1751

De motu corporum flexibilium

Leonhard Euler

E165

DE
MOTV CORPORVM FLEXIBILIVM.

Argumentum, quod hic pertractandum ſuſcipio, inſignem mechanicae partem conſtituit, cum enim hac ſcientia cunctorum corporum motus, tam quales permaneant, quam quomodo a potentiis immutentur, inueſtigari debeant, ex diuerſa corporum indole primaria tractationis diuiſio originem trahit. Hinc corpora flexibilia, quorum ſtructura ita eſt comparata, vt partes inflecti queant, ad peculiarem mechanicae partem referri debebunt, quae, etſi alias vniuerſa motus ſcientia iam ſatis exculta videatur, tamen ne ad hoc vsque tempus quidem a quoquam eſt tentata, ita vt etiam prima principia, ex quibus corporum flexibilium motus definiri debeat, adhuc ignorentur. Quanquam enim Celeberrimus Daniel Bernoulli et ego motum oſcillatorium huiusmodi corporum feliciter explicauimus, tamen quia tantum oscillationes minimas ſumus contemplati, ipſis genuinis principiis, quibus corporum flexibilium motus continetur, carere poteramus, cum principia ſtatica eſſent ſufficientia. Quoniam igitur hoc argumentum plane eſt nouum atque adhuc intactum, caſus tantum nonnullos ſimpliciſſimos euoluam, vt principia horum motuum in medium proferantur, ſimulque methodus tradatur, qua omnia huius generis problemata reſolui conueniat. Methodo igitur mathematicis conſueta, quae in hanc rem ſum meditatus, ordine proponam.

Defi-

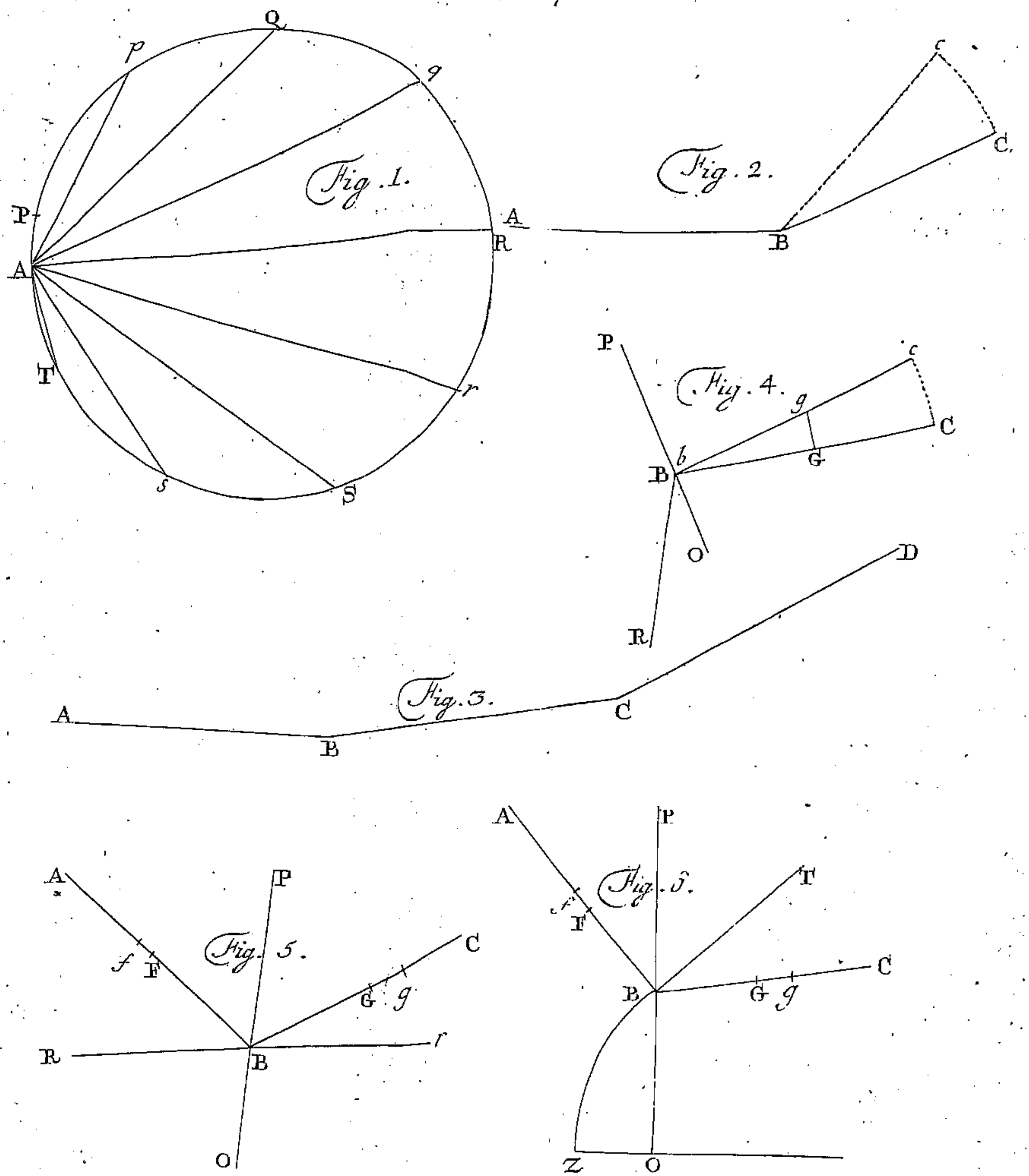
Fig. 1.
Q
p
q
P
A
R
A
T
r
s
S
Fig. 2.
c
C
B
Fig. 4.
P
c
g
C
b
B
G
O
R
D
Fig. 3.
A
B
C
A
P
Fig. 5.
f
F
C
G
g
R
B
r
O
A
P
Fig. 6.
T
f
F
C
B
G
g
Z
O

