



1751

De descensu corporum super plano inclinato aspero

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De descensu corporum super plano inclinato aspero" (1751). *Euler Archive - All Works*. 160.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/160>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE DESCENSU CORPORVM SVPER PLANO INCLINATO ASPERO

AVCTORE

L. Euler.

§. 1.

Eadem principia, ex quibus in superiori differtatione Tab. IV.
motum corporum super plano horizontali aspero, quatenus is a frictione turbatur, determinavi atque explicavi, multo latius patent, eorumque ope plurima alia phaenomena motuum corporum exponi et evolui possunt. In hac quidem differtatione constitui vsum istorum principiorum ante stabilitorum ostendere in motu corporum super plano inclinato descendentium definiendo, in quo negotio pariter frictionis rationem maxime spectari oportet. Singularia autem in hoc motu phaenomena deprehenduntur, quorum consensus cum conclusionibus ex memoratis principiis deductis vniuersae theoriae veritatem maxime corroborabit, quae confirmatio respectu eorum, qui nexum veritatum tam distincte intueri non valent, haud exigui momenti est existimanda. Etsi enim leges motus, vnde haec deducuntur, aequae sunt necessario verae, ac regulae quibus in arithmetica et geometria vtimur, tamen quemadmodum in arithmeticis operationibus probationes adhiberi solent, ita in mechanicis, conclusiones ex principiis deriuatas per experimenta comprobari conuenit.

§. 2. Phaenomena, quae in descensu corporum super plano inclinato occurrunt, potissimum huc redeunt,

B b 3

vt

vt alia corpora radendo, alia rotando descendere observemus, atque in motu rotatorio insignis deprehenditur differentia, prout cum eo motus progressivus vel magis vel minus permiscetur. Vti hoc argumentum de motu super plano inclinato ad mechanicam elementarem refertur, ita quoque in systemata Physicae est traductum, passimque regulas Auctores tradere sunt conati, ex quibus iudicare liceat, quibus casibus corpora cum radendo tum rotando sint descensura. Has autem regulas omnes Cel. Professor Krafft summa in experimentis capiendis solertia, erroris conuicit, neque ullam regulam tam pro motu radente, quam pro rotatorio veritati consentaneam deprehendit: hincque Vir praestantissimus ansam arripuit tam per plurima experimenta quam per ratiocinium veras naturae leges eruendi. Idem negotium Vir Cel. Daniel Bernoulli est aggressus, atque a priori solam ratiocini vim secutus easdem plane elicuit regulas, quas experientia suppeditauerat.

§. 3. Quoniam igitur video Viros acutissimos diuersas vias esse ingressos, quibus scopum intentum attigerint, non solum actum non agere arbitror, si meam methodum, qua idem negotium absolui, dilucide exposuero; sed etiam meo quidem iudicio perfectioni Theoriae maxime consulitur, quo plures viae ad eandem veritatem ducentes detegantur atque ad usum accommodentur. Etsi enim omnes ad eundem terminum collineant, tamen aliae aliis longius deducunt, atque ad alias veritates non minus cognitione dignas aditum patefaciunt. Quae cum ita sint, idem hoc argumentum a Viris nominatis iam pertractatum mea methodo expediam, ea scilicet
ipsa

ipsa, quam in praecedente dissertatione de motu corporum super plano horizontali aspero exposui. Omnino enim vis methodi in hoc consistit, ut quantum datae vires corpus sollicitantes in motu eius tam progressiuo quam rotatorio cum generando tum alterando valeant, assignare possimus. Has autem regulas, quas natura in huiusmodi motibus mixtis constantes obseruare debet, cum in superiori dissertatione fuse exposui, tum alibi summo rigore demonstratas dedi.

§. 4. Si descensum corporum super plano inclinato in genere contemplemur, primum omnium perspicemus motum rotatorium, si quem corpus in descensu super plano inclinato recipit, ab alia causa praeter frictionem proficisci non posse. Sublata enim frictione corpus plano inclinato impositum a solo suo pondere ad motum incitatur, cuius vis directio, cum per centrum grauitatis corporis transeat, alium motum nisi progressiuum in corpore generare non valet. Namque si vim grauitatis, qua corpus cietur, more consueto resoluamus in binas laterales, quarum alterius directio sit plano inclinato parallela, alterius vero ad id normalis; prior vis tota ad corpus mouendum impenditur, et quia per centrum grauitatis transit ad motum rotatorium generandum omnino erit inepta. Posterior autem vis tota ab immobilitate plani absorbetur, neque alium effectum producit, nisi appressionem corporis ad planum, vnde pariter nullus motus rotatorius resultare potest. Super huiusmodi igitur plano tam perfecte polito, ut omni frictione careat, etiam globus perfecte rotundus sine vilo motu rotatorio descendere deberet: quod non magis experientiae ad ver-

fari

fari putandum est, quam confectio eiusmodi plani laeuigatissimi, omni frictione carentis.

