1751

Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de Mr. le Marquis de l'Hôpital

Leonhard Euler

SUR LE POINT DE REBROUSSEMENT
DE LA SECONDE ESPECE
*de Mr. le Marquis de l'*HÔPITAL,
PAR M. EULER.

§. I.

J'ai déjà fait voir dans quelques pieces, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Academie Royale, que même la Geometrie n'est pas exemte des controverses, & des contradictions apparentes, quoiqu'on soutienne fort souvent le contraire. Mais j'ai aussi fait remarquer ce grand avantage de la Geometrie, que ces difficultés peuvent être applanies, en sorte qu'il n'y reste plus le moindre doute; pourvu qu'on examine bien à fond toutes les circonstances du sujet, sur lequel les controverses roulent. Dans ce discours je m'en vais entretenir l'Assemblée encore sur une controverse de la pure Geometrie, qui regarde une certaine espece de points de rebroussement, semblables à un bec d'oiseau, & formés de deux branches d'une courbe, qui tournent leur concavité du même coté, au lieu que les deux branches d'une courbes, qui forment des points de rebroussement ordinaires, sont courbées en divers sens. Planches II. & III.

§. 2. Mr. le Marquis de l'Hopital, dans son Analyse des infiniment petits, nomme ces points de rebroussement à bec d'oiseau, *de la seconde espece*, & il soutient qu'il y a une infinité de courbes tant algebriques que transcendantes, qui sont pourvuës d'un tel point de rebroussement. Il prouve cela par la Theorie de l'evaluation en cette maniere. Soit ABC une courbe quelconque, qui ait en B un point d'in- Fig 1.

d'infléxion, & qu'on plie autour de cette courbe un fil, qu'on develope ensuite en le tirant au point A successivement, jusqu'à ce qu'il vienne se détacher du point d'infléxion B, & l'extremité A décrira par cette évolution l'arc AD, auquel le fil détaché BD sera perpendiculaire & son rayon de courbure, comme on sait par la theorie de l'evolution. Mais si l'on continue cette évolution au delà du point B, le fil BD rebroussera chemin, & venant dans la situation MN, son extremité décrira l'arc DN, qui sera par conséquent la continuation de l'arc AD. Or ces deux arcs AD, DN, qui au point D forment un angle infiniment petit, tournent leur concavité du même coté. Donc cette courbe ADN décrite par l'évolution de la ligne ABC aura au point D un point de rebroussement de la seconde espece; comme le Marquis de l'Hopital l'apelle.

§. 3. Quelque solide que paroisse cette démonstration, M. Guà de Malves dans son traité: *Usage de l'Analyse de Des-Cartes pour decouvrir les propriétés des lignes geometriques de tous les Ordres:* est d'un sentiment tout à fait contraire, & soutient qu'il n'y a aucune courbe, dont une branche s'etant étenduë de A à D, puisse subitement rebrousser chemin, & venir dans la situation DN, sans qu'elle change en meme tems de courbure, ou sans qu'elle devienne convexe, ayant auparavant été concave en même sens. Pour l'epreuve que M. le Marquis de l'Hopital donne, il ne nie pas, que la courbe formée de cette façon n'ait la figure représentée: mais il prétend, que la branche DN n'est pas la continuation de la branche AD, bien qu'elle soit décrite par le même mouvement d'evolution. Il est donc obligé de dire, qu'il n'est pas permis de juger de la continuité d'une courbe, par la continuité de sa description. Cette exception paroitra sans doute fort étrange, & j'avouë que, si elle étoit fondée, elle renverseroit la pluspart des marques, par lesquelles nous croyons pouvoir avec assurance juger de la figure des lignes courbes.

§. 4. M. Guà ne reconnoit que l'équation analytique, de laquelle on puisse tirer une exacte connoissance de la figure d'une ligne courbe, be, du nombre de ſes branches & de leur continuité. Il croit avoir démontré dans ſon Ouvrage, que toutes les fois qu'il ſe trouve un tel point de rebrouſſement dans une ligne courbe, elle eſt encore défectueuſe: & que ſi l'on en acheve la deſcription ſuivant l'équation qui exprime ſa nature, la figure provient toujours telle, que la 2 fig. repréſente: c'eſt à dire, que le bec d'oiſeau deviendra doublé ADM & a D n, & que ce n'eſt plus l'arc DN, qui ſoit la continuation de l'arc AD, mais l'arc D*a*; de ſorte que le point D ne ſoit que l'interſection de deux branches, AD *a* & ND *n*, qui ſe coupent en D ſous un angle infiniment petit, & qui tournent leur concavité du méme coté. On pourroit auſſi dire, que ce ſont deux branches d'une méme ligne courbe AD*n* & ND *a*, qui ſe touchent enſemble au point D, & alors il feroit incertain, ſi l'arc D*n* ou l'arc D*a* feroit la continuation de l'arc AD. *Fig. 2.*

