dont le rayon $= \alpha$, & la densité à celle de la croute comme $1 + \nu : 1$, alors au lieu de $\frac{2}{5}$ M $a\,a$ il faudroit écrire $\frac{2}{5}$ M. $\frac{a^5 + \nu\alpha^5}{a^3 + \nu\alpha^3}$: & partant le changement inſtantané du pole ſeroit:

$$AC\,a = \frac{S\,dt^2}{2\,ds} : \tfrac{2}{5}\,M\,\frac{a^5 + \nu\alpha^5}{a^3 + \nu\alpha^3} = \frac{5\,S\,dt^2\,(a^3 + \nu\alpha^3)}{4\,M\,ds\,(a^5 + \nu\alpha^5)}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 27. L'effet d'une telle force AG donc conſiſtera en ce que les poles autour desquels la terre tourne, répondent continuellement à d'autres points du Ciel. Et il eſt auſſi clair, que la ligne Ca paſſera par d'autres points de la terre que la ligne CA, de ſorte que les poles marqués ſur la terre changeront auſſi continuellement. Mais ils differeront toujours ſi peu des extremités de l'axe de la terre, que la difference n'étant qu'environ $1\frac{1}{3}$ tierce eſt tout à fait imperceptible.

COROLL. II.

§. 28. Si nous concevons dans le meridien AF oppoſé à AE un centre des forces O, vers lequel la terre eſt attirée, nous avons vu que de cette force réſulte un moment tel que AG. AC $=$ S: donc l'effet de cette force ſera le même, qui vient d'être déterminé dans la ſolution de ce probleme.

COROLL. III.

§. 29. Donc ſi nous poſons la diſtance de ce centre de forces à la terre CO $= h$, l'angle ACO ou l'arc AO $= \Phi$, la force à la diſtance $z = \frac{k^n}{z^n}$, le moment AG. AC ſera

$$S = \frac{(n+1)\,M\,k^n}{5\,h^{n+1}}\ \text{ſi}\,\Phi\ \text{coſ}\,\Phi\,(ee - aa) \qquad (15)$$

ſuppoſant la terre homogene. Par conſéquent le changement du pole cauſé par cette force ſera

$$AC\,a = \frac{(n+1)\,k^n}{4\,h^{n+1}}\,.\ dt^2\,(ee - aa)\ \text{ſin}\,\Phi\ \text{coſ}\,\Phi$$

COROLL. IV.

§. 30. Si la terre n'eſt pas homogene, mais qu'elle ait un noyau autour de ſon centre, dont le demi-axe $= \alpha$, le demi-diametre de ſon équa-

équateur $= \epsilon$, & la densité à celle de la croute, comme $1+\nu$ à 1, nous avons vu qu'il sera :

$$S = \frac{(n+1)M k^n \sin\Phi \cos\Phi}{5 h^{n+1}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu\alpha^3(\epsilon\epsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu\alpha^3}$$

d'où le changement causé dans le pole sera

$$ACa = \frac{(n+1)k^n}{4h^{n+1}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu\alpha^3(\epsilon\epsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu\alpha^5} \cdot \frac{dt^2}{ds} \sin\Phi \cos\Phi$$

REMARQUE.

31. Pour ramener l'expression du tems à des quantités plus connuës, considerons le moyen mouvement de la terre. Soit la distance moyenne de la terre au soleil $= b$, la force attractive du soleil sur la terre $= \frac{cc}{bb}$, & que la terre parcoure de son mouvement moyen pendant l'elément du tems dt l'angle au soleil $= dv$: Cela posé, par les mémes principes de mecanique on trouvera $b\,dv^2 = \frac{cc\,dt^2}{2bb}$; d'où nous aurons $dt^2 = \frac{2b^3}{cc}dv^2$. Nous n'avons donc qu'à écrire cette valeur $\frac{2b^3}{cc}dv^2$ au lieu de dt^2, pour exprimer le tems par le moyen mouvement du soleil. Ainsi pendant que le soleil avance par son mouvement moyen de l'angle dv, & la terre par son mouvement diurne de l'angle ds, le changement du pole dans le cas du coroll. préced. sera :

$$ACa = \frac{(n+1)k_n}{2h^{n+1}} \cdot \frac{b^3}{cc} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu\alpha^3(\epsilon\epsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu\alpha^5} \cdot \frac{dv^2}{ds} \sin\Phi \cos\Phi.$$

Or ds est à dv en raison du mouvement diurne de la terre à son mouvement annuel. Donc, puisque la terre acheve chaque révolution

 autour

autour de ſon axe ou 360° en 23^h, $56'$, $4''$, & que dans ce tems le mouvement moyen du ſoleil ſe trouve $58'$, $58''$, il ſera $ds = 366\frac{25}{81}\,dv$. Et partant le changement trouvé du pole ſera

$$ACa = \frac{1}{732\frac{50}{81}} \cdot \frac{(n+1)k^n}{h^{n+1}} \cdot \frac{b^3}{cc} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu\alpha^3(\epsilon\epsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu\alpha^5}\, dv \sin\Phi \cos\Phi$$

Probleme IV.

32. *Trouver le changement élémentaire du pole de la terre dans le Ciel, entant qu'il eſt cauſé tant par la force du ſoleil, que par celle de la Lune.*

SOLUTION.

Soit toujours a le demi-axe de la terre, e le rayon de ſon équateur, & que la terre ſoit homogene à l'exception d'un noyau ſpheroïdique autour de ſon centre, dont le demi-axe ſoit $= \alpha$, le rayon de l'équateur $= \epsilon$, & la denſité à celle de la croute comme $1 + \nu$ à 1. Qu'on poſe pour abréger

$$\frac{a^3(ee-aa)+\nu\alpha^3(\epsilon\epsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu\alpha^5} = \mathrm{N}.$$

& que le pole boreal de la terre réponde actuellement dans le Ciel au point A. Soit maintenant le ſoleil en O, & l'arc du meridien AO $= \Phi$; la diſtance du ſoleil à la terre $= b$, & ſa force ſur la terre $= \frac{cc}{bb}$. Cela poſé nous aurons $h = b$, $k = c$ & $n = 2$. Donc dans le tems que le mouvement moyen du ſoleil avance de l'angle infiniment petit dv, le pole de la terre ſera tranſporté de A en a, dans un meridien perpendiculaire au meridien AOF, où ſe trouve le ſoleil, en ſorte que ce changement ſera

$$Aa \text{ ou } ACa = \frac{3}{732\frac{50}{81}} \cdot \mathrm{N}\, dv \sin\Phi \cos\Phi$$

ſuppoſé

ſuppoſé que le mouvement rotatoire de la terre ſe faſſe dans le ſens EHF, & ce ſera l'effet inſtantané de la force du ſoleil.

Maintenant que la lune ſe trouve en O, dont la diſtance à la terre ſoit $= h$, & la force $= \frac{kk}{hh} - \delta$, comme j'ai ſuppoſé cy-deſſus (24), & la valeur de $\frac{(n+1)k^n}{h^{n+1}}$ ſe changera en $\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h}$. Soit auſſi l'arc $AO = \Phi$, & pendant le mouvement moyen du ſoleil $= dv$ la force de la lune tranſportera le pole de la terre de A en a auſſi dans un meridien perpendiculaire à AOF, de ſorte que Aa, ou $ACa = \frac{1}{732\frac{50}{81}}$ $\left(\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h}\right)\frac{h^3}{cc} N\, dv \sin\Phi \cos\Phi$.