Definitio.

1. Flexura est eiusmodi duorum corporis partium AB et BC connexio in B, ita vt vtraque pars circa hoc punctum B liberrime inflecti atque rotari possit. Tab. II. fig. 2.

Scholion.

2. Flexura scilicet B tantum diuulsioni partium AB et BC resistit, de cetero autem non impedit, quo minus ambae partes ad quemcunque angulum inter se ABC vel AB inclinentur. Quando autem dico, partes liberrime inflecti posse, hanc flexuram perfectam, de qua hic loquor, a flexura elastica distinguo; ad partes enim circa flexuram perfectam inflectendas tantum opus est, vt inertia partis mouendae superetur, cum si flexura esset elastica, praeterea elater superari deberet. Huiusmodi flexura perfecta producitur, si duo corpora ope fili colligantur, quod quidem cuique est notum, corpora autem circa flexuram satis gracilia esse oportet, vt ne nimis crassa figura inflectionem impediat. Hancobrem hic partes per flexuram inter se connexas tanquam lineas rectas repraesentabo, quod tamen non impediat, quo minus quaecunquae figurae, dummodo sint idoneae, in earum linearum rectarum locum mente substituantur.

Corollar. 1.

3. Ex hac definitione proprie intelligitur, quid sit corpus vnica flexura praeditum; quippe quod constat duabus partibus rigidis AB et BC per flexuram B inter se connexis.

Corol-

Corollar. 2.

Tab. II. fig. 3. 4. Hinc vero ſimul colligitur; corpora duabus pluribusue flexuris praedita conſtare ex pluribus partibus rigidis AB, BC, CD, cet. quarum binae quaeque contiguae ope flexurae, vti in B et C, ſint connexae.

Corollar. 3.

5. Si longitudines partium rigidarum euaneſcant, ſeu fiant quam minimae, numerusque flexurarum in infinitum excreſcat, tum perſpicuum eſt, huiusmodi corpus filum ſeu funem ſeu catenam perfecte flexilem eſſe exhibiturum.

Theorema

6. Si corporis flexibilis ſingulis partibus aequales motus ſecundum eandem plagam imprimantur, tum totum corpus, quaſi eſſet rigidum, nullam inflexionem patietur, ſed eadem perpetua celeritate in eandem plagam moueri perget, niſi a cauſis externis in hoc motu perturbetur.

Demonſtratio.

Veritas huius propoſitionis ſequitur ex prima motus lege, qua omnia corpora motum, quem ſemel acceperunt, vniformiter in directum conſeruare conantur. Corporis igitur flexibilis, de quo ſermo eſt, ſingulae partes, ſi eſſent diſſolutae, motum impreſſum conſeruarent, at, quoniam omnibus partibus aequalis motus in eadem directione eſt impreſſus, puncta quae initio erant contigua, talia perpetuo manebunt ſicque flexuris per hunc motum impreſſum nulla vis infertur. Quamobrem quotcunque in corpore fuerint

fuerint flexurae, continuatio motus impreſſi nequaquam impeditur, ideoque corpus, tanquam eſſet rigidum, vniformiter in directum moueri perget. Q. E. D.

Corollar. 1.

7. Hoc igitur caſu, quo ſingulis corporis partibus motus aeque celeres ſecundum eandem directionem imprimuntur, ſine vlla difficultate perpetua motus continuatio definiri poteſt, niſi motus a viribus externis perturbetur.

Corollar. 2.

8. Quando autem ſingulis partibus diuerſi motus imprimuntur, ita, vt ſingulae ſuum motum conſeruare nequeant, quin ſimul in flexuris a ſe inuicem diſſoluantur, tum ob id ipſum, quod flexura diſſolutioni reſiſtit, motus partium perturbabuntur.

Corollar. 3.