Fig. 7. §. 5. Consideremus ergo corpus ELMD plano inclinato immobili ita impositum, vt basi ED planum contingat, sit autem hoc corpus adhuc in quiete, in quo statu perpetuo esset permanfurum, nisi a vi externa, cuiusmodi est grauitas ad motum impelleretur. Accedat igitur grauitas, qua corpus in directione verticali GP deorsum sollicitatur; erit haec vis vtique aequalis ponderi corporis, quod sit $= P$, eiusque directio GP transibit per centrum grauitatis corporis G. Resoluatur haec vis P corpus in directione GP sollicitans in duas laterales, quarum alterius directio sit recta GH parallela plano AB, alterius vero GFN normalis ad AB, erit, vti constat, illa vis $\frac{AC}{AB} \cdot P$ haec vero $= \frac{BC}{AB} \cdot P$, ducta BC horizontali, ac AC verticali. Effectus ergo grauitatis in hoc consistet, vt corpus primum sollicitetur in directione GH a vi $= \frac{AC}{AB} \cdot P$, ac praeterea in directione GN a vi $= \frac{BC}{AB} \cdot P$. Harum virium si posterior $\frac{BC}{AB} \cdot P$ in directione ad planum AB normali agens sola adesset, tum vtique corpus in suo situ perpetuo quiesceret, si quidem recta GF intra basin DE, qua corpus planum contingit cadat, hocque casu effectus vis $\frac{BC}{AB} \cdot P$ in sola pressione consumetur, qua corpus in planum AB normaliter aget premendo vi $= \frac{BC}{AB} \cdot P$, idque actu ad motum cieret, nisi esset immobile: Sin autem normalis GF extra basin DE cadat, tum corpus in eam partem procumbet in quam recta GF cadit.

§. 6.

§. 6. Altera autem vis $\frac{AC}{AB}.P$, cuius directio est GH, quia planum AB eius actioni non obstat, corpus actu promouebit in directione GH eique motum progressiuum inducet. Quamdiu enim corpus est in quiete frictio plani, quantacunque ea sit, nullum effectum exerit, at statim ac corpus ELMD a vi $\frac{AC}{AB}.P$ moueri incipit, resistentia frictionis subito aderit, corpusque in directione opposita DA retrahet. Quamobrem nisi vis promouens $\frac{AC}{AB}.P$ maior fuerit, quam frictio, corpus in directione GH promoueri non poterit. Neque vero frictio soli motui progressiuo quem vis $\frac{AC}{AB}.P$ in corpore producere conatur, reluctatur sed etiam, quoniam eius directio DA non per centrum grauitatis corporis G transit, corpori motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis eius G transeuntem atque ad planum ACB normalem imprimere annitetur, actuque imprimet, nisi magnitudo basis DE, aliaeque circumstantiae post exponendae hunc effectum impendant. Quoniam enim corpus non est liberum, sed plano immobili AB incumbit, non sufficit ad motum rotatorium generandum vim rotatorium adesse, sed etiam tantam esse oportet, vt obstacula ab immobilitate plani AB oriunda superare valeat.

§. 7. Ante omnia igitur quantitatem frictionis, quam corpus; statim ac motu suo planum radere incipit, sentit, determinari oportet. In praecedente quidem dissertatione exposui, quemadmodum frictionem super plano horizontali aspero per experimenta explorare oporteat, neque autem hanc frictionem in praesenti casu adhibere licet, eo quod corpus non toto suo pondere pla-

no inclinato incumbit, hincque minorem frictionem patitur necesse est. Tam ratio enim quam experientia docet, quo maiori vi idem corpus contra idem planum asperum apprimatur, frictionem in eadem ratione augeri debere. Quare cum vis, qua corpus ad planum inclinatum apprimetur, constet sitque $= \frac{BC}{AB} \cdot P$, poterimus huius principii ope ex frictione corporis super plano AB secundum horizontem disposito, quantitatem frictionis inferre, quam idem corpus super eodem plano inclinato patietur. Sit igitur F frictio, quam planum AB horizontale factum corpori ELMD sibi imposito obicit, quod frictio horizontalis appellari solet: quoniam hoc casu pressio aequalis est ponderi toti P, erit frictio eiusdem corporis super plano inclinato $AB = \frac{BC}{AB} \cdot F$.

§. 8. Antequam inuestigemus vnde motus rotatorius proveniat, atque an corpus ELMD motum rotatorium sit concepturum? ponamus corpus hoc solo motu progressivo super plano inclinato descendere seu ad corporum classem pertinere in quibus vis frictionis nullum motum rotatorium producat, etsi ad huc ignoramus, in quo ratio huius rei sit posita. Primum igitur manifestum est hoc corpus ad motum incitari non posse, nisi vis vrgens $\frac{AC}{AB} \cdot P$ maior sit frictione $\frac{BC}{AB} \cdot F$, hoc est nisi sit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$.

Quoniam igitur $\frac{AC}{BC}$ exponit tangentem anguli elevationis plani ABC,posito sinu toto $= 1$, patet quamdiu anguli ABC tangens minor fuerit quam $\frac{F}{P}$, tum corpus perpetuo in quiete esse permanfurum: simulac vero inclinatio plani AB tanta statuatur, vt eius tangens excedat valorem $\frac{F}{P}$ corpus descendere incipere. Hinc deducitur

tur facilis modus frictionem horizontalem F per planum inclinatum explorandi, ab Illustri Bilfingero adhibitus: notetur enim angulus B , quo corpus tantum non super plano inclinato descendere incipit, quo per experimenta inuento erit frictio horizontalis $F = \frac{AC}{BC} \cdot P$.

§. 9. Ponamus itaque esse $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, atque corpus super plano inclinato actu descendet. Inceperit ergo corpus descensum suum ex puncto summo A , atque iam peruenit in M absoluto spatio $AM = x$. Ponatur eius celeritas in M debita altitudini v , et quia in directione MB sollicitatur $vi = \frac{AC}{AB} P$, in eadem vero retardatur $vi = \frac{BC}{AB} F$, erit vis acceleratrix corporis in directione $MB = \frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}$, propter massam corporis simulque pondus $= P$. Ex his dum corpus per elementum dx progreditur erit $dv = \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \right) dx$ hincque $v = \frac{(AC \cdot P - BC \cdot F) x}{AB \cdot P}$. Descendet igitur corpus frictione non obstante motu uniformiter accelerato, et aequalibus temporibus aequalia celeritatis incrementa capiet. Cui phaenomeno si experientia aduersari videatur, causa aberrationis aperte in resistentia aeris deprehenditur, quae cum sit quadrato celeritatis proportionalis uniformem accelerationem maxime perturbat. Sublata autem resistentia aeris, corpus absoluto spatio AB celeritatem acquireret tantam, quantam in vacuo, libero lapsu adipisceretur per altitudinem $= AC - BC \cdot \frac{F}{P}$.