Or il faut remarquer ici, que $\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h}$ eſt à $\frac{3ce}{b^3}$ comme la force de la lune pour cauſer les marées à celle du ſoleil: rapport que Newton a établi comme $4\frac{1}{2}$ à 1; mais comme cette détermination n'eſt pas trop certaine, ſuppoſons que dans la production du flux & reflux de la mer, la force de la lune ſoit à celle du ſoleil comme m à 1, & nous aurons $\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h} = \frac{3mcc}{b^3}$; & partant le changement du pole cauſé par la force de la Lune ſera:

$$Aa \text{ ou } ACa = \frac{3m}{732\frac{50}{81}} \cdot N\, dv \sin\Phi \cos\Phi. \quad \text{C.Q.F.T.}$$

COROLL. I.

§. 33. Si nous poſons pour abréger d'avantage $\frac{3}{732\frac{50}{81}} N = \lambda$; le ſoleil étant ſuppoſé en O de ſorte que $AO = \Phi$, le changement du pole ſera $Aa = \lambda\, dv \sin\Phi \cos\Phi$. Or ſi nous ſuppoſons la lune en O, alors le changement du pole ſera $Aa = \lambda m\, dv \sin\Phi \cos\Phi$.

COROLL. II.

§. 34. Donc si nous aurons trouvé par les phenomenes des changemens du pole de la terre, la valeur du nombre λ, nous en tirerons celle de $N = 732\frac{50}{81} \cdot \frac{1}{3}\lambda$; & de cette valeur nous pourrons juger du noyau de la terre, puisque

$$N = \frac{a^3(ee - aa) + \nu\alpha^3(\varepsilon\varepsilon - \alpha\alpha)}{a^5 + \nu\alpha^5}$$

REMARQUE.

§. 35. Si la terre n'avoit point de noyau, mais qu'elle fut formée d'une matiére homogene, la valeur de N seroit connue. Car puisque le diametre de l'équateur surpasse l'axe d'une 200me partie, comme il se conclut des Observations faites au Nord, en France & au Perou, on aura $a : e = 200 : 201$, & dans ce cas on aura $N = \left(\frac{201}{200}\right)^2 - 1 = \frac{1}{100}$, & partant $\lambda = \frac{3}{100 \cdot 732\frac{50}{81}} = \frac{1}{24421}$

Probleme V.

Fig. 4. §. 36. *Supposé que le soleil se meuve selon son mouvement moyen, trouver les changemens, que sa force causera dans les poles de la terre.*

SOLUTION.

Soit ♈ ♋ ♎ l'ecliptique & Π le pole de l'ecliptique; mais que ♈ ne soit pas le point de l'équinoxe, mais un point fixe au ciel comme 1 ✱ ♈. Soit la longitude du soleil en S depuis ce point fixe ♈ $S = p$, & que dans ce tems le pole de la terre se trouve en P, & posons ♈ $\Pi P = x$, $\Pi P = y$. Qu'on tire les arcs de grands cercles ΠS, PS, & dans le triangle spherique $P\Pi S$ nous aurons $P\Pi S = p - x$; $P\Pi = y$ & $\Pi S = 90°$, d'où nous tirons $\operatorname{cof} PS = \operatorname{cof}(p-x) \sin y$ & $\cot \Pi PS = -\frac{\operatorname{cof}(p-x)\operatorname{cof} y}{\sin(p-x)}$. Maintenant posant $PS = \Phi$, le

pole

pole sera transporté de P en p, de la sorte Pp sera perpendiculaire à PS & $Pp = \lambda dv \sin\Phi \cos\Phi$, pendant que le soleil avance de l'angle dv; nous aurons donc $dp = dv$, & ayant tiré Πp, il sera $\Upsilon\Pi p = x + dx$, & $\Pi p = y + dy$. Donc menant sur Πp la perpendiculaire Pq, il y aura $pq = dy$ & $Pq = -dx \sin y$. Or l'angle pPq étant le complément de l'angle OPS à deux droits, il sera

$$\cot pPq = \frac{\cos(p-x)\cos y}{\sin(p-x)} \text{ \& tang } Ppq = \frac{\cos(p-x)\cos y}{\sin(p-x)}$$

Par conséquent nous aurons:

$$Pq = -dx \sin y = Pp.\sin Ppq \text{ \& } pq = dy = Pp \cos Ppq.$$

Or ayant $\cos\Phi = \cos(p-x)\sin y$; il sera

$$\sin Ppq = \frac{\cos(p-x)\cos y}{\sin\Phi} \text{ \& } \cos Ppq = \frac{\sin(p-x)}{\sin\Phi}.$$

Donc à cause de $Pp = \lambda dp \sin\Phi\cos\Phi$, nous obtiendrons

$$-dx \sin y = \lambda dp \cos\Phi \cos(p-x)\cos y = \lambda dp \cos(p-x)^2 \cos y \sin y$$

$$\& dy = \lambda dp \cos\Phi \sin(p-x) = \lambda dp \sin(p-x)\cos(p-x)\sin y$$

Mais puisque $\sin(p-x)\cos(p-x) = \frac{1}{2}\sin 2(p-x)$

$$\& \cos(p-x)^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2(p-x)$$

ces équations prendront les formes suivantes:

$$-dx = \tfrac{1}{2}\lambda dp(1 + \cos 2(p-x))\cos y$$

$$\& dy = \tfrac{1}{2}\lambda dp \sin 2(p-x)\sin y$$

Maintenant puisqu'il est aisé de prévoir, que la variabilité de x & y est comme infiniment petite par rapport à celle de p, dans l'integration nous pourrons regarder x & y comme des quantités constantes, & alors les integrales seront:

$$x = C_{,} - \tfrac{1}{2}\lambda\left(p + \tfrac{1}{2}\sin 2(p-x)\cos y\right)$$

$$y = C - \tfrac{1}{4}\lambda \cos 2(p-x)\sin y$$

d'où l'on connoitra à tout tems proposé le lieu du pole de la terre dans le Ciel. C. Q. F. T.

COROLL.

COROLL. I.

37. Puisque $p-x$ marque $P\Pi S$, & que le cercle ΠP passe par le solstice d'été, cet angle $p-x$ exprimera la longitude du soleil depuis le solstice d'été. Donc si nous posons la longitude du soleil depuis l'équinoxe de printems $= p$, il sera $p-x = p-90°$, & $2(p-x) = 2p-180°$. D'où nous aurons

$$x = C - \tfrac{1}{2}\lambda(x - \tfrac{1}{2}\sin p)\cos y \ \& \ y = C + \tfrac{1}{4}\lambda\cos 2p\sin y.$$

COROLL. II.

§. 38. Dans ces formules y marque la distance moyenne du pole de la terre de celui de l'ecliptique. Donc posant cette distance moyenne des deux poles $= \theta$, nous aurons

$$x = C - \tfrac{1}{2}\lambda v\cos\theta + \tfrac{1}{4}\lambda\sin 2p\cos\theta$$

& $y = \theta + \tfrac{1}{4}\lambda\cos 2p\sin\theta$

Or la valeur de θ est à peu prés de $23°, 28', 30''$.

