



1750

Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

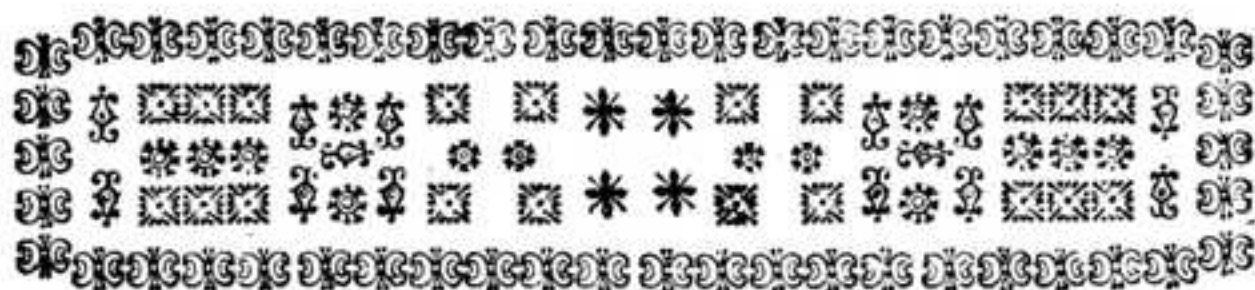
2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper" (1750). *Euler Archive - All Works*. 148.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/148>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



DEMONSTRATION
SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU
DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES
PEUVENT SE COUPER.

PAR M. EULER.



I.

Dans la Piece précédente j'ai rapporté sans démonstration cette proposition, que deux lignes courbes algebriques, dont l'une est de l'ordre m & l'autre de l'ordre n se peuvent couper en mn points. La verité de cette proposition est reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouër, qu'on n'en trouve nulle part une démonstration allés rigoureuse. Il y a des verites générales, que notre esprit est prêt d'embrasser aussitot qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers : & c'est parmi cette espece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la proposition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non seulement dans quelques, ou plusieurs cas, mais aussi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aisément, que toutes ces preuves infinies ne sont pas capables de mettre cette proposition à l'abri de toutes les objections, qu'un adverfaire peut former, & qu'il faut absolument une démonstration rigoureuse, pour le réduire au silence.

II. Avant

II. Avant que d'entreprendre la démonstration de cette proposition, il en faut bien fixer le sens, Premièrement il est à remarquer, que le nombre des interfections de deux lignes, dont l'une est de l'ordre m , l'autre de l'ordre n , n'est pas nécessairement $= mn$, mais qu'il peut fort souvent être plus petit. Ainsi il peut arriver, que deux lignes droites ne se coupent point du tout, lorsqu'elles sont parallèles : & qu'une ligne droite ne coupe une parabole que dans un point : & que deux sections coniques ne se coupent l'une l'autre qu'en deux points, ou point du tout. Ainsi le sens de notre proposition est, que le nombre des interfections ne peut jamais être plus grand que mn , quoiqu'il soit souvent plus petit; & alors on juge, ou que quelques interfections s'éloignent à l'infini, ou qu'elles deviennent imaginaires. De sorte qu'en contant les interfections à l'infini, & les imaginaires aussi bien que les réelles, on puisse dire, que le nombre des interfections est toujours $= mn$.

III. Il peut y avoir pourtant des cas, où le nombre des interfections est infini, si l'on veut regarder la coïncidence de deux lignes égales & semblables pour une infinité d'interfections. Ce cas arrivera donc, si les deux équations, qui expriment les deux lignes, sont les mêmes, ou si elles ont des facteurs égaux. Mais comme la coïncidence parfaite ne peut pas proprement être regardée comme une infinité d'interfections, puisque c'est plutôt un attouchement continu, le contenu de la proposition ne souffre aucune exception réelle de ce côté là; & si la question roule sur le nombre d'interfections de deux lignes courbes, on suppose toujours qu'elles ne sont ni coïncidentes, ni qu'elles ont des parties, dont l'une tombe parfaitement sur l'autre. Ainsi on pourra énoncer la proposition en question de cette manière : que deux lignes courbes, l'une de l'ordre m , & l'autre de l'ordre n , dont les équations ne sont, ni les mêmes, ni qu'elles ont aucun commun diviseur, ne se peuvent jamais couper en plus que mn points, bien que le nombre des interfections puisse fort souvent être plus petit.

