1751

De motu corporum super plano horizontali aspero

Leonhard Euler

DE MOTV CORPORVM SVPER PLANO HORIZONTALI ASPERO.

AVCTORE
L. Euler.

§. 1.

Tab. V. In omni corpore duplicem inesse posse motum, alterum progressiuum alterum rotatorium tam experientia quam ipsa rei natura luculenter euincit, omnisque motus quem quidem corpus suscipere potest, vel est progressiuus tantum, vel rotatorius tantum, vel ex vtroque mixtus. Hinc vnius cuiusque corporis motum distincte cognoscit is, qui tam quantitatem vtriusque motus, qui in illo corpore inest, quam rationem determinationis perfecte assignare valet. Loquor hic autem de corporibus solidis seu rigidis, quae nullius motus intestini, quo partes corporis situm inter se mutuum mutant, sunt capaces, vel saltem de talibus corporibus mihi sermo est, in quibus eiusmodi motus intestinus vel actu non datur vel non spectatur. Quodsi enim corpora vel fluida, vel mollia, vel flexibilia proponantur, tum ad eorum motum distincte intelligendum vniuscuiusque partis motum cognosci oportet, donec perueniatur ad partes tam minutas, in quibus motus intestinus amplius omnino non est. Hocque pacto omnis motus cognitio perducitur ad duo illa motus in corpora solida cadentis genera, quae initio commemoraui.

§. 2. In quolibet vero corpore motus progressiuus tantum inesse dicitur, si omnes corporis partes aequali velocitatis gradu ſecundum eandem directionem quouis temporis puncto ferantur. In iſtum motum duplex cadit mutatio cum ratione celeritatis, tum ratione directionis; et quamdiu celeritas non-mutatur, motus vocatur aequabilis ſeu vniformis; quamdiu autem directio manet eadem, motus eſt rectilineus, quo ſingulae corporis partes in lineis rectis progrediuntur. Sin autem tam celeritas quam directio iugiter immutetur, naſcitur motus inaequabilis curuilineus. Atque ex his perſpicitur natura motus aequabilis in directum facti, quippe in quo tam celeritas quam directio manet eadem. Huiusmodi motum reſpicit prima lex Mechanicae, qua motus huiusmodi aequabilis et in directum tendens ex ipſa corporum natura perpetuo inuariatus conſeruari ſtatuitur ita vt vi huius legis nulla mutatio tam in celeritate quam in directione euenire queat, niſi quae a cauſis externis proficiſcatur.

§. 3. Praecipuum autem ad quod hic attendi conuenit, eſt quod iſta haec prima mechanicae lex ad omnis generis corpora ſiue ſolida ſiue fluida ac ſitus partium mutui mutationem patientia aeque pateat. Si enim corpus fluidum motum habeat progreſſiuum vniformiter in directum tendentem, tum eius ſingulae particulae aequalibus celeritatibus in directionibus inter ſe parallelis progrediuntur, atque vnaquaeque particula iſtum motum propter vim inſitam inertiae perpetuo inuariatum conſeruare annititur. Neque vero reliquae corporis particulae ambientes iſti conſeruationi ſtatus aduerſabuntur, cum ipſae aequali velocitate et in eadem directione vel praecedant vel ſequantur vel vtrinque ad latera incedant.

Hocque modo fit, vt quaelibet particula in ſuo ſtatu perſeuerare queat, ſaluo omnium reliquarum particularum ſtatu; ſicque ob perſeuerantiam cuiusque particulae in ſtatu ſuo, ſimul totum corpus in ſtatu ſuo permanebit, atque adeo figuram ſuam, quoniam omnes partes eundem inter ſe ſitum mutuum retinent, inuariatam conſeruabit, id quod euenire non poſſet, ſi omnes particulae neque aequali celeritate, neque ſecundum eandem directionem incederent.

§. 4. Motus rotatorius eſt, quo corpus circa axem aliquem fixum ſiue per ipſum corpus tranſeuntem ſiue extra corpus ſitum conuertitur. In hoc igitur motu quaelibet corporis particula in plano ad illum axem normali ita mouebitur, vt circa eum arcum circularem deſcribat. Cum itaque totum corpus circa hunc axem ſimul conuertatur, celeritas cuiusque particulae erit diſtantiae ipſius ab axe proportionalis, directio vero poſita erit in plano ad axem normali, eritque perpendicularis ad radium ex ipſa particula ad axem normaliter ductum. Ex cognita ergo celeritate vnius corporis particulae per regulam auream inuenitur celeritas reliquarum omnium particularum. Quod autem ad directionem attinet, ea duobus tantum modis determinatur, cum corpori circa datum axem gyrando duae ſolum viae pateant vel dextrorſum nempe vel ſiniſtrorſum. Data ergo poſitione axis directio motus duplici tantum modo eſt poſſibilis vel in dextram plagam vel in ſiniſtram, quarum altera alteri e diametro eſt oppoſita.

§. 5. Manente ergo poſitione axis eadem in motu rotatorio alia mutatio euenire non poteſt, niſi ratione celeritatis, eo quod directio in ſui contrariam ſubito mu-

tari

tari nequit. At vero axis pluribus mutationibus est obnoxius, nisi in eodem situ fixo retineatur. Primum enim motu progressiuo quocunque moueri potest, ac deinde etiam ipse motu rotatorio ferri potest, ex quo motus corporis summopere perturbatus enasci videtur. Interim tamen eiusmodi motus quantumuis complicatus semper resolui potest in motum progressiuum, et motum rotatorium circa quempiam axem fixum, saltem pro temporis interuallo minimo: fieri enim vtique potest vt alio tempore rotatio circa alium axem absoluatur. Ista autem resolutio pluribus modis institui potest, licet enim in eiusmodi motu concipere motum progressiuum quemcunque, ac praeterea motum circa quempiam axem fixum, qui duo motus illum ipsum motum, qui in corpore actu inest, repraesentent. Quare cum haec resolutio innumeris modis pro arbitrio institui queat, diligenter cauendum est, ne resolutionem praeter rationem instituamus, sed ita, vt verus motus non solum facilius percipi, sed etiam ad normam legum mechanicae tractari atque examinari queat.

§. 6. Ponamus igitur quo penitius naturam motus rotatorii introspiciamus, corpus aliquod circa axem quemcunque, cui firmiter sit alligatum, gyrari: atque manifestum est singulas corporis partes, quia in lineis non rectis sed circularibus mouentur, vi sua propria in hoc motu permanere non posse; sed dum conantur in directum progredi, vim exercere ab axe recedendi, in quo vis centrifuga consistit. Hamobrem necesse est, vt singulae corporis partes tanta vi cum axe sint connexae, vt vis centrifuga istud vinculum superare non valeat;

si

si ergo partes corporis sint dissolutae, singulas quasi ope fili satis fortis ad axem alligatas esse oportet, sin autem corpus fuerit solidum, ita vt eius partes inter se omnes firmiter sint connexae, tum sufficit vt totum corpus vnico filo cum axe sit connexum, quod omnibus viribus, quibus singulae eius partes ab axe recedere conantur, aequiualeat. His igitur filis motus partium circularis conseruabitur, celeritas autem nullo modo afficietur. Ex quo per primam mechanicae legem sequitur, in eiusmodi motu rotatorio celeritatem, qua corpus rotatur, perpetuo eandem conseruari debere, neque in celeritate mutationem vllam oriri posse nisi a causa externa.

§. 7. Si igitur corpus solidum, cuius partes firmiter inter se cohaerent, axi cuipiam fixo fuerit alligatum, hocque corpus circa istum axim a causa quacunque impetrauerit motum rotatorium; tum vi propria inertiae hunc motum rotatorium perpetuo eadem cum celeritate conseruabit, nisi a viribus externis eius celeritas vel augeatur vel diminuatur. Interea vero corpus ob vim centrifugam ex motu omnium partium curuilineo resultantem vim exeret in axem, eumque vel promouere vel inclinare conabitur, hancobrem axem tanta vi in situ suo detineri oportet, vt promotioni seu inclinationi satis resistere valeat. Pendet ista vis, quam axis sustinet, partim ab eius positione respectu corporis partim ab ipsa corporis celeritate, hincque vel multo maior vel multo minor fieri potest. Fit autem calculo docente minima haec vis, si axis per centrum grauitatis corporis transeat, in quo situ si vllam vim sentit, ea non ad promouendum sed tantum ad inclinandum axem tendit. Fieri autem adeo potest,

vt

vt haec vis inclinans, ſi axis per centrum grauitatis corporis tranſit, prorſus euaneſcat, hocque caſu nulla vi opus erit ad axem in ſitu ſuo detinendum, ſed etiam ſi non ſit fixus, ſuo ſponte in eodem perpetuo ſitu perſeuerabit.