COROLL. III.

§. 39. Posant $\theta = 23°, 28', 30''$, nous aurons en réduisant le sinus & le cosinus de θ à des angles exprimés en secondes,

$x = C - 0,458617\lambda v + 46222''\lambda\sin 2p$

$y = \theta + 20541''\lambda\cos 2p$

COROLL. IV.

§. 40. De là il est d'abord clair, que la force du soleil fait reculer le pole de la terre; car aprés un an, où v devient $v + 360°$ la longitude du pole depuis 1 * ♈ sera

$$x = C - 0,458617\lambda(v + 360°) + 46222''\lambda\sin 2p$$

donc pendant une année le pole de la terre recule en longitude par l'espace $= 0,458617\lambda.360°$.

COROLL. V.

41. Donc si la terre étoit formée d'une matiere homogene, de sorte que $\lambda = \dfrac{1}{24421}$, la précession annuelle du pole & aussi des

équi-

équinoxes seroit $= 24\frac{1}{3}$ secondes; entant qu'elle est causée par l'action du soleil. Et dans la même hypothese il sera aprés un nombre A d'années

$$x = C - 24\tfrac{1}{3}A'' + 1\tfrac{8}{9}'' \sin 2p$$
$$y = \theta + \tfrac{5}{6}'' \cos 2p.$$

Donc outre le mouvement moyen le pole se pourra éloigner de son lieu moyen presque jusqu'a 2'' en longitude, & de presque une seconde en latitude.

Probleme VI.

42. *Supposant le mouvement de la lune uniforme autour de la terre, trouver les changemens, que la force de la lune causera dans les poles de la terre.*

SOLUTION.

Soit encore ♈ ♋ ♎ l'ecliptique, & Π son pole; que le pole de la terre se trouve a l'heure qu'il est en P, & nommons comme auparavant l'angle $♈ \Pi P = x$, $\Pi P = y$. Soit en même tems la lune en L, & nommant sa distance au pole $LP = \Phi$, nous avons vu cy-dessus, que pendant que le moyen mouvement du soleil est $= dv$, le pole P sera transporté en p, par l'elément Pp perpendiculaire à PL, de sorte que $Pp = \lambda m dv \sin \Phi \cos \Phi$, d'où nous tirons comme dans le probleme precédent: *Fig. 5*

$$-dx \sin y = \lambda m dv \sin \Phi \cos \Phi \sin Ppq$$
$$\& \; dy = \lambda m dv \sin \Phi \cos \Phi \cos Ppq$$

Il s'agit donc maintenant de déterminer les angles Φ & Ppq. Soit pour cét effet ☊LN l'orbite de la lune, & partant ☊ le noeud ascendant, dont la longitude soit $♈ ☊ = r$, & l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'ecliptique $L ☊ K = \zeta$. Puisque nous supposons le mouvement de la lune uniforme, il sera indifferent, si nous attribuons cette uniformité au mouvement dans l'orbite même, ou au mouvement en longitude, parce que la difference est fort petite. Soit donc q la longitude

gitude de la lune $= \Upsilon K$, de sorte que l'angle $\Upsilon \Pi L = q$; & il sera $☊K = q - r$: d'où nous trouverons la latitude LK, que je marquerai par $s = LK$ & il sera $\text{tang}\, s = \sin(q-r)\,\text{tang}\,\rho$. A présent dans le triangle $P\Pi L$ ayant $P\Pi = y$; $P\Pi L = q - x$; & $\Pi L = 90° - s$ nous aurons :

$$\cos PL = \cos\Phi = \cos(q-x)\,\sin y\,\cos s + \cos y \sin s.$$

$$\& \cot \Pi PL = \frac{\sin y \sin s - \cos(q-x)\cos y \cos s}{\sin(q-x)\,\cos s} = -\,\text{tang}\,Ppq$$

de sorte que $\text{tang}\,Ppq = \dfrac{\cos(q-x)\cos y\cos s - \sin y \sin s}{\sin(q-x)\,\cos s}$, & de là nous tirons :

$$\sin Ppq = \frac{\cos(q-x)\cos y\cos s - \sin y\sin s}{\sin\Phi} \;\&\; \cos Ppq = \frac{\sin(q-x)\,\cos s}{\sin\Phi}$$

Ces valeurs étant substituées donneront :

$$-dx \sin y = \lambda m dv\,\cos\Phi.\,(\cos(q-x)\,\cos y\cos s - \sin y\sin s)$$

$$dy = \lambda m dv\,\cos\Phi.\,\sin(q-x)\,\cos s$$

ou remettant aussi pour $\cos\Phi$ sa valeur :

$$dx\sin y = -\lambda m dv\,(\cos(q-x)\sin y\cos s + \cos y\sin s)\,(\cos y\cos s - \sin y\sin s)$$

$$dy = \lambda m dv\,(\cos(q-x)\,\sin y\cos s) + \cos y\sin s)\,\sin(q-x)\cos s$$

$$\text{Or}\ \sin s = \frac{\text{tang}\,\rho\,\sin(q-r)}{\sqrt{(1+\text{tang}\,\rho^2\sin(q-r))^2}}\ \&\ \cos s = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang}\,\rho^2\sin((q-r)^2)}}$$

ce qui donne : $dx \sin y =$

$$\frac{-\lambda m dv\,(\text{cs.}(q-x)^2\,\text{si}\,y\cos y + \cos(q-x)\cos y^2\,\text{tg.}\,\rho\,\text{si.}(q-r) - \sin y\cos y\,\text{tg.}\,\rho^2\sin(q-r)^2) - \cos(q-x)\,\sin y^2\,\text{tang}\,\rho\,\sin(q-r)}{1+\text{tang}\,\rho^2\,\sin(q-r)^2}$$

$$\& dy = \frac{\lambda m dv\,(\sin(q-x)\,\cos(q-x)\,\sin y + \sin(q-x)\cos y\,\text{tang}\,\rho\,\sin(q-r))}{1+\text{tang}\,\rho^2\,\sin(q-r)^2}.$$

Pour

Pour integrer ces formules il faut remarquer, qu'on peut regarder $x, y,$ & ϱ comme des quantités constantes. Soit donc tang $\varrho = \gamma$, ce qui est une quantité fort petite, & soit θ la distance moyenne du pole de la terre au pole de l'ecliptique; & nous aurons:

$$dx \sin\theta = -\tfrac{1}{2}\lambda m dv.$$

$$\frac{\sin 2\theta \cos(q-x)^2 + 2\gamma \cos 2\theta \cos(q-x)\sin(q-r) - \gamma^2 \sin 2\theta \sin(q-r)^2}{1+\gamma\gamma\sin(q-r)^2}$$

$$dy = \lambda m dv.\frac{\sin\theta\sin(q-x)\cos(q-x) + \gamma\cos\theta\sin(q-x)\sin(q-r)}{1+\gamma\gamma\sin(q-r)^2}$$