§. 10. Videamus iam quid requiratur ad hoc, vt corpus motum progressiuum, quem determinauimus, purum prosequi possit neque rotationi seu prouolutioni sit obnoxium. Videmus autem a frictione oriri momentum

tendens ad corpus in sensum MDE conuertendum circa axem horizontalem per centrum grauitatis G transeuntem et ad planum ACBG normalem, hocque momentum esse $= \frac{BC}{AB} F \cdot GF$; quare corpus sine prouolutione progredietur secundam directionem GMH, si istud momentum impeditur, quominus in effectum deducatur. Ponamus per hoc momentum corpus iam ita procliue ad volvendum esse factum, vt soli baseos extremitati D innitatur, atque tantum non incipiat circa D circumagi. In hoc statu, tota pressio $\frac{BC}{AB} P$, quam corpus in planum AB exerit in vnicum punctum D colligetur, ita corpus in solo puncto D planum AB premat normaliter tota sua vi $\frac{BC}{AB} P$, et nisi planum resisteret, hac vi corpus actu ad motum impelleretur. Cum igitur plani firmitas hanc vim destruat, idem est ac si, sublato plano, corpus indirectione DQ ad AB normali vrgeretur vi $= \frac{BC}{AB} P$, cuius momentum respectu axis per centrum grauitatis G transeuntis est $= \frac{BC}{AB} P \cdot GQ = \frac{BC \cdot DF}{AB} P$, atque directe repugnat momento superiori ex frictione orto.

§. II. In hoc igitur corpus versabitur statu, vt a quatuor viribus sollicitetur, quarum prima in directione GH est $= \frac{AC}{AB} P$, secunda in directione GF est $= \frac{BC}{AB} P$, tertia in directione DA est $= \frac{BC}{AB} F$, et quarta in directione DQ est $= \frac{BC}{AB} P$. Binae priores quia earum directiones per centrum grauitatis transeunt ad motum rotatorium nihil conferunt; tertia autem conatur corpus in eam ipsam plagam rotare, in quam rotari debet, si
vllus

vllus motus rotatorius actu subfequitur, eiusque momentum est $= \frac{BC \cdot GF}{AB} \cdot F$. Quartae vis effectus huic motui rotatorio est contrarius, eiusque momentum est $= \frac{BC \cdot DF}{AB} \cdot P$. Quamobrem nifi illud momentum maius fit quam hoc, motus rotatorius nullus producet; hincque corpus motu radente feu motu progressiuo puro secundum directionem GH progredietur, si fuerit $\frac{BC \cdot DF}{AB} \cdot P > \frac{BC \cdot GF}{AB} \cdot F$ hoc est si fit $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$. Ducta autem ex centro grauitatis G ad basis extremitatem infimam D recta GD, erit $\frac{DF}{GF}$ tangens anguli DGF; quoties itaque tangens anguli DGF maior fuerit quam $\frac{F}{P}$ posito finu toto = 1, toties corpus motu progressiuo solo super plano inclinato descendet, dummodo fuerit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, alioquin enim corpus perpetuo in quiete persisteret.

§. 12. Facillime itaque iudicare poterimus, vtrum datum corpus super plano inclinato descensurum fit motu radente puro, an vero voluendo: ad hoc scilicet tantum attendere debemus, vtrum $\frac{DF}{GF}$ seu tangens anguli DGF maior fit an minor fractione $\frac{F}{P}$. Priori enim casu, quo $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$ corpus motu progressiuo puro descendet; casu que posteriore, quo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$ simul motum rotatorium recipiet. Quoniam in hoc criterio eleuatio plani inclinati seu angulus ABC non inesse deprehenditur, perspicuum est, quod corpus in vna plani eleuatione sine prouolutione descendat, idem in omni alia eleuatione quacunque sine prouolutione esse descensurum; hocque plurima experimenta a Cel. Professore Krafft instituta constanter comprobauerunt. Neque igitur in iudicio hac de-

re ferendo spectari oportet rectam verticalem, ex centro grauitatis corporis ductam, vtrum ea extra basin an intra cadat; vti aliquibus auctoribus placuit; sed ex solo angulo DGF totum iudicium est petendum.

§. 13 Si igitur frictio horizontalis F adaequet pondus corporis absolutum P, tum fit fractio $\frac{F}{P} = 1$ quae est tangens anguli 45° . Hoc igitur casu corpus ELMD motu progressiuo puro descendet, si angulus DGF maior fuerit semi recto. Si frictio horizontalis F fuerit ad pondus P vti 1 ad 2, ideoque $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, quae fractio est tangens anguli $26^\circ, 34'$; in hac ergo hypothese, nisi angulus DGF maior fuerit angulo $26^\circ, 34'$, corpus sine revolutione descendere nequit. Sin autem frictio horizontalis F subtripla ponderis P, quae ratio vulgo in lignis obseruari solet, erit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, et angulus tangentem habens $= \frac{1}{3}$ erit $= 18^\circ, 26'$; ex quo angulum DGF maiorem esse oportet $18^\circ, 26'$, si quidem corpus sine rotatione descendere debeat. Si planum AB data opera fuerit politum, pariter ac basis corporis DE tum fere deprehenditur $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, eritque adeo $\frac{F}{P}$ tangens anguli $14^\circ, 2'$, corpus igitur solo motu radente descendet si angulus DGF maior fuerit quam $14^\circ, 2'$. Ex his facile erit de parallelepipedo iudicare, vtrum motu radente, an volente super plano inclinato sit descensurum; et si figura fuerit minus regularis cognito loco centri grauitatis totum iudicium absoluetur.