IV. On reconnoitra aisément la vérité de cette proposition générale dans une infinité de cas differens, & qui pourroient même tenir

lieu d'une démonstration, si l'on ne se piquoit pas de n'avancer rien dans la Geometrie, qui ne soit muni d'une démonstration rigoureuse. Cependant comme ces preuves particulieres ne contribuent pas peu à connoître mieux la proposition même, & à en faire sentir l'importance, je commencerai par l'explication de ces preuves, avant que d'entreprendre la démonstration générale. Et d'abord la verité de cette proposition est reconnuë dans le cas, où l'une des deux lignes, qui se coupent, est droite, ou du premier ordre, c. à. d. si $m = 1$, car alors il est aisé de démontrer que le nombre des interfections d'une ligne de l'ordre n par une ligne droite est égal à n , ou plus petit. Car l'équation générale des lignes de l'ordre n étant :

$\alpha y^n + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta x^2) y^{n-2} + \dots = 0$

si de l'équation pour une ligne droite quelconque

$$a y + b x + c = 0$$

on substituë la valeur de $y = -\frac{b x + c}{a}$, on parviendra à une é-

quation, où l'inconnuë x ne monte, qu'à n dimensions. Donc puisque chaque interfection est marquée par une racine de x de cette équation, il est clair que le nombre des interfections est égal au nombre des racines de cette équation, & qu'il ne peut pas par conséquent être plus grand que n . De plus on verra que le nombre des interfections est $= n$, si toutes les racines sont réelles, & qu'il sera plus petit, si quelques unes de ces racines sont imaginaires. Or si les plus hautes dimensions de x se détruisent mutuellement, & que l'équation apres l'elimination de y se réduise à un degré inferieur, c'est une marque, que quelques points d'interfections s'éloignent à l'infini.

V. Soit $m = 2$, & que la ligne du second ordre soit composée de deux lignes droites, ce qui arrive, lorsque l'équation est résoluble en deux facteurs, comme

$$(a y + b x + c) (d y + e x + f) = 0$$

Or

Or l'autre ligne soit une courbe quelconque de l'ordre n , dont la nature soit exprimée par cette équation

$$a y^n + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta x^2) y^{n-2} + \&c. = 0$$

Dans ce cas il est clair, puisque cette ligne de l'ordre n ne peut être coupée par une ligne droite qu'en n points; que deux lignes droites qui sont regardées comme une seule ligne du second ordre, la pourront couper en $2n$ points, lorsque chacune la coupe en n points: ce qui est conforme à l'enoncé de la proposition, puisque $m n$ dans ce cas devient $= 2n$.

VI. Si l'une des deux lignes proposées est du troisieme ordre, mais qu'elle soit composée de trois lignes droites, l'autre demeurant une courbe quelconque de l'ordre n , il est clair que le nombre d'intersections sera $= 3n$, ou moindre, comme la proposition exige. Et il en sera de même d'une ligne de l'ordre quelconque m , si elle consiste de m lignes droites, ou si son équation est résoluble en autant d'équations simples de cette forme $a y + b x + c = 0$; car puisque chacune de ces lignes droites peut couper l'autre ligne proposée de l'ordre n en n points, le nombre de toutes les intersections pourra monter à $m n$, selon l'enoncé de la proposition. Et partant nous avons déjà une infinité de cas, où la vérité de cette proposition se trouve solidement établie. Mais dans tous ces cas l'une des deux lignes proposées, n'est pas véritablement une ligne courbe, mais plutôt un amas de plusieurs lignes droites, selon l'ordre auquel elle appartient.

VII. Mais il y a aussi une infinité de lignes courbes où la vérité éclate avec autant de clarté. Car soit l'une des deux lignes une parabole exprimée par l'équation: $y = a x x + b x + c$, & partant $m = 2$: l'autre courbe soit exprimée par l'équation générale de l'ordre n :

$$a y^n + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta x x) y^{n-2} + \&c. = a.$$

& il est evident que si l'on met ici par tout pour y sa valeur $a x x + b x + c$, cette équation montera au degré $2n$, & la racine x pourra avoir autant de racines, dont toutes les intersections seront indiquées:

donc il sera possible que la ligne de l'ordre n soit coupée par la parabole en $2n$ points : & quoique le nombre des interfections puisse souvent être plus petit, on voit pourtant, qu'il ne peut jamais être plus grand que $2n$.