Maintenant puisque γ est un nombre fort petit, savoir la tangente d'un angle d'environ 5°, on pourra ôter ces dénominateurs en divisant par eux actuellement, & il sera permis de négliger les termes, où γ aura plus de deux dimensions: on aura donc:

$$dx\sin\theta = -\tfrac{1}{2}\lambda m dv\Big(\sin 2\theta\cos(q-x)^2 + 2\gamma\cos 2\theta\cos(q-x)\sin(q-r) - \gamma\gamma\sin 2\theta\sin(q-r)^2\ (1+\cos(q-x)^2\Big)$$

$$dy = \lambda m dv\Big(\sin\theta\sin(q-x)\cos(q-x) + \gamma\cos\theta\sin(q-x)\sin(q-r) - \gamma\gamma\sin\theta\sin(q-x)\cos(q-x)\sin(q-r)^2\Big).$$

A présent il faut réduire ces produits des sinus & cosinus des angles variables à des sinus & cosinus des angles simples, & puisque $\cos A^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2A$; $\sin A \cos A = \frac{1}{2}\sin 2A$ & $\sin A^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A$. nous aurons:

$$dx\ \sin\theta = -\tfrac{1}{2}\lambda m dv\Big(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2(q-x) + 2\gamma\cos 2\theta\cos(q-x)\sin q-r)\Big) - \gamma\gamma\sin 2\theta\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2(q-r)\right)\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2(q-x)\right)$$

$$dy = \lambda m dv\Big(\tfrac{1}{2}\sin\theta\sin 2(q-x) + \gamma\cos\theta\sin(q-x)\sin(q-r) - \tfrac{1}{2}\gamma\gamma\sin\theta\sin 2(q-x)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2(q-r)\right)\Big).$$

De plus puisque $\cos A \sin B = \frac{1}{2}\sin(A+B) - \frac{1}{2}\sin(A-B)$;

$$\& \sin A \sin B = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

nous aurons après toutes ces réductions faites :

$$dx\sin\vartheta = -\tfrac{1}{2}\lambda m dv\Big(\tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta\cos 2(q-x) + \gamma\cos 2\vartheta \sin(2q-r-x) - \gamma\cos 2\vartheta\sin(r-x) - \tfrac{3}{4}\gamma\gamma\sin 2\vartheta + \tfrac{3}{4}\gamma\gamma\sin 2\vartheta\cos 2(q-r) - \tfrac{1}{4}\gamma\gamma\sin 2\vartheta\cos 2(q-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\sin 2\vartheta\cos 2(r-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\sin 2\vartheta\cos 2(2q-r-x)\Big)$$

$$dy = \lambda m dv\Big(\tfrac{1}{2}\sin\vartheta\sin 2(q-x) + \tfrac{1}{2}\gamma\cos\vartheta\cos(r-x) - \tfrac{1}{2}\gamma\cos\vartheta\cos(2q-r-x) - \tfrac{1}{4}\gamma\gamma\sin\vartheta\sin 2(q-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\sin\vartheta\sin 2(2q-r-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\sin\vartheta\sin 2(r-x).\Big)$$

Pour integrer ces équations il faut remarquer, que les differentiels de q & r ont des rapports donnés au differentiel dv, qui sont ceux du mouvement moyen de la lune, & du mouvement retrograde du noeud au mouvement moyen du soleil. Soit donc :

$$dq = \mu dv \quad \& \quad dr = -\varkappa dv$$

& les integrales cherchées seront :

$$x\sin\vartheta = C - \tfrac{1}{2}\lambda m\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}v\sin 2\vartheta + \frac{1}{4\mu}\sin 2\vartheta\sin 2(q-x) - \frac{\gamma}{2\mu+\varkappa} \\ \quad \cos 2\vartheta\cos(2q-r-x) - \frac{\gamma}{\varkappa}\cos 2\vartheta\cos(r-x) \\ -\tfrac{3}{4}\gamma\gamma v\sin 2\vartheta + \frac{3\gamma\gamma}{8(\mu+n)}\sin 2\vartheta\sin 2(q-r) \\ \quad - \frac{\gamma\gamma}{8\mu}\sin 2\vartheta\sin 2(q-x) \\ - \frac{\gamma\gamma}{16\varkappa}\sin 2\vartheta\sin 2(r-x) + \frac{\gamma\gamma}{16(2\mu+\varkappa)} \\ \quad \sin 2\vartheta\sin 2(2q-r-x) \end{array}\right.$$

$y =$

$$y = \theta + \lambda m \begin{cases} \frac{-1}{4\mu} \sin\vartheta \cos 2(q-x) - \frac{\gamma}{2\kappa} \cos\vartheta \sin(r-x) - \frac{\gamma}{2(2\mu+\kappa)} \\ \cos\vartheta \sin(2q-r-x) + \frac{\gamma\gamma}{4\mu} \sin\vartheta \cos 2(q-x) \\ - \frac{\gamma\gamma}{16\, 2\mu+\kappa} \sin\vartheta \cos 2 \; (2q-r-x) \\ + \frac{\gamma\gamma}{16\kappa} \sin\vartheta \cos 2(r-x) \end{cases}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 43. Puisque θ eſt à peu prés 23°, 28′, 30″, & que γ eſt la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite de la lune à l'ecliptique, dont la valeur moyenne eſt = 5°, 9′, ces expreſſions réduites en ſecondes feront:

$$x = C - 0{,}45302\,\lambda m v - \frac{46685}{\mu} \lambda m \sin 2(q-x) + \frac{16952}{2\mu+\kappa} \lambda' m \cos(2q-r-x)$$

$$+ \frac{16952}{\kappa} \lambda m \cos(r-x) - \frac{576}{\mu+\kappa} \lambda m \sin 2(q-r)$$

$$+ \frac{96}{\kappa} \lambda m \sin 2(r-x) - \frac{96}{2\mu+\kappa} \lambda m \sin 2(2q-r-x)$$

$$y = \theta - \frac{20008}{\mu} \lambda m \cos 2(q-x) - \frac{8525}{\kappa} \lambda m \sin(r-x) - \frac{8525}{2\mu+\kappa} \lambda m \sin(2q-r-x)$$

$$- \frac{40}{2\mu+\kappa} \lambda m \cos 2(2q-r-x) + \frac{40}{\kappa} \cos 2(r-x)$$

COROLL. II.

§. 44. Or puisque μ: 1 comme le mouvement moyen de la lune à celui du ſoleil, il ſera μ = 13, 368: & puisque κ: 1 comme le mouvement moyen rétrograde du noeud a celui du ſoleil, il ſera κ =

 18,

$\frac{1}{18,616}$; ces valeurs étant substituées, nos équations integrales deviendront:

$$x = C - 0,45302\,\lambda m v - 3492\,\lambda m \sin 2(q-x) + 594\,\lambda m \cos(2q-r-x) + 296535\,\lambda m \cos(r-x) - 43\,\lambda m \sin 2(q-r) + 1788\,\lambda m \sin 2(r-x) - 4\,\lambda m \sin 2(2q-r-x)$$

$$y = \theta - 1497\,\lambda m \cos 2(q-x) - 158718\,\lambda m \sin(r-x) - 363\,\lambda m \sin(2q-r-x) - 2\,\lambda m \cos 2(2q-r-x) + 777\,\lambda m \cos 2(r-x)$$

COROLL. III.