9. Quo igitur appareat, vtrum per flexuram motus immutetur, concipiatur nexus omnis in flexuris tolli, ac diſpiciatur, vtrum, dum quaelibet pars motum ſibi impreſſum proſequitur, termini, qui ante in flexuris erant coniuncti, a ſe inuicem diſcedant, nec ne, priori enim caſu flexurae vis ſeſe in continendis partibus exerens, motum turbabit, altero vero caſu motum inuariatum relinquet.

Scholion.

10. Ad motum ergo cuiusque corporis flexibilis determinandum, ſingulae partes, quaſi inter ſe eſſent diſſolu-

 tae,

tae, confiderari, et quo motu promoueri pergant, examinari debebunt; tum vero flexurae cuiusque vis eft inveftiganda, quae fingula motus ita moderetur, vt partes, vti natura poftulat, contiguae conferuentur, hocque modo ad quoduis momentum motus fingularum corporis partium definietur. En ergo paucis verbis complexam totam methodum, qua in hoc negotio vti oportet; interim tamen in eius applicatione maxima obftacula occurrunt, quae fingulari circumfpectione remoueri debent. Maximum autem fubfidium in hac inueftigatione in eo verfatur, vt ille ipfe motus, qui quaeritur, modo quam commodiffimo per fymbola repraefentetur; qua de re in fequenti fcholio ante omnia eft explicandum.

Scholion 2.

11. Confideremus primo corpora vnica flexura praedita, his enim pertractatis non admodum difficile erit ad plures flexuras methodum accommodare. Huiusmodi ergo corporis motus, vtcunque fuerit comparatus, mente comprehendetur atque intelligetur, fi primo nouerimus motum, quo ipfa flexura progrediatur, hoc eft, viam, quam defcribit, atque eius celeritatem in fingulis locis. Deinde fi vtraque pars non motu fibi parallelo flexuram fequatur vtriusque motus rotatorius feu angularis circa ipfam flexuram debet cognofci. Tandem ad quoduis tempus fitus partium refpectu plagae datae erit definiendus. Has autem res fi in quouis motu oblato determinare atque affignare poterimus, tum dubium eft nullum, quin totum corporis motum perfecte habeamus cognitum. Ad haec autem expedienda

pedienda: primum opus est vt inuestigemus, quemadmodum vtraque pars, si esset ab altera soluta, motum suum esset continuatura, deinde quomodo quaeuis potentia sollicitans hunc motum sit perturbatura. Denique ea flexurae vis est quaerenda, qua fiat, vt vtriusque partis terminus B aequo motu cieatur; sicque vis, quam flexura sustinet, seu qua ruptioni resistit, innotescet, qua cognita vtriusque partis, atque adeo totius corporis motus ita determinabitur, vti ad eius perfectam cognitionem requiri ostendimus.

Problema 1.

12. Si corporis flexibilis vtcunque moti vna pars subito a reliquarum nexu dissoluatur, definire motum, quo ista pars sibi relicta promoueri perget.

Solutio.

Eo momento, quo pars BC soluitur, habeat punctum seu extremitas B motum secundum directionem BP cum celeritate debita altitudini $= v$, circa punctum B autem ipsa pars BC habuerit motum rotatorium, cuius celeritas angularis in data a puncto B distantia $= 1$ debita sit altitudini $= q$, angulus vero CBP momento solutionis sit $= \Phi$. Quo nunc huius motus continuatio facilius cognoscatur, ponamus toti spatio motum imprimi aequalem et contrarium ei, quem punctum B momento solutionis habuerat; quo facto solus motus rotatorius circa punctum B in parte BC supererit. Consideretur ergo huius partis centrum grauitatis, quod sit in G, existente $BG = g$, atque manifestum erit ex motu rotatorio corporis Tab. II. fig. 4.

 poris

poris BG circa B centrum grauitatis G habiturum esse motum secundum directionem Gg ad BG normalem, cuius celeritas debita sit altitudini $= ggq$. Per motus ergo legem generalem centrum grauitatis G hac ipsa celeritate promouebitur vniformiter in directum secundum directionem Gg: interea vero corpus BC circa hoc centrum grauitatis G gyrabitur eodem motu rotatorio, quem circa B momento solutionis habuerat scilicet huius motus celeritas angularis in distantia $= 1$ a centro G erit debita altitudini $= q$. Hocque ergo duplici motu, altero rectilineo centri grauitatis G, altero rotatorio circa idem centrum corpus vniformiter in infinitum promouebitur. Quodsi nunc toti spatio ille motus, quem ipsi impressum esse finximus, iterum dematur, per compositionem orietur motus verus, quem pars BC soluta habebit. Q. E. I.

Coroll. 1.

13. Primo ergo momento pars, seu virga BC perveniet in situm bgc, ideoque ad rectam BP perinde inclinabitur, ac si circa punctum fixum B esset rotatum. Scilicet dum centrum grauitatis G absoluit spatiolum $Gg = dx = g\,dt\sqrt{q}$, posito dt pro elemento temporis, fiet $d\Phi = -dt\sqrt{q}$, ob angulum PBG $= \Phi$.