§. 5. Pour prouver cette theſe, il tire par le point D la tangente ED *e*, qu'il prend pour l'axe, ſur lequel il poſe l' abſciſſe DP $=x$ & l'appliquée PM $=y$. Maintenant quelle que ſoit l'équation pour la courbe, ſi l'on prend l'abſciſſe x fort petite, la valeur de y ſe pourra toujours exprimer par une ſerie convergente de cette forme: *Fig. 3.*

$$y = \frac{xx}{2a} \pm Ax^{m} \pm Bx^{n} \pm Cx^{k} \;\&c.$$

où les expoſans m, n, k &c. croiſſent de plus en plus, & ſont des nombres, ou entiers, ou rompus; & s'il y en a des fractions, dont le dénominateur eſt un nombre pair, les valeurs de ces termes ſeront ambigues, & ce ſera le cas où pluſieurs branches de la courbe viennent toucher l'axe E*e* au point D. Or le premier terme où la plus baſſe puiſſance de x ſera $\frac{xx}{2a}$, ſi le rayon de la courbure en D eſt ſuppoſé $=a$.

§. 6. Cela remarqué il ſuppoſe l'abſciſſe x infiniment petite pour connoitre le train de la courbe au point D, & dans ce cas, dit-il, évanouïront tous les termes Ax^{m}, Bx^{n}, Cx^{k} &c. par rapport au

 premier

premier $\frac{xx}{2a}$, puisque leurs expoſans ſont plus grands que 2; de ſorte que pour la courbe au point D il ne reſte que l'équation $y = \frac{xx}{2a}$. qui en exprimera le train ou la route, que la courbe ſuit en deçà & en delà du point D, pourvû que l'abſciſſe x demeure infiniment petite. Or dans ce cas il eſt clair, que l'équation $y = \frac{xx}{2a}$ reſte la même, ſoit qu'on prenne x affirmative ou negative: & partant il conclud, que la courbe aura toujours auprès du point D la forme MD m; & que parconſéquent l'arc AD doit prendre ſa continuation vers Dm. Cela doit s'entendre, lorsque la courbure en D eſt finie, ce qui arrive dans notre cas; car ſi la courbure étoit, ou infinie, ou infiniment petite, ce raiſonnement perdroit ſa force.

§. 7. Ce ſont les raiſons dont M. Guà de Malves combat l'idée de M. le Marquis de l'Hopital ſur les points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece; & ſi l'on peſe les argumens de part & d'autre, on les trouvera ſi forts, qu'il paroit presque inévitable de reconnoitre une contradiction entre la deſcription faite par l'evolution, & l'équation de la courbe; l'une nous montrant très clairement que la continuation de
Fig. 2. l'arc AD doit paſſer en rebrouſſant par DN; tandisque l'autre nous perſuade, que cette continuation doit abſolument ſe faire par Dn ou Da. Néanmoins je prouverai par des raiſons inconteſtables, qu'il n'y a pas ici la moindre diſſenſion entre la deſcription mecanique & le calcul; mais qu'il s'eſt gliſſé dans le raiſonnement de M. Guà, tout ſolide qu'il puiſſe paroitre d'ailleurs, une petite inadvertence; qui étant remarquée, cette contradiction disparoitra d'abord entierement.

§. 8. Car quoiqu'il ſoit vrai, que dans une telle équation $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \&c.$ où les expoſans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. ſont des nombres affirmatifs allant en croiſſant, on peut négliger par rapport au premier terme les ſuivans, lorsqu'on ſuppoſe x infini-

infiniment petit, tant affirmatif que negatif, & que dans ce cas on n'a qu'à confiderer cette équation $y = A x^{\alpha}$; néanmoins il faut bien remarquer, que cette omiſſion des termes ne peut avoir lieu, qu'aux cas, où ces termes ont tous des valeurs réelles, quoiqu'elles ſoient infiniment petites. Car ſi un ſeul terme de ceux qu'on rejette étoit imaginaire, toute l'expreſſion, & par conſéquent la valeur de y le feroit auſſi: donc on auroit grand tort, ſi l'on mettoit $y = A x^{\alpha}$ ou à une quantité réelle. Et partant la régle reçue, par laquelle on fait évanouïr par raport au premier terme les ſuivans, demande cette reſtriction, que les termes à omettre ne ſoient pas imaginaires.

§. 9. Mr. Guà de Malves n'a pas pris garde à cette limitation abſolument néceſſaire, & c'eſt de là, que ſa pretenduë contradiction dans le point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece a tiré ſon origine. Pour éclaircir cela mieux, ſoit propoſée cette équation $y = x + xx\sqrt{-1}$; & on verra d'abord que la valeur de y eſt toujours imaginaire, excepté le ſeul cas ou $x = o$, auquel devient auſſi $y = o$. Ainſi cette équation ne déſigne qu'un ſeul point ſitué ſur l'axe au commencement des abſciſſes x. Mais ſi nous voulions juger de la courbe exprimée par cette équation, ſuivant la methode de Mr. Guà, en ſuppoſant l'abſciſſe x infiniment petite, nous n'aurions qu'à conſidérer cette équation $y = x$, & nous en conclurrions, que cette courbe ſe confond au commencement avec une droite exprimée par $y = x$; ce qui feroit pourtant contraire à la vérité. Cependant cette concluſion feroit bien juſte, ſi le coëfficient de xx, au lieu d'etre imaginaire, eut été une quantité réelle quelconque.