§. 8. Apparet ergo quid requiratur, vt corpus ſolidum circa axem quempiam, qui nulla vi in ſitu ſuo detineatur, libere gyrari queat. Primum ſcilicet neceſſe eſt, vt axis ille per centrum grauitatis corporis tranſeat: deinde etiam inſuper opus eſt: vt vires inclinantes, quae ex viribus centrifugis partium corporis oriuntur, ſe mutuo prorſus deſtruant. Quodſi ergo corpus circa talem axem conceperit motum rotatorium, tum hunc motum eadem velocitate perpetuo conſeruabit, neque vlla opus erit vi externa quae axem rotationis in ſitu ſuo retineat. Sic globus ex materia homogenea confectus circa quemvis axem per centrum grauitatis tranſeuntem libere gyrabitur, quia ob perfectam vndique ſimilitudinem nulla vis extat, quae axem inclinare conetur. Axem hac proprietate praeditum vocabo axem permanentem, atque huiusmodi axium inueſtigatio plerumque eſt maxime difficilis: primarium caſum notaſſe ſufficiat, quo axis per centrum grauitatis ductus ſimul per ſingularum corporis ſectionum ad axem normalium centra grauitatis tranſit: tum enim ea gaudebit proprietate, quae ad axem permanentem requiritur.

§. 9. Corpus igitur, quod circa huiusmodi axem permanentem ſemel adeptum eſt motum rotatorium, hunc ipſum motum perpetuo conſeruabit vniformem, neque vllam patietur ſiue in celeritate ſiue in poſitione axis alterationem, ſi quidem a nulla vi externa ſollicitetur. Interea vero axis iſte, circa quem fit rotatio in perfecta quiete perſeuerabit, ob vires centrifugas partium corporis ſe inuicem penitus deſtruentes. Corpus igitur per vim inertiae duplicem motum conſtanter in ſe ſuscipere ac perpetuo retinere valet, alterum progreſſiuum aequabilem in directum, atque alterum rotatorium circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem ac permanentem. Intelligitur autem corpus non ſolum ſeorſim vtrumque motum recipere poſſe, verum etiam coniunctim, ex quo ſequitur haec lex mechanicae maximi momenti: *Omne corpus, cuius partes cunctae firmiter inter ſe cohaerent, praeter motum progreſſiuum aequabilem in directum etiam motum rotatorium circa axem permanentem in ſe ſuscipere, et conſtanter conſeruare valet.* Eiusmodi motus ergo erit mixtus ex progreſſiuo et rotatorio, axisque motus rotatorii motu ſibi parallelo vniformiter in directum promouebitur.

§. 10. Quemadmodum hoc caſu vterque motus tam progreſſiuus quam rotatorius ſeorſim, ſeſe in ſtatu vniformitatis conſeruat, ita etiam vterque ſeorſim poteſt conſiderari ac menſurari, perinde ac ſi alter omnino abeſſet. Sic ad motum progreſſiuum dimetiendum animum a rotatorio abducere licet, quaſi prorſus non adeſſet, atque tum celeritas atque directio vnius corporis puncti declarabit totum corporis motum. Ad hoc autem conuenit motum centri grauitatis maxime ſpectari, eo quod eius motus progreſſiuus a motu rotatorio penitus non afficitur; quare cognita centri grauitatis tam celeritate, quam directione motus progreſſiuus perfecte innoteſcit.

Si-

Simili modo motum rotatorium cognoſcemus abſtrahendo mentem a motu progreſſiuo, ſeu quod eodem redit fingendo motum progreſſiuo contrarium atque aequalem, quo pacto ſolus motus rotatorius ſupererit, qui cognoſcetur ex celeritate, qua punctum corporis dato interuallo ab axe diſtans circa axem rotatur, adiici tantum debet, in vtram duarum illarum plagarum, in quas motus rotatorius aeque fieri poteſt, actu corpus rotationem abſoluat.

§. 11. His expoſitis quae ad ſtatum corporum, in quo vi propria perſeuerare poſſunt, pertinent, videndum eſt breuiter, quemadmodum tam motus progreſſiuus quam rotatorius a viribus ſollicitantibus afficiatur atque immutetur. Quod primum quidem ad motum progreſſiuum attinet effectus, quem vires quaecunquae ſollicitantes exerunt cognoſcetur, ſi primo totum corpus in centro grauitatis concipiatur concentratum, vt inſtar puncti ſpectari queat, ac deinde omnes vires ſollicitantes in directionibus ſibi parallelis in centrum grauitatis mente transferantur. Tum enim hae vires translatae in corpus in centro grauitatis collectum eundem exerent effectum ratione motus progreſſiui, qui proinde ex primis mechanicae principiis colligi poterit. Effectus ſcilicet vel in celeritatis vel directionis vel vtriuſque ſimul mutatione conſiſtet. Scilicet ſi omnes vires reſoluantur in tangentiales et normales ad directionem motus, atque ſumma tangentialium ponatur $= T$. ſumma normalium $= N$. Tum vero maſſa corporis ſit $= M$. eiusque celeritas debita altitudini v. ac tempuſculo minimo ſpatium ds abſoluatur: erit vti conſtat $dv = \pm \frac{T\,ds}{M}$ atque radius oſculi

 lin-

lineae curuae, ad quam describendam corpus cogitur erit $= \frac{2 M v}{N}$.

§. 12. Ad motus rotatorii autem mutationem a viribus sollicitantibus prouenientem cognoscendam, momentum inertiae corporis respectu axis rotationis cognitum esse debet, quod est summa omnium productorum, quae oriuntur si singula corporis elementa multiplicentur respectiue per quadrata distantiarum suarum ab axe rotationis, momentum ergo inertiae hoc erit productum ex massa corporis M in quadratum cuiuspiam lineae rectae quae sit $= b$ ita vt momentum inertiae futurum sit $= M b^2$. Deinde virium sollicitantium momentum, tendens ad corpus circa axem rotationis conuertendum quaeri oportet, quod erit productum ex vi P in lineam quandam k seu erit $= P k$. Tum si fuerit puncti corporis ab axe rotationis distantis intervallo $= c$ celeritas debita altitudini u fiet $d u = + \frac{P k c d q}{M b b}$, dum hoc punctum motu suo arculum $d q$ radio c circa axem absoluit. Si vires sollicitantes tendant ad axem rotationis ipsum mutandum, isque non firmiter in situ suo detineatur, tum vtique axis rotationis inclinabitur, qua autem lege hoc fiat, etiamnum non est definitum.

§. 13. His legibus motus ad praesens institutum necessariis praemissis pergo ad motum corporum super plano horizontali aspero factum tam progressiuum quam rotatorium considerandum, quem in hac dissertatione ex primis principiis eruere constitui. Ac primo quidem perspicuum est grauitatem ad motum neque accelerandum nec retardandum quicquam conferre; quoniam enim eius directio ad planum horizontale normalis est, tota in apprefpressione corporis contra planum consumetur. Ob hunc ipsum autem effectum grauitas in hoc negotio maxime spectari debet, cum ex eo quantitas frictionis determinetur, a qua, quemadmodum motus corporum super plano horizontali turbetur inuestigaturus sum. Plura autem sunt impedimenta, quibus motus corporum super plano horizontali retardatur; namque praeter frictionem, quae ab asperitate superficiei horizontalis oritur, hirsutia superficiei ideo quoque motum diminuit, quod corpus filamenta, quibus planum est obsitum, deprimere cogitur, id quod sine motus diminutione fieri nequit. Praeterea vero resistentia aeris motui corporis non parum obest, tam propter inertiam, ex qua resistentia quadrato celeritatis proportionalis resultat, quam propter tenatitatem, qua aeris particulae inter se cohaerent, vnde resistentia gignitur constans seu momentis temporum proportionalis.

§. 14. Quo igitur facilius redardationem motus, quae ab his impedimentis tam singulis seorsim consideratis quam omnibus coniunctis producitur, primum mentem ab omnibus abstrahemus, vt intelligamus, cuiusmodi motus corporis esse debeat, si neque scabrities neque hirsutia plani, neque etiam resistentia aeris vllum obstaculum motui obiiciat. Concipiamus itaque planum horizontale perfectissime politum, atque spatium ab aëre prorsus vacuum. Sic igitur dubium erit nullum, quin corpus motum progressiuum, quem semel est adeptum perpetuo eundem sit conseruaturum, ac motu aequabili in directum sine vlla retardatione progressurum. Sin autem corpus habuerit motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis transeuntem ac permanentem, tum

 etiam

etiam in eodem loco haerens perpetuo eadem velocitate gyrabitur nisi forte recta verticalis per centrum grauitatis ducta extra contactum corporis cum plano cadat, quo casu vtique grauitas peculiarem effectum ederet, eiusmodi autem statum hic remouemus. Simili modo si corpus nactum fuerit duplicem motum, alterum progressiuum, alterum rotatorium circa axem permanentem, etiam vtrumque motum vniformiter in aeternum sine vlla alteratione conseruabit.