Coroll. 2.

14. Punctum autem B de recta OP transferetur in punctum b, sumta $gb = $ BG, et cum ista translatio congruat cum effectu vis centrifugae, qua punctum B circa G rotatur, cuius celeritas est debita altitudini ggq, punctum

ctum B in b vrgebitur vi acceleratrice $= 2gq$, quae id ſecundum directionem BG ſollicitabit.

Coroll. 3.

15. Hinc punctum B perinde mouebitur, ac ſi ſollicitaretur a duabus viribus, quarum altera ſit tangentialis eius motum in directione BP accelerans vi $= 2gq \operatorname{cof.} \Phi$, altera vero normalis id a ſemita OP dextrorſum depellens vi $= 2gq \operatorname{ſin.} \Phi$.

Problema 2.

16. Poſitis, quae ante, ſi inſuper pars BC ſtatim ac diſſoluitur, ſollicitetur a vi quacunque $BR = R$, determinare motum, quo pars BCD primo ſaltem momento promoueri perget.

Solutio.

Retentis iisdem denominationibus, quibus ante ſumus vſi, ſit maſſa virgae $BC = B$, eiusque momentum inertiae reſpectu centri grauitatis ſit $= nBgg$; angulus vero OBR ſit $= \omega$. Quo nunc appareat, quantum motus virgae BC ante definitus perturbetur a vi $BR = R$, primum eius effectus in motu progreſſiuo centri grauitatis inueſtigari debet. Per leges autem, quas corpora rigida, ſi ſollicitantur, obſeruant, primo motus centri grauitatis retardabitur vi $= \frac{R}{B} \operatorname{ſin.} (\Phi - \omega)$, tum vero de motu rectilineo Gg retrahetur vi ſecundum GB agente $= \frac{R}{B} \operatorname{cof.} (\Phi - \omega)$. Eadem vero potentia R, mentem a motu rotatorio abſtrahendo, punctum B vrgebitur, ita vt in motu ſuo ſecundum Bp retardetur vi $= \frac{R}{B} \operatorname{cof.} \omega$, tum vero ſiniſtrorſum vrgetur, vi normali $= \frac{R}{B} \operatorname{ſin.} \omega$. At vero praeterea motus rotatorius accelerabitur vi B R $=$ R momento $=$ Rg, fin. ($\phi - \omega$) quod diuifum per momentum inertiae $= nBgg$ dabit accelerationem in diftantia $= 1$ a centro grauitatis, vnde erit $dq = \frac{-Rgd\phi}{nBgg}$ fin. $(\phi-\omega) = \frac{Rdx}{nBgg}$ fin. $(\phi-\omega)$. Punctum ergo B in motu circa G rotatorio accelerabitur vi $= \frac{R}{nB}$ fin. $(\phi-\omega)$ fecundum directionem ad B G normalem. Ergo punctum B in motu fuo tangentiali B P retardatur vi $= \frac{R}{nB}$ fin. $(\phi-\omega)$ fin. ϕ, de recto autem tramite dextrorfum deflectitur vi $= \frac{R}{nB}$ fin. $(\phi-\omega)$ cof. ϕ. His coniunctis omnino punctum B ita mouebitur ac fi follicitaretur primum fecundum directionem motus fui B P vi acceleratrice $= 2gq$ cof. $\phi - \frac{R}{B}$ cof. $\omega - \frac{R}{nB}$ fin. $(\phi-\omega)$ fin. ϕ. Deinde vero dextrorfum deflectetur vi normali acceleratrice $= 2gq$ fin. $\phi - \frac{R}{B}$ fin. $\omega + \frac{R}{Bn}$ fin. $(\phi-\omega)$ cof. ϕ. Ex his ergo formulis intelligitur motus, quo punctum B primo momento folutionis progredietur, praeterea vero mutatio motus rotatorii cognofcitur, quoniam celeritas rotatoria in diftantia a puncto B $= 1$, acceleratur vi $= \frac{R\,\text{fin.}\,(\phi-\omega)}{nBg}$. His autem cognitis problemati perfecte eft fatisfactum Q. E. I.

Corollar. 1.

17 Si igitur vis tangentialis motum puncti B accelerans ponatur $=$ T, et vis normalis dextrorfum deflectens $=$ V, habebuntur hae duae aequationes

$$T = 2gq\,\text{cof.}\,\phi - \tfrac{R}{B}\,\text{cof.}\,\omega - \tfrac{R}{nB}\,\text{fin.}\,(\phi-\omega)\,\text{fin.}\,\phi$$

$$V = 2gq\,\text{fin.}\,\phi - \tfrac{R}{B}\,\text{fin.}\,\omega + \tfrac{R}{nB}\,\text{fin.}\,(\phi-\omega)\,\text{cof.}\,\phi$$

Coroll.

Corollar. 2.