§. 10. Or il peut arriver, qu'une branche de la courbe évanouït, ou devient imaginaire, quand même aucun terme de l'équation n'eſt affecté ouvertement par une quantité imaginaire. Car conſidérons la courbe dont l'équation eſt $y = x + x\sqrt{x}$, & ſuppoſons x infiniment petit tant affirmatif, que negatif. Dans le premier cas le terme $x\sqrt{x}$ étant réel, & infiniment plus petit que x, on le pourra négliger pour

avoir

avoir $y = x$, qui repréſente le commencement de la courbe vers la région des abſciſſes poſitives. Mais dès qu'on prend x negatif, quoiqu' infiniment petit, le terme $x\sqrt{x}$ devenant imaginaire, rendra auſſi la valeur de y imaginaire; & partant dans ce cas il ne ſera plus permis d'enviſager l'équation $y = x$ au lieu de $y = x + x\sqrt{x}$. Cette courbe ne s'étend donc pas dans la région des abſciſſes negatives, mais elle aura deux branches vers la région des affirmatives ſelon la double valeur de $\pm x\sqrt{x}$, qui forment un point de rebrouſſement de la premiere eſpece. Il eſt clair que c'eſt la parabole cubique ſeconde.

§. 11. Un tel point de rebrouſſement ordinaire ſe trouvera auſſi dans cette équation plus générale $y = \alpha x + \beta x^{1+\frac{m}{n}}$, toutes les fois que m ſera un nombre impair, & n pair affirmatif. Car dans ce cas la valeur du terme $\beta x^{1+\frac{m}{n}}$ ſera ambiguë, & on aura

Fig. 4.

$y = \alpha x \pm \beta x^{1+\frac{m}{n}}$. Pour trouver la forme de cette courbe, on n'a qu'à tirer la droite AL, que prenant l'abſciſſe AP $= x$, l'appliquée PL devienne $= \alpha x$. Enſuite qu'on prenne ſur PL prolongée LM $=$ LN $= \beta x^{1+\frac{m}{n}}$, qui ſera infiniment plus petit que x, ſi x eſt infiniment petit, & la courbe paſſera par les points M & N, qui ſe réüniſſent au point A. Donc la courbe aura deux branches AM & AN, dont chacune eſt convexe vers AL, & qui formeront par conſéquent un point de rebrouſſement MAN de la premiere eſpece: car cette courbe ne s'etendra pas dans la région des abſciſſes negatives, puiſque mettant x negative, l'appliquée y devient imaginaire.

§. 12. La meme choſe peut arriver dans des courbes, qui ſemblent à M. Guà ne pouvoir admettre un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. On n'a qu'à conſidérer cette équation $y = \alpha x x \pm \beta x x \sqrt{x}$, laquelle devient imaginaire dès qu'on met x negatif, & partant

partant il eſt ſur, que cette courbe n'a aucune partie dans la région des abſciſſes negatives. Pour connoitre la figure de cette courbe, on n'a qu'à conſtruire ſur l'axe AP une parabole AL, qui répond à l'équation $y = \alpha xx$, & nommant AP $= x$ on aura PL $= \alpha xx$. Qu'on prenne enſuite LM $=$ LM $= \beta xx \sqrt{x}$, & les points M & N ſeront dans la courbe cherchée; & puiſqu'en ſuppoſant x infiniment petit, les parties L M & L N ſont infiniment plus petites que PL, l'une & l'autre branche A M & A N ſe confondra au commencement A avec la parabole AL, & aura la même courbure, & tournera par conſéquent ſa convexité vers l'axe AP; deſorte que ces deux branches MA & NA formeront en A un vrai point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Fig. 5.

§. 13. De là il eſt clair, que quoiqu'on ſuppoſe l'abſciſſe x infiniment petite, il n'eſt pas permis de négliger le terme $\beta xx \sqrt{x}$ par rapport à αxx, que lorſque x eſt priſe affirmative; & qu'au cas, que x eſt priſe negative, l'équation $y = \alpha xx$ ne pourra plus être employée pour $y = \alpha xx \pm \beta xx \sqrt{x}$; puiſque celle-là montreroit une valeur réelle de y, qui eſt pourtant, à cauſe du ſecond terme, imaginaire. Par conſéquent le raiſonnement de M. Guà n'a plus lieu dans ce cas, quand il prétend, que l'équation $y = \alpha xx$ puiſſe être employée pour connoitre la forme de la courbe près du point A; d'où il s'enſuivroit ſans doute, que la courbe s'étendroit dans la region des abſciſſes negatives: car l'autre terme négligé $\beta xx \sqrt{x}$ nous fait connoitre, que les appliquées y deviennent alors imaginaires. Il n'eſt donc pas permis de négliger ce terme par rapport à αxx, que tandis que ſa valeur ne devient pas imaginaire, quoiqu'on prenne x infiniment petite.