§. 45. De là on voit bien, que si les termes $\cos(r-x)$ & $\sin(r-x)$ ne sont pas trop grands, ou qu'ils ne surpassent pas $100''$, ce qu'on reconnoitra d'abord, alors tous les autres termes peuvent être rejettés sans faute, à cause de leur extreme petitesse; & partant nos formules deviendront beaucoup plus simples.

$$x = C - 0,45302\,\lambda m v + 296535\,\lambda m \cos(r-x)$$
$$y = \theta - 158718\,\lambda m \sin(r-x)$$

COROLL. IV.

§. 46. Ici v marque le mouvement moyen du soleil depuis une certaine époque, où l'on suppose connu le lieu du pole; & $r-x$ marque la longitude du noeud ascendant depuis le lieu présent du pole, c'est à dire, depuis le solstice d'été. Donc, si nous posons la longitude du noeud ascendant depuis l'équinoxe du printems $= u$, il sera $r-x = u - 90°$; & nos formules:

$$x = C - 0,45302\,\lambda m v + 296535\,\lambda m \sin u$$
$$y = \theta + 158718\,\lambda m \cos u$$

REMARQUE.

§. 47. Comme tous les termes, qui dépendent du mouvement moyen de la lune, s'en sont allés de nos formules à cause de leur petitesse, on comprendra aisément, que si j'avois introduit dans le calcul le vrai mouvement de la lune, ayant eu egard à son apogée & au lieu du du soleil, tous les termes qui en auroient été introduits dans nos formules, seroient évanouïs a plus forte raison. Car alors au lieu de q nous aurions eu $q + A + B + C +$ &c. où A, B, C, marquent des angles dépendans de l'anomalie de la lune & de son élongation du soleil: & il est clair que de la méme maniere les termes renfermans $q + A + B + C +$ &c. seroient sortis du calcul, que ceux, qui dans nos formules ont renfermé q. Or il n'en est pas de méme des termes, qui renferment le lieu du noeud ascendant, parce que la latitude de la lune en dépend, qui affecte particuliérement le calcul. De là on comprend, que si le mouvement du noeud étoit plus rapide qu'il n'est en effet, les inégalités dans le mouvement du pole seroient plus petites dans la méme raison; & ces inégalités seroient d'autant plus grandes, si le mouvement des noeuds étoit plus lent. Or si les noeuds demeuroient immobiles, le mouvement moyen du pole en seroit rallenti, & à cause de r constante, puisque alors dx ne seroit plus quasi infiniment petit par rapport à dr, mais plutot infiniment grand, on seroit obligé de chercher l'integrale de nos formules par une tout autre methode.

Probleme VII.

§. 48. *Determiner les variations qui se doivent trouver dans le lieu des poles de la terre, entant qu'elles sont causées conjointement par les forces du soleil & de la lune.*

SOLUTION.

Soit θ la distance moyenne du pole boreal de la terre au pole de l'ecliptique, & qu'a une époque donnée la longitude moyenne du pole de la terre, depuis une étoile fixe comme de $1 * \Upsilon$ ait été $= \zeta$. A present qu'il s'agit de déterminer le lieu du pole boreal de la terre, soit sa longitude vraie $= x$ & sa latitude vraye $= y$; & que depuis l'époque marquée jusqu'ici, le moyen mouvement du soleil ait été $= v$. Soit ensuite pour le tems present la longitude du soleil depuis l'équinoxe du printems $= p$ & la longitude du noeud ascendant $= u$; où il il faut ſuppoſer que le lieu du pole eſt dejà connu à peu près. Cela poſé, nous avons vû qu'en vertu de la force du ſoleil il ſera:

$$x = C - 0,458617\,\lambda v + 46222\,\lambda \sin 2p$$
$$y = \theta + 20641\,\lambda \cos 2p.$$

Or la force de la lune donne

$$x = C - 0,\ 45302\,\lambda m v + 296535\,\lambda m \sin u$$
$$y = \theta + 158718\,\lambda m \cos u.$$

Donc ces deux forces agiſſant enſemble produiront l'effet contenu dans les formules ſuivantes:

$$x = \zeta - 0,\ 45862\,\lambda v + 56222\,\lambda \sin 2p$$
$$- 0,45302\,\lambda m v + 296535\,\lambda m \sin u$$
$$y = \theta + 20541\,\lambda \cos 2p + 158718\,\lambda m \cos u$$

C.Q.F.T.

COROLL. I.

49. On peut ici diſtinguer deux ſortes de mouvement. La prémiere contient le mouvement moyen du pole, & eſt compriſe dans ces deux formules

$$x = \zeta - 0,45872\,\lambda v - 0,45302\,\lambda m v \ \& \ y = \theta$$

par lesquelles on trouvera le lieu moyen du pole, pour un tems propoſé quelconqne: & enſuite les autres termes renferment les équations dont il faut corriger tant la longitude que la latitude moyenne du pole.

COROLL. II.

50. Pour ce qui regarde le lieu moyen du pole, on voit que ſa diſtance au pole de l'ecliptique eſt toujours la même, mais que la longitude décroit de plus en plus; c'eſt à dire le mouvement du pole en longitude ſera rétrograde par rapport aux étoiles fixes, & cette rétrogreſſion ſera dans un an

de $1296000\,\lambda\,(0,\ 45862 + 0,\ 45302\,m)$ ſecondes.
ou de $594371\,\lambda + 587113\,\lambda m$ ſecondes.

COROLL.

COROLL. III.

51. Négligeant les inégalités, qui dépendent du lieu du soleil, puisqu'elles sont très petites, la longitude vraye du pole sera plus grande que la moyenne, lorsque le noeud ascendant se trouve dans les signes boreaux; mais si ce noeud est dans les signes australes, alors la longitude vraye sera plus petite que la moyenne. Or la difference entre la longitude vraye & moyenne du pole sera la plus grande, lorsque le noeud est dans les points solstitiaux; & cette difference emportera 296537 λm secondes.

COROLL. IV.

52. La distance du pole de la terre à celui de l'ecliptique sera la plus grande, lorsque le noeud ascendant se trouve dans l'équinoxe du printems: mais si ce noeud est dans l'équinoxe d'automme, alors le pole de la terre se trouvera au plus près de celui de l'ecliptique. Dans ces cas la plus grande difference entre la latitude vraye & moyenne du pole sera de 158718 λm secondes.

REMARQUE I.