18. Ponamus $R \operatorname{fin.} \omega = P$ et $R \operatorname{cof.} \omega = Q$, erit $R \operatorname{fin} (\Phi - \omega) = Q \operatorname{fin.} \Phi - P \operatorname{cof.} \Phi$, quibus valoribus ſubſtitutis, habebuntur hae aequationes:

$$T = 2gq \operatorname{cof.} \Phi - \frac{Q}{B} - \frac{Q \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{fin.} \Phi}{nB} + \frac{P \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi}{nB}$$

$$V = 2gq \operatorname{fin.} \Phi - \frac{P}{B} + \frac{Q \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi}{nB} - \frac{P \operatorname{cof.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi}{nB}$$

Corollar. 3.

19. Ex his ergo aequationibus reperitur:

$$Q = \frac{2nBgq \operatorname{cof.} \Phi + P \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi - nBT}{n + \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{fin.} \Phi} \quad \text{et}$$

$$Q = \frac{nP + P \operatorname{cof.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi - 2nBgq \operatorname{fin.} \Phi + nBV}{\operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi} \quad \text{vnde deducitur:}$$

$$P = 2Bgq \operatorname{fin.} \Phi - BV + \frac{B \operatorname{cof.} \Phi}{n+1} (V \operatorname{cof.} \Phi - T \operatorname{fin.} \Phi) = R \operatorname{fin.} \omega$$

$$Q = 2Bgq \operatorname{cof.} \Phi - BT + \frac{B \operatorname{fin.} \Phi}{n+1} (T \operatorname{fin.} \Phi - V \operatorname{cof.} \Phi) = R \operatorname{cof.} \omega$$

Corollar. 4.

20. Cum autem inuenerimus $dq = \frac{R\,dx \operatorname{fin.} (\Phi - \omega)}{nBgg}$ erit $dq = \frac{dx}{nBq} (Q \operatorname{fin.} \Phi - P \operatorname{cof.} \Phi) = \frac{dx}{(n+1)gg} (V \operatorname{cof.} \Phi - T \operatorname{fin.} \Phi)$. Cognitis ergo viribus T et V mutatio motus inſtantanea determinari poteſt. Eſt autem $dx = -g\,d\Phi$

Problema 3.

21. Corporis vna flexura B praediti propoſito motu quocunque, inuenire huius motus variationem momentaneam, ſi corpus a nullis viribus externis ſollicitetur. Tab. II. fig. 5.

Solutio.

Verſetur corpus propoſitum in ſitu ABC, vbi flexura B moueatur ſecundum directionem BP cum celeritate

tate debita altitudini $= v$. Sint anguli, quos partes AB et BC quasi alae cum recta BP constituunt, $ABP = \vartheta$ et $CBP = \Phi$; tum sit celeritas rotatoria alae BA circa B in distantia $= 1$, debita altitudini p, et celeritas rotatoria alae CB circa B in pari distantia debita sit altitudini q; vtraque autem ala motu rotatorio ad directionem BP accedat. Deinde sit F centrum grauitatis alae AB, et $BF = f$; G vero sit centrum grauitatis alae BC et $BG = g$. Denique sit alae AB massa $= A$ eiusque momentum inertiae respectu centri grauitatis $= mAff$; similique modo alae BC massa sit $= B$ et momentum inertiae respectu sui grauitatis centri G sit $= nBgg$. Vtraque igitur ala sequeretur motum impressum, nisi ligamentum in flexura B obsisteret; ponamus ergo vim flexurae tantam esse, vt ala BC in directione BR sollicitetur vi $= R$, ala autem AB in directione contraria Br aequali vi $= R$, sitque angulus $OBR = \omega$. Ponamus iam punctum B ita progredi, vt primum in directione BP acceleretur vi $= T$, tum vero de semita rectilinea BP dextrorsum deducatur, vi normali $= V$. His positis ex consideratione alae BC erit per coroll. 3. problematis praecedentis:

$$R \sin.\omega = 2Bgq \sin.\Phi - BV + \frac{B \cos.\Phi}{n+1}(V \cos.\Phi - T \sin.\Phi)$$

$$R \cos.\omega = 2Bgq \cos.\Phi - BT - \frac{B \sin.\Phi}{n+1}(V \cos.\Phi - T \sin.\Phi)$$

Eaedem vero formulae ad alam AB accommodantur, si

loco horum valorum	substituantur isti
R	$-R$
ω	ω
B	A
g	f
Φ	$-\vartheta$
q	p
et $\sqrt{\frac{q}{n}}$	$-\sqrt{\frac{p}{m}}$