§. 14. Ayant ainſi trouvé une courbe, qui a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, il ſera facile de s'imaginer une infinité d'autres courbes, dans leſquelles il ſe trouve un pareil point de rebrouſſement. Car à l'équation $y = \alpha xx \pm \beta xx \sqrt{x}$ on pourra ajouter autant de puiſſances de x qu'on voudra, pourvû que leurs expoſants ſoient des nombres affirmatifs plus grands que 2; puiſque tous ces termes évanouïront egalement par rapport au premier αxx, pourvu

 qu'on

qu'on ſuppoſe x infiniment petite, mais affirmative. Car pour les valeurs negatives de x le ſeul terme $\beta x x \sqrt{x}$ rend cette hypotheſe inutile. De plus on pourra encore ajouter ce terme $x x \mathrm{P}$, pour avoir

$$y = \alpha x x \pm \beta x x \sqrt{x} + x x \mathrm{P}$$

ſi P marque une fonction quelconque de x, qui évanouïſſe en faiſant $x = 0$.

§. 15. Il eſt à remarquer, que toutes ces courbes, qui ſont contenuës dans cette équation generale, auront au point de rebrouſſement A leur courbure finie, ou le rayon de la dévelopée y ſera fini; tout comme cela arrive dans les courbes, que M. le Marquis de l'Hopital a formées pour démontrer l'exiſtence du point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Il ſera à propos de rapporter ici quelques courbes des plus ſimples de cette nature.

$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt{x}$	du 5^{me} ordre
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt{x}$	du 7^{me} ordre
$y = \alpha x x + \beta x^4 \sqrt{x}$	du 9^{me} ordre
$y = \alpha x x + \beta x^5 \sqrt{x}$	du 11^{me} ordre

&c.

qui toutes ont au commencement où $x = 0$, un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, & le rayon de la develope eſt dans ce point d'une quantité finie.

§. 16. On peut rendre ces formules encore plus générales ſans augmenter le nombre des termes, en employant un autre ſigne radical, dont l'expoſant eſt un nombre pair, afin que la valeur ſoit ambigue: ainſi nous aurons ces équations:

	ou
$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[6]{x}$
$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[4]{x^3}$	$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[6]{x^5}$
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x}$
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x^5}$
&c.	&c.

Toutes

Toutes ces formules seront comprises dans cette générale $y = \alpha xx + \beta x^{2 + \frac{m}{n}}$, où m marque un nombre affirmatif impair, & n un nombre affirmatif pair quelconque. Le rayon de la dévelopée sera dans toutes ces courbes au point de rebroussement fini.

§. 17. Au lieu du premier terme αxx on pourra aussi prendre une autre puissance de x plus haute, & alors le rayon de la dévelopée au point de rebroussement sera infiniment grand, comme dans ces formules

$$y = \alpha x^3 + \beta x^{3 + \frac{m}{n}}$$
$$y = \alpha x^4 + \beta x^{4 + \frac{m}{n}}$$
$$y = \alpha x^5 + \beta x^{5 + \frac{m}{n}}$$
&c.

ou plus généralement $y = \alpha x^k + \beta x^{k + \frac{m}{n}}$, où k marque un nombre entier plus grand que 1, & les valeurs de m & n demeurent comme dans l'article précédent. Car si k étoit $= 1$, le point de rebroussement deviendroit de la première espece. Il n'est pas aussi nécessaire que k soit un nombre entier, il peut être un nombre rompu, pourvû que la puissance x^k n'acquerre pas une valeur ambigue, qui puisse être aussi bien negative qu'affirmative.

§. 18. L'exposant k peut aussi être un tel nombre rompu moindre que 2, pourvu qu'il soit plus grand que 1, & dans ces cas le rayon de la dévelopée au point A, où se trouve le point de rebroussement de la seconde espece, deviendra infiniment petit. On pourra même prendre k plus petit que l'unité, pourvu que la puissance x^k ne devienne pas ambigue, ce qui arrive, si k est une fraction dont le dénominateur est un nombre impair. Mais alors la tangente de la courbe au point de rebroussement A deviendra perpendiculaire à l'axe AP, au Fig. 6

lieu que dans les cas précédens elle tomboit fur l'axe AP même. Dans ces cas il faut remarquer, que le rayon de la dévelopée au point A fera fini fi $k = \frac{1}{2}$, (cas qui fe trouve exclus,); infiniment petit fi $k > \frac{1}{2}$ & infiniment grand fi $k < \frac{1}{2}$. Ainfi cette équation $y = \alpha \sqrt[3]{x} + \beta \sqrt[2]{x}$ marquera une telle courbe MAN, qui aura au point A un point de rebrouffement de la feconde efpece, où le rayon de la dévelopée fera infiniment grand.