§. 14 Operae autem praetium erit corpora prismatica, quorum sectiones ad axem normales sint polygona regularia seorsim perpendicularia; quae vel ex materia vni-formi consistent, vel saltem suum grauitatis centrum in medio

dio axis positum habeant. Huiusmodi igitur prisma ita imponatur plano inclinato, vt eius axis situm teneat horizontalem. Repraesentet figura *D H I K L E* eiusmodi Fig. 10. prisma, cuius singulae sectiones sint polygona regularia n laterum. Erit ergo angulus $DGF = \frac{180}{n}$ graduum, ex quo eiusmodi prisma sine prouolutione descendet si fuerit tangens anguli $\frac{180}{n}$ maior quam $\frac{F}{P}$. Casu itaque quo $\frac{F}{P} = 1$, prisma triangulare tantum sine rotatione descendet; quadrangulare enim iam in ipso termino prouolutionis versatur. Sin $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, numerus laterum minor esse debet quam 7, vt descensus sine prouolutione absoluitur. At si $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$ prisma polygonum 9 laterum adhuc radendo descendet, quae autem plura habent latera voluentur. Sit denique $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, atque ex superioribus concluditur, prismata polygona pauciorum quam 13 laterum omnia sine motu rotatorio esse descensura.

§. 15. Quoniam igitur inuenimus, quomodo corpus comparatum esse oporteat, vt motu progressiuo solo descensum absoluat; simul intelligimus, quibus casibus motus rotatorius corpori descendenti inferatur. Quoties Fig. 9. scilicet fractio $\frac{DF}{GF}$ minor fuerit fractione $\frac{F}{P}$, corpus descendere non poterit, quin simul voluatur. Quod si ergo perpendicularum GF , quod ex centro grauitatis G in planum inclinatum AB demittitur, in ipsam basis extremitatem deorsum spectantem D eadit, tum ob $DF=0$, corpus semper motum rotatorium recipiet, nisi ipsa frictio F fuerit nulla: quo tamen casu in ipso rotationis termino erit constitutum. Sin autem perpendicularum GF adeo extra basin infra D cadat, tum ob $\frac{DF}{GF}$ negatiuum
ide-

ideoque nihilo minus, corpus voluetur, etiamfi frictio omnino euanuerit. In hoc autem statu corpus ne quidem super plano horizontali consistere poterit, propterea quod perpendiculum ex centro grauitatis demissum extra basin cadit: sed statim prolabetur; quod quidem ex primis staticae principiis est manifestum. Super plano inclinato autem accedit momentum vis prosterntis $\frac{BC \cdot DF}{AB} P$, quod quia fit negatiuum, solum motum rotatorium generabit.

§. 16. Perspicuum autem est, nisi corpus fuerit rotundum, eiusque axis situm horizontalem teneat, motum rotatorium vehementer fore irregularem. Statim enim ac motus rotatorius incipit, tum corpus in solo puncto

Fig. 10. **D** plano innitetur, et circa hoc punctum conuertetur, donec alia facies puta **DH** plano inclinato applicuerit; hocque, quia cum impetu euenit, simul ex percussione mutatio in corporis motu orietur; rotatio vero circa angulum **D** subito sistetur, et corpus vel sine motu rotatorio moueri perget, vel circa sequentis basis extremitatem **H** motum rotatorium nanciscetur. Turbabitur ergo descensus huiusmodi corporum continuis saltibus, atque adeo percussionibus, ita vt motus nullo modo ad expressiones algebraicas vniformes reuocari queat; sed continuo dum alia basis plano inclinato se applicat, nouo calculo erit opus; haecque operatio eo erit difficilior, quo magis corpus a figura rotunda recedat.

Fig. 11. §. 17. Persequamur igitur praecipue corpora rotunda, in quibus motus rotatorius sine subitaneis alterationibus locum habere potest. Incumbat scilicet huiusmodi corpus rotundo ita plano inclinato **AB** vt eius axis sit ho-

horizontalis, atque ad planum verticale ACB normalis; huius porro corporis rotundi centrum grauitatis G positum in medio axis puncto, partesque corporis vtrinque sitae sint inter se aequales et similes; praeterea vero axis sit permanens, vt corpus circa eum libere rotari possit, quemadmodum in praecedente differtatione exposuimus. Exponat circulus LMD vel sectionem axi normalem per centrum grauitatis G factam, vel aliam quamcunque maximam, qua corpus planum contingit. Sit igitur huius sectionis radius $GD=c$, et pondus corporis maneat vt ante $=P$ eiusque momentum inertiae respectu axis sit $=Pbh$. Vidimus autem supra huius momenti valorem pro praecipuis speciebus corporum rotundorum: si nempe corpus fuerit cylindrus ex materia vniformi constans, tum erit $bh=\frac{1}{2}cc$; et si corpus fuerit vel globus, vel sphaeroides ellipticum pariter vniforme erit $bh=\frac{2}{5}cc$. Denique sit F frictio horizontalis huius corporis rotundi, quam sentiret super plano AB horizontali motu radente solo promotum.

§. 18. Inceperit hoc corpus descensum suum super plano inclinato AB ex A. vbi initio in quiete fuerit constitutum, perpendicularo GD in A incidente: absolueritque iam spatium $AD=x$. In statu hoc praesente duplicem habebit motum, progressiuum et rotatorium: sit igitur celeritas motus progressiui, qua centrum grauitatis G indirectione GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v : celeritas vero rotatoria, qua punctum quoduis peripheriae M circa axem G in plagam Mm D circumfertur, debita sit altitudini u . Dum igitur corpus motu progressiuo pergit per elementum spatii Gg

$= dx$, punctum M motu angulari in m perueniet, vt fit $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Celeritas autem puncti D, qua planum in directione DB radet, erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque interea radet per elementum $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) dx$. Quoniam igitur effectus frictionis, quae est $= \frac{BC}{AB} F$, dato tempusculo proportionalis est spatio, per quod frictio exercetur, erit frictionis vis, dum corpus per elementum dx progreditur, non $\frac{BC}{AB} F dx$ sed $= \frac{BC}{AB} (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) F dx$; qua corpus in directione DA retrahetur.