§. 15. Contemplemur iam planum horizontale asperum quod per frictonem resistat motui corporum super eo incedentium. Sit igitur ADB corpus quodcunque huic plano impositum, cuius centrum grauitatis sit in G, ex quo perpendicularis in planum demissa GC cadat intra basin corporis AB, qua planum contingit. Hoc ergo corpus in isto situ siue frictio adsit siue minus perpetuo persistet, nisi ipsi motus imprimatur. Quodsi autem ipsi motus progressiuus in directione horizontali GF imprimatur, hunc motum continuare non poterit nisi planum radendo basi sua AB: ex quo, dum plani inaequalitatem superat, frictionem patietur, qua eius motus paullatim imminuetur, donec tandem corpus ad quietem reducatur. Dum autem aequalia spatia percurrendo aequalia obstacula offendit, perinde eius motus retardabitur, ac si vi quadam constante retro vrgeretur. Erit ergo frictio potentia constans a corporis celeritate non pendens, quae corpus, quamdiu mouetur, quasi retrahit, eiusque motum retardat, in ipsa autem quiete, vbi omnis rasus cessat, simul frictionis effectus euanescit. Hoc igitur differt vis frictionis a reliquis viribus constantibus cuiusmodi di eſt grauitas, quod corpora in motu ſolum poſita afficiat, motusque directioni perpetuo ſit contraria; in quiete vero omnem vim amittat.

§. 16. Manifeſtum autem eſt, dum frictio in ipſo corporis ac plani contactu mutuo AB gignitur eius directionem quoque in hoc loco eſſe poſitam; quare cum eius directio ſit motus directioni GF contraria, frictio eſt vis, qua corpus continuo, dum mouetur, in directione CO retrahitur. Loco frictionis igitur ſubſtitui licet potentiam conſtantem baſi AB corporis applicatam, atque in directione CO directioni motus GF contraria trahentem; haecque vis in locum frictionis ſubſtituenda, quamdiu corpus mouetur aequaliter motum retardare ponenda eſt, quacunque celeritate corpus moueatur; ſimulac vero corpus ad quietem fuerit redactum, tum quaſi per ſaltum omnis eius vis ſubito annihilari cenſenda eſt. Primum autem omnium intelligitur, quoniam frictionis directio non per corporis centrum grauitatis G tranſit, non ſolum a frictione motum corporis progreſſiuum retardari debere, verum etiam ex frictionis vi momentum enaſci, quod tendet ad motum rotatorium corpori circa axem horizontalem per centrum grauitatis ductum normalem ad directionem motus GF inducendum, in ſenſum DHAC, vel quod eodem redit ad corpus circa A proſternendum. Haecque adeo proſtratio actu eueniet, niſi magnitudo baſis ſit impedimento.

§. 17. Cum igitur frictio ſit vis motum retardare valens, ea cum vi grauitatis comparari, atque adeo per pondus menſurari poterit. Per experimentum autem pro quouis caſu pondus aſſignari poteſt, quod frictioni aequiua-

leat

leat. Ad hoc explorandum corpori ADB super plano quiescenti in basi A alligetur filum quod in directione horizontali AV tendatur dato pondere, quod ope trochleae in V firmatae commodissime fieri potest. Quo iam corpus ADB ab hoc pondere protrahatur, necesse est vt pondus vim frictionis superet; hincque manifestum est, quamdiu pondus minus sit frictione, corpus in quiete esse permansurum. Quamobrem filum AV a minimo ponduſculo incipiendo continuo maioribus tendatur, donec corpus moueri incipiat; quod eueniet, quam primum pondus quo filum AV tenditur tantillum frictionem superabit. Hoc ergo pacto satis exacte pondus determinari poterit frictioni aequale, quo cognito effectus frictionis ad calculum reuocari poterit. Sit igitur F pondus frictioni aequiualens, atque corpus ADB dum super plano OV motu radente incedit, continuo retro trahetur vi $=F$, quae corpori in ipsa basi applicata concipienda est. Simili porro modo frictio cuiuscunque alius corporis per experimenta explorari potest; expedit autem ad hoc filum AV in corporis loco infimo applicari, vti monui, quam in sublimiori, vt per hanc vim simul conatus frictionis corpus subuertendi destruatur.

§. 18. Quod ad quantitatem frictionis F attinet, ea primum ab asperitate cum plani OV tum basis corporis AB plurimum pendet, ita vt, quo asperius fuerit vel alterutrum vel vtrumque, eo maior euadat frictio: hoc autem a priori commode mensurare non licet. Deinde frictio potissimum appressioni corporis ad planum respondet, ita vt quo maior fuerit pressio corporis in planum, in eadem ratione frictio augeatur. Apprimitur autem corpus ad planum vi proprii ponderis, quo deorsum nititur

in

in directione GC; quare, si corporis pondus vel minuatur vel augeatur manente eadem basi, eademque plani asperitate, tum frictio in eadem ratione vel minuetur, vel augebitur. Hincque explorata per experimenta vnius corporis frictione super dato plano per solum ratiocinium infinitorum aliorum corporum frictiones colligi poterunt. Denique videatur magnitudo basis non parum ad frictionem siue augendam siue minuendam conferre: interim tamen experimenta nullum sensibile discrimen a magnitudine basis oriundum demonstrant. Quodsi autem perpendamus pressionem corporis per totam basin distribui, facile percipimus singula basis elementa eo minus planum premere, quo maior fuerit basis, ideoque eo minorem frictionem sustinere; ex quo sequitur, magnitudinem basis quantitatem frictionis prorsus non afficere debere.

§. 19. His de frictionis mensura expositis, facile foret retardationem motus progressiui, qui corpori ADB initio fuit impressus, pro quouis momento assignare, si modo constaret, corpus a frictione non prostratum iri. Quamobrem ante nobis definiendum est, quibus casibus corpus motum progressiuum impressum vsque ad quietem conseruare queat, quibusque casibus frictio corpus circa A subuertere valeat; hoc enim casu motus resultaret perquam irregularis. Ponamus ergo frictionem sufficiere ad corpus prosternendum, atque corpus iam procliue esse ad lapsum: hoc igitur casu corpus in sola extremitate A plano innitetur, cum reliqua basis pars iam incipiat eleuari, et circa A conuerti. In hoc igitur statu corpus totam pressionem in solo puncto A exeret, et quia pressio aequalis est ponderi corporis, quod ponamus $= P$, planum a corpore in puncto A deorsum premetur vi $=P$. Cum autem planum sit immobile, per reactionem corpus tantandem vi $=P$ sursum vrgebit, ita vt corpus actu sollicitetur in directione verticali sursum AE vi $=P$; atque per hanc vim firmitas plani ex computo extruditur, quoniam ea aeque ac planum impedit, quominus corpus infra lineam horizontalem OV descendat.

§. 20. Hic ergo reductus est praesens corporis status, vt plano praeter frictionem omnino sublato corpus ADB a tribus sollicitetur viribus, primum nempe propter grauitatem a vi P in directione DC; deinde iterum vi $=p$ in directione AE, ac tertio propter frictionem a vi $=F$ in directione CO. Videamus igitur an ab his viribus generari queat motus rotatorius circa centrum grauitatis G seu potius circa axem horizontalem eo transeuntem et normalem ad motus directionem GF, in sensum DHAB. Ac primo quidem vis $GC=P$ nihil confert ad motum rotatorium, quia eius directio per centrum grauitatis G transit; altera vero vis $AE=P$ huic motui rotatorio in sensum DHAB reluctatur, eandem scilicet reluctantiam exerceret firmitas plani OV, cuius loco vim illam P substituimus; momentum vero huius vis P ad motum rotatorium impediendum est $=P.GE=P.AC$. Frictio igitur sola F in directione CO agens conabitur eiusmodi motum rotatorium corpori inducere, eiusque momentum pro hoc effectu erit $=F.GC$. Momentum igitur actuale ad motum rotatorium gignendum erit $=F.GC-P.AC$.

§. 21. Nisi igitur hoc momentum $F.GC-P.AC$ affirmatiuum habeat valorem hoc est nisi $\frac{F}{P} > \frac{AC}{GC}$, motus rotatorius a frictione non producetur, sed corpus solo lo motu progreſſiuo mouebitur, donec ad quietem reducatur. Ponamus ſcilicet corpus initio, vbi perpendiculum GC in O inciderat, motum progreſſiuum nactum eſſe celeritate debita altitudini $= a$, nunc vero abſoluto ſpatio $OC = x$, celeritatem eius reſiduam eſſe debitam altitudini v. Cum iam inter vires corpus ſollicitantes nulla praeter frictionem F motum progreſſiuum afficiat, haecque motum retardet, erit $dv = -\frac{F\,dx}{P}$, denotante P maſſam ſimulque pondus corporis, ex quo fiet $v = a - \frac{Fx}{P}$. Hancobrem corpus ad quietem redigetur abſoluto ſpatio $x = \frac{aP}{F}$. Hic igitur erit motus corporis pro caſu, quo $\frac{F}{P} < \frac{AC}{GC}$, atque vt corpus, poſtquam nactum eſt motum progreſſiuum, non procumbat, neceſſe eſt, vt frictio F ad pondus P minorem habeat rationem, quam AC ad GC. Plerumque autem ſuper plano ligneo eſt $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, his itaque caſibus requiritur, vt ſit $\frac{AC}{GC} > \frac{1}{3}$, ſeu angulus $AGC > 18^\circ\, 26'$. Quae proprietas quibus in corporibus locum habeat, ex poſitione centri grauitatis et baſi corporis facile intelligi poteſt.