§. 19. Il eft auffi poffible que l'expofant k foit $= \frac{1}{2}$, fans que la puiffance $\alpha x^{\frac{1}{2}}$ devienne ambigue: l'ambiguité étant détruite par le terme fuivant, comme dans cette équation $y = \alpha \sqrt{x} + \beta \sqrt{x \sqrt{x}}$, où le premier terme $\sqrt{x}$ fe trouve dans le fecond encore après le figne radical, de forte que fi l'on prenoit le premier terme $\sqrt{x}$ negatif, le fecond en deviendroit imaginaire. Et en effet puifque x a dans le fecond terme plus de dimenfions que dans le premier, cette courbe aura au commencement auffi un point de rebrouffement de la feconde efpece. Or cette courbe appartiendra au quatrième ordre, puifque fon équation étant délivrée des radicaux devient

$$y^4 - 2\alpha\alpha x y^2 - 4\alpha\beta\beta x x y + \alpha^4 x x - \beta^4 x^3 = 0$$

qui paroit être la plus fimple courbe douée d'un tel point de rebrouffement.

§. 20. Car il eft affez évident qu'un tel point de rebrouffement ne peut pas avoir lieu dans les lignes du troifieme ordre: puifqu'il eft poffible de tirer une ligne droite, par un tel point de rebrouffement, qu'elle faffe quatre interfections, ce qui demande au moins une ligne du quatrième ordre. Or je ferai voir bientôt, qu'il y a une infinité de lignes du quatrième ordre, qui ont un tel point de rebrouffement, & il fera encore incertain laquelle d'entr'elles pourroit être jugée la plus fimple: fi l'on ne veut regarder dans ce jugement, que l'équation entre les coordonnées, la décifion ne fera plus difficile, dès qu'on confidérera l'équation générale du quatrième ordre

dre, qui renferme toutes les courbes de cette nature. Par là il est aisé de juger, que dans le cinquième ordre & les suivants le nombre de telles courbes sera encore infiniment plus grand, de sorte qu'on ne sauroit plus avoir le moindre doute sur l'existence de ce point de rebroussement de la seconde espece de M. le Marquis de l'Hôpital.

§. 21. La derniere formule $y = \alpha\sqrt{x} + \beta\sqrt{x\sqrt{x}}$ ne differe des precédentes, qu'en ce qu'ici l'axe AP est perpendiculaire à la courbe, au lieu que dans les précedentes équations elle étoit la tangente même. Car on n'a qu'à changer y & x pour avoir $x = \sqrt{y} + \sqrt{y\sqrt{y}}$, & prenant les quarrés on aura $xx = y + 2y\sqrt[4]{y} + y\sqrt{y}$. Donc si x & y sont infiniment petits, on rejettera le dernier terme, & ayant $y = xx$, cette valeur substituée dans le terme $y\sqrt[4]{y}$ donnera $xx\sqrt{x}$, de sorte que $xx = y + xx\sqrt{x}$ ou $y = xx \pm xx\sqrt{x}$, qui est une des équations precédentes. De même de l'equation générale $y = xx^{k} + \mathfrak{G}x^{k+\frac{m}{n}}$ (17), changeant les coordonnées x & y, on aura $x = y^{k} + y^{k+\frac{m}{n}}$. Or puisque x & y sont supposées infiniment petites, il y aura $y^{k} = x$ & $y = x^{\frac{1}{k}}$; donc $x = y^{k} + x^{1+\frac{m}{nk}}$, & $y = \sqrt[k]{(x - x^{1+\frac{m}{nk}})} = x^{\frac{1}{k}} + .\, x^{\frac{m+n}{nk}}$ ou $y = \alpha x^{\frac{1}{k}} + \mathfrak{G}x^{\frac{m+n}{nk}}$, équation pour une courbe qui aura au commencement un point de rebroussement de la seconde espece, qui est perpendiculaire à l'axe.

§. 22. De ces formules il est aisé d'en tirer d'autres, qui contiennent des points de rebroussement de cette seconde espece, dont la tangente fasse un angle quelconque oblique avec l'axe AP. Pour commencer des cas les plus simples, soit proposée cette équation $y =$

Fig. 7. $\alpha x + \beta xx + \gamma xx\sqrt{x}$, & on verra premierement, que la droite AK sera la tangente de cette courbe au point A, si posant $AP = x$, sera $PK = \alpha x$. Ensuite qu'on construise la parabole AL de sorte que $PL = \alpha x + \beta xx$, & qu'on prenne $LM = LN = \gamma xx\sqrt{x}$; on obtiendra deux branches AM & AN, qui se réünissant en A, y auront pour tangente la droite AK, & leur courbure sera la même, que celle de la parabole AL; de sorte que la convexité de ces deux branches au
Fig. 8. point A sera tournée vers l'axe AP. Or si le coëfficient β est negatif, cette équation $y = \alpha x - \beta x + \gamma xx\sqrt{x}$ représentera un point de rebroussement MAN, dont la concavité sera tournée vers l'axe AP.