53. Ces Corollaires sont généralement bien d'accord avec les Observations, par lesquelles on sait, que le mouvement du pole terrestre en longitude est rétrograde, & que cette précession vaut tous les ans 50″ ou 51″. De plus Mr. Bradley vient de découvrir, que la distance des poles de l'équateur & de l'ecliptique est la plus grande, lorsque le noeud ascendant est au commencement du Belier, & la plus petite lorsque ce noeud entre dans la Balance, & que la plus grande difference entre la distance vraie & moyenne est de 9″. Aussi ce qu'il a observé par rapport aux inégalités de la longitude, est tout à fait d'accord avec ce que la theorie vient d'enseigner. Or comme nous ne savons pas les vrayes valeurs des lettres λ & m, ces Observations nous pourront servir a déterminer ces valeurs, puisqu'il faut qu'il soit:

$$594371\,\lambda + 587113\,\lambda m = 50\tfrac{1}{2}''$$
$$\&\quad 158718\,\lambda m = 9''$$

d'où

d'où nous tirons $\frac{594371 + 587113\,m}{158718\,m} = \frac{101}{18}$

& partant fort à peu prés $m = 2$; où il faut remarquer, que si la plus grande aberration en latitude au lieu de $9''$ étoit de $11''$, on trouveroit $m = 4$. Or $m : 1$ marque le rapport de la force de la Lune à celle du soleil dans la production des marées, & Newton avoit établi ce rapport comme 4 ou $4\frac{1}{2}$ à 1. Mr. Daniel Bernoulli fait ce rapport beaucoup plus petit en posant seulement $m = 2\frac{1}{2}$; & cette valeur approche beaucoup plus de celle que je viens de trouver, que de celle de Newton ; ce qui est une nouvelle preuve non seulement pour le sentiment de Mr. Bernoulli, qui paroit d'ailleurs très bien fondé, mais aussi pour la theorie, dont je viens de déterminer le mouvement du pole de la terre. Car si nous avions trouvé pour m une valeur, ou beaucoup plus grande, ou petite, ç'auroit été une marque seure, que le mouvement du pole ne dépendoit pas uniquement des forces du soleil & de la lune, mais que les forces centrifuges, ne se détruisant pas parfaitement, y contribuoient aussi quelque chose.

REMARQUE.

54. Cependant il ne semble pas qu'on puisse diminuer la valeur de m au delà de $2\frac{1}{2}$, & il est plutot probable, que la plus grande difference entre la latitude vraye & moyenne du pole de la terre est un peu plus grande que $9''$. Aussi Mr. Bradley avouë-t-il lui méme, que cette détermination n'est pas si exacte, qu'il ne s'y put trouver une erreur d'une demi-seconde. Supposons donc selon Mr. Bernoulli $m = 2\frac{1}{2}$, & la plus grande difference entre la latitude moyenne & vraye du pole de la terre deviendra $= 9{,}75$ ou $9\frac{3}{4}$ secondes: or si nous avions supposé le mouvement moyen annuel du pole seulement de $50''$ au lieu de $50\frac{1}{2}$, nous aurions trouvé 9, 62 au lieu de 9, 75: d'où il semble que nous pouvons mettre assès seurement avec M. Bradley le mouvement annuel du pole de la terre de $50''$, 3, & avec Mr. Bernoulli $m = 2\frac{1}{2}$: de là nous trouverons la valeur de λ, savoir

$\lambda =$

$$\lambda = \frac{50,3}{594371 + 587113 \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{1}{40997}$$

& cette valeur eſt conſidérablement plus petite, que celle qui réſulte de l'hypotheſe de la terre homogene: d'où il s'enſuit que la valeur de $\frac{a^3(ee-aa)+\nu\alpha^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu\alpha^5}$ eſt plus petite que $\frac{ee-aa}{aa}$ dans la raiſon de 40997 à 24431 ou de 5 à 3. Et de là il faut conclure, que la terre n'eſt pas homogene, mais qu'elle a un noyau beaucoup plus denſe autour de ſon centre. Suppoſons que ce noyau eſt ſphérique, & puisque $ee-aa = \frac{1}{100}aa$, nous aurons:

$$\frac{\frac{1}{100}a^5}{a^5+\nu\alpha^5} : \frac{1}{100} = 5 : 3, \text{ ou } 2a^5 = 3\nu\alpha^5.$$

Donc ſi la denſité de ce noyau étoit connuë, nous en pourrions conclure le rayon du noyau. Poſons par exemple que le noyau ſoit dix fois plus denſe que la croute, & il ſera $\nu = 9$, & $\alpha^5 = \frac{2}{27}a^5$ ou $\alpha = \frac{3}{5}a$: ce qui ne paroit contraire à aucunes des Obſervations, qui regardent l'interieur de la terre: il ſemble plutot qu'un tel noyau eſt très conforme aux principes de la Phyſique.

Probleme VIII.

§. 55. *Pour un tems propoſé quelconque déterminer la longitude & la latitude du pole boreal de la terre, comptant la longitude depuis une étoile fixe donnée.*

SOLUTION.

Ayant dreſſé la table pour le moyen mouvement rétrograde en longitude du pole à raiſon de 50″, 3 par an, on en trouvera pour chaque tems propoſé la longitude moyenne du pole, depuis une étoile fixe donnée comme de la 1 ∗ ♈; pourvu que cette longitude ait été déterminée par les Obſervations pour une epoque donnée. Soit donc

cette

η cette longitude moyenne du pole depuis 1 ∗ ♈ pour le tems proposé, & θ sera la distance moyenne de ce pole depuis le pole de l'ecliptique, laquelle est estimée de $23°, 28', 30''$. Ensuite soit x la longitude vraye du pole depuis 1 ∗ ♈, & y sa distance vraye au pole de l'ecliptique. Cela posé, puisque nous avons $\lambda = \frac{1}{40997}$ & $\lambda m = \frac{1}{16399}$, les formules qui nous donneront le vray lieu du pole pour le tems proposé, seront:

$$x = \eta + 18'', 08 \sin u + 1'', 13 \sin 2p$$
$$y = \theta + 9, 68 \cos u + 0, 50 \cos 2p$$

où u marque la longitude du noeud ascendant de la Lune comptée depuis le point équinoxial du printems, & p la longitude du soleil comptée depuis le même commencement. Car comme on a déja la longitude moyenne du pole, on aura aussi celle du point équinoctial, qui précede celle-là de 3 signes. Or on voit bien qu'il suffit de connoitre ces longitudes u & p à peu près, & que l'erreur seroit insensible, quand même on s'y tromperoit de quelques degrés. C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 56. Puisque x marque la longitude du pole depuis la premiére étoile du belier, & que x repond au point solstitial d'été, $x - 90°$ exprimera la longitude du point équinoctial du printems depuis 1 ∗ ♈. Et de là connoissant la longitude moyenne de 1 ∗ ♈ depuis l'équinoxe pour un tems donné, qui croit de $50'', 3$ par an, laquelle je poserai $= E$, pour le même tems la longitude vraye de la premiére étoile d'*Aries*, le commencement du signe de Belier sera.

$$E - 18'', 08 \sin u - 1'', 13 \sin 2p$$

COROLL.

COROLL. II.

§. 57. On pourra donc regarder le point équinoctial comme fixe dans le Ciel, & attribuer son mouvement aux étoiles fixes en sens contraire: & partant la longitude des étoiles fixes croitra non seulement réguliérement de $50''$, 3 par an, mais elle sera outre cela assujettie à une double inégalité, dont l'une dépend de la longitude du noeud ascendant de la lune, & l'autre de la longitude du soleil.

COROLL. III.

§. 58. Le premier effet, qui fait avancer les étoiles en longitude de $50''$, 3 par an, est celui qui est nommé en Astronomie la précession des équinoxes: mais les regles, que les Astronomes en ont tirées, ne donnent que la longitude moyenne des étoiles. Or ayant trouvé par cette methode la longitude moyenne d'une étoile quelconque, laquelle soit $= L$; sa longitude vraye sera

$$L - 18'', 08 \sin u - 1'', 13 \sin 2p.$$

COROLL. IV.