§. 22. Ex his intelligitur nullum corpus, in quo ſit $\frac{AC}{GC} > \frac{F}{P}$, motu progreſſiuo ſolo ſuper plano OV incedere poſſe, ſed eiusmodi corpora ſimulac ipſis motus imprimitur, procumbere, motumque rotatorium cum progreſſiuo permiſcere. Quo propius ergo perpendiculum GC ex centro grauitatis corporis in planum horizontale demiſſum ad extremitatem baſis A cadit eo magis procliue erit corpus ad prolabendum, hicque conatus prolabendi eo fiet maior, quo altius centrum grauitatis G fuerit ſitum. Hinc ſi corpus fuerit priſma ex materia homogenea confectum $AabB$, cuius altitudo Aa ſit $= A$, Fig. 2.

 et

et diamter basis $AB = B$ erit perpendiculum $GC = \frac{1}{2}A$ et interuallum $AC = \frac{1}{2}B$. Hoc igitur corpus motu progressiuo super plano OV incedere nequit, si fuerit $\frac{B}{A} < \frac{F}{P}$ hoc est si diameter basis ad altitudinem minorem habeat rationem, quam frictio F ad pondus prismatis P. Quod si ergo frictio F aequalis fuerit tertiae parti ponderis P, tum nullum prisma cuius altitudo plus quam triplo maior est diametro basis AB motu progressiuo super plano incedere potest. Similique modo pyramis vel conus, cuius altitudo ad diametrum basis maiorem habet rationem quam 9 ad 2 super plano moueri non poterit, quin statim procumbat.

§. 23. Videamus iam quomodo corpora prismatica, quae horizontaliter super plano iacent, sint comparata ratione motus cum progressiui tum rotatorii. Sumamus autem bases huiusmodi prismatum esse figuras polygonas regulares, atque eiusmodi prisma in directione ad axem normali ad motum impelli. Sit numerus laterum polygoni basin constituentis $= n$, eritque angulus $AGC = \frac{180^\circ}{n}$; atque $\frac{AC}{GC} = \text{tang.} \frac{180^\circ}{n}$ posito sinu toto $= 1$. Quod si ergo fuerit tang. $\frac{180^\circ}{n} > \frac{F}{P}$. tum eiusmodi corpus prismaticum motu progressiuo super plano OV propelli poterit; sin autem sit tang. $\frac{180^\circ}{n} < \frac{F}{P}$, tum statim, ac impellitur, procidet, simulque voluendo se mouebitur. Si igitur frictio F aequalis fuerit ponderi P, tum prismata triangularia sola sine prolapsu progredientur, quae autem bases habent quadratas indifferentia erunt ad lapsum, quorum bases autem sint plurium laterum, ea simul voluendo promouebuntur. Si $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, tum prismata, quorum bases plura habent latera, quam 6, motum rotorium recipient, et si $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, tum ea tantum prisma-

ta

ta voluentur, quorum bases plura quam 9 habent latera. Sin porro $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, tum ea prismata sine prouolutione moueri non poterunt, in quibus laterum numerus maior est quam 12.

§. 24. Quoniam igitur nouimus, quibus casibus corpus, cui tantum motus progressiuus imprimitur, ob frictionem simul motum volutorium recipere debeat, inuestigemus, quo pacto iste motus rotatorius generetur et continuetur. Vidimus autem tam ex frictione quam ex reactione plani prodire momentum ad motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis ductum producendum $= F.GC - P.AC$. Si iam ponamus corporis momentum inertiae respectu huius axis esse $= Pbb$, erit vis, qua motus angularis circa centrum grauitatis actu producitur $= \frac{F.GC - P.AC}{Pbb}$. Ad motum igitur angularem definiendum, abstrahamus cogitationes ab motu progressiuo, concipiamusque centrum grauitatis corporis G in quiete, Fig. 3. atque corpus circa G ita rotari incipiet, vt punctum A radio AG moueatur per arculum $A\alpha$, perueniet igitur punctum A infra horizontalem OV, etiamsi loco firmitatis plani vim illam P sursum vrgentem substituerimus. Hic igitur motus propter planum impenetrabile isto modo perfici non poterit, neque vnquam admitti potest motus, quo vlla corporis pars infra OV perducatur.

§. 25. Punctum igitur A motu rotatorio circa centrum grauitatis G infra planum OV demergi non potest, nisi planum liberrime cedat. Ponamus igitur planum cedere atque punctum A vtique in α descendet; statim autem tribuamus plano vim sese in pristinum statum restituendi, hincque punctum α sursum pellitur vi quapiam per spatiolum $\alpha\beta$,

 atque

atque hoc eodem tempore eueniat necesse est, quo arculum $A\alpha$ absoluit; hoc enim modo ab hac vi statim in principio motus rotatorii agente punctum A perpetuo in recta OV conseruabitur. Sit vis ista plani $=p$ ita vt punctum A seu α sursum vrgeatur vi $=p$: hac igitur vi totum corpus sursum sollicitabitur vi acceleratrice $=\frac{p}{P}$. Per hanc vero eandem vim p motus rotatorius diminuetur, eritque momentum non amplius FGC–P.AC sed $F.GC-(P+p)AC$, quod diuisum per momentum inertiae corporis respectu axis, circa quem fit rotatio, quod momentum inertiae sit $=Pbb$ dat vim acceleratricem motus rotatorii $\frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb}$, haec vero ducta in AG dat vim acceleratricem puncti A per arculum $A\alpha$. Cum igitur spatia simul descripta sint viribus accelleratricibus proportionalia erit $\alpha\beta : A\alpha = \frac{p}{P} : \frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb} AG = AC : AG$.

§. 26. Ex hac analogia adipiscimur hanc aequationem $pbb = AC(F.GC-P.AC)-p.AC^2$. quae praebet vim, qua totum corpus eleuatur, ad id, vt in rotatione extremitas corporis A non infra horizontalem OV descendat, nempe fit haec vis $p = \frac{AC(F.GC-P.AC)}{bb+AC^2}$. Atque ista vis non solum initio motus rotatorii locum obtinet, sed etiam pro quolibet momento, dum motus rotatorius durat, est enim ista expressio durante motu rotatorio variabilis, cum propter perpendiculi GC tum interualli AC variabilitatem. Augetur autem primo momento perpendiculum GC elemento $\alpha\beta$, interuallum vero AC diminuitur elemento $A\beta$. Quoniam igitur initio motus rotatorii est $F.GC > P.AC$, multo magis durante te motu manebit $F.GC > P.AC$, ideoque vis p affirmatiuum obtinet valorem, quamdiu interuallum AC versus O cadit; tamdiu enim centrum grauitatis G eleuari debet, donec recta GA fiat verticalis; hoc autem casu ob $AC = 0$, etiam vis p euanescit. Deinceps vero, quando recta GA versus V inclinabitur, ob AC negatiuum, vis p negatiuum induet valorem, eaque centrum grauitatis G rursus deprimetur, donec alia corporis facies sese plano OV applicet, vicemque basis sustineat quodcum euenerit videndum est, vtrum super noua basi motus rotatorius de nouo generetur an secus.

§. 27. Ob istam autem vim p, quae requiritur ad centrum grauitatis corporis G cum eleuandum tum rursus deprimendum, vis rotatoria corporis diminuetur. Est enim vis acceleratrix, qua extremitas A circa G circumagitur non amplius $= \frac{F.GC - P.AC}{Pbb} \cdot AG$, sed $= \frac{F.GC - (P+p)AC}{Pbb}$ AG, quae propter $p = \frac{AC(F.GC - P.AC)}{bb + AC^2}$ abit in $\frac{AG(F.GC - P.AC}{P(bb + AC^2)}$. Quanquam igitur ob vim p ad corpus eleuandum requisitam vis rotatoria diminuitur, tamen corpus motum rotatorium recipiet, dummodo sit $F.GC - P.AC > 0$. ex quo, non obstante motus rotatorii difficultate ob lineae AG obliquitatem, tamen idem criterium, quod supra inuenimus, nempe si $F.GC > P.AC$ locum retinet ex quo intelligi queat, vtrum motus rotatorius subsequatur an secus. Durante autem motu rotatorio punctum A versus O super plano OV incedet, celeritate, quae se habeat ad suam celeritatem gyratoriam, vti $A\beta$ ad $A\alpha$ hoc est vti GC ad AC; hic autem tantum primum generationis momentum, quo motus rotatorius producitur

con-

confideramus, ita vt fit motus rotatorius infinite paruus refpectu motus progreffiui: ex quo punctum A planum eadem celeritate radet, ac fi nullus adhuc adeffet motus rotatorius.