VIII. La même chose paroît aussi, si l'une des deux lignes est une courbe parabolique d'une ordre quelconque :

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

Car si l'on met cette valeur pour y dans l'équation pour l'autre courbe de l'ordre n , on verra sans difficulté, que la lettre x obtiendra dans l'équation résultante $m n$ dimensions, qui marquent autant de racines & partant autant d'interfections, tout comme la proposition prononce. De là on conclura aussi, comme l'axe des deux courbes est arbitraire, quand même l'une des deux courbes ne seroit pas exprimée par une telle équation :

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

pourvu qu'en changeant d'axe, & même d'inclinaison entre les coordonnées, l'équation puisse être réduite à cette forme, le nombre des interfections sera également $= m n$, l'équation qui désigne les interfections montant toujours à ce degré, ou un inférieur, & jamais à un plus haut,

IX. Ces cas particuliers joints ensemble nous conduisent à un cas beaucoup plus général, où la vérité de la proposition se trouve confirmée. Car toutes les fois que l'équation de la première ligne, que je suppose de l'ordre m se peut résoudre en des facteurs, qui expriment, ou lignes droites, ou courbes paraboliques, cette équation étant :

$$(y - P) (y - Q) (y - R) (y - S) \&c. = 0$$

où $P, Q, R, S, \&c.$ soient des fonctions rationnelles de x , & le premier facteur $y - P = 0$ marque une ligne de l'ordre p , le second $y - Q = 0$ une de l'ordre q , le troisième une de l'ordre r , &c. de sorte que $p + q + r + s + \&c. = m$, cette ligne sera composée de toutes ces lignes droites ou courbes ensemble : & l'autre courbe, que je suppose être

être de l'ordre n , pourra être coupée de la partie de la première, qui est exprimée par le facteur $y - P = 0$, en $p n$ points, de la partie comprise en $y - Q = 0$ en $q n$ points, de la partie comprise en $y - R = 0$ en $r n$ points. &c. Et partant la ligne de l'ordre n pourra être coupée par toutes les parties de la ligne première de l'ordre m en $p n + q n + r n + s n + \&c.$ points, c'est à dire en $m n$ points, à cause de $p + q + r + s + \&c. = m$.

X. Quoique ces cas aillent à l'infini, on conviendra néanmoins, qu'il s'en faut encore beaucoup, que la vérité de la proposition soit démontrée dans toute son étendue. Et pour parvenir à une telle démonstration il faut prouver, que deux équations d'ordres quelconques étant proposées, comme :

$$\begin{aligned}
 & a y^m + (b + c x) y^{m-1} + (d + e x + f x x) y^{m-2} + \&c. = 0 \\
 & \alpha y^n + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta x x) y^{n-2} + \&c. = 0
 \end{aligned}$$

si l'on elimine l'une ou l'autre des deux variables x & y , l'autre ne monte après l'elimination qu'à $m n$ dimensions. Il est bien vrai qu'il seroit impossible d'achever en général cette élimination, pour faire voir actuellement, à combien de dimensions l'autre variable pourroit monter : & même dans la plupart des cas si l'on se sert des methodes ordinaires d'eliminer, on parviendra à une équation de plus de dimensions, que $m n$; de sorte qu'employant cette maniere, on devroit plutôt croire que la proposition fut fausse. Car quoique l'équation, à laquelle on arrive par ce chemin, ait des diviseurs, on a lieu de douter, si l'on peut negliger ces diviseurs, & s'ils ne renferment des racines, qui marquent des intersections.

XI. Pour faire sentir plus évidemment cette difficulté, je m'en vai éliminer suivant la maniere ordinaire la quantité y de ces deux équations :

I. $P y^3 + Q y^2 + R y + S = 0.$

II. $p y^3 + q y^2 + r y + s = 0.$

Où P, Q, R, S, p, q, r, s soient des fonctions quelconques de l'autre

tre quantité variable x . Multiplions la premiere par s , & la seconde par S , & la difference étant divisée par y donnera :

$$\text{III. } (P_s - pS) y^2 + (Q_s - qS) y + R_s - rS = 0.$$

Ensuite multiplions la premiere par p , & la seconde par P , & la difference donnera :

$$\text{IV. } (Q_p - qP) y^2 + (R_p - rP) y + Sp - sP = 0.$$

De la même maniere de ces deux équations du second degré nous tirerons deux du premier degré de y :

$$\text{V. } ((P_s - pS)(Sp - sP) - (Q_p - qP)(R_s - rS)) y + (Q_s - qS)(Sp - sP) - (R_p - rP)(R_s - rS) = 0.$$

$$\text{VI. } (Q_s - qS)(Q_p - qP) - (R_p - rP)(P_s - pS) y + (R_s - rS)(Q_p - qP) - (Sp - sP)(P_s - pS) = 0.$$