§. 59. Puisque y marque la distance des poles de la terre & de l'ecliptique, ce sera aussi la valeur de l'obliquité de l'ecliptique. Donc posant l'obliquité moyenne de l'ecliptique $= \theta$, qu'on estime de $23°$, $28'$, $30''$, pour chaque tems proposé la vraye obliquité de l'ecliptique sera

$$\theta + 9'', 68 \cos u + 0'', 50 \cos 2p$$

Or il est evident que si l'obliquité moyenne de l'ecliptique étoit un peu plus grande ou plus petite, les corrections demeureroient pourtant les mémes. Ainsi, si à cause d'autres forces l'obliquité moyenne de l'ecliptique étoit variable, ces memes corrections donneroient néantmoins la vraye, pourvu qu'on mit toujours pour θ l'obliquité moyenne.

COROLL. V.

§. 60. La latitude des étoiles fixes ne souffrira aucun changement de ce coté, puisque leur distance de l'ecliptique demeure toujours la même. Ainſi la mobilité du pole de la terre ne produit que deux effets, dont le premier conſiſte dans la variation de la longitude des étoiles fixes, & l'autre dans la variation de l'obliquité de l'ecliptique.

REMARQUE I.

§. 61. Ayant bien établi par la comparaiſon des Obſervations anciennes avec les modernes la veritable quantité de la préceſſion moyenne des équinoxes, il ſera aiſé d'en déterminer pour chaque tems propoſé la longitude moyenne de toutes les étoiles fixes, dont on aura une fois bien déterminé la longitude. Je ſuppoſerai donc qu'on ſache la longitude moyenne d'une étoile à un tems donné, & qu'on en veuille déterminer la longitude vraie pour le même tems. Cela ſe fera par le moyen de deux équations que les deux tables ſuivantes fourniront.

Premiere correction de la Longitude moyenne des étoiles fixes.

Arg. *La Longitude du noeud aſcendant de la Lune.*

°	0. Sign. ôtez.	1. Sign. ôtez.	2. Sign. ôtez.	3. Sign. ôtez.	4. Sign. ôtez.	5. Sign. ôtez.	
	" '''	" '''	" '''	" '''	" '''	" '''	
0	0, 0	9, 2	15, 40	18, 5	15, 40	9, 2	30
5	1, 34	10, 22	16, 23	18, 0	14, 50	7, 38	25
10	3, 8	11, 37	17, 0	17, 48	13, 51	6, 11	20
15	4, 41	12, 47	17, 29	17, 29	12, 47	4, 41	15
20	6, 1	13, 51	17, 48	17, 0	11, 37	3, 8	10
25	7, 38	14, 50	18, 0	16, 23	10, 22	1, 34	5
30	9, 2	15, 40	18, 5	15, 40	9, 2	0, 0	0
	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	
	11. Sign.	10. Sign.	9. Sign.	8. Sign.	7. Sign.	6. Sign.	

Seconde correction de la Longitude moyenne des étoiles fixes.

Arg. *La Longitude du Soleil.*

	0. Sign, otez.	1. Sign. otez.	2. Sign. otez.	3. Sign. ajoutez.	4. Sign. ajoutez.	5. Sign. ajoutez.	
°	'' '''	'' '''	'' '''	'' '''	'' '''	'' '''	'
0	0, 0	0, 59	0, 59	0, 0	0, 59	0, 59	30
5	0, 22	1, 4	0, 52	0, 12	1, 4	0, 52	25
10	0, 23	1, 7	0, 44	0, 23	1, 7	0, 44	20
15	0, 34	1, 8	0, 34	0, 34	1, 8	0, 34	15
20	0, 44	1, 7	0, 23	0, 44	1, 7	0, 23	10
25	0, 52	1, 4	0, 12	0, 52	1, 4	0, 12	5
30	0, 59	0, 59	0, 0	0, 59	0, 59	0, 0	0
	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	otez.	otez.	otez.	
	11. Sign.	10. Sign.	9. Sign.	8. Sign.	7. Sign.	6. Sign.	

COROLL. V.

§. 62. La longitude vraye des étoiles fixes sera donc la plus grande à l'égard de la moyenne, lorsque le noeud ascendant de la lune se trouve au commencement de ♑, & que le soleil est ou en ♌ 15° ou en ♒ 15°. Et alors la difference entre la longitude vraye & la moyenne sera de 19'', 13'''.

COROLL. VI.

§. 63. Or la longitude vraye des étoiles fixes sera la plus petite à l'egard de la moyenne, lorsque le noeud ascendant est au commencement du signe de ♋, & que le soleil se trouve ou en ♉ 15° ou en ♏ 15°. Alors la difference entre la longitude vraye & la moyenne sera de 19'', 13'''. Donc la difference entre la longitude vraye la plus grande & la plus petite pourra monter à 38'', 26'''.

COROLL.

COROLL. VII.

§. 64. Mais quand le noeud aſcendant ſe trouve dans un des points équinoctiaux, & que le ſoleil eſt ou dans les équinoxes ou dans les ſolſtices, alors la longitude moyenne des étoiles ne differera point de la vraye. Ce ſera donc le tems le plus propre pour obſerver la longitude moyenne des étoiles.

REMARQUE II.

§. 65. Il en ſera de même de l'obliquité de l'ecliptique, qui demandera auſſi une double correction, dont l'une dépend du lieu du noeud aſcendant de la lune, & l'autre du lieu du ſoleil: d'où j'ai formé les deux tables ſuivantes.

Premiere correction de l'obliquité moyenne de l' Ecliptique.

Arg. *La Longitude du noeud aſcendant de la Lune.*

	0. Sign. ajoutez.	1. Sign. ajoutez.	2. Sign. ajoutez.	3. Sign. otez.	4. Sign. otez.	5. Sign. otez.	
°	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	
0	9, 41	8, 24	4, 50	0, 0	4, 50	4, 24	30
5	9, 39	7, 57	4, 5	0, 50	5, 33	8, 45	25
10	9, 32	7, 25	3, 19	1, 41	6, 14	9, 5	20
15	9, 21	6, 51	2, 30	2, 30	6, 51	9, 21	15
20	9, 5	6, 14	1, 41	3, 19	7, 25	9, 32	10
25	8, 45	5, 33	0, 50	4, 5	7, 57	9, 39	5
30	8, 24	4, 50	0, 0	4, 50	8, 24	9, 41	0
	ajoutez. 11. Sign.	ajoutez. 10. Sign.	ajoutez. 9. Sign.	otez. 8. Sign.	otez. 7. Sign.	otez. 6. Sign.	

Seconde

Seconde Correction de l'Obliquité moyenne de l' Ecliptique.

Arg. *La Longitude du Soleil.*

	0. Sign. ajoutez.	1. Sign. ajoutez.	2. Sign. otez.	3. Sign. otez.	4. Sign. otez.	5. Sign. ajoutez.	
°	‴	‴	‴	‴	‴	‴	
0	30	15	15	30	15	15	30
5	30	10	19	30	10	19	25
10	28	5	22	28	5	22	20
15	25	chang. 0	25	25	chang. 0	25	15
20	22	de sign. 5	28	22	de sign. 5	28	10
25	19	10	30	19	10	30	5
30	15	15	30	15	15	30	0
	ajoutez. 11. Sign.	otez. 10. Sign.	otez. 9. Sign.	otez. 8. Sign.	ajoutez. 7. Sign.	ajoutez. 6. Sign.	