Quo

Quo facto obtinebimus has aequationes

$$-R\,\sin.\omega = -2Afp\,\sin.\theta - AV + \frac{A\cos.\theta}{m+1}(V\cos.\theta + T\sin.\theta)$$

$$-R\,\cos.\omega = 2Afp\,\cos.\theta - AT + \frac{A\sin.\theta}{m+1}(V\cos.\theta + T\sin.\theta)$$

quae si cum superioribus comparentur dabunt:

$$2Afp\,\sin.\theta + AV - \frac{A\cos.\theta}{m+1}(V\cos.\theta + T\sin.\theta) =$$

$$2Bfq\,\sin.\Phi - BV + \frac{B\cos.\Phi}{n+1}(V\cos.\Phi - T\sin.\Phi) \quad \text{et}$$

$$2Afp\,\cos.\theta - AT + \frac{A\sin.\theta}{m+1}(V\cos.\theta + T\sin.\theta) =$$

$$-2Bgq\cos.\Phi + BT + \frac{B\sin.\Phi}{n+1}(V\cos.\Phi - T\sin.\Phi).$$ Sit breuitatis ergo $m+1=\mu$ et $n+1=\nu$, atque ex his aequationibus elicietur:

$$V = \frac{\begin{matrix}2\mu nB^2gq\,\sin.\Phi - 2\mu ABfp(n\sin.\theta + \cos.\Phi\sin.\overline{\Phi+\theta}) \\ +2\nu ABgq(m\sin.\Phi + \cos.\theta\sin.\overline{\Phi+\theta})\end{matrix} - 2m\nu A^2fp\sin\theta}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos.\overline{\Phi+\theta})^2}$$

$$T = \frac{\begin{matrix}2\mu nB^2gq\cos.\Phi + 2\mu ABfp(n\cos.\theta + \sin.\Phi\sin.(\Phi+\theta)) \\ +2\nu ABgq(m\cos.\Phi + \sin.\theta\sin.(\Phi+\theta))\end{matrix} + 2m\nu A^2fp\cos\theta}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos.\overline{\Phi+\theta})^2}$$

Ex his porro prodibit

$$V\cos.\Phi - T\sin.\Phi = \frac{2\nu A\sin.\overline{\Phi+\theta}(Bgq\cos.\overline{\Phi+\theta} - \mu Bfp - mAfp)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB - AB(\cos.\overline{\Phi+\theta}^2}$$

$$V\cos.\theta + T\sin.\theta = \frac{2\mu B\sin.\overline{\Phi+\theta}(-Afp\cos.\overline{\Phi+\theta} + nBgq + \nu Agq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos.\Phi+\theta)^2}$$

His inuentis, dum punctum B per spatiolum dz progreditur, eius motus ita accelerabitur, vt sit $dv = T\,dz$, simul vero eius semita dextrorsum ita inflectetur vt curvaturae radius existat $= \frac{2v}{V}$. Deinde alae BC motus rotatorius versus BP accelerabitur in distantia $= 1$ a puncto B vi acceleratrice $\frac{V\cos.\Phi - T\sin.\Phi}{\nu g}$, alae autem AB motus rotatorius versus BP accelerabitur in distantia $= 1$ a puncto B vi acceleratrice $= \frac{-V\cos.\theta - T\sin.\theta}{\mu f}$, vnde motus propoſiti variatio per ſequens tempuſculum orta cognoſcitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

22. Quoniam momentum inertiae alae AB reſpectu centri grauitatis F poſuimus $= m\,A ff$, erit eiusdem momentum inertiae reſpectu puncti $B = m\,A ff + A ff$, et hanc obrem diſtantia centri oſcillationis alae AB pro puncto ſuſpenſionis B a B erit $= (m+1) f = \mu f$, ſimili modo alterius alae BC ex puncto B ſuſpenſae diſtantia centri oſcillationis a puncto B erit $= (n+1) g = \nu g$. Quodſi ergo haec centra oſcillationis fuerint data, exinde valores numerorum m et n itemque μ et ν definiuntur.

Coroll. 2.

23. Si alae in directum iaceant, fiet angulus $\Phi + \theta$ = duobus rectis, eiusque ſinus = o, vnde hoc caſu motus rotatorii ambarum alarum nullam mutationem patientur primo ſaltem motus momento. Cum autem ſit ſin. $\theta =$ ſin. Φ et coſ. $\theta = -$ coſ. Φ, erit

$$T = \frac{2\mu n B^2 g q \operatorname{cof.}\Phi - 2\mu n A B f p \operatorname{cof.}\Phi - 2 m\nu A^2 f p \operatorname{cof.}\Phi + 2\nu m A B g q \operatorname{cof.}\Phi}{(mA+\mu B)(\nu A + nB) - AB}$$

$$\text{ſeu } T = \frac{2 \operatorname{cof.}\Phi (Bgq - Afp)(m\nu A + n\mu B)}{(A+B)(m\nu A + \mu n B)} = \frac{2 \operatorname{cof.}\Phi (Bgq - Afp)}{A+B}$$

$$\text{et } V = \frac{2 \operatorname{fin.}\Phi (Bgq - Afp)}{A+B}.$$

Coroll. 3.