Et de là on tirera cette équation, ou la quantité y ne se trouve plus :

$$\begin{aligned} \text{VII. } & (P_s - pS)(Sp - sP)(R_s - rS)(Q_p - qP) - (P_s - pS)^2 (Sp - sP)^2 \\ & - (Q_p - qP)^2 (R_s - rS)^2 + (Q_p - qP)(sR - rS)(Sp - sP)(P_s - pS) = \\ & (Q_s - qS)^2 (Q_p - qP)(Sp - sP) - (Q_s - qS)(Q_p - qP)(R_p - rP)(R_s - rS) \\ & - (R_p - rP)(P_s - pS)(Q_s - qS)(Sp - sP) + (R_p - rP)^2 (P_s - pS)(R_s - rS) \end{aligned}$$

qui se change en celle-cy :

$$0 = (P_s - pS)^4 + 2(Q_p - qP)(R_s - rS)(P_s - pS)^2 - (Q_p - qP)(Q_s - qS)^2 (P_s - pS) + (Q_p - qP)^2 (R_s - rS)^2 + (R_p - rP)(Q_s - qS)(P_s - pS)^2 + (R_s - rS)(R_p - rP)^2 (P_s - pS) - (Q_p - qP)(Q_s - qS)(R_p - rP)(R_s - rS)$$

Mais les derniers termes qui ne contiennent pas le facteur $(P_s - pS)$ se reduisent à :

$$(Q_p - qP)(R_s - rS)((Q_p - qP)(R_s - rS) - (Q_s - qS)(R_p - rP))$$

ce qui est :

$$(Q_p - qP)(R_s - rS)(P_s - pS)(Q_r - qR)$$

& partant toute l'équation sera divisible par $P_s - pS$ étant :

$$(P_s - pS)^4 + 2(Q_p - qP)(R_s - rS)(P_s - pS)^2 - (Q_p - qP)(Q_s - qS)^2 (P_s - pS) + (Q_p - qP)^2 (R_s - rS)^2 + (R_p - rP)(Q_s - qS)(P_s - pS)^2 + (R_s - rS)(R_p - rP)^2 (P_s - pS) + (Q_r - qR)(R_s - rS)(P_s - pS)$$

XII. Il est affés clair, que dans ce cas le facteur $P_s - pS$ étant posé $= 0$, ne peut pas marquer une interfection, & que par conséquent les interfections des deux courbes proposées seront contenues dans cette équation :

$$\begin{aligned} & (P_s - pS)^3 + 2(Q_p - qP)(R_s - rS)(P_s - pS) - (Q_p - qP)(Q_s - qS)^2 \\ & + (R_p - rP)(Q_s - qS)(P_s - pS) + (R_s - rS)(R_p - rP)^2 \\ & + (Q_p - qP)(Q_r - qR)(R_s - rS) = 0. \end{aligned}$$

Donc dans le cas de deux lignes courbes du troisieme ordre, les coefficients

ficients P & p seront constans ; Q & q des fonctions de x d'une dimension comme $\alpha + \beta x$; R & r des fonctions de x de deux dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; & S & s des fonctions de x de trois dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Par conséquent les facteurs, qui se trouvent dans cette équation seront des fonctions de x :

$$\begin{array}{l|l} P s - p S \text{ de } 3 \text{ dim.} & Q s - q S \text{ de } 4 \text{ dim.} \\ Q p - q P \text{ d'une dim.} & Q r - q R \text{ de } 3 \text{ dim.} \\ R s - r S \text{ de } 5 \text{ dim.} & R p - r P \text{ de } 2 \text{ dim.} \end{array}$$

d'où il est évident, que l'équation, qui indique les intersections sera de 9 dimensions, & que par conséquent, en général deux lignes du 3^{me} ordre se peuvent couper en 9 points.