§. 28. Ex his tamen intelligitur, motum corporum ex progreffiuo et rotatorio mixtum admodum fore irregularem, ideoque determinatu difficilem. Motus enim rotatorius primum conceptus tam diu tantum durabit, quoad alia corporis facies fefe plano OV applicet, id quodcum percuffione fiet, hocque cafu motus continuatio etiam ex percuffionis regulis definiri debet. Hoc igitur cum euenerit motus rotatorius, fi quidem fubfiftet, fubito immutabitur, dum corpus alio angulo in planum innititur, neque ad hunc nouum motum rotatorium determinandum fufficiet vti in primo ad criterium ante datum folum refpexiffe, fed etiam ad motum rotatorium ante iam conceptum attendi oportet, quatenus per eum corpus incitatur ad nouum motum rotatorium recipiendum. Haecque cautela toties eft repetenda, quoties alia bafis plano applicatur, vbi femper quafi per faltum in motu mutatio fubitanea producitur. Tametfi autem motus rotatorius fine refpectu ad progreffiuum habito calculo fubiici poteft, tamen perpetuo fimul ad motum progreffiuum refpici oportet, vt pateat quamdiu bafis, qua corpus plano innititur in directione AV progrediatur et quanta celeritate planum radat, fi enim ifta bafis quiefcat, tum frictio omnino ceffat, fi autem antecedentia verfus incedat, tum fubito frictio fit negatiua, motumque progreffiuum accelerabit.

§ 29. Ob haec igitur obftacula eiusmodi tantum corpora examini fubiiciemus, quorum motus fuper plano

OV

OV sine saltibus secundum vnam certam continuitatis legem absolui queat; ac de reliquis corporibus sufficiat annotasse, vti est factum, quibus casibus motus progressiuus sine prouolutione fieri possit. Inter huiusmodi autem corpora primum omnium deprehenditur globus, cuius centrum grauitatis in ipso globi centro versatur, globus enim talis motu continuo sine saltu super plano OV rotando progredi potest. Deinde etiam ad hanc classem pertinent cylindri, qui centrum grauitatis in medio axis sui puncto situm habeant, si secundum directionem ad axem normalem moueantur. Praeterea huc referri possunt omnia corpora rotunda, quae vtrinque circa sectionem per centrum grauitatis factam et ad axem normalem ex partibus aequalibus et similibus constent, cuiusmodi corpora formantur ex conuersione figurae planae diametro orthogonali praeditae circa ordinatam diametro normalem. Eiusmodi enim corpus rotundum super plano OV positum, et motum in directione horizontali ad suum axem normali tam progrediendo quam rotando sine subitaneo saltu moueri poterit. Id tantum est tenendum vt axis corporis ad quem omnes sectiones normaliter factae sunt circuli simul per omnium sectionum centra grauitatis transeat, quo proprietate axis permanentis sit praeditus.

§. 30. Incumbat igitur eiusmodi corpus rotundum plano OV ita vt eius axis sit horizontalis, atque repraesentet circulus DHC eius sectionem mediam, in cuius centro G positum erit totius corporis centrum grauitatis, eius axis autem erit recta horizontalis per G transiens atque ad planum sectionis DHC normalis. Tanget igitur hoc corpus planum subiectum OV vel in vnico pun- Fig. 4.

cto C si reliquae eius sectiones omnes axi normales minores fuerint sectione DHC, vel in pluribus punctis, si plures sectiones maximae fuerint aequales vel contactus erit linea recta, si corpus fuerit cylindrus. Perpetuo autem perpendiculum GC quod in planum OV demittitur simul in rectam per omnia contactus puncta transeuntem erit normalis, haecque recta plano DHC simul normaliter insistet. Sit iam totius corporis pondus = P, eiusque frictio, dum motu progressiuo in directione horizontali GF ad axem corporis normali mouetur = F. Atque ob rationes supra allegatas habebit F ad P constantem rationem pro omnibus corporibus ex materia aeque laeui confectis, si quidem eadem maneat plani OV asperitas.

§. 31. Cum igitur in his corporibus basis, qua plano insistunt secundum directionem motus OV non sit extensa, interuallum CA omnino euanescit, eritque momentum virium sollicitantium ad motum rotatorium generandum = F.GC: quod cum semper affirmatiuum habeat valorem, dummodo frictio F non prorsus sit nulla, apparet eiusmodi corpora motum progressiuum recipere non posse, quin simul in ipsis statim motus rotatorius generetur. Quare si corpori impressus fuerit motus progressiuus in directione GF a frictione statim generabitur motus rotatorius circa axem corporis in plagam DHC, qui ob vim rotatoriam perpetuo eandem, quamdiu scilicet frictio adest, continuo accelerabitur, donec vis rotatoria F.GC euanescat. Frictio autem tamdiu aliquem retinebit valorem, quamdiu corpus motu suo planum radet, hocque euenit, quamdiu puncti C celeritas rotatoria

ria circa axem minor est, quam celeritas motus progressiui. Quam primum autem inter hos duos motus aequalitas intercedit, tum frictio subito cessabit, motusque tam progressiuus, quam rotatorius manebit vniformis, nisi quatenus a resistentia aëris ac villositate plani diminuitur.

§. 32. Datur scilicet super plano aspero non obstante frictione motus vniformis mixtus ex progressiuo et rotatorio, quo cum corpus perpetuo sine vlla diminutione progredietur, si quidem nec resistentia aeris nec plani villositas impedimentum afferat. Existit autem iste motus vniformis tum cum frictio F penitus cessat, id quod euenit, quam primum punctum C planum radere desinit, provenit enim frictio a motu basis, qua corpus planum tangit, super plano OV. Quodsi ergo ponamus celeritatem motus progressiui in directione GF $= \sqrt{v}$ seu debitam altitudini v, tum nisi motus rotatorius adesset singula corporis puncta, ideoque etiam punctum C eadem celeritate $\sqrt{v}$ in directione CV moueretur. Sin autem ponamus motum rotatorium solum adesse, quo punctum C circa axem moueatur celeritate $= \sqrt{u}$ in plagam DHC, tum punctum C dum planum tangit mouebitur in directione CO celeritate $= \sqrt{u}$. Quare si vterque motus tum progressiuus quam rotatorius simul insit in corpore, tum puncti C celeritas in directione CV erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$: ex quo si fiat $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, motus puncti C super plano penitus cessabit, simulque frictio euanescet. Corpus ergo, postquam hunc motum fuerit adeptum, perpetuo aequabiliter progredi perget.

§. 33. Quoniam autem ad motum rotatorium definiendum nosse oportet momentum inertiae corporis reſpectu axis rotationis, pro quo hactenus ſcripſimus Pbb; conueniet pro corporibus ſaltem rotundis, qualia hic tractare ſtatuimus, iſtud momentum inertiae calculo inueſtigare. Sit igitur figura ACB, quae circa axem AB rotata praebeat ſolidum rotundum, cuius motum ſumus exploraturi; atque ſit medietas figurae BGC perfecte aequalis ac ſimilis alteri medietati AGC. Ponamus autem ſolidum ex materia vniformi conſtare, quo calculus facilior euadat; cadet ergo vtique centrum grauitatis corporis geniti ſponte in G. Ducatur ad axem applicata quaecunque PM ipſique proxima pm; ac vocetur $GP = x$; $PM = y$ erit $Pp = dx$. Sumatur in elemento $PMmp$ particula Xx, quae poſito $PX = z$ erit $= dx\,dz$. Ab hac particula per rotationem generabitur annulus, cuius maſſa erit $= \pi z\,dz\,dx$ denotante $1:\pi$ rationem radii ad peripheriam: et cum huius annuli ſingulae partes aequaliter ab axe diſtent, erit eius momentum inertiae $= \pi z^3 dz\,dx$, integretur vtraque formula, fiatque $z = y$; dabit $\frac{\pi yy\,dx}{2}$ maſſam elementi ſolidi ex elemento plano Pm orti, et $\frac{\pi y^4 dx}{4}$ eius momentum inertiae. Hinc cum pars CGB ſimilis ſit parti CGA erit volumen ſeu pondus corporis $P = \pi \int yy\,x$; et momentum inertiae $Pbb = \frac{\pi}{2}\int y^4\,dx$; ex quo fit $bb = \frac{\int y^4\,dx}{2\int yy\,dx}$ poſito poſt integrationem $x = GA$.

Fig. 5.