24. Si inſuper anguli Φ et θ fuerint recti, tum erit quoque $T = o$, ſeu celeritas flexurae B nullam variationem patietur; at vero via puncti B inflectetur dextrorſum

sum vi, quae erit $= \frac{2(Bgq - Afp)}{A + B}$ vnde si alae fuerint eatenus similes, vt sit $Bgq = Afp$, tum quoque haec vis inflectens euanescet. Ceterum vero si fuerit $Bgq > Afp$ semita puncti B dextrorsum inflectetur, contra vero si $Afp > Bgq$ sinistrorsum.

Coroll. 4.

25. Praeterea vero notandum est denominatorem pro superioribus formulis inuentum

$$(mA + \mu B)(\nu A + nB) - AB(\cos.\overline{\Phi + \theta})^2$$

etiam hoc modo exprimi posse

$$(A + B)(m\nu A + \mu nB) + AB(\sin.\overline{\Phi + \theta})^2$$

Problema 4.

26. Si corpus ABC vna flexura in B praeditum super plano horizontali politissimo vtcunque fuerit proiectum, neque igitur ab vllis viribus extrinsecus sollicitetur, determinare eius motum ad quoduis tempus. Tab. II. fig. 6.

Solutio.

Sit linea ZB via, quam flexura iam descripsit, quae referatur ad axem ZO, ad quem per B normalis producatur OBP. Ponatur arcus $ZB = z$, et ducta ad B tangente BT vocetur angulus $PBT = u$ eritque radius osculi curuae ZB in puncto $B = \frac{dz}{du}$. His positis sit celeritas flexurae B secundum directionem tangentis BT debita altitudini v, eritque tempusculo infinite paruo dt, $\frac{dz}{\sqrt{v}} = dt$. Deinde sit partis seu alae AB massa $= A$, alae BC

$BC = B$, centrum grauitatis alae AB in F et alae BC in G, centrum oscillationis alae AB in f et alae BC in g, vtrumque ad punctum suspensionis B relatum. Vocetur $BF = f$, $BG = g$, $Bf = (m+1)f$ et $Bg = (n+1)g$, positoque breuitatis ergo $m+1 = \mu$ et $n+1 = \nu$, erit $Bf = \mu f$ et $Bg = \nu g$. Praeterea sit angulus $ABP = r$, et angulus $CBP = s$, et in distantia $= 1$ a puncto B sit celeritas angularis alae AB versus $BP = \sqrt{p}$, et celeritas angularis alae BC versus BP circa $B = \sqrt{q}$, erit tempusculo dt assumto; $\frac{-dr}{\sqrt{p}} = dt$ et $\frac{-ds}{\sqrt{q}} = dt$. Denique ponatur angulus $ABT = r+u = \theta$ et angulus $CBT = s-u = \Phi$, erit $r+s = \Phi+\theta$. His positis cum celeritas angularis alae AB circa B versus BP acceleretur in distantia $aB = 1$, vi acceleratrice

$$= \frac{V\cos.\theta - T\sin.\theta}{\mu f} = \frac{2B\sin.(r+s)(Afp\cos.(r+s)-(nB+\nu A)gq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)f - ABf(\cos.r+s)^2}$$

erit $dp = \frac{-2Bdr\sin.(r+s)(Afp\cos.(r+s)-(nB+\nu A)gq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)f - ABf(\cos.r+s)^2}$

Simili modo pro acceleratione motus rotatorii alterius alae BC versus BP ex antecedentibus reperitur

$$dq = \frac{-2Ads\sin.(r+s)(Bgq\cos.(r+s)-(mA+\mu B)fp)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)g - ABg(\cos.r+s)^2}$$

Quod postea ad motum puncti B attinet, is primo accelerabitur vi tangentiali T, ita vt sit $dv = Tdz$ existente

$$T = \frac{2(\nu mA+\mu nB)(Afp\cos.(r+u)+Bgq\cos.(s-u)) + 2AB\sin.(r+s)(\mu fp\sin.(s-u)+\nu gq\sin.(r+u))}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos.r+s)^2}$$

tum vero semita flexurae B dextrorsum incuruabitur a vi normali V ita, vt sit $\frac{2vdu}{dz} = V$, existente

$$V = \frac{2(\nu mA+\mu nB)(Bgq\sin.(s-u)-Afp\sin.(r+u)) - 2AB\sin.(r+s)(\mu fp\cos.(s-u)-\nu gq\cos.(r-u))}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos.r+s)^2}$$

His autem aequationibus, quas inuenimus, totus corporis motus determinatur. Q. E. I.