XIII. Ces mêmes équations choisies :

$$P y^3 + Q y^2 + R y + S = 0$$

$$p y^3 + q y^2 + r y + s = 0$$

peuvent aussi montrer le nombre des intersections dans une infinité d'autres cas. Car que la première équation exprime une ligne de l'ordre m , & la seconde équation une ligne de l'ordre n , ce qui arrivera, quand les coefficients seront des fonctions rationnelles entières de x : savoir

$$\begin{array}{l|l} P \text{ de } m - 3 \text{ dimens.} & p \text{ de } n - 3 \text{ dim.} \\ Q \text{ de } m - 2 \text{ dim.} & q \text{ de } n - 2 \text{ dim.} \\ R \text{ de } m - 1 \text{ dim.} & r \text{ de } n - 1 \text{ dim.} \\ S \text{ de } m \text{ dim.} & s \text{ de } n \text{ dim.} \end{array}$$

Alors les facteurs, qui constituent l'équation, qui ne contient plus la variable y , seront des fonctions de x :

$$\begin{array}{l|l} P s - p S \text{ de } m + n - 3 \text{ dim.} & R p - r P \text{ de } m + n - 4 \text{ dim.} \\ Q p - q P \text{ de } m + n - 5 & Q r - q R \text{ de } m + n - 3 \\ R s - r S \text{ de } m + n - 1 & Q s - q S \text{ de } m + n - 2 \end{array}$$

Et partant le nombre des intersections de ces deux courbes sera $= 3m + 3n - 9$; qui est toujours plus petit que mn si m & n sont plus grand que 3. Car soit : $m = 3 + \alpha$ & $n = 3 + \beta$, le nombre des intersections sera $= 9 + 3(\alpha + \beta)$ au lieu que $mn = 9 + 3(\alpha + \beta) +$

α β. Mais on voit bien que cette diminution du nombre des intersections vient de ce que les équations choisies n'expriment pas généralement les courbes des ordres m & n , mais seulement des espèces de ces ordres; d'où il n'est pas surprenant, que le nombre des intersections a été trouvé plus petit, que la proposition demande.

XIV. Comme l'élimination de l'inconnue y des deux équations cubiques, dont j'ai fait le calcul, a conduit à une équation trop haute, qui n'a été conduite au juste degré que par la division d'un facteur, dont on pouvoit bien voir qu'il ne renfermoit aucune intersection: ainsi dans les équations, où y a plus de dimension. on parviendra par l'élimination de y à une équation encore plus élevée, qui en vérité admettra un diviseur, mais cette méthode, qui seroit d'ailleurs impraticable dans de plus hautes équations, ne nous mettra pas en seureté, si l'on trouvera toujours un tel diviseur, qui ne regarde point les intersections, & encore moins, si après la division l'équation sera justement d'autant de dimensions, que la proposition générale marque; c. à d. si le nombre des dimensions ne sera jamais plus grand que $m n$, si les deux équation proposées ont été des ordres m & n . Cette circonstance prouve donc encore davantage la nécessité de démontrer la proposition générale dans toute son étendue, puisque sans cela on auroit bien de la raison de douter de sa vérité.

XV. C'est donc principalement de l'ouvrage de l'élimination, que dépend la démonstration de notre proposition générale, où il faut prendre garde, que par l'élimination on ne parviene à une équation, qui renferme des racines inutiles. Car deux équations étant proposées, dont chacune contient une même variable y , qui doit être éliminée, on voit aisément que l'élimination se peut faire d'une infinité de manières différentes, selon qu'on multiplie l'une & l'autre équation par une quantité arbitraire. Il s'agit donc de bien fixer l'idée de l'élimination, & de diriger cette opération, en sorte que l'équation, à laquelle on arrive, ne contienne d'autres racines, que telles, qui marquent des intersections, & qu'on puisse être assuré, qu'elle ne renferme des facteurs superflus, dont on pourroit douter s'ils indiquent des intersections, ou non?

XVI. Soient

XVI. Soient donc proposées deux équations quelconques :

$$y^m - P y^{m-1} + Q y^{m-2} - R y^{m-3} + S y^{m-4} + \&c. = 0$$

$$y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} - r y^{n-3} + s y^{n-4} + \&c. = 0$$

lesquelles il faille combiner, en sorte qu'il en résulte une équation qui ne contienne plus la lettre y . Or d'abord on voit que la valeur de y , qui résulte d'une de ces équations doit être égale à la valeur de y , qui résulte de l'autre. Donc si l'une & l'autre équation donne plusieurs valeurs de y , les deux équations proposées pourront subsister ensemble, si une valeur quelconque de y de l'une sera égale à une valeur quelconque de y de l'autre. Supposons que toutes les racines de la première équation soient :

$A, B, C, D, E, F, G \&c.$

& les racines de l'autre équation :

$a, b, c, d, e, f, g \&c.$

Cela posé, il est clair que chacune des deux équations proposées aura lieu dans tous les cas, qu'une des racines de la première équation sera égale à une des racines de l'autre.