§. 19. A pondere autem corporis P corpus in directione GH sollicitatur vi $= \frac{AC}{AB} P$, ad planum vero apprimitur in directione GD vi $= \frac{BC}{AB} P$, quam planum ita absorbet, vt inde nulla vis ad corpus rotandum resultet eo quod interuallum DF euanescit. Accelerabitur igitur corpus in directione GH vi acceleratrice $\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{P}{P}$. Motus autem rotatorius a sola frictione accelerabitur, eritque vis acceleratrix, qua punctum M dum per Mm rotatur, $= \frac{BC}{AB} (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{Fcc}{Pbb}$. Ponatur anguli ABC sinus $= m$, cosinus $= n$, ita vt sit $mm + nn = 1$ posito sinu toto $= 1$; erit $\frac{AC}{AB} = m$ et $\frac{BC}{AB} = n$. Per effectum igitur sollicitationum momentaneorum habebimus has duas aequationes

$$dv = m dx - n (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{F dx}{P}$$

$$du = n (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{Fcc dx \sqrt{u}}{Pbb \sqrt{v}}$$

Ex quibus aequationibus integrando colligi poterit corporis in quouis loco tam motus rotatorius quam progressivus: integratio autem ita perfici debet vtposito $x = 0$ tam \sqrt{v} quam \sqrt{u} euanescat; quoniam corpus in A motum ex quiete inchoasse ponimus. §. 20.

§. 20. Quia tres habemus variables x , u , et v , earum ynam eliminari oportet: commodissime autem x eliminatur, quoniam in vtraque aequatione tantum dx inest. Prior autem aequatio dat $dx = \frac{Pdv\sqrt{v}}{mP\sqrt{v} - nF\sqrt{v} + nF\sqrt{u}}$; posterior vero aequatio dat $dx = \frac{Pbbvdu}{nFcc\sqrt{vu} - nFccu}$; unde inter v et u hanc acquirimus aequationem $\frac{dv}{v} = \frac{bbdu\sqrt{v}}{nFcc\sqrt{vu} - nFccu}$, quae posito $\frac{bb}{cc} = k$ abit in $nFdv\sqrt{vu} - nFudv = kmPvdu - knFvdu + knFdu\sqrt{vu}$. Cum haec aequatio sit homogenea ponamus $v = ttu$, ut sit $dv = ttdu + 2ttdt$, factaque substitutione habebimus istam aequationem: $nFut^2du + 2nFt^2u^2dt - nFttudu - 2Fnftuudt = kmPttuduk - nFttudu + knFttudu$, quae peracta variaribilium separatione transit in hanc:

$$\frac{2nFt^2dt - 2nFt^2dt}{kmPtt - knFtt + knFi - nFt^2 + nFtt} = \frac{du}{u}, \text{ siue diuisione per } t$$

$$\text{instituta in hanc } \frac{du}{u} = \frac{2nFtdt - 2nFtdt}{-nFt + (kmP - knF + nF)t + knF}$$

§. 21. Ad hanc aequationem integrandam ponamus breuitatis gratia $kmP - knF + nF = 2gnF$, ita ut sit $g = \frac{kmP - knF + nF}{2nF}$ eritque $\frac{du}{u} = \frac{2dt - 2tdt}{t - 2gt - k}$, quae ob $tt - 2gt - k = (t - g + \sqrt{gg + k})(t - g - \sqrt{gg + k})$, abit in $\frac{du}{u} = \frac{g - 1 - \sqrt{gg + k}}{\sqrt{gg + k}} dt - \frac{g + 1 - \sqrt{gg + k}}{\sqrt{gg + k}} dt$ cuius integrale est $lu = lC + \frac{g - 1 - \sqrt{gg + k}}{\sqrt{gg + k}} l(t - g + \sqrt{gg + k}) - \frac{g + 1 - \sqrt{gg + k}}{\sqrt{gg + k}} l(t - g - \sqrt{gg + k}) = lC + \frac{g - 1}{\sqrt{gg + k}} l \frac{t - g + \sqrt{gg + k}}{t - g + \sqrt{gg + k}} - l(tt - 2gt - k)$. Alogarithmis iam ad numeros concludendo erit $u(tt - 2gt - k) = C \frac{t - g + \sqrt{gg + k}}{t - g + \sqrt{gg + k}} \frac{g - 1}{\sqrt{gg + k}}$ alque loco t restituendo $\frac{v}{\sqrt{u}}$ erit $v - 2g\sqrt{vu} - ku = C \left(\frac{\sqrt{v} - g\sqrt{u} + \sqrt{u(gg + k)}}{\sqrt{v} - g\sqrt{u} - \sqrt{u(gg + k)}} \right)^{\frac{g - 1}{\sqrt{gg + k}}}$. Ad constantem C ad nostrum

strum casum accommodandam, ponamus $u=0$ quod initio motus euenit, eritque $v=C$; quoniam vero et hoc casu est $v=0$, erit $C=0$; ideoque $v=2g\sqrt{vu-ku}=0$. Ex qua aequatione oritur vel $\sqrt{v}=(g+\sqrt{gg+k})\sqrt{u}$ vel $\sqrt{v}=(g-\sqrt{gg+k})\sqrt{u}$. Manifestum autem est priorem tantum aequationem locum habere posse, quia in descensu vtraque celeritas \sqrt{v} et \sqrt{u} est affirmatiua.