§. 34. Ponamus primo corpus eſſe cylindrum ex materia homogenea confectum, erit vbique $y = CG = c$, hincque $bb = \frac{\int c^4\,dx}{2\int cc\,dx} = \frac{cc}{2}$; ita vt momentum inertiae Pbb futurum ſit $= P.\frac{cc}{2} = \frac{1}{2}P.CG^2$. Sit porro corpus noſtrum rotundum globus homogeneus cuius radius CG $= c$,

$= c$, fiet $yy = cc - xx$, et $\int yy dx = ccx - \frac{1}{3} x^3$ et $\int y^4 dx = c^4 x - \frac{2}{3} cc x^3 + \frac{1}{5} x^5$. Ponatur $x = c$; fietque pro toto globo $\int yy dx = \frac{2}{3} c^3$ et $\int y^4 dx = \frac{8}{15} c^5$, ex quibus sequitur $bb = \frac{2}{5} cc$, ideoque momentum inertiae $Pbb = \frac{2}{5} Pcc = \frac{2}{5} P . CG^2$. Simili modo si corpus fuerit sphaeroides ellipticum, ex conuersione semiellipsis ACB circa axem AB genitum, ponatur semiaxis $AG = a$, et $CG = c$, erit $yy = cc - \frac{ccxx}{aa}$; et $y^4 = c^4 - \frac{2c^4xx}{aa} + \frac{c^4x^4}{a^4}$: vnde fit $\int yy dx = ccx - \frac{ccx^3}{3aa}$, et $\int y^4 dx = c^4 x - \frac{2c^4x^3}{3aa} + \frac{c^4x^5}{5a^4}$. Ponatur $x = AG = a$, fiet $\int yy dx = \frac{2}{3} acc$ et $\int y^4 dx = \frac{8}{15} ac^4$, ex quo sequitur $bb = \frac{2}{5} cc$, prorsus vti pro globo. Erit ergo pro omni sphaeroide elliptico homogeneo, quantuscunque fuerit axis AB, perpetuo momentum inertiae respectu axis AB $= \frac{2}{5} Pcc = \frac{2}{5} P . CG^2$.

§. 35 Ponamus iam eiusmodi solido rotundo in initio dum eius centrum grauitatis puncto O imminebat, impressum esse motum progressiuum in directione ad axem normali cum celeritate debita altitudini a simul vero, vt casum in latissimo sensu accipiamus, eidem corpori impressus sit motus rotatorius in plagam DHC, quo singulae peripheriae DHC puncta M circa axem circumferantur celeritate debita altitudini b. Hoc duplici motu impresso corpus iam confecerit spatium $OC = x$, sitque nunc celeritas progressiua, qua centrum grauitatis G in direcctione horizontali GF progreditur, debita altitudini v, celeritas vero, qua punctum M etiamnum circa axem rotatur, debita altitudini u: vtrumque scilicet motum seorsim consideramus ac metimur, perinde ac si alter non Fig. 6.

 adesset

adesset. Progrediatur iam puncto temporis corpus motu progressiuo per spatiolum $Gg = dx$, atque interea punctum M motu angulari feretur per arculum Mm, vt sit $Gg : Mm = \sqrt{v} : \sqrt{u}$, vnde oritur $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Puncti C vero celeritas in directione CV ex vtroque motu resultans erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$.

§. 36. Dum igitur corpus progreditur per spatiolum $Gg = dx$, punctum C super plano OV feretur per spatiolum $Cc = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})dx}{\sqrt{v}}$ intereaque tantum spatium Cc motu suo radet. Quodsi autem motus rotatorius abesset, tum punctum C raderet eodem tempusculo spatiolum dx hocque casu foret frictio, quam corpus sentiret $= F$, illa ipsa scilicet, quam experimenta monstrant. Quoniam igitur frictio oritur ab asperitate, quam corpus dato tempusculo radendo superare debet, manifestum est praesente casu, quo punctum C tantum per spatiolum $Cc = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})dx}{\sqrt{v}}$ planum subiectum OV radit, dum corpus ipsum per spatiolum dx progreditur, frictionem tanto minorem fore debere quam F, quanto spatiolum Cc minus est spatiolo dx erit ergo frictio, qua corpus retrahitur in directione CO non amplius F sed tantum $= \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})F}{\sqrt{v}}$. Ex quo perspicuum est, quod iam ante innuimus, si motus rotatorius $\sqrt{u}$ aequalis sit motui progressiuo $\sqrt{v}$, tum frictionem penitus cessare: atque si fuerit $\sqrt{u} > \sqrt{v}$, tum frictio etiam fiet negatiua, atque corpus in directione CV sollicitabit: ita vt haec expressio perpetuo effectum frictionis exhibeat, dummodo corpus non quiescat; quippe quo casu frictio semper est nulla.

§. 37.

§. 37. Cum igitur corpus a frictione in directione CO retrahatur vi $= \frac{(\sqrt{v}-\sqrt{u})F}{\sqrt{v}}$, ab hac vi motus progressiuus retardabitur vnde fiet $dv = \frac{-(\sqrt{v}-\sqrt{u})F\,dx}{P\sqrt{v}}$ Quod vero ad motum rotatorium attinet, is a frictione accelerabitur, eritque eius vis acceleratrix $= \frac{(\sqrt{v}-\sqrt{u})Fcc}{Pbb\sqrt{v}}$ denotante Pbb momentum inertiae corporis respectu axis, et posito $GC = c$. Reactio autem plani hoc casu ad motum rotatorium alterandum nihil confert, cum eius directio CG per ipsum centrum grauitatis G transeat. Quare dum punctum M per elementum $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ rotatur, eius motus rotatorius accelerabitur, fietque $du = \frac{(\sqrt{v}-\sqrt{u})Fcc\,dx\sqrt{u}}{Pbbv}$. Ex quibus duabus aequationibus corporis motus tum progressiuus quam rotatorius in quouis spatii OV loco poterit determinari. Primum autem perspicitur, si semel fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, tum vtrumque corporis motum perpetuo invariatum permanere; quare si initio fuerit $\sqrt{b} = \sqrt{a}$, tum corpus motu impresso sine vlla variatione in infinitum progredietur, neque in motu suo vllum decrementum patietur, nisi quatenus a resistentia aeris ac villositate plani retardatur; a quibus impedimentis adhuc mentem abstrahimus.

§. 38. Vt iam ex duabus inuentis aequationibus quicquam concludamus, ante omnia vnam ex tribus variabilibus v, u et x eliminari oportet, facillime autem elementum dx eliminatur. Fit autem ex prima aequatione $\frac{(\sqrt{v}-\sqrt{u})F\,dx}{P\sqrt{v}} = -dv$, ex altera autem $\frac{((\sqrt{v}-\sqrt{u})F\,dx}{P\sqrt{v}} = \frac{bb\,dv\sqrt{v}}{cc\sqrt{u}}$; vnde colligimus $\frac{dv}{\sqrt{v}} + \frac{bb\,du}{cc\sqrt{u}} = 0$, quae aequatio integrata dat $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}$ constante ad initium motus accommodata. Hinc erit $\sqrt{u} =$

cc

$\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}}{bb}$ et $\frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{\sqrt{v}}=\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{v}}$ Cum autem ex prima aequatione fit $\frac{F\,dx}{P}=\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$ fiet $\frac{F\,dx}{P}=\frac{bb\,dv\sqrt{v}}{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}$. Ponatur $\sqrt{v}=t$, et $cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}=m$ atque $cc+bb=n$, fiet $\frac{F\,dx}{P}=\frac{2\,bb\,tt\,dt}{m-nt}=\frac{-2\,bb\,t\,dt}{n}-\frac{2\,m\,bb\,dt}{nn}+\frac{2\,mm\,bb\,dt}{nn(m-nt)}$, cuius integrale est $\frac{Fx}{P}=C-\frac{bb\,tt}{n}-\frac{2\,m\,bb\,t}{nn}-\frac{2\,m\,m\,bb}{n^3}\,l(m-nt)$ restitutis ergo valoribus pro m, n, et t, et constante C ad casum accommodata erit $\frac{Fx}{P}=\frac{3\,cc\,bb\,a+b^4 a+2\,b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2}$ $-\frac{bbv}{cc+bb}-\frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})bb\sqrt{v}}{(cc+bb)^2}-\frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3}\,l\,\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}-bb\sqrt{a}}$

§. 39. Primum autem omnium intelligitur, si in loco quocunque cognitus fuerit corporis motus progressiuus seu celeritas $\sqrt{v}$, tum expedite assignari posse motum rotatorium seu celeritatem $\sqrt{u}$ atque vicissim simili modo ex cognito motu rotatorio indicabitur motus progressiuus. Ex aequatione enim $cc\sqrt{v}+bb\sqrt{u}=cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}$, si cognita fuerit celeritas progressiua $\sqrt{v}$, tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u}=\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}}{bb}$, et si cognita fuerit celeritas rotatoria $\sqrt{u}$, erit celeritas progressiua $\sqrt{v}=\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-bb\sqrt{u}}{cc}$. Quodsi ergo eueniat, vt motus progressiuus cesset, tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u}=\frac{cc\sqrt{b}+bb\sqrt{b}}{bb}$; et si celeritas rotatoria alicubi euanescat, tum motus progressiuus supererit celeritate $\sqrt{v}=\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc}$. Generatim autem perspicitur frictione non obstante, semper in motu corporis quantitatem quandam eiusdem magnitudinis constanter conseruari, quae est $cc\sqrt{v}+bb\sqrt{u}$; ex quo intelligitur corpus nunquam ad quietem a frictione redigi posse, nisi sit $cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}=0$.