COROLL. VIII.

§. 66. L'obliquité de l'ecliptique sera donc la plus grande, lorsque le noeud ascendant de la Lune se trouve dans le point équinoctial du printems; & que le soleil est aussi dans un des équinoxes. Car alors l'obliquité vraye de l'ecliptique surpassera la moyenne de 10″, 11‴.

COROLL. IX.

§. 67. Or l'obliquité de l'ecliptique sera la plus petite, lorsque le noeud ascendant de la lune est dans le point équinoctial d'automne, & que le soleil se trouve dans l'un ou l'autre solstice. Alors l'obliquité vraye de l'ecliptique sera surpassée de la moyenne de 10″, 11‴: & ainsi les variations de l'obliquité de l'ecliptique monteront à 20″, 22‴.

 COROLL.

COROLL. X.

§. 68. Mais si le noeud ascendant est dans l'un ou l'autre solstice, & que le lieu du soleil soit ou ♉ 15°, ou ♌ 15° ou ♏ 15° ou ♒ 15°, alors l'obliquité vraye de l'ecliptique ne differera point de la moyenne.

Probleme IX.

§. 69. *Déterminer la vraye quantité de la précession des équinoxes pendant l'espace d'une année proposée.*

SOLUTION.

Qu'on cherche la longitude du noeud ascendant pour le milieu de l'an, pendant lequel on veut savoir la précession des équinoxes, & soit s cette longitude du noeud, qui répond au milieu de l'année proposée. Puisque le mouvement annuel des noeuds est 19°, 20', au commencement de notre an la longitude du noeud ascendant aura été $s + 9°, 40'$, & à la fin $s - 9°, 40'$; & puisque la longitude du soleil est la méme, tant pour le commencement que pour la fin, elle ne contribuera rien à la précession annuelle.

Donc au commencement de l'année la longitude d'une étoile ayant été

$$L - 18'', 08 \sin (s + 9°, 40') - 1'', 13 \sin 2p$$

elle sera à la fin de cette année

$$L + 50'', 3 - 18'', 08 \sin (s - 9°, 40') - 1'', 13 \sin 2p$$

Et partant la precession des équinoxes pendant cet an sera $= 50'', 3 - 18'', 08 \sin (s - 9°, 40') + 18'', 08 \sin (s + 9°, 40')$ Cette précession sera donc

$$50'', 3 + 36'', 16 \cos s . \sin 9°, 40'$$

ou bien $50'', 3 + 6'', 07 \cos s$

Donc

Donc ayant déterminé la longitude du noeud ascendant pour le milieu de l'année proposée, on en trouvera aisément combien les équinoxes reculeront pendant chaque année. C.Q.F.T.

COROLL. I.

70. La précession des équinoxes sera donc la plus grande dans les années, au milieu desquelles le noeud ascendant se trouve au commencement de ♈: & dans ces années la précession des équinoxes sera $56'', 37$ ou de $56'', 22'''$.

COROLL. II.

71. Or la précession des équinoxes sera la plus petite dans les ans, au milieu desquels le noeud ascendant se trouve au commencement de la balance: & alors la précession ne sera que $44'', 23$ ou de $44'', 14'''$. Donc la difference entre la plus grande & la plus petite precession annuelle sera de $12'', 8'''$,

COROLL. III.

72. Si l'on connoit la longitude du noeud ascendant pour le commencement de l'année proposée, & qu'on la pose $= u$, à cause de $u = s + 9°, 40'$, il sera $s = u - 9°, 40'$; & la précession des équinoxes pendant cette année sera

$$50'', 3 + 6'', 07 \cos(u - 9°, 40')$$

REMARQUE.

73. De là j'ai calculé la table suivante, par laquelle ou trouvera la précession des équinoxes pour chaque année, pour le commencement de laquelle on sait la longitude du noeud ascendant de la Lune.

Table qui marque la quantité de la préceſſion des Equinoxes, pour chaque année propoſée.

Arg. *La longitude du noeud aſcendant au commencement de l'année propoſée.*

	0. Sign. ♈	1. Sign. ♉	2. Sign. ♊	3. Sign. ♋	4. Sign. ♌	5. Sign. ♍
	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴
0	56, 17	56, 0	54, 12	51, 20	48, 14	45, 39
5	56, 21	55, 48	53, 48	50, 49	47, 44	45, 20
10	56, 22	55, 34	53, 20	50, 18	47, 16	45, 2
15	56, 21	55, 18	52, 52	49, 48	46, 49	44, 48
20	56, 17	54, 57	52, 22	49, 16	40, 24	44, 36
25	56, 10	54, 30	51, 52	48, 44	45, 48	44, 26
30	56, 0	54, 12	51, 20	48, 14	45, 39	44, 19

Continuation de la meme table pour les ſignes auſtraux.

	6. Sign. ♎	7. Sign. ♏	8. Sign. ♐	9. Sign. ♑	10. Sign. ♒	11. Sign. ♓
	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴
0	44, 19	44, 36	46, 24	49, 16	52, 22	54, 57
5	44, 15	44, 48	46, 48	49, 48	52, 52	55, 18
10	44, 14	45, 2	47, 16	50, 18	53, 20	55, 34
15	44, 15	45, 20	47, 44	50, 49	53, 48	55, 48
20	44, 19	45, 39	48, 14	51, 20	54, 12	56, 0
25	44, 26	45, 48	48, 44	51, 52	54, 36	56, 10
30	44, 36	46, 24	49, 16	52, 22	54, 57	56, 17

COROLL. IV.

74. Prenons pour exemple l'année 1750, au commencement de laquelle le lieu du noeud aſcendant ſe trouve en ♑ 10°, 17′. Donc depuis le premier Janvier 1750 jusqu'au premier Janvier 1751 la

la précession des équinoxes sera $50''$, $18'''$, ou elle sera environ égale à la précession annuelle moyenne.

COROLL. V.

75. Comme au commencement de l'année 1746 le lieu du noeud ascendant a été près de l'équinoxe de printems, savoir en ♓, $27°$, $40'$, la précession annuelle des équinoxes sera pour l'année 1745 & les suivantes :

An.	Précession annuelle		An.	Précession annuelle	
	$''$	$'''$		$''$	$'''$
1745	56,	20	1765	56,	0
1746	56,	15	1766	55,	0
1747	55,	25	1767	53,	20
1748	54,	10	1768	51,	40
1749	52,	20	1769	49,	40
1750	50,	20	1770	47,	30
1751	48,	20	1771	45,	40
1752	46,	30	1772	44,	50
1753	45,	10	1773	44,	15
1754	44,	20	1774	40,	20
1755	44,	15	1775	45,	10
1756	44,	50	1776	46,	30
1757	45,	50	1777	48,	30
1758	47,	40	1778	50,	20
1759	49,	40	1779	52,	20
1760	51,	50	1780	54,	10
1761	53,	30	1781	55,	30
1762	55,	10	1782	56,	15
1763	56,	0	1783	56,	20
1764	56,	22	1784	55,	40

Ce qui servira à voir, combien les Observations sur la mobilité de l'axe de la terre seront d'accord avec cette Théorie.