XVII. Le nombre des racines $A, B, C, D \&c.$ de la première équation sera $= m$, & le nombre des racines de l'autre équation sera $= n$; donc les équations proposées pourront être représentées sous ces formes :

$$(y - A) (y - B) (y - C) (y - D) (y - E) \&c. = 0.$$

$$(y - a) (y - b) (y - c) (y - d) (y - e) \&c. = 0.$$

A présent il est clair que si $A = a$, la valeur $y = A = a$ satisfera à l'une & à l'autre équation; la même chose arrivera si $A = b$; ou $A = c$; ou $A = d$; ou $A = e$; &c. de plus la valeur $y = B$ satisfera à l'une & à l'autre, si $B = a$, ou $B = b$; ou $B = c$; ou $B = d$; ou $B = e$; &c. & la valeur $y = C$ satisfera à toutes les deux équations si $C = a$, ou $C = b$; ou $C = c$; ou $C = d$; ou $C = e$; &c. & ainsi des autres. Et il est évident, que toutes ces combinaisons ensemble représentent tous les cas possibles, où les deux équations proposées pourront subsister à la fois.



XVIII. Donc puisque l'équation, qu'on cherche par l'élimination, doit contenir tous les cas possibles, où la même valeur mise pour y satisfait à l'une & à l'autre équation à la fois, il est clair qu'elle doit contenir tous les cas marqués, & partant elle fera composée de tous ces facteurs

$$\left. \begin{array}{l} (A - a) (A - b) (A - c) (A - d) (A - e) \&c. \\ (B - a) (B - b) (B - c) (B - d) (B - e) \&c. \\ (C - a) (C - b) (C - c) (C - d) (C - e) \&c. \\ (D - a) (D - b) (D - c) (D - d) (D - e) \&c. \\ (E - a) (E - b) (E - c) (E - d) (E - e) \&c. \end{array} \right\} = 0$$

&c.

Donc, puisque la quantité y ne se trouve plus dans cette équation, elle sera la même qu'on cherche par l'élimination, & qui montre tous les cas, où les deux équations proposées peuvent avoir la même racine. Mais comme les racines $A, B, C, D \&c. a, b, c, d \&c.$ sont souvent impossibles d'être assignées, il s'agit d'exprimer cette équation par les coefficients $P, Q, R, S \&c. p, q, r, s \&c.$ dont le rapport aux racines est connu.

XIX. Parceque, comme nous avons vu, le produit de tous ces facteurs $(y - a) (y - b) (y - c) (y - d) (y - e) \&c.$ est égal à l'expression $y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} - r y^{n-3} + s y^{n-4} - \&c.$ si nous substituons successivement pour y les valeurs $A, B, C, D \&c.$ l'équation, qui doit résulter par l'élimination, sera composée de ces facteurs :

$$\left. \begin{array}{l} (A^n - p A^{n-1} + q A^{n-2} - r A^{n-3} + s A^{n-4} - \&c.) \\ (B^n - p B^{n-1} + q B^{n-2} - r B^{n-3} + s B^{n-4} - \&c.) \\ (C^n - p C^{n-1} + q C^{n-2} - r C^{n-3} + s C^{n-4} - \&c.) \\ (D^n - p D^{n-1} + q D^{n-2} - r D^{n-3} + s D^{n-4} - \&c.) \\ (E^n - p E^{n-1} + q E^{n-2} - r E^{n-3} + s E^{n-4} - \&c.) \end{array} \right\} = 0$$

&c.

où

où le nombre de ces facteurs est $= m$, selon le nombre des racines de la première équation. D'où est il évident aussi que changeant les équations, l'équation, qui résulte par l'élimination, peut être représentée aussi sous cette forme :

$$\left. \begin{aligned} (a^m - Pa^{m-1} + Qa^{m-2} - Ra^{m-3} + Sa^{m-4} - \&c.) \\ (b^m - Pb^{m-1} + Qb^{m-2} - Rb^{m-3} + Sb^{m-4} - \&c.) \\ (c^m - Pc^{m-1} + Qc^{m-2} - Rc^{m-3} + Sc^{m-4} - \&c.) \\ (d^m - Pd^{m-1} + Qd^{m-2} - Rd^{m-3} + Sd^{m-4} - \&c.) \\ (e^m - Pe^{m-1} + Qe^{m-2} - Re^{m-3} + Se^{m-4} - \&c.) \end{aligned} \right\} = a$$

&c.

où le nombre des facteurs est $= m$.