§. 23. Cette formule peut être renduë plus générale de cette maniere: $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^{2+\frac{m}{n}}$ en supposant m un nombre impair & n un nombre pair: on y pourra encore ajouter autant de puissances de x qu'on voudra, pourvu que leurs exposants soient plus grands que 2, & dans tous ces cas le rayon de la dévelopée au point de rebroussement sera fini. Or il sera infiniment grand dans cette équation:

$$y = \alpha x + \beta x^{k} + \gamma x^{k+\frac{m}{n}}$$

si l'exposant k est plus grand que 2; mais infiniment petit, si cet exposant k est moindre que 2, mais pourtant plus grand que 1: ou il est à remarquer, qu'il peut aussi être un nombre rompu, pourvu que la puissance x^{k} n'en devienne pas ambigue.

§. 24. Pour rendre ces formules encore plus générales, soit P une fonction quelconque de x, qui n'ait aucune ambiguité, laquelle devienne $= 0$ en supposant $x = 0$. Ensuite soit Q une telle fonction ambigue, qu'elle renferme aussi bien une valeur negative qu'affirmative, ou qui soit $\pm$ Q, mais qui devienne imaginaire en prenant x negatif, au moins tandis qu'il est infiniment petit: & de plus que Q évanouisse en faisant $x = 0$. Cela posé, il est clair, que cette équation:

$= y$

$y = \alpha x + x P (1 \pm Q)$ désignera une courbe, qui aura au commencement un point de rebroussement de la seconde espece: & cette équation peut être renduë encore plus générale en supposant $y = \alpha x + x P (1 \pm Q)^n$, n marquant un nombre quelconque tant affirmatif que negatif. La fonction P pourra aussi être ambigue, pourvu que son ambiguité soit détruite par la fonction Q, ce qui arrive si elle renferme $\sqrt{P}$, puisqu'alors P ne peut pas recevoir la valeur negative.

§. 25. On pourroit rendre cette formule encore plus générale en ajoutant à y des fonctions de y, qui évanouïssent par rapport à Px, si l'on met x infiniment petit, mais je ne m'y arréterai pas, puisque cette formule est déjà suffisante pour trouver une infinité de telles lignes courbes de tous les ordres après le troisieme. Je remarquerai seulement que faisant $n = -1$, $P = x$ & $Q = \sqrt{x}$, on obtient encore une autre courbe du quatrième ordre: $y = \frac{\alpha x x}{1 \pm \beta \sqrt{x}}$: qui sera comprise dans cette équation $(y - \alpha x x)^2 = \beta\beta yyx$, & qui paroit encore plus simple que la précedente. En changeant les constantes pour remplir l'uniformité, elle sera $aayy - 2ayxx + x^4 = bxyy$.

§. 26. Par le moyen de ces formules il sera donc aisé de fournir une infinité de lignes courbes, qui auront un tel point de rebroussement de la seconde espece. Mais il n'en sera pas de même de la question inverse, si l'on veut juger, l'équation pour une courbe étant donnée, si cette courbe aura un tel point de rebroussement, ou non? Pour déterminer le point de rebroussement ordinaire, on a coutume de chercher l'endroit, où le differentiel second de l'une des coordonnées, ou évanouït, ou devient infini; puisque dans cet endroit là le rayon de la courbure est toujours, ou infini, ou egal à zero Mais dans le point de rebroussement de la seconde espece le rayon de la courbure est tantôt fini, tantôt infiniment grand, tantôt infiniment petit; de sorte que ce point n'est pas attaché à une certaine proprieté des differentiels seconds.

On

On ne sauroit non plus rien conclure des differentiels du troisiéme ou de quelqu'ordre plus haut, puisqu'on pourra toujours assigner de tels points de rebroussement, où tous ces differentiels ont des valeurs quelconques.

§. 27. Ne voyant donc aucune methode sûre pour découvrir cette espece de points de rebroussement, par quelque propriété des differentiels, on sera obligé de se tenir à l'analyse des finis, ou de tirer le jugement de l'équation en termes finis de la courbe. Or d'abord il est évident, que ce point de rebroussement est un point double de la courbe, & partant il faut commencer par chercher tous les points doubles qui peuvent se trouver dant la courbe proposée, & ensuite le jugement, si un tel point double est en même tems un point de rebroussement de la seconde espece, ne sera plus difficile. Or pour reconnoitre les points doubles on peut faire usage des differentiels; car ayant differentié l'équation proposée entre les coordonnées x & y, on supposera séparément égaux à zero, tant les termes qui contiennent les dx, que les dy: & les cas, où ces deux équations jointes à l'équation même de la courbe, auront les mêmes racines, montreront tous les points doubles, qui se trouvent dans la courbe proposée.