§. 40.

§. 40. Quo autem facilius singula phaenomena, quae aequationes inuentae in se complectuntur, euoluamus, casus particulares perpendamus. Ponamus igitur corpori initio in O motum tantum progressiuum celeritate $\sqrt{a}$ esse impressum, ita vt sit $\sqrt{b} = 0$, fiet ergo vbique $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a}$; quae est vna aequatio; altera vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{(2cc+bb)bba}{(cc+bb)^2} - \frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2ccbb\sqrt{av}}{(cc+bb)^2} - \frac{2c^4 bba}{(cc+bb)^3} l \frac{(cc+bb)\sqrt{v} - cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}}$. Quoniam igitur logarithmi quantitatum negatiuarum sunt imaginarii, apparet semper fore $\sqrt{v} > \frac{cc\sqrt{a}}{cc+bb}$, neque ante, quam corpus emensum sit spatium infinitum fiet $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}}{cc+bb}$; tum vero fiet $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, corpusque motu aequabili feretur. Celeritas ergo progressiua $\sqrt{a}$ corporis continuo diminuitur, donec tandem spatio percurso infinito sui partem $\frac{bb\sqrt{a}}{cc+bb}$ amittat. Cylindrus igitur, in quo est $bb = \frac{1}{2}cc$, spatio absoluto infinito, retinebit celeritatem $= \frac{2}{3}\sqrt{a}$. Globus vero vel sphaeroides ellipticum in quo est $bb = \frac{2}{5}cc$, de motu suo progressiuo primum impresso $\sqrt{a}$ continuo amittet, donec post tempus infinitum retineat motum progressiuum celeritate $= \frac{5}{7}\sqrt{a}$, simulque tantum motum rotatorium adipiscatur.

§. 41. Ponamus iam corpori initio in O nullum motum progressiuum sed tantummodo motum rotatorium in plagam DHC cum celeritate $\sqrt{b}$ esse impressum, ita vt sit $\sqrt{a} = 0$. Generabitur igitur mox motus progressiuus, ac semper inter motum progressiuum et rotatorium haec intercedet ratio vt sit $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = bb\sqrt{b}$. Praeterea vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2b^4\sqrt{bv}}{(cc+bb)^2} - \frac{2b^6 b}{(cc+bb)^3} l \frac{bb\sqrt{b} - (cc+bb)\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}}$ ex qua aequatione apparet, si spatium x ponatur infininitum, esse oportere $\sqrt{v} = \frac{bb\sqrt{b}}{cc+bb}$, quo casu quoque fit

$\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Motus ergo progressiuus continuo crescit rotatorius vero decrescit, donec spatio emenso infinito inter se fiant aequales. Ad sensum autem ista aequalitas mox obtinetur, si enim ponamus $\sqrt{v} = \frac{99bb\sqrt{b}}{100(cc+bb)}$ fiet $\frac{Fx}{P} = 6,1501.\frac{b^6 b}{(cc+bb)^3}$: et si $bb = \frac{2}{5}cc$ vti in globo erit $\frac{Fx}{P} = 0,1434b$. Statim igitur ab initio motus tam prope ad vniformitatem redigitur, vt ne centessima quidem parte a perfecta vniformitate discrepet. Si enim $\frac{F}{P}$ sit $= \frac{1}{4}$, quae est frictio iam satis parua, tum antequam corpus spatium $x = b$ absoluit, celeritatem habebit ne centesima quidem parte a celeritate vniformi et vltima discrepantem.

§. 42. Si igitur corpori initio in O duplex motus nempe progressiuus celeritate $\sqrt{a}$ ac rotatorius celeritate $\sqrt{b}$ imprimatur, facile indicare poterimus, quomodo corpus in infinitum sit processurum, scilicet si fuerit $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, tum corpus motu vtroque vniformiter in infinitum progredietur. Sin autem sit $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, tum corporis motus progressiuus diminuetur, rotatorius vero augetur, donec emenso spatio infinito ambo inter se fiant aequales, eritque tum $\sqrt{v} = \sqrt{u} = \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. At si fuerit $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ tum celeritas motus progressiui crescet, rotatorius motus vero diminuetur, donec percurso spatio infinito vtriusque celeritas fit $= \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Ad hanc vero motus aequabilitatem corpus satis cito ita perueniet, vt sensibus descrimen percipere non valeamus. Cum enim spatium x fiat infinitum, si quantitas logarithmica $\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}-bb\sqrt{a}}$ euanescat, quia $l0 = -\infty$, ita

cum

cum logarithmus minimae fractionis ſit ſatis exiguus, intelligitur modicum ſpatium requiri, ad hoc, vt diſcrimen a motu perfecte vniformi prorſus ſit inſenſibile.

§. 43. Ponamus autem nunc corpori initio in O praeter motum progreſſiuum celeritate $\surd a$ imprimi motum rotatorium cum celeritate $\surd b$ in plagam oppoſitam HDC; atque in computo praecedente loco $+\surd b$ ſcribere debebimus $-\surd b$. Ac ſi in C ponamus motum rotatorium adhuc in eandem plagam HDC fieri, quoque $\surd u$ negatiue capiendum eſt. Pro hoc igitur caſu habetur prima aequatio haec: $cc\surd v - bb\surd u = cc\surd a - bb\surd b$: altera vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{2ccbba + b^4a - 2b^4\surd ab}{(cc+bb)^2} - \frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2(cc\surd a - bb\surd b)bb\surd v}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\surd a - bb\surd b)^2 bb}{(cc+bb)^3}\, l\, \frac{bb\surd b - cc\surd a + (cc+bb)\surd v}{bb\surd a + bb\surd b}$. Ex hoc apparet ſtatum vniformitatis, ad quem motus corporis ſe tandem componet fore $\surd v = \frac{cc\surd a - bb\surd b}{cc+bb}$ et $\surd u = -\frac{cc\surd a + bb\surd b}{cc+bb}$ nempe $\surd v = -\surd u$, vti ſtatus vniformitatis, quo frictio euaneſcit, requirit. Antequam igitur corpus ad iſtum ſtatum vniformitatis peruenire poteſt, alterutram celeritatem negatiuum fieri oportet, ideoque per ſtatum quietis tranſire.

§. 44. Ad caſus hos euoluendos, quibus alterutra celeritas euaneſcit, ponamus primo $cc\surd a > bb\surd b$; manebit igitur celeritas progreſſiua $\surd v$ perpetuo affirmatiua, attamen continuo diminuetur, donec poſt percurſum ſpatium infinitum fiat $\surd v = \frac{cc\surd a - bb\surd b}{cc+bb}$, tum vero erit $\surd u = -\frac{cc\surd a + bb\surd b}{cc+bb}$; ideoque rotatorius fit in ſenſum contrarium ei, quo initio rotabatur. Alicubi igitur neceſſe eſt vt motus rotatorius euaneſcat, vbi ſcilicet rotatio in plagam contrariam incipit. Ad hunc locum inueniendum ponamus $\surd u = 0$, eritque $\surd v = \frac{cc\surd a - bb\surd b}{cc}$, qui valor in altera aequatione fubftitutus dabit $\frac{Fx}{P} = \frac{2b^4(2cc+bb)\sqrt{ab}}{cc(cc+bb)^2} - \frac{b^6(3cc+bb)b}{c^4(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3}\, l\, \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc\sqrt{a}+cc\sqrt{b}}$: valor ergo ipfius x ex hac aequatione ortus oftendet locum vbi motus rotatorius corpori initio impreffus prorfus definit, atque vbi motus rotatorius in plagam oppofitam generari incipit, tum igitur corpus in infinitum progredietur, tandemque motum vniformem recipiet. At ex praecedentibus intelligitur non multo poft, quum $\sqrt{u}$ erat $=0$, motum ad fenfum fore vniformem.

§. 45. Cafus maxime notatu dignus eft, quo $bb\sqrt{b} > cc\sqrt{a}$, tum enim, antequam corpus ad ftatum aequabilitatis peruenire poteft, eius motus progreffiuus euanefcere, et in negatiuum transmutari debet. Progreditur fcilicet corpus in directione OC ad certum vsque terminum V, ex quo fubito reuertetur in viam VO, atque in hac directione VOv in infinitum abibit; confequeturque celeritatem negatiuam $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc+bb}$, celeritas autem rotatoria fpatio percurfo infinito erit $\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{cc+bb}$. Ad terminum ergo V determinandum, quousque corpus pertingit, antequam reuertitur, ponere debemus $\sqrt{v}=0$, fietque in eo loco celeritas rotatoria $\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{bb}$, atque $\frac{Fx}{P} = \frac{(3cc+bb)bba-2b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3}\, l\, \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}$. Si fiat $bb\sqrt{b}=cc\sqrt{a}$, qui cafus conftituit terminum huius phaenomeni paradoxi, quo corpus fuper plano libero ad certum vsque locum progreditur, indeque fubito regreditur: corpus vsque ad V, exiftente $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)}$ progreditur, antequam celeritatem fuam omnino perdit, tum vero fimul motum rotatorium amittet, atque in quiete perfiftet, qui eft cafus fingularis.