XX. Quoique les expressions des racines A, B, C, D &c. & a, b, c, d &c. soient pour la plupart fort irrationnelles, & souvent telles, qu'on ne les peut pas assigner; on fait pourtant que la somme de toutes les racines A, B, C, D &c. est $= P$

la somme des produits de deux à deux $= Q$

la somme des produits de trois à trois $= R$

la somme des produits de quatre à quatre $= S$

&c.

Et par ces valeurs P, Q, R, S &c. on est en état d'exprimer toutes les expressions, dans lesquelles entrent toutes les racines également, par des formules rationnelles composées de P, Q, R, S &c. Or on voit aisément, que si l'on multiplie les facteurs mentionnés actuellement, on parviendra toujours à de semblables expressions, qui renferment toutes les racines également, & au lieu desquelles on pourra mettre des fonctions rationnelles des coefficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c. Cela est aussi clair par la double forme de cette équation du §. précéd. Car s'il restoit dans la première forme quelque irrationalité, ce seroit une irrationalité de la première équation, mais

par la seconde forme nous voyons, qu'il n'y peut y avoir une irrationalité de la première équation. D'où il s'enfuit, que l'une & l'autre forme doit conduire à la même expression rationnelle, qui ne renferme que les coefficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c.

XXI. Si nous réfléchissons maintenant, que dans les équations proposées

$$y^m - P y^{m-1} + Q y^{m-2} - R y^{m-3} + S y^{m-4} - \&c. = 0$$

$$y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} - r y^{n-3} + s y^{n-4} - \&c. = 0$$

entant qu'elles expriment des lignes des ordres m & n les coefficients P & p marquent des fonctions du premier degré de x comme $\alpha + \beta x$; les coefficients Q & q des fonctions du second degré $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; les coefficients R & r des fonctions du troisième degré $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ &c. Donc la somme des racines A, B, C, D &c. ou a, b, c, d, e &c. sera exprimée par une fonction de x d'un degré. La somme des produits de deux à deux de ces racines par une fonction du second degré: la somme des produits de trois à trois racines par une fonction du troisième degré, & ainsi de suite. C'est pourquoi dans la composition de toutes ces racines dans la première forme (§. XVIII.) on pourra regarder chaque racine comme une fonction d'une dimension de x : & partant cette forme étant composée de $m n$ facteurs simples, elle montera à $m n$ dimensions de x & désignera par conséquent $m n$ intersections des deux courbes proposées.

XXII. S'il y a dans cette démonstration encore quelque obscurité, cela vient de sa grande universalité: & tous les doutes qu'on en pourroit avoir évanouiront entièrement, dèsqu'on fera l'application à quelques cas particuliers, d'où l'on reconnoitra d'abord, que tout ce que je viens d'avancer sur les dimensions de chaque partie, doit avoir lieu non seulement dans ces cas, mais aussi en général. Je commencerai par deux équations du second ordre, qui soient

$$\begin{array}{l}
 y y - P y + Q = 0 \\
 y y - p y + q = 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \text{Les racines} \\
 A, \quad B \\
 a, \quad b
 \end{array} \right.$$

donc

donc, puisque $m = 2$ & $n = 2$, l'équation, où l'élimination doit conduire, fera :

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = 0$$

qui étant développée, donnera :

$$A^2 B^2 - pAB(A+B) + q(A^2 + B^2) + ppAB - pq(A+B) + qq = 0$$

Or ayant $AB = Q$ & $A+B = P$, il fera $AA + BB = PP - 2Q$:

par conséquent l'équation cherchée fera :

$$Q^2 - pPQ + qPP - 2Qq + ppQ - pqQ + qq = 0$$

dont chaque terme fera de quatre dimensions de x pourvu que P & p renferment une dimension de x , & Q & q deux.

XXIII. Soient les deux équations proposées du troisieme ordre :

Les racines étant

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0 \quad \left| \quad A, B, C \quad \& \quad m = 3 \right.$$

$$y^3 - py^2 + qy - r = 0 \quad \left| \quad a, b, c \quad \& \quad n = 3 \right.$$