§. 28. Par cette methode ayant decouvert les points doubles de la courbe proposée, on jugera de chacun, s'il est un point de rebroussement de la seconde espece, ou non, de la maniere suivante. On tirera par le point double à volonté une droite, qu'on regardera comme l'axe, sur lequel on prendra depuis le point double les abscisses, qui soient $= x$, & les appliquées $= y$, qu'on fera, ou perpendiculaires, ou inclinées sous un angle quelconque à l'axe. Cela fait, l'équation pour la courbe entre x & y sera toujours telle, qu'il ne s'y trouvera, ni aucun terme constant, ni les termes où x & y n'ont qu'une seule dimension, & partant l'équation, qui résulte, sera toujours comprise dans cette forme générale.

$$0 = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 y + \zeta xy^2 + \eta y^3 + \theta x^4 + \iota x^3 y + \&c.$$

Car

Car toutes les fois que dans l'équation manquent le terme constant & les termes x & y, c'est une marque seure, que la courbe aura au commencement, où $x = 0$ & $y = 0$, un point double, ou une intersection de deux branches.

§. 29. Ensuite on supposera x & y infiniment petits pour avoir cette équation $0 = \alpha xx + \beta xy + \gamma yy$, dont les racines $y = -\frac{\beta x}{2\gamma} \pm x \surd \left(\frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ marqueront les tangentes des branches, qui s'entrecoupent au commencement. Donc si ce point double est un point de rebroussement, il faut que ces deux tangentes soient les mêmes, ce qui arrive si $\beta\beta = 4\alpha\gamma$. Par conséquent s'il n'y a pas $\beta\beta = 4\alpha\gamma$, ou si l'equation, en supposant x & y infiniment petits, n'aura point deux racines égales, ce sera une marque sure, que le point double n'est pas un point de rebroussement, soit de la première ou de la seconde espece. Il ne reste donc que le cas de deux racines égales pour entrer dans le jugement, s'il y a un point de rebroussement de la seconde espece ou non.

§. 30. Mais si les deux tangentes conviennent, on pourra prendre cette commune tangente pour axe, & alors l'équation pour la courbe aura cette forme.

$$0 = Ayy + Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ey^3 + Fx^4 + Gx^3y + \&c.$$

Maintenant il faut voir, si les deux branches ont tourné leur courbure du même coté. Pour cet effet il faut, que dans la supposition de x infiniment petit, en négligeant tous les termes, qui évanouissent par rapport aux autres, la valeur de y ne devienne pas ambigue, c'est à dire, il faut qu'il soit ou $y = \alpha xx$, ou $y = \alpha x^3$; ou $y = \alpha x^4$ &c. Soit $y = \alpha xx$, ce qui est le cas où le rayon de la developée devient fini, & alors on aura en négligeant les dimensions plus hautes que la quatrième.

$$0 = \alpha^2 Ax^4 + Bx^3 + \alpha Cx^4 + Fx^4$$

 donc

donc il faut qu'il soit $B=0$, & que α n'obtienne pas une valeur doubl. de l'equation $\alpha^2 A + \alpha C + F = 0$, ou que $CC = 4AF$, de sort. que $Ayy + Cxxy + Fx^4$ devienne un quarré.

§. 31. Donc à moins que l'équation n'ait pas cette forme

$$(y-\alpha xx)^2 = Bxy^2 + Cy^3 + Dx^3y + Exxyy + Fxy^3 + \&c$$

la courbe n'aura pas un point de rebroussement de la seconde espece Mais cela ne suffit pas encore; il faut outre cela, que dans l'expressior $Bxy^2 + Cy^3$ &c. si l'on met $y = \alpha xx$, la plus basse puissance de x soit impaire. Par là on comprend aisément, que si l'équation étoi. $(y-\alpha x^3)^2 = Bxy^2 +$ &c. cette partie doit avoir toujours la méme propriété, qu'aprés avoir fait $y = \alpha x^3$ la plus basse dimension de x soit impaire & plus haute que x^6; & cette méme maxime se doit observer dans les équations plus compliquées; de sorte que le jugement du point de rebroussement de la seconde espece ne sera jamais difficile en se servant de cette maniere.

§. 32. De là nous pourrons donner une équation générale pour toutes les lignes du quatrieme ordre, qui auront un point de rebroussement de la seconde espece; laquelle sera

$$(y-\alpha xx)^2 = Axy^2 + By^3 + Cx^3y + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4.$$

Car cette derniere partie $Axy^2 + By^3 + Cx^3y$ &c. deviendra au commencement où $y = \alpha xx$ égale à

$$\alpha^2 Ax^5 + \alpha^3 Bx^6 + \alpha Cx^5 + \alpha^2 Dx^6 + \alpha^3 Ex^7 + \alpha^4 Fx^8$$

& partant en négligeant les plus hautes puissances de x, l'équation sera pour le commencement

$$(y-\alpha xx)^2 = \alpha\ (\alpha A + C)x^5 \text{ ou } y = \alpha xx \pm xx\sqrt{\alpha(\alpha A + C)x}.$$

Donc

Donc pourvu que $\alpha A + C$ ne ſoit pas égal à zero, les lignes compriſes dans l'équation générale donnée auront un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Par conſéquent cette propriété aura lieu toutes les fois, qu'il n'y a pas $C = -\alpha A$; & alors ce point de rebrouſſement ſera de cette nature $y = \alpha xx + \beta xx\sqrt{x}$.