§. 22. Cum igitur posito $g = \frac{k m P - k n P + n P}{2 n P} = \frac{m b b P - n b b P + n c c P}{2 n c c P}$ fit $\sqrt{v} = (g + \sqrt{gg+k})\sqrt{u}$: perpetuo in descensu corporis super plano AB motus progressiuus ad motum rotatorium eandem conseruabit rationem: eritque in singulis locis celeritas corporis progressiua \sqrt{v} ad celeritatem rotatoriam \sqrt{u} uti $g + \sqrt{gg+k}$ ad 1 seu uti k ad $\sqrt{gg+k}-g$, existente $k = \frac{b \cdot b}{c \cdot c}$. Si igitur fuerit $\frac{P}{P} = \frac{2}{2}$ pro cylindro ob $k = \frac{2}{2}$ erit $g = \frac{3m+n}{4n}$ et $\sqrt{gg+k} = \frac{\sqrt{(9mm+6mn+9nn)}}{4n}$; ideoque $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 3m+n + \sqrt{(9mm+6mn+9nn)} : 4n$. Eadem vero hypothese pro globo vel sphaeroide elliptico, ob $k = \frac{2}{2}$ erit $g = \frac{6m+3n}{10n}$ et $\sqrt{gg+k} = \frac{\sqrt{(36mm+36mn+49nn)}}{10n}$ hincque fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 6m+3n + \sqrt{(36mm+36mn+49nn)} : 10n$. Quod si ergo eleuatio plani fuerit angulus semirectus, erit $m=n$; hocque casu fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 20 : 10 = 2 : 1$. Globus igitur super plano ad angulum semirectum eleuato ita descendet, vt eius celeritas progressiua vbique duplo maior fit celeritate rotatoria, siquidem fit $\frac{P}{P} = \frac{2}{2}$.

§. 23. Perpetuo autem corporis rotundi super plano inclinato descendentis celeritas progressiua maior erit quam celeri-

celeritas rotatoria; eoque maior erit differentia, quo magis planum ad horizontem inclinatur, seu quo maior fiat angulus ABC. Nam si angulus B omnino euanescat seu planum AB fiat horizontale, erit $m=0$ et $n=1$, ideoque $g = \frac{1-k}{2}$, et $\sqrt{gg+k} = \frac{1+k}{2}$ ex quo oritur $\sqrt{v}:\sqrt{u}=1:1$, nempe hoc casu corpus perfecte quiescet, et vterque motus erit nullus. Si angulus B sit infinite parvus, ita vt sit m quantitas infinite parua manente $n=1$ erit $g = \frac{1-k}{2} + \frac{kmP}{2F}$ ideoque $\sqrt{gg+k} = \frac{1+k}{2} + \frac{(1-k)kmP}{2(1+k)F}$; et $g + \sqrt{gg+k} = 1 + \frac{kmP}{(1+k)F}$; quare fiet $\sqrt{v}:\sqrt{u} = 1 + \frac{kmP}{(1+k)F} : 1$. Quando autem planum AB in situm verticalem eleuatur, tum ob $n=0$ fit $g=\infty$, ideoque celeritas progressiua \sqrt{v} infinites erit celeritate rotatoria maior: hoc scilicet casu corpus solo motu progressiuo descendet. Nullo autem casu inter medio fieri potest $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, ad hoc enim requiritur vt sit $k = 1 - 2g$ siue $\frac{kmP}{nF} = 0$, quod nusquam nisi in situ horizontali euenit.

§. 24. Comparatis binis celeritatibus inter se poterimus quoque ad quoduis spatium absolutum $AD = x$ motum corporis assignare: Cum enim sit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{gg+k}-g}{k}$ fiet ex prima aequatione $d\sqrt{v} = m dx - n \left(\frac{g+k-\sqrt{gg+k}}{k} \right) \frac{F dx}{P}$ quae integrata dat $\sqrt{v} = mx - \frac{n(g+k-\sqrt{gg+k})F x}{kP} = \frac{x}{kP} (kmP - ngF - knF + nF\sqrt{gg+k})$ seu $v = \frac{x^2}{k^2 P^2} (kmP - ngF - knF + nF\sqrt{gg+k})^2$

cognita autem pro spatio percursu x celeritate progressiua \sqrt{v} , simul innotescit celeritas rotatoria \sqrt{u} ex aequatione $\sqrt{u} = \frac{\sqrt{gg+k}-g}{k} \sqrt{v} = \frac{\sqrt{(k^2 m^2 P^2 + 2(n-k)kmnFP + (1+k)^2 n^2 F^2)} - (1-k)nF - kmP}{2knF} \sqrt{v}$

Hinc perspicitur dum angulus B euanescit ob $m = 0$ fore $v = 0$, hocque casu solo corpus non descendet, nam quamprimum planum tantillum eleuatur, prodit $v = \frac{m x}{1+k}$. Hincque adeo constat frictione motuque rotatorio non obstante, corpus motu vniformiter accelerato esse descensurum.

§. 25. Determinato corporum rotundorum motu mixto ex progressiuo et rotatorio, quo super plano inclinato descendunt, pauca quaedam de motu corporum non rotundorum sed superficiebus planis terminatorum afferamus, non vt totum motum prosequamur, quod opus esset fere insuperabile, sed tantum vt initium motus cognoscamus. Quemadmodum enim corpora rotunda statim descendere incipiunt ac planum AB ad horizontem minimum inclinatur; corpora vero motus rotatorii expertia ante non descendunt, quam $\frac{AC}{BC}$ maior fiat quam $\frac{F}{P}$; ita in reliquis corporibus certus ac determinatus dabitur terminus eleuationis plani in quo corpus descendere incipiat. Sit igitur corpus DELK, quod initio plano inclinato AB ita infedit, vt eius facies DE plano esset applicata, iam autem percurso spatio $AD = x$, peruenerit in situm quem figura repraesentat. Scilicet basis DE, quae initio planum AB tangebatur, ab eo remota sit angulo ADE, qui angulus continuo fiet maior, donec alia superficies sequens DK plano applicetur, quod cum euenit motus rotatorius prior subito sistetur, corpusque vel motu radente solo progredietur, vel motum angularem circa sequentem angulum K concipiet. Per sequemur autem hic tantum motum rotatorium primum natum, qui eousque durat, quoad facies DK se plano applicet.

§. 26.

§. 26. Sit igitur angulus $ADE = s$, qui simul ostendit, quantum corpus iam ab initio motus circa axem horizontalem per centrum grauitatis G ductum sit circumactum: at demisso ex centro grauitatis G in basin DE perpendiculo GF sit angulus $DGF = f$. Quodsi iam ex G in planum AB demittatur perpendiculum Gf , erit angulus $FGf = s$, ideoque angulus $DGf = f - s$, ex quo erit $\frac{Df}{DG} = \sin. (f - s)$ et $\frac{Gf}{DG} = \cos. (f - s)$. Ponatur $DG = c$, sitque celeritas corporis progressiua, qua centrum grauitatis G in recta GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v , celeritas vero qua punctum D circa axem corporis per centrum grauitatis G ductum rotatur, debita altitudini u . Dum autem corpus hac celeritate rotatur centrum grauitatis G a plano AB recedere debet, hocque fiet celeritate $= \sin. (f - s) \sqrt{u}$; quem centri grauitatis motum seorsim contemplantur, cum eius motum progressiuum secundum directionem GH non afficiat. Erit igitur porro celeritas, qua punctum D versus B progreditur $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque si frictio horizontalis fuerit $= F$ erit frictio quam corpus in hoc statu sentiet $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{BC}{AB} \cdot F$, qua corpus in directione DA retrahetur. Ponamus autem vt ante $\frac{AC}{AB} = m$, et $\frac{BC}{AB} = n$, ita vt sit $mm + nn = 1$.

§. 27. Sit corporis massa seu pondus $= P$ eiusque momentum inertiae respectu axis G , circa quem gyra-
tur $= Phh$, erit vis qua corpus in directione GH vr-
getur $= mP$, vis aurem in directione normali $Gf = nP$.
Hinc itaque corpus in directione GH accelerabitur vi
acceleratrice $= m - n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{P}{P}$. Atque si simul vim
plani, quae corpus a plano repellit, quoniam punctum
D

D non intra planum AB ingredi potest, in computum ducamus, qua utique reactio plani in D, quae per se est $=nP$, augetur idemque ratiocinium adhibeamus quo vsi sumus in praecedente dissertatione, oportebit ibi loco F scribi $nF(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})$ et loco P, nP ; quibus surrogatis erit vis accelerans motum rotatorium in D $= \frac{n.DG(F(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})Gf - P.Df) - nc^2(F(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\text{cof.}(f-s) - P.\text{fin.}(f-s))}{P(bb + Dj^2) \quad P(bb + cc(\text{fin.}(f-s))^2)}$

Dum autem centrum grauitatis G in directione GH per spatium dx progreditur, punctum D motu angulari absoluet spatium $= \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ verum quia interea angulus ADE $= s$ elemento ds augetur: fiet $cds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$; ideoque $dx = \frac{cds\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$.

§. 28. Ex effectu iam sollicitationum momentaneorum cosequuntur binae sequentes aequationes.

$$dv = m dx - n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fdx}{P} = \frac{mcds\sqrt{v}}{\sqrt{u}} - \frac{nFcds\sqrt{v}}{P\sqrt{u}} + \frac{nFcds}{P}$$

$$du = \frac{nc^2(F(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\text{cof.}(f-s) - P.\text{fin.}(f-s))ds}{P(bb + cc(\text{fin.}(f-s))^2)}$$

Prior aequatio in hanc transmutatur $dv = m dx - \frac{nFdx}{P} + \frac{nFcds}{P}$ cuius integrale est $v = mx - \frac{nFx}{P} + \frac{nFcv}{P}$.

Haec autem aequationes etsi in se intractabiles videntur tamen pro ipso motus initio ex iis idoneae conclusiones formari poterunt. Ponamus ad hoc $v = \alpha s + \beta ss$ et $u = \gamma s + \delta ss$ erit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{\gamma + \delta s}{\alpha + \beta s}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)s}{2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}}$ erit porro ob s minimum $\text{cof.}(f-s) = \text{cof.}f + s\text{fin.}$ et $\text{fin.}(f-s) = \text{fin.}f - s\text{cof.}f$: quibus in prima aequatione substitutis fit $dv = \alpha ds + 2\beta s ds = cds(m - \frac{nF}{P})$

$(\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)s}{2\gamma\sqrt{\alpha\gamma}}) + \frac{nFc ds}{P}$ ex quo erit $\alpha = (m - \frac{nF}{P})$
 $\epsilon \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{nFc}{P}$. Posterior vero aequatio neglecto etiam s

dabit $\gamma ds = \frac{nc^2(F(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}) \cos. f - P. \sin. f) ds}{P(bb + cc(\sin. f)^2)}$ seu P

$bb\gamma + Pcc\gamma(\sin. f)^2 = nFc^2 \cos. f - nFc^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \cos. f - nPc^2 \sin. f.$