§. 46.

§. 46. Sit igitur $bb\sqrt{b} > cc\sqrt{a}$, ac ponatur $\frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}+bb\sqrt{b}} = \frac{1}{n}$, erit $\sqrt{b} = \frac{(ncc+bb)\sqrt{a}}{(n-1)bb}$ hincque $\frac{Fx}{P} = \frac{(n-3)bba}{(n-1)(cc+bb)} - \frac{2bba}{(n-1)^2(cc+bb)} l\frac{1}{n}$ seu $x = OV = \frac{(n-3)Pbba}{(n-1)(cc+bb)F} + \frac{2Pbba}{(n-1)^2(cc+bb)F} ln$. Sicque punctum V innotescit, quousque corpus motu suo pertingit, antequam reuertitur. Praecipui igitur casus ita se habebunt, ex quibus reliquos concludere licet

$n = 2$; $\sqrt{b} = \frac{(2cc+bb)\sqrt{a}}{bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,38629436$

$n = 3$; $\sqrt{b} = \frac{(3cc+bb)\sqrt{a}}{2bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,54930614$

$n = 4$; $\sqrt{b} = \frac{(4cc+bb)\sqrt{a}}{3bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,64139874$

$n = 5$; $\sqrt{b} = \frac{(5cc+bb)\sqrt{a}}{4bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,70117974$

$n = 6$; $\sqrt{b} = \frac{(6cc+bb)\sqrt{a}}{4bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,74334075$

$n = 7$; $\sqrt{b} = \frac{(7cc+bb)\sqrt{a}}{6bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc-bb)} \cdot 0,77477278$

$n = 8$; $\sqrt{b} = \frac{(8cc+bb)\sqrt{a}}{7bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,79916087$

$n = 9$; $\sqrt{b} = \frac{(9cc+bb)\sqrt{a}}{8bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,81866327$

$n = 10$; $\sqrt{b} = \frac{(10cc+bb)\sqrt{a}}{9bb}$; $OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,83463172$

§. 47. Phaenomenon hoc, quo corpus super plano horizontali propulsum ad certam tantum distantiam progreditur indeque subito quasi reflexum reuertitur, experimentis quoque demonstrari potest, dum corpori rotundo duplex motus progressiuus ac rotatorius hac lege imprimitur, vt motus rotatorius sit contrarius motui progressiuo ac celeritas rotatorii motus $\sqrt{b}$ maior sit quam $\frac{cc}{bb}\sqrt{a}$. Si nimirum globus ad huiusmodi experimenta adhibetur, ipsique in O imprimatur tum motus progressiuus in directione OV celeritate $= \sqrt{a}$, simul vero ipsi inducatur motus rotatorius in plagam $\delta O \phi$ celeritate $= \sqrt{b}$, tum

 ob

ob $\frac{ce}{bb} = \frac{5}{2}$ si fuerit $\sqrt{b} > \frac{5}{2}\sqrt{a}$, globus motu progressiuo ad certam tantum distantiam OV pertinget, hincque revertetur, et in directione Vv in infinitum progredietur, celeritatem tandem acquirens pro vtroque motu eandem atque $= \frac{2\sqrt{b} - 5\sqrt{a}}{7}$. Quodsi autem ponamus $\sqrt{b} = \frac{(5n+2)\sqrt{a}}{2(n-1)}$, erit interuallum OV, ad quod corpus pertingit, antequam reflectitur $= \frac{2Pa}{7F}\left(\frac{n-3}{n-1} + \frac{2ln}{(n-1)^2}\right)$, vbi pro ln logarithmum hyperbolicum numeri n accipi oportet.

§. 48. Quo facilius hae conclusiones cum experimentis comparari queant, diuersos casus numeri n, quos ante euoluimus, singulatim perpendamus, vbi notandum est fore proxime $\frac{2P}{7F} = 1$: quia vulgo $\frac{F}{P}$ solet esse fractio inter $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ contenta. Si porro k denotet spatium, quod globus motu impresso tempore vnius minuti secundi absoluere queat, in partibus millesimis pedis Renani expressum, erit $a = \frac{55}{62500}$. Sicque spatium OV quouis casu in data mensura exprimi poterit. Si ergo fuerit

$\sqrt{b} = \frac{12}{2}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,38629436$

$\sqrt{b} = \frac{17}{4}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 9,54930614$

$\sqrt{b} = \frac{22}{6}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,64139874$

$\sqrt{b} = \frac{27}{8}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,70117974$

$\sqrt{b} = \frac{32}{10}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,74334075$

etc.

Atque si numerus n fiat infinitus vt fiat

$\sqrt{b} = \frac{5}{2}\sqrt{a}$ erit $OV = \frac{2Pa}{7F}$ quod est interuallum maximum ad quod globus pertingere valet, antequam reuertatur.

DE

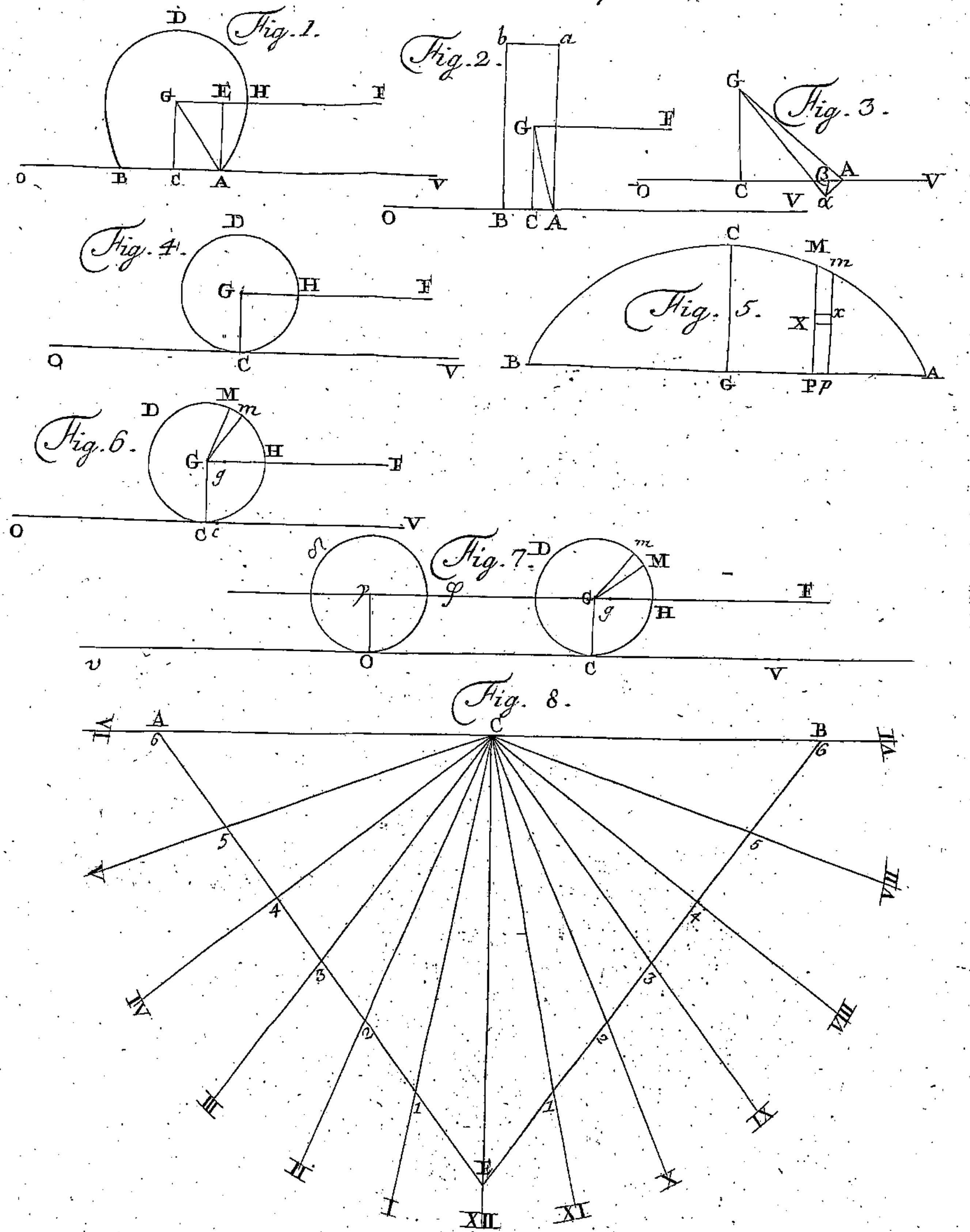
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII