



1750

Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

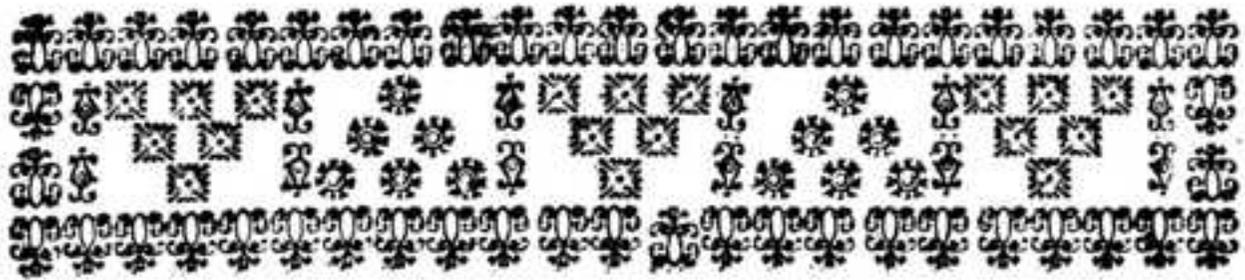
Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes" (1750). *Euler Archive - All Works*. 147.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/147>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



SUR UNE CONTRADICTION APPARENTE
DANS LA DOCTRINE DES LIGNES COURBES.

PAR M. EULER.



I.

On croit généralement que la Geometrie se distingue des autres sciences, parce que tout qu'on y avance est fondé sur des démonstrations les plus rigoureuses, & qu'il ne s'y trouve rien, qui puisse donner occasion à des controverses. En effet, puisque dans la Geometrie on n'admet d'autres propositions, que celles qui sont parfaitement démontrées, on ne sauroit comprendre, comment on pourroit tomber en dispute. Encore moins sera-t-il possible, que deux propositions solidement prouvées soient en contradiction entr'elles, vu que les verités, bien loin d'être contraires, se trouvent toujours dans la plus parfaite harmonie entr'elles. Et quoiqu'il arrive souvent dans les autres sciences, que deux verités se paroissent contredire, on est pourtant bien assuré, que ce n'est qu'une contradiction apparente, qui tire pour la plus part son origine des idées moins précises, ou du deffaut d'une connoissance suffisante des choses, auxquelles il faut avoir égard. Par cette raison on sera d'autant plus porté à croire, que dans la Geometrie de pareilles contradictions apparentes ne trouvent aucun lieu, puisqu'on est bien éloigné de se contenter des idées vagues, & non suffisamment déterminées.

Ee 2

II.

II. Néanmoins je m'en vai mettre devant les yeux deux propositions de la Geometrie, dont toutes les deux sont rigoureusement démontrées, qui paroissent conduire à une contradiction ouverte. Cette difficulté se rencontre dans la doctrine des lignes courbes, où pour les lignes courbes d'un certain ordre on fait combien de points il en faut pour la détermination. Ainsi une ligne du troisieme ordre peut être décrite par 9 points donnés, ou 9 points déterminent tellement une ligne du troisieme ordre, qu'il n'y a qu'elle seule qui puisse être tirée par ces neuf points. Mais il est aussi démontré que deux lignes du 3^{me} ordre se peuvent couper en neuf points; donc, il peut arriver que deux lignes du troisieme ordre passent par neuf points donnés, d'où il s'ensuit que neuf points ne sont pas suffisants pour déterminer une ligne du 3^{me} ordre, ce qui est contraire à ce qu'on vient d'avancer. Avant que d'expliquer & de développer cette contradiction apparente, il sera convenable de la mettre dans tout son jour, pour en mieux faire sentir l'importance. Pour cet effet je commencerai par l'explication de ces deux propositions mêmes, qui semblent renfermer cette contradiction.

Propof. 1.

III. Comme une ligne du premier ordre, ou une droite, se peut tirer par deux points donnés quelconques, ainsi une ligne du second ordre, ou section conique, sera tirée par 5 points, une ligne du troisieme ordre par 9 points, une du quatrieme ordre par 14 points, & en général une ligne de l'ordre indiqué par le nombre n , pourra être tirée par $\frac{n n + 3 n}{2}$ points. Car l'equation générale des lignes de cet ordre :

$$Ay^n + (B + Cx)y^{n-1} + (D + Ex + Fx^2)y^{n-2} + (G + Hx + Ix^2 + Kx^3)y^{n-3} + \&c. = 0$$

contient $\frac{n n + 3 n}{2} +$, coefficients arbitraires A, B, C, D, &c. Or

chaque point donné, par lequel la courbe doit passer, fournit des valeurs données pour les coordonnées x & y , qui étant substituées donneront
une

une équation. Donc $\frac{n n + 3 n}{2}$ points donnés conduisent à autant d'équations, par lesquelles tous les coefficients A, B, C, &c. seront déterminés, & par conséquent la courbe même. Car quoique les coefficients soient d'un de plus, que les équations tirées de $\frac{n n + 3 n}{2}$ points, puisqu'il ne s'agit ici que du rapport mutuel entre les coefficients, il n'en faut que $\frac{n n + 3 n}{2}$ équations pour déterminer tous ces rapports.

IV. Deux lignes droites, ou du premier ordre, ne peuvent se couper mutuellement qu'en un point; deux sections coniques, ou deux lignes du second ordre, ne peuvent se couper en plus qu'en quatre points. Deux lignes du troisième ordre se peuvent couper en 9 points; deux lignes du quatrième ordre en 16 points, & ainsi de suite. Et comme une ligne de l'ordre m , peut-être coupée, par une ligne droite en m points, par une ligne du second ordre en $2m$ points, par une ligne du troisième ordre en $3m$ points; ainsi on soutient en général qu'une ligne de l'ordre m peut-être coupée par une ligne de l'ordre n en $m n$ points. Cette proposition se doit entendre, que le nombre des intersections de deux lignes courbes, dont l'une est de l'ordre m , & l'autre de l'ordre n , ne peut être plus grand que $m n$, bien qu'il soit souvent plus petit: quelques points d'intersection ou s'éloignant à l'infini, ou devenant imaginaires. La démonstration, de cette proposition n'est pas si aisée, & j'en parlerai plus amplement dans la suite de ce discours. Propof. II.

V. La vérité de ces deux propositions étant reconnue, je rapporterai premièrement les conséquences qu'on en tire, & qui paroissent être contradictoires. Ensuite je ferai voir le défaut, qui se trouve dans ces conséquences, qui consiste dans une fort subtile précipitation du raisonnement, laquelle n'étant pas si facile à découvrir, nous doit rendre extrêmement circonspects, principalement dans les autres

sciences, afin que nous ne nous laissions pas séduire pas de semblables contradictions apparentes. Car, si dans la Geometrie nous sommes assujettis à des difficultés si remarquables, où il est pourtant permis de ramener toutes les idées presque au plus haut degré de justesse, combien plus pourrons-nous être embarrassés dans les autres sciences, où il n'est pas possible de parvenir à des idées assez précises, & où il est infiniment plus difficile de se garantir de pareilles fautes dans le raisonnement? Enfin je mettrai dans tout son jour la manière dont il faut entendre ces deux propositions, en y appliquant une certaine restriction nécessaire, laquelle étant remarquée, toutes les contradictions, quelques solides qu'elles aient pu paroître, évanouiront tout d'un coup, & on s'apercevra de la plus belle harmonie entre ces deux propositions.

I. Difficulté.

VI. La première contradiction semble d'abord se rencontrer dans la propriété des lignes du troisième ordre, selon qu'on a égard ou à l'une ou à l'autre des deux propositions générales rapportées. Voici les conséquences qu'on tire :

- I. *Puisqu'il faut, selon la première proposition, 9 points pour déterminer une ligne du troisième ordre ; par 9 points donnés on ne peut tirer qu'une ligne du troisième ordre.*
- II. *Or, selon la seconde proposition, deux lignes du troisième ordre se peuvent couper en 9 points ; donc on pourra marquer 9 points, par lesquels peuvent passer deux lignes du troisième ordre.*

Ces deux conséquences se contredisent ouvertement ; car dans la première on soutient, que 9 points étant donnés, on ne sauroit décrire qu'une ligne du troisième ordre qui passât par chacun de ces 9 points. Néanmoins la seconde conséquence nous fait voir, qu'il y a une infinité de cas, où par neuf points donnés on puisse faire passer deux lignes du troisième ordre.

II. Difficulté.

VII. La contradiction devient encore plus sensible dans les lignes du quatrième & de plus hauts ordres. Pour le quatrième ordre les conséquences contradictoires sont.

i. Par

I. *Par la premiere proposition, il faut 14 points pour déterminer une ligne du quatrieme ordre : Et partant 14 points étant donnés, on ne pourra decrire qu'une ligne de cet ordre, qui passe par tous ces points.*

II. *Mais la seconde proposition nous apprend, que deux lignes du quatrieme ordre se peuvent couper mutuellement en 16 points : par conséquent dans ces cas il sera possible de faire passer deux lignes du quatrieme ordre par 16 points donnés.*

La contradiction de ces deux conséquences est manifeste, car s'il n'étoit pas possible de decrire plus d'une ligne du quatrieme ordre par 14 points donnés ; à plus forte raison on ne sauroit decrire deux lignes de cet ordre, qui passassent toutes les deux par les mêmes 16 points :

VIII. Pour les lignes du cinquieme ordre, nos deux propositions générales nous fournissent ces deux conséquences encore plus III, Difficulté.
contraires entr'elles.

I. *La premiere proposition nous enseignant que 20 points fussent pour determiner une ligne du 5^{me} ordre, il s'en suit que par 20 points donnés on ne sauroit decrire qu'une seule ligne du 5^{me} ordre.*

II. *Or la seconde proposition nous assure, que deux lignes du 5^{me} ordre se peuvent couper mutuellement en 25 points. Donc il sera possible de marquer 25 points, par lesquels on sera en état de faire passer deux lignes du 5^{me} ordre.*

Il y a par conséquent des cas, ou 25 points donnés ne sont pas suffisants pour déterminer la ligne du 5^{me} ordre, & pourtant la premiere conséquence nous veut persuader qu'il ne faut que 20 points pour determiner une ligne du cinquieme ordre. Et il est clair que dans les courbes de plus hauts ordres, la difference entre les nombres des points, qui devroient suffire à la détermination, devient encore plus grande.

IX. Ces contradictions étant tout à fait manifestes, il faut absolument, ou que l'une des deux propositions générales soit fausse, ou que les conséquences, qu'on en a tirées, ne soient pas justes. Pour la seconde proposition, quoiqu'on n'en trouve nulle part, à ce que je sache,

fache, une démonstration affés rigoureuse, elle est pourtant très certaine, comme je le montrerai cy-apres ; & les conséquences, qui en ont été tirées, sont si claires qu'il ne reste pas le moindre doute de ce coté là. Car si par exemple deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, on sera absolument forcé d'accorder, qu'il est possible de marquer 16 points, par lesquels on puisse faire passer non seulement une, mais deux lignes du quatrieme ordre. Donc tant la seconde proposition, que les conséquences, qu'on en a tirées, étant tout à fait averées, nous sommes obligés de conclure, que c'est dans la premiere proposition, ou dans la maniere d'en tirer les conséquences marquées N^{ro}. I, qu'il faut chercher quelque paralogisme.

X. Les conséquences, qu'on a tirées de la premiere proposition, sont également bien fondées : car si 9 points déterminent une ligne du troisieme ordre, il s'ensuit, que par 9 points donnés on ne fauroit tirer qu'une ligne de cet ordre : de même que par deux points donnés on ne peut tirer qu'une ligne droite, & par cinq points donnés une seule section conique. Donc, si l'equation générale pour les lignes de l'ordre n est déterminée par $\frac{nn + 3n}{2}$ points, par lesquels elle doit passer, il ne sera pas possible, que plus d'une ligne de cet ordre passe par autant de points donnés, que cette formule $\frac{nn + 3n}{2}$ contient d'unités. Ce n'est pas donc dans les conséquences, qu'on vient de déduire de la premiere proposition, qu'il faut chercher la source de ces contradictions : & par conséquent il ne reste que la premiere proposition même, sur laquelle puisse tomber le soupçon d'un paralogisme, quelque fondée qu'elle paroisse d'ailleurs.

XI. En effet, en réfléchissant bien sur l'état de la premiere proposition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas, où $\frac{nn + 3n}{2}$ points donnés ne sont pas suffisans pour déterminer la courbe de l'ordre n , qui peut être tirée par ces points : ou, ce qui revient

vient au même que $\frac{n n + 3 n}{2}$ équations ne suffisent pas pour déterminer autant de coefficients, ou pour déterminer le rapport entre $\frac{n n + 3 n}{2} + 1$ coefficients : quoique ces coefficients entrent dans chacune des équations, & qu'ils n'y occupent qu'une seule dimension. D'ailleurs c'est le cas le plus simple, où plusieurs inconnuës doivent être déterminées par autant d'équations, puisque par l'élimination successive de ces quantités inconnuës, on demeure toujours au premier degré, de sorte qu'on ne trouve jamais pour chaque inconnuë plus d'une valeur, qui par conséquent sera toujours réelle. Circonstance qui paroît d'autant plus confirmer la vérité de la première proposition, & l'affranchir de toute exception.

XII. Cependant on ne doutera plus, qu'on ne doive appliquer à cette première proposition une certaine restriction, sans laquelle elle ne sauroit être vraie en général ; dès qu'on aura égard aux réflexions suivantes.

Premièrement donc je dis, pour commencer des cas les plus I. simples, qu'il peut arriver. que deux équations ne sont pas suffisantes pour déterminer les valeurs de deux inconnuës, quoique toutes les deux entrent dans chacune de ces deux équations, & n'y occupent qu'une seule dimension. Car on n'a qu'à regarder ces deux équations $3x - 2y = 5$ & $4y = 6x - 10$ & on verra d'abord, qu'il n'est pas possible d'en déterminer les deux inconnuës x & y : puisqu'en éliminant l'une x , l'autre s'en va d'elle même, & on obtient une équation identique, dont on n'est en état de déterminer rien. La raison de cet accident saute d'abord aux yeux, puisque la seconde équation se change en $6x - 4y = 10$, qui n'étant que la première $3x - 2y = 5$ doublée, n'en diffère point. C'est pourquoi, quand on dit que pour déterminer deux quantités inconnuës, il suffit d'avoir deux équations, il faut joindre à cette proposition cette restriction, que ces deux équations soient différentes entr'elles, ou que l'une ne soit pas déjà comprise dans l'autre & ce n'est qu'avec cette restriction, que la dite proposition puisse être admise.



II Réflexion.

XIII. En second lieu, on reconnoitra aisément, que trois équations peuvent ne suffire pas à déterminer trois quantités inconnues. Car s'il arrive le même cas, que dans la réflexion précédente, qu'une des trois équations soit comprise dans une des deux autres, auquel cas les trois équations ne valent que deux; alors il sera impossible d'en déterminer les trois inconnues. Comme si l'on avoit ces trois équations :

$$4x - 6y + 10z = 16$$

$$3x - 5y + 7z = 9$$

$$2x - 3y + 5z = 8$$

il est clair que la première ne différant de la 3^{me}, ne contribuë rien à la détermination des trois inconnues x, y & z . Mais il y a aussi des cas, où une des trois équations est contenuë dans les deux autres conjointement, comme si l'on avoit ces trois équations :

$$2x - 3y + 5z = 8$$

$$3x - 5y + 7z = 9$$

$$x - y + 3z = 7$$

où la somme de la première & troisieme produit la seconde. Dans ce cas on peut obmettre telle de ces trois équations qu'on voudra, & il est de même que s'il n'y avoit que deux équations. Ainsi quand on dit, que pour déterminer trois inconnues, il suffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette restriction, que ces trois équations différent tellement entr'elles, qu'aucune ne soit déjà comprise dans les autres.

III. Réflexion.

XIV. Il en est de même de quatre équations, qui ne sont suffisantes à déterminer quatre quantités inconnues, qu'au cas qu'elles soient toutes différentes entr'elles, ou qu'aucune ne soit déjà renfermée dans les autres. Car si une est déjà comprise dans les trois autres, ces quatre équations doivent être regardées, comme s'il n'y avoit que trois. Il peut même arriver, que deux équations soient déjà comprises dans les deux autres, & alors il n'y aura que deux équations, qui restent dans le calcul, & par conséquent deux inconnues reste-

ront



ront indéterminées. Comme si l'on étoit parvenu à ces quatre équations :

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$$

$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$

$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$

$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$$

elles ne vaudroient que deux. Car ayant tiré de la troisième la valeur de $x = -13y + 14z - 15v - 16$, & l'ayant substituée dans la

seconde pour avoir : $y = \frac{33z - 36v - 52}{29}$ & $x = \frac{23z + v33 + 212}{29}$, ces deux valeurs de x & y étant substituées

dans la première & quatrième équation conduiront à des équations identiques, de sorte que les quantités z & v resteront indéterminées.

XV. La même circonstance peut avoir lieu en quelque nom-

bre d'équations qu'on voudra, de sorte que quand même on auroit autant d'équations, qu'il y a d'inconnues, elles ne pourroient pas être suffisantes à les déterminer toutes. Car une des quantités inconnues restera indéterminée, si une des équations proposées est renfermée dans les autres. De plus, deux ou plusieurs quantités inconnues resteront indéterminées, s'il y a parmi les équations deux ou plusieurs, qui sont déjà renfermées dans les autres, & qui par conséquent ne contribuent rien à la détermination des inconnues. C'est pourquoi quand on soutient, que pour déterminer n quantités inconnues, il suffit d'avoir n équations, qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette restriction, que toutes les équations soient différentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit déjà renfermée dans les autres.

XVI. Après ces réflexions on conviendra aisément, que pour la détermination de la ligne courbe d'un certain degré le nombre des points, qui selon la première proposition paroît suffisant, peut en certains

certain cas devenir insuffisant, puisque cette détermination se réduit à la détermination d'un certain nombre de coefficients par autant d'équations, qui, à ce que nous venons de voir, peuvent quelquefois devenir insuffisantes à ce dessein. Pour connoître ces cas, je considérerai premièrement l'équation générale pour les lignes droites au du premier ordre: $\alpha y + \zeta x + \gamma = 0$, & soient proposées deux points, par lesquels doit passer une ligne de cet ordre. Ayant choisi une ligne droite quelconque pour $ax + e$, soient a & b les coordonnées pour premier point & c d , pour l'autre: ou pour le premier point on aura $x = a$; $y = b$; & pour l'autre $x = c$; $y = d$; d'où nous tirerons ces deux équations:

$$a b + \zeta a + \gamma = 0. \quad a d + \zeta c + \gamma = 0$$

de la différence desquelles nous aurons: $\frac{\alpha}{\zeta} = \frac{c - a}{b - d}$. Le rapport donc entre α & ζ sera toujours déterminé, à moins qu'il ne soit $c = a$ & $d = b$, auquel cas les deux points tombent l'un sur l'autre. Donc deux points déterminent une ligne droite, pourvu qu'ils ne soient pas coïncidents. Restriction qui s'entend de soi même dans la description de toutes les autres lignes courbes, parce que deux points qui tombent l'un sur l'autre, ne sont réputés que comme un seul.

XVII. L'équation générale pour les lignes du second degré étant:

$$\alpha x^2 + \zeta x y + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$$

que 5 points soient proposées, par lesquels on doit décrire une ligne du second ordre. Pour abrégier le calcul, qu'on prenne une ligne droite, qui passe par deux de ces points, pour axe, & une autre ligne tirée par un de ces deux points, & un troisième, représente l'inclinaison des appliquées, puisqu'il est indifférent de les supposer perpendiculaires à l'axe, ou non. Cela supposé, soient les valeurs de x & y pour ces 5 points donnés;

	I	II	III	IV	V
$x =$	0	a	0	c	e
$y =$	0	0	b	d	j

De là nous aurons les 5 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{I.} & \quad \zeta = 0 \\
 \text{II.} & \quad \alpha a^2 + \delta a + \zeta = 0 \\
 \text{III.} & \quad \gamma b^2 + \epsilon b + \zeta = 0 \\
 \text{IV.} & \quad \alpha c^2 + \xi c d + \gamma d^2 + \delta c + \epsilon d + \zeta = 0 \\
 \text{V.} & \quad \alpha e^2 + \xi e f + \gamma f^2 + \delta e + \epsilon f + \zeta = 0
 \end{aligned}$$

Des trois premières nous avons d'abord :

$$\zeta = 0; \delta = -\alpha a; \& \epsilon = -\gamma b.$$

ces valeurs étant substituées dans les deux dernières donnent ces équations

$$\alpha c^2 + \xi c d + \gamma d^2 - \alpha a c - \gamma b d = 0$$

$$\alpha e^2 + \xi e f + \gamma f^2 - \alpha a e - \gamma b f = 0$$

que détermineront la courbe cherchée, à moins qu'elles ne soient pas équivalentes. Or ce cas arrivera, quand les deux valeurs de ζ , qu'on en tire seront les mêmes

$$\xi = \frac{\alpha c(a-c) + \gamma d(b-d)}{cd} = \frac{\alpha e(a-c) + \gamma f(b-f)}{ef}$$

$$c. à. d. \text{ si } \frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f} \& \frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}; \text{ ou si}$$

$$a = \frac{cf - de}{f - d} \& b = \frac{de - cf}{e - c}. \text{ Par là on voit, que les cinq}$$

points donnés peuvent être tellement disposés, que la ligne du second ordre n'en est pas déterminée, & puisque un coefficient demeure indéterminé, il s'ensuit que par ces cinq points donnés on pourra faire passer une infinité de lignes du second ordre.

XVIII. Si nous considérons de plus près ce cas, où les cinq points donnés peuvent être insuffisants pour déterminer la ligne du second ordre, nous remarquerons aisément que cela arrive, quand quatre de ces cinq points donnés sont disposés dans une ligne droi-



te. Cela deviendra assez clair, si des équations $\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f}$ & $\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}$ nous tirons les valeurs $f = \frac{d(a-e)}{a-c} = b - \frac{e(b-d)}{c}$ ce qui donne $(c-e)(ad-ab+bc) = 0$. Lorsque $e=c$, il y aura aussi $f=d$, & deux points tombent l'un sur l'autre; lequel cas s'exclut de lui même. Soit donc $ad-ab+bc = 0$ ou $d = b - \frac{b-c}{a}$, & on trouvera $f = b - \frac{b-c}{c}$; on n'a à présent qu'à regarder ces formules géométriquement, pour s'assurer, que quatre points sont situés en ligne droite. Il n'auroit pas été difficile de deviner d'abord ce cas, car puisque le second ordre renferme aussi deux lignes droites situées d'une manière quelconque, on reconnoit, que si trois des cinq points donnés sont en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne du second ordre, & l'autre droite conjugée sera déterminée par les deux autres points. Donc, si quatre points sont situés en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne cherchée, mais l'autre partie, ou l'autre ligne droite passera par le cinquième point, & n'ayant pas d'autres déterminations, on la pourra tirer comme on voudra. Si tous les cinq points donnés étoient situés en ligne droite, cette même droite avec toute autre quelconque satisferoit à la question; donc, ce cas sera encore moins déterminé que le précédent.

XIX. L'équation générale pour les lignes du troisième ordre étant :

$$ax^3 + \beta x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \epsilon x^2 + \zeta xy + \eta y^2 + \theta x + \iota y + \kappa = 0$$

il faut définir neuf coefficients par le dixième, pour que l'équation ou la ligne de cet ordre soit déterminée. Donc si neuf points sont donnés, par lesquels cette ligne doit passer, chacun fournissant une équation, la ligne sera déterminée, pourvu que ces neuf équations soient toutes différentes entr'elles, & qu'il n'y en ait aucune, qui soit déjà

déjà comprise dans les autres. Or on comprendra aisément, qu'il y a une infinité de cas, où non seulement une, mais aussi deux, ou plusieurs des neuf équations peuvent déjà être renfermées dans les autres: & par conséquent dans ces cas la courbe ne sera point déterminée par les 9 points proposés, mais on y pourra encore ajouter le dixième, & même l'onzième, ou le douzième, afin que la détermination devienne complète. Il est cependant fort difficile de définir ces cas généralement, comme j'ai fait pour les lignes du second ordre, puisque le calcul à cause du grand nombre des points, & des coefficients, deviendrait trop compliqué. Néanmoins il n'est pas difficile de découvrir plusieurs cas particuliers, où ce défaut dans la détermination a lieu; desquels on ne conclurra pas difficilement, que le nombre de tels cas peut être infiniment grand, ce qui suffit pour mon dessein.