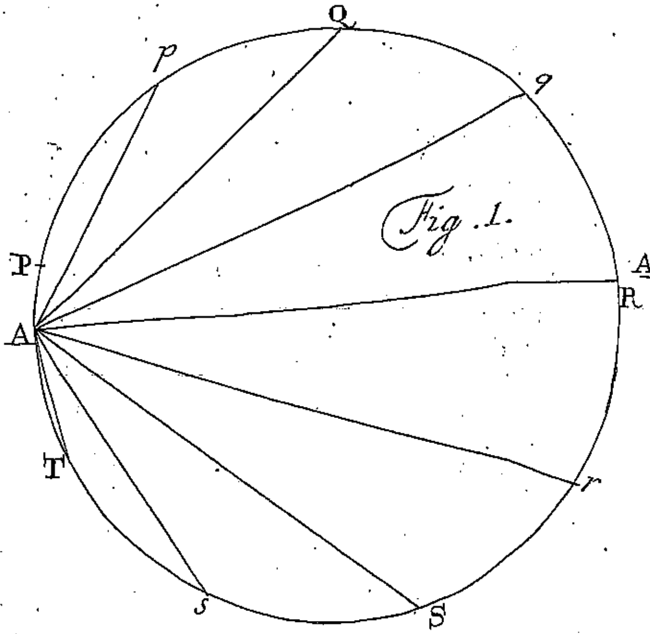

Fig. 1.

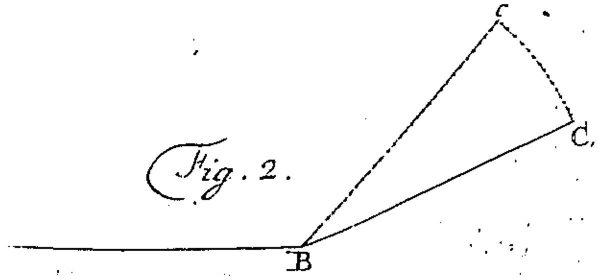

Fig. 2.

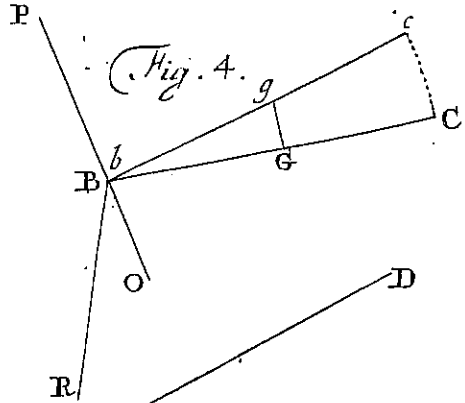

Fig. 4.

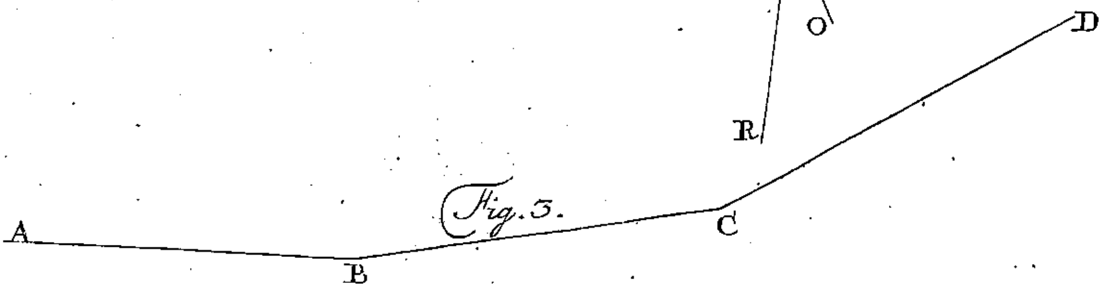

Fig. 3.

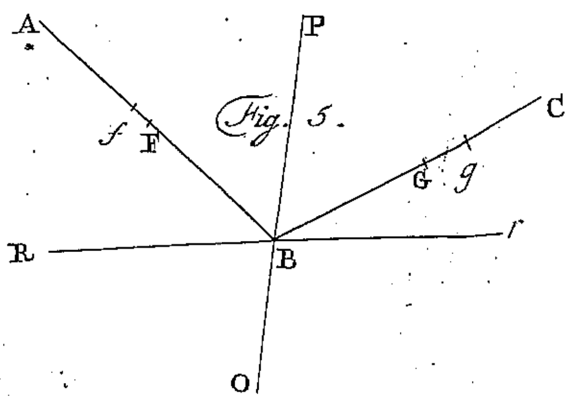

Fig. 5.

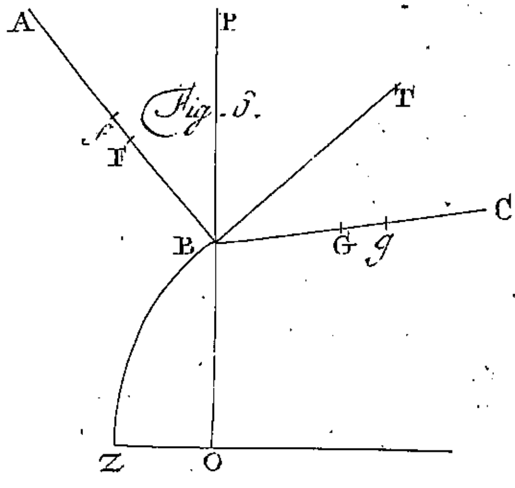

Fig. 6.