Donc l'équation cherchés par l'élimination de y fera :

$$(A^3 - pA^2 + qA - r)(B^3 - pB^2 + qB - r)(C^3 - pC^2 + qC - r) = 0$$

qui par le developpement deviendra :

$$\begin{aligned} & A^3 B^3 C^3 - pA^2 B^2 C^2 (AB + AC + BC) + qABC(A^2 B^2 + A^2 C^2 + B^2 C^2) - r(A^3 B^3 + A^3 C^3 + B^3 C^3) \\ & + p^2 A^2 B^2 C^2 (A + B + C) - pqABC(A^2 B + AB^2 + A^2 C + AC^2 + B^2 C + BC^2) - p^3 A^2 B^2 C^2 \\ & + q^2 ABC(A^2 + C^2 + C^2) + pr(A^3 B^2 + A^2 B^3 + A^3 C^2 + A^2 C^3 + B^3 C^2 + B^2 C^3) + q^3 ABC \\ & + r^2 (A^3 + B^3 + C^3) - qr(A^3 B + AB^3 + A^3 C + AC^3 + B^3 C + BC^3) - r^3 \\ & + p^2 qABC(AB + AC + BC) + pqr(A^2 B + AB^2 + A^2 C + AC^2 + B^2 C + BC^2) \\ & - p^2 r(A^2 B^2 + A^2 C^2 + B^2 C^2) - q^2 r(AB + AC + BC) \\ & - pqr^2 ABC(A + B + C) + qr^2 (A + B + C) \\ & - pr^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 0 \end{aligned}$$

où il faut remarquer que :

$$A + B + C = P$$

$$AB + AC + BC = Q$$

$$ABC = R$$

d'une dimension de x

de deux dimensions

de trois dimensions.

XXIV. Pour les autres expressions on les trouvera formées des coefficients P, Q, R en forte :

$$A^2 + B^2 + C^2 = P^2 - 2Q \text{ de 2 dimenf.}$$

$$A^2 B + AB^2 + A^2 C + AC^2 + B^2 C + BC^2 = PQ - 3R \text{ de 3 dimenf.}$$

$$A^3 + B^3$$

$$A^3 + B^3 + C^3 = P^3 - 3PQ + 3R \text{ de 3 dim.}$$

$$A^3B + AB^3 + A^3C + AC^3 + B^3C + BC^3 = P^2Q - PR - 2Q^2 \text{ de 4 dim.}$$

$$A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2 = Q^2 - 2PR \text{ de 4 dim.}$$

$$A^3B^2 + A^2B^3 + A^3C^2 + A^2C^3 + B^3C^2 + B^2C^3 = PQ^2 - 2P^2R - QR \text{ de 5 dim.}$$

$$A^3B^3 + A^3C^3 + B^3C^3 = Q^3 - 3PQR + 3RR \text{ de 6 dim.}$$

d'où l'on voit clairement, puisque $p, q, \& r$ sont des fonctions d'une, 2 & 3 dimensions de x , que tous les termes renferment le même nombre de dimensions de x , & que ce nombre est = 9, comme l'annoncé de la proposition exige. Or cette substitution donnera l'équation suivante par l'élimination de la variable y :

$$\begin{aligned} &+ R^3 - pQR^2 + qQ^2R - 2qPR^2 - rQ^3 + 3rPQR - 3rR^2 \\ &- r^3 + qr^2P - q^2rQ + 2pr^2Q + q^3R - 3pqrR + 3r^2R \\ &+ p^2PR^2 - pqPQR + 3pqRR + prPQ^2 - 2prP^2R - prQR + q^2P^2R \\ &- pr^2P^2 + pqrPQ - 3r^2PQ - pq^2PR + 2p^2rPR + qrPR - p^2rQ^2 \\ &\quad + rrP^3 - 2qqQR - qrP^2Q \\ &\quad - p^3R^2 + 2grQQ + ppqQR = 0. \end{aligned}$$

XXV, Cet exemple servira à nous convaincre en général, si les deux équations proposées sont;

$$y^m - P y^{m-1} + Q y^{m-2} - R y^{m-3} + S y^{m-4} \dots \pm V = 0$$

$$y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} - r y^{n-3} + s y^{n-4} \dots \pm v = 0$$

où $P \& p$ sont des fonctions d'une dimension de x ; $Q \& q$ de deux; $R \& r$ de trois &c. & les derniers termes V de m dimensions & v de n dimensions: que le premier terme, que l'équation du §. XIX. ré-

sultante par l'élimination fournit, sera $A^m B^n C^n D^n \&c. = V^n$ & partant de mn dimensions de x , & puisqu'on voit aussi clairement, que tous les autres termes pouvant être exprimés par les lettres $P, Q, R \&c.$ & $p, q, r \&c.$ doivent contenir le même nombre de dimensions de x , il est incontestablement démontré, que l'équation, à laquelle on parvient par l'élimination de la lettre y , sera de mn dimensions de x : tout comme la proposition générale avance.

SUITE