XX. On fait que l'équation générale du troisième ordre comprend, outre les lignes courbes de cet ordre; aussi ou trois lignes droites, ou une ligne droite jointe à une section conique. Donc si des neuf points donnés quatre sont disposés en ligne droite, puisque dans les lignes courbes de cet ordre il n'y a pas quatre points en ligne droite, cette ligne droite tirée par ces quatre points constituera une partie de la figure cherchée, & les cinq autres points détermineront l'autre partie, qui sera ou une section conique, ou deux droites; & ici peut déjà avoir lieu le cas précédent de marque de détermination. Mais supposons que 5 points soient situés en ligne droite, qui constituera une partie de la figure, & il est clair que les autres 4 points ne sont pas suffisants pour déterminer l'autre partie. Dans ce cas donc on aura besoin de dix points pour déterminer la figure: or si des points proposés il y en a 6 situés en ligne droite, il en faut encore 5, & partant en tout 11 points pour déterminer entièrement la question. Et de là il est évident, qu'il peut arriver, que quelque grand nombre que ce soit de points, ne soit pas suffisant pour la détermination d'une ligne du troisième ordre, qui doit passer par tous ces points.

XXI. Comme ces cas n'ont lieu que dans les lignes droites qui sont comprises dans l'équation générale des lignes du troisième ordre

ordre, on doutera peut être, si la même chose peut arriver dans les lignes courbes de troisieme ordre, ou si neuf points peuvent être insuffisants pour déterminer une ligne courbe propre à cet ordre. Pour prouver cela je ne considererai qu'un cas, où les neuf points donnés

sont disposés en quarré $a b c d e f g b i$: que l'axe $a \quad b \quad c$
 soit tiré par les points $d e f$, & $\dot{d} \quad \dot{e} \quad \dot{f}$
 que le point e soit le commencement $\dot{g} \quad \dot{b} \quad \dot{i}$
 des abscisses. Nommant l'intervalle de

deux points $= a$, nous aurons pour l'abscisse $x = 0$, trois valeurs pour l'appliquée y , qui sont 0 , $+ a$, & $- a$; & ces mêmes trois valeurs répondront aussi à l'abscisse $x = a$, & à $x = - a$. A ces valeurs répondra cette équation

$$m y (y y - a a) = n x (x x - a a)$$

où le rapport des coefficients m & n peut être quelconque, de sorte qu'une infinité de lignes du troisieme ordre peut être indiquée, qui passent toutes par ces points donnés.

XXII. Il est bien vrai que cette équation renferme aussi des lignes droites, & des sections coniques: car si $n = 0$, on aura trois lignes droites $a c$, $d f$ & $g i$: si $m = 0$, on aura trois lignes droites $a g$, $b b$ & $c i$: si $m = n$, on aura une droite $a e i$, & une ellipse tirée par les points $b c f d g b$: & si $m = - n$, la ligne du troisieme ordre sera composée d'une ligne droite $c e g$ & d'une ellipse qui passe par les points $a b d f b i$. Mais dans tous les autres rapports, qu'on pose entre m & n , on aura toujours une vraie ligne courbe, qui passe par les neuf points donnés. Et de là on comprendra aisément que toutes les fois, que deux lignes du troisieme ordre, se coupent en 9 points, ces points seront tels, qu'ils ne déterminent pas tout à fait la ligne du troisieme ordre, & que dans l'équation générale, après qu'on l'aura appliquée à ces neuf points, il restera un coefficient indéterminé. Dans ces cas donc, il n'y aura pas seulement deux lignes du troisieme ordre, mais une infinité de lignes de cet ordre, qui peuvent toutes être décrites par ces neuf points.

XXIII.

XXIII. Quand deux lignes du quatrieme ordre s'entrecourent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes différentes entr'elles, sont suffisants pour déterminer une ligne de cet ordre ; ces 16 points seront toujours tels, que trois ou plusieurs des équations, qui en résultent, sont déjà comprises dans les autres. De sorte que ces 16 points ne déterminent plus que s'il n'y en avoit que 13, ou 12, ou encore moins, & partant pour déterminer la courbe entierement, on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points. La même chose arrivera si deux lignes du cinquieme ordre se coupent l'une l'autre en 25 points, qui n'étant pas suffisants à déterminer la courbe, ils ne vaudront plus que 19, ou même 18, de sorte que 6 ou 7 points sont superflus : & partant ces 25 points seront toujours tellement disposés, que dès que la courbe passe par 19 de ces points, elle passera d'elle même aussi par les autres, ou il sera impossible qu'elle passe par 19 points, sans passer en même tems par tous les 25. Ces réflexions étant bien comprises, on résoudra aisément toutes les autres difficultés, qui pourroient naitre de la comparaison des deux propositions générales, que j'ai rapportées dans le commencement de ce discours.