§. 29. Prior aequatio dat $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{\alpha P - nFc}{(mP - nF)c}$, seu $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{(mP - nF)c}{\alpha P - nFc}$ vnde fit $\gamma = \frac{(mP - nF)^2 cc \alpha}{(\alpha P - nFc)^2}$; qui valor in altera aequatione substitutus dabit

$$\frac{P(bb + cc(\sin. f)^2) \alpha cc (mP - nF)^2}{(\alpha P - nFc)^2} = nFc^2 \cos. f - nPc^2$$

$\sin. f - \frac{nFc^2(mP - nF) \cos. f}{\alpha P - nFc}$. Sit $\alpha P - nFc = z$ fiet

$$(bb + cc(\sin. f)^2)(mP - nF)^2 nFc + (bb + cc(\sin. f)^2)$$

$$(mP - nF)^2 z = nFc z z \cos. f - nPc z z \sin. f - nFcc$$

$$(mP - nF) z \cos. f. \text{ Ponatur porro } z = (mP - nF)t \text{ fiet } tt =$$

$$\frac{nFcc \cos. f + (bb + cc(\sin. f)^2)(mP - nF)t + (bb + cc(\sin. f)^2)nFc}{nFc \cos. f - nPc \sin. f}$$

Ex hac aequatione valor ipsius t inuentus praebabit va-

lorem ipsius z , hocque cognito innotescet α , indeque

porro β . Sin autem statim ponamus $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = r$, atque ϵ

$\sin. f = DF = p$, et $\cos. f = GF = q$, ita vt fit

$$pp + qq = cc, \text{ fiet primo initio } \frac{dv}{du} = rr \text{ hincque reperietur}$$

$$r = \frac{mP(bb + pp) - nF(bb + pp - cq) + \sqrt{(mF^2(bb + pp + cq)^2 - 2mnFP(bb + pp))}}{(bb + pp - cp) + m^2 P^2 (bb + pp)^2 - 2mnFP(bb + pp)cp}$$

$$2nFcq - 2nPcp$$

quamprimum ergo $(mP - 2nF)r + nF$ incipit maius

esse quam 0 , tum corpus descendere incipiet, et si fuerit

$Fqr - Ppr > Fq$ corpus quoque rotari incipiet. Est

autem $Fq > Pp$, quia alioquin corpus solo motu pro-

gressiuo descendit, quem casum ante euoluimus.

§. 30. Ex eadem aequatione pro v inuenta si ponatur $\frac{v}{r} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{b}} = \omega$ ita vt fit $dv = \frac{(mP - nF) dx + nF\omega dx}{F}$ ac primo quidem motus initio $du = \frac{nc^2(Fq - Fq\omega P p) ds}{F(bb + pp)}$; reperietur inuertendo $\omega =$

$$\frac{nF(bb + pp - cq) - mP(bb + pp) + \sqrt{(nF^2(bb + pp + cq)^2 - 2mnpF(bb + pp))}}{(bb + pp - cq) + m^2 P^2 (bb + pp)^2} - \frac{2mnpF(bb + pp)}{2nF(bb + pp)}$$

Ex hac aequatione intelligitur fore $dv = 0$, si fit $mq = np$ seu angulus $ABC = \text{ang. } DGF$, hoc ergo casu corpus quiescet, si quidem fuerit $\frac{p}{q} < \frac{F}{P}$. Statim vero ac angulus ABC incipiet superare angulum DGF , corpus motum adipiscetur progressuum simulque rotatorium ad progressuum datam rationem tenentem. Si enim ponatur $mq = np$ oritur $\omega = \frac{nF - mP}{nP}$, ex quo fit $dv = 0$ et $du = 0$. Quibus igitur casibus quoduis corpus, quo motu radente solo descendere nequit, motu mixto descendere incipiat, ex his facile colligitur.

§. 31. Omnis ergo quaestio de motu corporum super plano inclinato bipartita erit, primum enim quaeritur, vtrum corpus sit descensurum, an vero in quiete permanens, tum vero, si constet corpus descendere debere, formabitur altera quaestio, quomodo descensus fiat, vtrum motu radente puro, an motu mixto ex radente et volente. Hae igitur quaestiones pro quouis casu oblato facile decidentur. Impositum enim sit plano inclinato ABC corpus $DKLE$, cuius frictio horizontalis fit ad proprium pondus vt PR ad RQ , sicque constitatur angulus PQR cuius tangens erit $\frac{F}{P}$. Deinde ex corporis centro grauitatis G in basin DE , qua incumbit plano, demittatur perpendicularum GF , atque ab extremitate basis infima D ad G ducatur recta DG vt obtineatur

Fig. 13.
et 14.

tur angulus DGF. His duobus angulis PQR et DGF cognitis, qui ab elevatione plani inclinati nullo modo pendunt, duos casus contemplari oportet: qui sunt.

I. *Si angulus DGF maior fuerit angulo PQR*: corpus super plano inclinato quiescet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo PQR: quod si autem angulus ABC maior constituatur quam angulus PQR, tum corpus descendet motu progressiuo puro, neque vllum motum rotatorium recipiet.

II. *Si angulus DGF minor fuerit angulo PQR*, corpus tamdiu tantum super plano inclinato quiescet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo DGF: quamprimum vero angulus elevationis plani ABC excedet angulum DGE, tum corpus descendet idque motu mixto ex radente et voluente, nisi planum AB verticaliter erigatur, quo casu motus rotatorius prae progressiuo euanescit. In hoc ergo posteriori casu quo angulus DGF < PQR motus nullus subsequetur, nisi recta verticalis ex centro gravitatis G demissa extra basin ED cadat. Atque si in casu posteriori ista recta verticalis extra basin cadat, corpus tam radendo quam voluendo descendet. Secus autem res se habet in casu priori, tum enim corpus descendere potest, etiamsi recta verticalis ex corporis centro gravitatis G demissa non extra basin cadat: ac licet haec recta verticalis extra basin cadat, tamen nullus subsequetur motus rotatorius.