§. 33. Mais quand $C = -\alpha A$, il y aura encore des cas, où l'équation :

$$(y-\alpha xx)^2 = Axy(y-\alpha xx) + By^3 + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4$$

contient des courbes d'un tel point de rebrouſſement. Pour trouver ces cas, on n'a qu'à ſuppoſer, pendant que x eſt conſidéré comme infiniment petit :

$$y = \alpha xx + \beta x^3 + \gamma x^3\sqrt{x}.$$

& apres avoir déterminé β & γ on parviendra à cette equation :

$$(y-\alpha xx-\tfrac{1}{2}Axy)^2 = Byy(y-\alpha xx) + Exy^3 + Fy^4$$

qui renferme encore une infinité d'autres courbes, qui ont toutes un tel point de rébrouſſement. Donc en regardant la ſimplicité de l'équation, il n'y a aucun doute que cette ligne $(y-\alpha xx)^2 = Axyy$ ou $y = \dfrac{\alpha xx}{1-\sqrt{Ax}}$ ne ſoit la plus ſimple qui ait cette propriété.

§. 34. Soit propoſée pour donner un exemple de la methode, que je viens d'expliquer, cette ligne du cinquiéme ordre, dont l'équation eſt :

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)(aa-zz)^2 = 2aaxx - x^4 - 2xxzz.$$

Pour trouver ſi cette courbe a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, je cherche premierement, ſi elle a un point double. Pour cet effet l'équation propoſée donnera par la différentiation en ſuppoſant x conſtant :

$$-4\left(1-\frac{x}{a}\right)(aa-zz)\ zdz+4xxzdz=0.$$

Or en suppofant z conftant nous aurons :

$$-\frac{dx}{a}\ (aa-zz)^2=4aaxdx-4x^3dx-4xzzdx.$$

A ces trois équations fatisfont ces valeurs :

$$x=0 \quad \& \quad z=\pm a.$$

§. 35. Cette courbe aura donc deux points doubles, & pour chercher la nature de chacun, je fuppoferai $z=a-y$, car il eft clair de l'équation propofée, puisqu'elle a un diametre fur lequel font prifes les abfciffes x, que ces deux points doubles feront femblables entr'eux. Or pofant $z=a-y$, nous aurons cette équation:

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)yy(2a-y)^2=2aaxx-x^4-2xx(a-y)^2$$

ou bien:

$$\begin{aligned}4aayy-4ay^3+y^4-4axyy+4xy^3-\frac{xy^4}{a}&-2aaxx+x^4=0\\ -4axxy+2xxyy\quad&+2aaxx\end{aligned}$$

& partant.

$$(2ay-xx)^2=4ay^3+4axyy+y^4+4xy^3+2xxyy-\frac{xy^4}{a}$$

D'où il eft clair que cette courbe a deux points de rebrouffement de la feconde efpece.

§. 36. Pour connoitre la figure de cette courbe, on n'a qu'à chercher la valeur de zz de l'équation propofée, qu'on trouvera $zz=aa-\frac{axx\pm x^2\sqrt{ax}}{a-x}$, ou $zz=aa-\frac{xx\sqrt{a}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{x}}$. De laquelle on tire les endroits où l'appliquée z evanouït, par le moïen de cette équation $aa\sqrt{a}\mp aa\sqrt{x}-xx\sqrt{a}=0$ ou $(aa-xx)^2=a^3x$ qui a deux racines réelles qui font:

$$x=0,5248876a;\ \& \ x=1,4902162a.$$

Enfuite

Enſuite la valeur de dz ſera $= 0$, dans le cas $\sqrt{x} = \frac{4}{3}\sqrt{a}$ ou $x = \frac{16}{9}a = 1,7777\,a$; & la valeur de dx ſera $= 0$, où $z = 0$, c. à d. où la courbe coupe l'axe. Mais ſi nous ſuppoſons $x = \frac{16}{9}a$, nous aurons ou $zz = \frac{283}{27}aa$ ou $zz = -\frac{57}{189}aa$, dont la derniere valeur eſt imaginaire. Enfin on voit que la courbe aura auſſi une aſymtote perpendiculaire à l'axe, ou $x = a$.

§. 37. Cette courbe eſt repréſentée dans la 9^me^ figure, où CO eſt l'axe & en même tems le diametre de la courbe, C le commencement des abſciſſes x. Les points A, A ſont les deux points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, que nous venons de trouver étant $AC = a$. Les deux branches qui conſtituent ces points de rebrouſſement, forment la lunule ABADA. Outre cela prenant $CE = a$, la droite FEF perpendiculaire à l'axe CO ſera une aſymtote de deux autres branches IHK & IHK, qui de K, K vont en divergeant à l'infini, ayant en H, H leur plus petite diſtance à l'axe CO. On voit auſſi qu'on peut tirer une droite, qui coupe cette ligne courbe en 5 points, ſuivant la nature des lignes du 5^me^ ordre. *Fig. 9.*